

Grundlagen der Elektrotechnik Teil B

Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Skript zur Vorlesung

Stand vom 29.06.2020

Universität Paderborn

Fachgebiet Leistungselektronik und
Elektrische Antriebstechnik

Vorwort

Dieses Skript fasst die wichtigsten Inhalte der Vorlesung *Grundlagen der Elektrotechnik, Teil B* stichwortartig zusammen. Dies soll kein umfassendes Lehrbuch sein, sondern als Orientierung und Gedächtnisstütze dienen. Ich empfehle den Studentinnen und Studenten, auf eigene Notizen nicht zu verzichten und darüber hinaus neben dem Skript auch andere Lehrbücher zu benutzen. Es vertieft das Verständnis, einen Sachverhalt von einem anderen Autor, in einer anderen Sichtweise, auch andere Schreibweisen kennen zu lernen. Selbst das Entdecken vermeintlicher oder tatsächlicher Widersprüche ist von Wert, wenn man gewillt ist, sich mit den Inhalten und Zusammenhängen auseinander zu setzen, und nicht nur eine „Formelsammlung“ erwartet.

Paderborn, im April 2008

Inhalt

1	<i>Elektrische Netzwerke mit diskreten Elementen</i>	1
1.1	Zweipole und Zählpeilsysteme	2
1.2	Kirchhoffsche Gesetze	3
1.3	Mehrpole	5
1.4	Ableitung der Kirchhoffschen Gesetze aus den allgemeinen Feldgleichungen	6
2	<i>Mittelwert und Effektivwert</i>	8
3	<i>Elementare Zweipole</i>	11
3.1	Bezeichnungen	11
3.2	Widerstand	11
3.3	Kondensator	13
3.4	Drossel oder Spule	17
4	<i>Nichtlineare Elemente</i>	22
4.1	Nichtlineare Drossel	22
4.2	Nichtlinearer Kondensator	24
5	<i>Leistung, Arbeit, Energie im elektrischen Netzwerk</i>	26
5.1	Arbeit und Energie	26
5.2	Energiebilanz im Netzwerk	26
6	<i>Gleichstromsteller</i>	28
6.1	Tiefsetzsteller	28
6.1.1	Prinzip	28
6.1.2	Mit Glättungskondensator	32
6.1.3	Realisierung	34
6.2	Hochsetzsteller	37
6.2.1	Prinzip	37
6.2.2	Mit Glättungskondensator	38
6.2.3	Realisierung	40
7	<i>Elementare Ausgleichsvorgänge</i>	41
7.1	RC-Glied	41
7.2	RL-Glied	44
7.3	Anfangs-Endwert-Darstellung für RC- und RL-Glieder	46
8	<i>Schwingkreise</i>	47
8.1	LC-Schwingkreis	47
8.2	RLC-Parallelschwingkreis	51
8.3	RLC-Reihenschwingkreis	57
8.4	Aufschaltung von sprungförmigen Größen auf RLC-Netzwerke	59
9	<i>Sinusförmige Vorgänge in linearen Netzwerken</i>	63
9.1	Sinusförmige Größen	63

9.2	Darstellung sinusförmiger Größen mit komplexen Zeigern	65
9.3	Sinusförmige Größen an Zweipolen	67
9.4	Impedanz und Admittanz	68
9.5	Impedanzen und Admittanzen der elementaren Zweipole	71
9.6	Reihenschaltung und Parallelschaltung	74
9.7	Impedanzen einiger Zweipole	77
9.8	Allgemeine Voraussetzungen für die Rechnung mit Impedanzen und Admittanzen	78
10	<i>Frequenzabhängige Darstellungen von Impedanzen und Admittanzen</i>	80
10.1	<i>RC-Parallelschaltung</i>	80
10.2	<i>RL-Reihenschaltung</i>	86
10.3	<i>RL-Parallelschaltung</i>	87
10.4	<i>RC-Reihenschaltung</i>	88
10.5	<i>RLC-Parallelschwingkreis</i>	89
10.6	<i>RLC-Reihenschwingkreis</i>	96
11	<i>Übertragungsfunktionen</i>	98
12	<i>Leistung bei sinusförmigen Vorgängen</i>	103
12.1	Momentan-, Wirk-, Blind- und Scheinleistung	103
12.2	Leistung und Energie	108
12.3	Wirk- und Blindstrom	110
12.4	Wirk- und Blindspannung	111
12.5	Wirk- und Blindleistungsbilanz sowie Gesamtenergie in Netzwerken	112
12.6	Tabelle für Schein-, Wirk- und Blindleistungen	113
13	<i>Reale Bauelemente (L, C, R)</i>	114
13.1	Normreihen	114
13.2	Kennwerte	114
13.3	Bauformen	116
13.3.1	Widerstände	116
13.3.2	Kondensatoren	117
13.3.3	Drosseln	119
13.4	Reales Verhalten	120
13.5	Verlustwinkel und Verlustfaktor	122
14	<i>Einfache magnetische Systeme mit Kern und Luftspalt</i>	124
14.1	Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises	124
14.2	Induktivität und Energie	126
14.3	Beziehungen zwischen Scheinleistung, Geometrie und Material	128
14.4	Kraftwirkung	133
14.5	Nichtlineare Magnetisierung	135
14.6	Hysterese	140
15	<i>Transformator</i>	143

15.1	Aufbau, Schaltzeichen	143
15.2	Idealisiertes Verhalten	144
15.3	Messwandler und Übertrager	148
15.3.1	Stromwandler	148
15.3.2	Spannungswandler	150
15.4	Modellierung von Transformatoren mit Streuung	152
15.5	Berücksichtigung der Verluste	158
15.6	Leerlaufverhalten	159
15.7	Kurzschluss und Verhalten bei Belastung	160
15.8	Zusammenhang zwischen Geometrie und Scheinleistung	162
16	<i>Gleichstrommotor</i>	<i>163</i>
16.1	Wirkprinzip	163
16.2	Aufbau	165
16.3	Kommutator und Ankerwicklungsschemata	166
16.4	Mathematische Modellierung	167
16.5	Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad	170
16.6	Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen	172
16.7	Fremderregter und permanent erregter Motor	173
16.8	Betrieb mit Vorwiderständen	178
16.9	Speisung durch einen Tiefsetzsteller	179
16.10	Nebenschlussmotor	180
16.11	Reihenschlussmotor	181
17	<i>Linearmotor</i>	<i>185</i>
17.1	Grundprinzip, einphasiger Linearmotor	185
17.2	Zweiphasiger Linearmotor	187
17.3	Drehstrom-Linearmotor	190
18	<i>Drehstrom</i>	<i>193</i>
18.1	Energieübertragung	193
18.2	Komplexe Zeiger der Sternschaltung	197
18.3	Komplexe Zeiger der Dreieckschaltung	200
18.4	Umrechnung zwischen Stern- und Dreieckschaltung	201
A	<i>Griechische Buchstaben</i>	<i>i</i>
B	<i>Literatur</i>	<i>ii</i>
C	<i>Kleines deutsch-englisches Glossar</i>	<i>iv</i>

1 Elektrische Netzwerke mit diskreten Elementen

Elektrische Netzwerke mit diskreten Elementen bestehen aus elektrischen Zwei- oder Mehrpolen, die durch ideal leitende Verbindungen miteinander verknüpft sind. Ein elektrisches Netzwerk ist eine Abstraktion, durch die vielfältige elektrotechnische Anordnungen und Systeme ganz unterschiedlicher Größenordnungen dargestellt werden können. Z.B.:

- Elektrische Energieverteilungsnetze (geometrische Ausdehnung: km bis zu einigen 1000 km)
- Elektronische Schaltungen (geometrische Ausdehnung: einige μm (IC) bis zu einigen cm)

Ein elektrisches Netzwerk besteht aus zwei unterschiedlichen Arten von Strukturelementen:

- Zwei- oder Mehrpole: Elemente mit zwei oder mehreren elektrischen Anschlüssen, den Polen oder den Klemmen.
- Ideal leitende Verbindungen, die die Anschlüsse der Zwei- oder Mehrpole miteinander verbinden.

Zwei- oder Mehrpole können ganz unterschiedlicher Art und auch gänzlich unterschiedlicher Komplexität in ihrem Innern sein. Beispiele:

Zweipole:

- Widerstand
- Kondensator
- Drossel
- Haartrockner (schutzisoliert, ohne Schutzleiter)
- Batterie

Dreipole:

- Transistor
- Spartransformator
- Kühlschranks (mit Schutzleiter)

Vierpole:

- Doppelleitung (zwei Enden mit je zwei Anschlüssen)
- Transformator mit zwei Wicklungen

Fünfpole:

- Elektrischer Herd (Drehstromanschluss mit Neutral- und Schutzleiter)

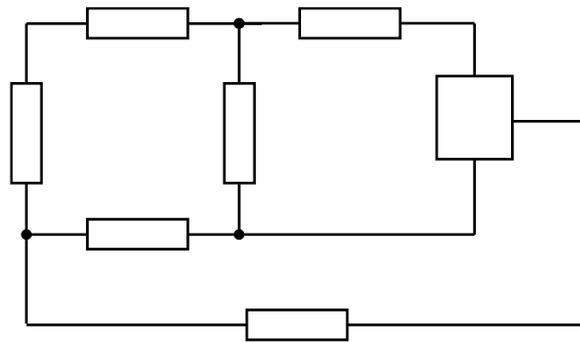


Bild 1-1: Beispiel eines Netzwerks mit Zweipolen und Dreipol

Wir verwenden den Begriff *elektrisches Netzwerk* in zwei unterschiedlichen Zusammenhängen:

1. Das Netzwerk als *Schaltplan* oder *Schalbild*: Das Netzwerk gibt an, wie eine reale Schaltung aufgebaut ist, welche Komponenten es beinhaltet und wie diese Komponenten untereinander verbunden sind.
2. Das Netzwerk gibt an, wie sich ein System bezüglich äußerer Einflussgrößen verhält, ohne dass es tatsächlich im Innern so beschaffen wäre, wie es das Netzwerk beschreibt. Derartige Netzwerke bezeichnen wir als *Modelle* oder *Ersatzschaltbilder*. Beispiele: Ersatzschaltbilder eines Transistors, eines Motors, eines Transformators, einer Batterie oder einer langen elektrischen Leitung.

1.1 Zweipole und Zählpfeilsysteme

Die Wahl der Zählrichtungen von Strom und Spannung ist frei. Bei der Berechnung elektrischer Netzwerke wird häufig versucht, die Zählrichtungen so einzuführen, dass die Ströme und Spannungen positiv sind. Das ist für von vornherein bekannte Größen durchaus sinnvoll. Für unbekannte Größen sollte die Zählrichtung zwanglos festgelegt werden. Es wird dadurch nicht ausgedrückt, dass der Strom tatsächlich in der Pfeilrichtung fließt bzw. eine positive Spannung in Pfeilrichtung anliegt. Die tatsächliche Richtung wird dann durch das Vorzeichen der Spannung ausgedrückt.

Für eine vorzeichengerechte Beschreibung von Strömen und Spannungen ist also eine Bemaßung mit Zählpfeilen zwingend notwendig.

Für *Zweipole* gibt es zwei wichtige Konventionen der Zählrichtungen:

- *Verbraucher-Zählpfeil-System* (Strom und Spannung werden *gleichsinnig* gezählt)

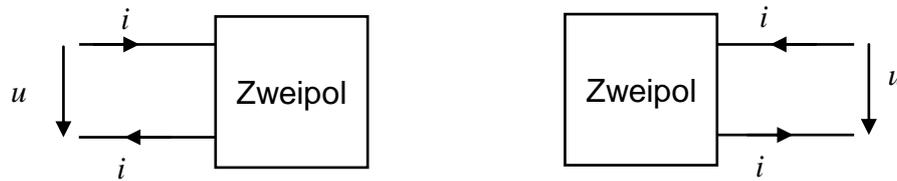


Bild 1-2: Verbraucher-Zählpfeil-System

- *Erzeuger-Zählpfeil-System* (Strom und Spannung werden *gegensinnig* gezählt)



Bild 1-3: Erzeuger-Zählpfeil-System

Die am Zweipol umgesetzte elektrische *Leistung* ist das Produkt von Spannung und Strom:

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.1)$$

- Verbraucher-Zählpfeil-System: Die Leistung $p(t) = u(t)i(t)$ wird vom Zweipol *aufgenommen*
- Erzeuger-Zählpfeil-System: Die Leistung $p(t) = u(t)i(t)$ wird vom Zweipol *abgegeben*

Sprechweise:

- Ein Strom *fließt* durch *einen* Anschluss, *einen* Pol, *einen* Leiter
- Eine Spannung *liegt an* zwischen *zwei* Anschlüssen, *zwei* Polen, *zwei* Punkten

1.2 Kirchhoffsche Gesetze

Erstes Kirchhoffsches Gesetz: Die Summe* aller Ströme über eine beliebig gewählte geschlossene Hülle ist stets Null:

$$\sum_k i_k(t) = 0 \quad (1.2)$$

* Die Summe wird vorzeichengerecht entsprechend der gewählten Zählpfeilrichtungen gebildet.

Als wichtiger Spezialfall ergibt sich aus dem ersten Gesetz die *Knotenregel*: Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist stets Null. Die oben formulierte erweiterte Form ist jedoch recht nützlich.

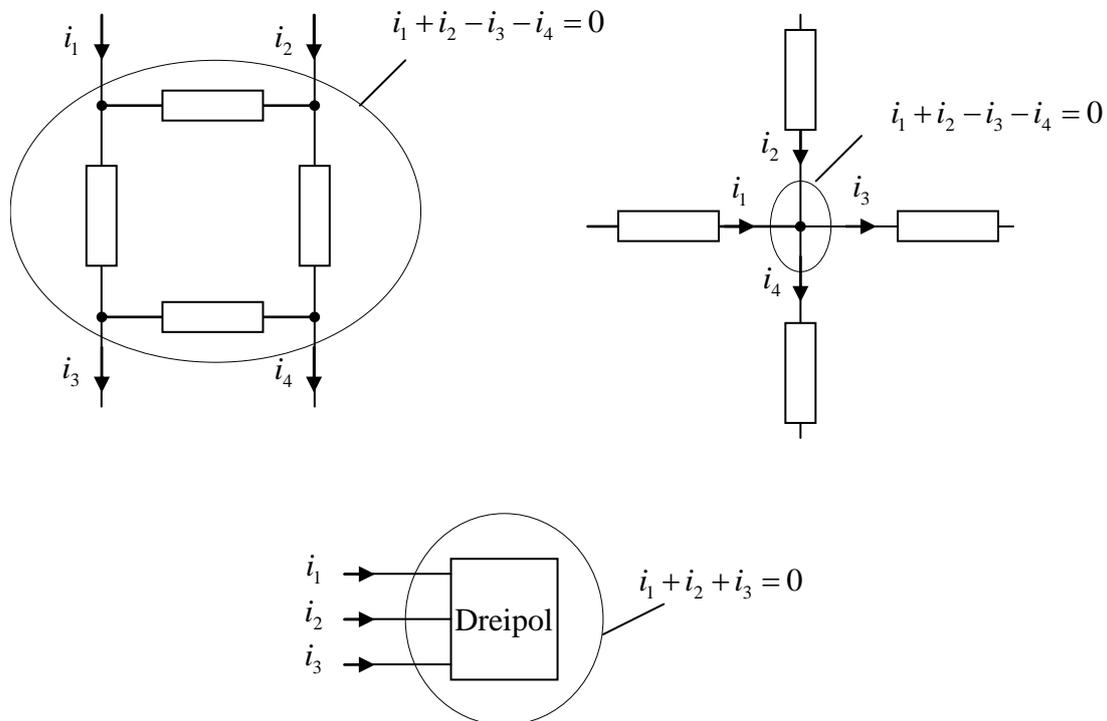


Bild 1-4: Beispiele für Anwendung der Knotenregel

Zweites Kirchhoffsches Gesetz („Maschenregel“): Die Summe* aller Spannungen entlang eines beliebig gewählten geschlossenen Umlaufs (Masche) ist stets Null:

$$\sum_k u_k(t) = 0 \quad (1.3)$$

* Die Summe wird vorzeichengerecht entsprechend der gewählten Zählpfeilrichtungen gebildet.

1.3 Mehrpole

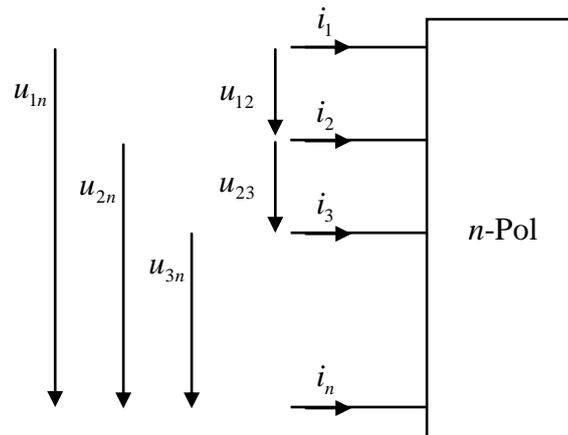


Bild 1-5: Mehrpol

Wegen des 1. Kirchhoffschen Gesetzes in seiner allgemeinen Form muss bei Mehrpolen

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad (1.4)$$

gelten.

Leistung am Mehrpol:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n-1} i_k(t) u_{kn}(t) \quad (1.5)$$

1.4 Ableitung der Kirchhoffschen Gesetze aus den allgemeinen Feldgleichungen

1. Kirchhoffsches Gesetz

Erhaltungssatz bzw. Bilanzgleichung der elektrischen Ladung (Kontinuitätsgesetz):

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \quad (1.6)$$

$$i = \dot{q}$$

Beteiligte Größen sind:

- Vektor der Stromdichte: \vec{j}
- Ladungsdichte: ρ
- $i = - \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A}$ ist der Gesamtstrom durch die Hülle des Volumens V , wobei bei dieser Definition der Strom in das Volumen *hinein* positiv gezählt wird, da die Flächennormale $d\vec{A}$ nach außen zeigt
- $q = \int_V \rho \, dV$ ist die gesamte elektrische Ladung im Volumen V

Hieraus folgt also das erste Kirchhoffsche Gesetz, sofern vorausgesetzt werden kann, dass sich die Ladung q im Volumen V nicht ändert, also $\dot{q} = 0$:

$$i = \sum_k i_k(t) = 0 \quad (1.7)$$

Achtung: Beim Kondensator ändern sich zwar die Ladungen auf den Elektroden, die Gesamtladung bleibt jedoch immer Null!

Das erste Kirchhoffsche Gesetz darf also nicht auf Systeme angewendet werden, bei denen die Voraussetzung $\dot{q} = 0$ nicht zutrifft, z. B. bei

- Vorgängen mit Wellenausbreitung (sowohl leitungsgeführt als auch gestrahlt)
- Anordnungen, die sich elektrostatisch aufladen können, wo also neben elektrischen Strömen auch dielektrische Verschiebungsströme auftreten

2. Kirchhoffsches Gesetz

Das Faradaysche Induktionsgesetz lautet in integraler Form

$$-\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (1.8)$$

Beteiligte Größen sind:

- Vektor der elektrischen Feldstärke: \vec{E}
- Vektor der magnetischen Flussdichte oder der magnetischen Induktion: \vec{B}
- gesamter magnetischer Fluss durch die Fläche A : $\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$:

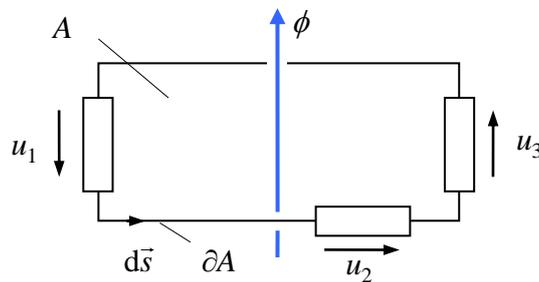


Bild 1-6: Zum Induktionsgesetz

Die Beiträge zum Wegintegral der elektrischen Feldstärke innerhalb der elektrischen Verbindungsleitungen sind Null, sofern ideale Leiter vorausgesetzt werden. Es folgt also:

$$\sum_k u_k = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1.9)$$

Nur wenn der magnetische Fluss ϕ durch die betreffende Masche eines Netzwerkes Null ist oder sich zumindest nicht ändert, gilt das zweite Kirchhoffsche Gesetz

$$\sum_k u_k(t) = 0 \quad (1.10)$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, gilt das zweite Kirchhoffsche Gesetz *nicht*. Beispiele:

- Elektrische Schaltungen, bei denen magnetische Streuflüsse, z.B. eines Transformators, die Netzwerkmaschen durchdringen, so dass eine „Brummspannung“ induziert wird.
- Ein sich aufgrund des Sonnenwinds änderndes Erdmagnetfeld kann bei sehr großen Maschen, wie sie durch Freileitungen gebildet werden, für unangenehme Überraschungen sorgen.
- Vorgänge mit Wellenausbreitung

2 Mittelwert und Effektivwert

Arithmetisches Mittel einer zeitlich veränderlichen Größe $x(t)$ im Intervall $[t_0, t_1]$:

$$\bar{x} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} x(t) dt \quad .^1 \quad (2.1)$$

Die Mittelwertbildung lässt sich auf beliebige zeitlich veränderliche Größen anwenden. Häufig handelt es sich aber um *periodische* Größen: Für eine periodische Größe $x(t)$ gilt

$$x(t) = x(t - T) \quad (2.2)$$

T heißt *Periodendauer*. Der Mittelwert über eine Periode ist unabhängig von der Wahl des Anfangszeitpunktes:

$$t_0 \text{ beliebig, z.B. } t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + T \quad (2.3)$$

Gleichrichtwert:

$$|\bar{x}| = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (2.4)$$

Quadratisches Mittel oder Effektivwert:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad .^2 \quad (2.5)$$

Scheitelwert:

$$\hat{x} = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)| \quad (2.6)$$

Scheitelfaktor (crest factor):

$$k_s = \frac{\hat{x}}{X} \quad (2.7)$$

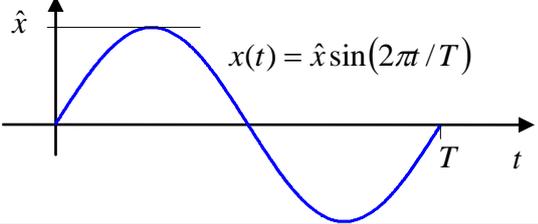
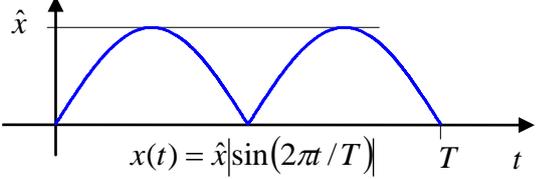
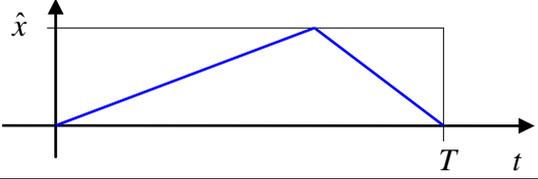
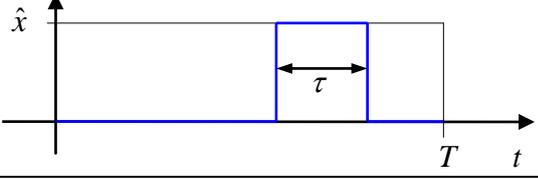
Formfaktor (Effektivwert bezogen auf Gleichrichtwert):

$$k_f = \frac{X}{|\bar{x}|} \quad (2.8)$$

¹ Ebenfalls übliche Bezeichnung $x_{AV} = \bar{x}$ (AV, *Average*).

² Ebenfalls übliche Bezeichnungen: $x_{eff} = x_{RMS} = X$ (RMS, *Root Mean Square*)

Mittelwerte verschiedener Signalformen

$x(t)$	\bar{x}	$\overline{ x }$	X	k_s	k_f
 $x(t) = \hat{x} \sin(2\pi t / T)$	0	$\frac{2}{\pi} \hat{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
 $x(t) = \hat{x} \sin(2\pi t / T) $	$\frac{2}{\pi} \hat{x}$	$\frac{2}{\pi} \hat{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
	$\frac{1}{2} \hat{x}$	$\frac{1}{2} \hat{x}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{x}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
	$\frac{\tau}{T} \hat{x}$	$\frac{\tau}{T} \hat{x}$	$\sqrt{\frac{\tau}{T}} \hat{x}$	$\sqrt{\frac{T}{\tau}}$	$\sqrt{\frac{T}{\tau}}$

Häufig interessieren Leistungsmittelwerte (arithmetisches Mittel!)

$$P = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (2.9)$$

Arithmetisches Mittel der Leistung an einem ohmschen Widerstand:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt = RI^2 \quad (2.10)$$

Oder:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{R} u^2(t) dt = \frac{1}{R} U^2 \quad (2.11)$$

Der Effektivwert eines Stroms bzw. einer Spannung erzeugt in einem ohmschen Widerstand die gleiche Leistung wie ein entsprechender Gleichstrom bzw. eine entsprechende Gleichspannung!

Messgeräte, die Effektivwerte anzeigen, messen meist über Gleichrichtung und arithmetischer Mittelung gar nicht den Effektivwert, sondern nur den Gleichrichtwert. Dieser wird über den Formfaktor in den Effektivwert umgerechnet, wobei angenommen wird, dass sinusförmige Größen vorliegen. Die Effektivwertmessung nicht-sinusförmiger Größen mit derartigen Messinstrumenten führt dann regelmäßig zu falschen Ergebnissen, wenn das Messergebnis nicht mit den entsprechenden Formfaktoren korrigiert wird. Das gelingt natürlich nur dann, wenn die Kurvenform und damit der Formfaktor bekannt sind. Messgeräte, die tatsächlich Effektivwerte für beliebige Kurvenformen direkt messen (*true RMS*), sind aufwändig und teuer.

Hilfreich sind die folgenden Zusammenhänge für die Berechnung von arithmetischem oder quadratischem Mittelwert, sofern diese Mittelwerte für Teilintervalle des Kurvenverlaufs bereits bekannt sind, also insbesondere dann, wenn das Signal aus elementaren Stücken wie Dreieck, Rechteck, Sinus oder Signalpausen zusammengesetzt ist:

Seien $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ die jeweiligen arithmetischen Mittelwerte in den Teilintervallen T_1, T_2, \dots bzw. X_1, X_2, \dots die entsprechenden Effektivwerte, so ergibt sich der Gesamt-Mittelwert bzw. Gesamteffektivwert gemäß

$$\bar{x} = \frac{\sum_k T_k \bar{x}_k}{\sum_k T_k} \quad (2.12)$$

$$X = \sqrt{\frac{\sum_k T_k X_k^2}{\sum_k T_k}} \quad (2.13)$$

3 Elementare Zweipole

3.1 Bezeichnungen

Im Gegensatz zu Gleichstrom-Gleichspannungs-Kreisen werden Ströme, Spannungen, Leistungen als zeitlich veränderliche Größen aufgefasst. Für zeitlich veränderliche Größen werden Kleinbuchstaben verwendet:

$$i = i(t) \quad (3.1)$$

$$u = u(t) \quad (3.2)$$

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (3.3)$$

3.2 Widerstand

Für den Widerstand gilt das ohmsche Gesetz auch für zeitlich veränderliche Vorgänge:

$$u(t) = Ri(t) \quad (3.4)$$

bzw.

$$i(t) = Gu(t) \quad (3.5)$$

mit dem Leitwert

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.6)$$

Achtung: Es wird das Verbraucher-Zählpfeil-System vorausgesetzt.

Der bauteilspezifische Zusammenhang („Bauteilgleichung“) zwischen Strom und Spannung, also das ohmsche Gesetz beim Widerstand, wird als *konstitutive Gleichung* bezeichnet.

Das ohmsche Gesetz beschreibt ein *idealisiertes Verhalten* eines Widerstands. Reale Widerstände (z.B. gewickelte Drahtwiderstände) zeigen darüber hinaus ein nennenswertes induktives, sogar ein kapazitives Verhalten.

Leistung und Arbeit

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R}u^2(t) = Gu^2(t) \quad (3.7)$$

$$w[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} Ri^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{R}u^2(t) dt \quad (3.8)$$

Die Größe $w[t_0, t_1]$ ist die während des Zeitintervalls $[t_0, t_1]$ geleistete elektrische Arbeit. Diese wird vollständig in eine *Wärmemenge* Q_θ umgesetzt:

$$Q_\theta = w[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} Ri^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{R} u^2(t) dt \quad (3.9)$$

Die geleistete Arbeit ist zwar von ihrer Dimension gleich der einer Energie. Sie wird im Allgemeinen aber nicht als Energie bezeichnet. Der Unterschied zwischen den Begriffen *Arbeit* und *Energie* wird bei der Betrachtung von Kondensator und Spule deutlich.

Reihenschaltung zweier Widerstände

$$u_1(t) = R_1 i(t) \quad (3.10)$$

$$u_2(t) = R_2 i(t) \quad (3.11)$$

\Rightarrow

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = (R_1 + R_2)i(t) = Ri(t) \quad (3.12)$$

$$u(t) = Ri(t) \quad (3.22)$$

mit dem resultierenden Ersatzwiderstand der Reihenschaltung:

$$R = R_1 + R_2 \quad (3.13)$$

Parallelschaltung

$$i_1(t) = G_1 u(t) \quad (3.14)$$

$$i_2(t) = G_2 u(t) \quad (3.15)$$

\Rightarrow

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = (G_1 + G_2)u(t) = Gu(t) \quad (3.16)$$

$$Gu(t) = i(t) \quad (3.22)$$

mit dem resultierenden Ersatzleitwert der Parallelschaltung:

$$G = G_1 + G_2 \quad (3.17)$$

Werden statt der Leitwerte die Widerstände benutzt, führt das zu

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2 \quad (3.18)$$

Für die Berechnung des Ersatzwiderstands der Parallelschaltung wird, wie in der letzten Formel, gern die Kurzschreibweise \parallel benutzt.

3.3 Kondensator

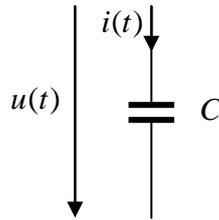


Bild 3-1: Schaltsymbol des Kondensators

Der Kondensator speichert eine elektrische Ladung q , wobei sich auf den beiden Elektroden jeweils Ladungen mit gegensätzlichen Vorzeichen³ befinden (die Ladung auf der oberen Elektrode werde positiv gezählt). Aufgrund der Bilanzgleichung der elektrischen Ladung (vgl. Abschnitt 1.4) muss bei Annahme obiger Zählrichtungen gelten:

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) \quad (3.19)$$

Die Ladung q ist aber proportional zur elektrischen Spannung:

$$q(t) = Cu(t) \quad (3.20)$$

Die Proportionalitätskonstante C heißt *Kapazität*. Maßeinheit der Kapazität ist das Farad (F):

$$[C] = 1\text{F} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

Eliminiert man die elektrische Ladung aus diesen beiden Gleichungen, erhält man als Beziehung zwischen Spannung und Strom eine Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$C \frac{du(t)}{dt} = i(t) \quad (3.21)$$

oder kurz

$$C\dot{u}(t) = i(t) \quad (3.22)$$

Diese Gleichung beschreibt das idealisierte Verhalten eines Kondensators. Die beschreibende Differenzialgleichung ist die *konstitutive Gleichung* des Kondensators (man beachte, dass das Verbraucherzählpfeilsystem vorausgesetzt wurde, andernfalls erhielte man das umgekehrte Vorzeichen).

³ Die Summe der Ladungen beider Elektroden ist folglich immer Null, weshalb das 1. Kirchhoffsche Gesetz auch auf Schaltungen mit Kondensatoren angewendet werden kann.

Man achte auf die korrekte Verwendung der Begriffe: Oft wird das Wort *Kapazität* fälschlich für ein Bauelement verwendet. Die *Kapazität* ist jedoch nur ein Kennwert des Bauelements *Kondensator*.

Kapazität eines Plattenkondensators

Die Kapazität eines Kondensators, bei dem der Plattenabstand d klein gegenüber der Ausdehnung der Platten (oder Folien) mit der Fläche A ist, bestimmt sich zu

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} \quad (3.23)$$

wobei ε_r die *relative Permittivität* (die *Dielektrizitätszahl*) des Dielektrikums und $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m die *Permittivität* (Dielektrizitätskonstante) des Vakuums ist (ohne Herleitung).

Leistung, Energie

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{2} C \frac{d}{dt} (u^2(t)) = \frac{dw_C(t)}{dt} = \dot{w}_C(t) \quad (3.24)$$

mit

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (3.25)$$

Diese Größe ist die *innere Energie* des Kondensators. Die Energie eines Systems ist typischerweise nur vom momentanen Zustand abhängig, hier also von $u(t)$, nicht aber von der Vorgeschichte. Die über einem Zeitintervall geleistete äußere Arbeit $w[t_0, t_1]$ lässt sich wie folgt integrieren:

$$w[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{w}_C(t) dt = w_C(t_1) - w_C(t_0) = \frac{1}{2} C (u^2(t_1) - u^2(t_0)) \quad (3.26)$$

$$w[t_0, t_1] = w_C(t_1) - w_C(t_0) \quad (3.27)$$

Die geleistete Arbeit ist also die Differenz der Energien zwischen End- und Anfangszustand. Dies macht den Unterschied zum Widerstand deutlich: Der Kondensator *speichert* die an ihm geleistete äußere Arbeit als Energie und kann diese bei Entladung auch wieder abgeben.

Im Prinzip ist die Energie $w_C(t)$ nur bis auf eine Integrationskonstante eindeutig bestimmbar. Da aber stets Differenzen von Energien auftreten, kann diese Integrationskonstante ohne Einschränkung der Allgemeinheit (wie oben geschehen) zu Null gewählt werden.

Dynamisches Verhalten

Wird beim Kondensator die Spannung vorgegeben, folgt eindeutig der Strom:

$$i(t) = C\dot{u}(t) \quad (3.22)$$

Beispiel: Sinusförmige Größen:

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t - \alpha) \quad (3.28)$$

\Rightarrow

$$i(t) = \omega C \hat{u} \cos(\omega t - \alpha) = \hat{i} \cos(\omega t - \alpha) \quad (3.29)$$

Die Amplituden von Spannung und Strom stehen bei einer solchen sinusförmigen Speisung also im Zusammenhang

$$\hat{i} = \omega C \hat{u} \quad (3.30)$$

wobei die Schwingung des Stroms der Spannungsschwingung vorausleitet.

Wird dagegen beim Kondensator der Strom vorgegeben, kann die Spannung nur bis auf den Anfangswert der Spannung (mathematisch: die Integrationskonstante) bestimmt werden. Der Anfangswert muss also auf anderem Wege gegeben oder bestimmt werden:

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (3.31)$$

Merke: Die Spannung am Kondensator kann sich nicht sprungförmig ändern.

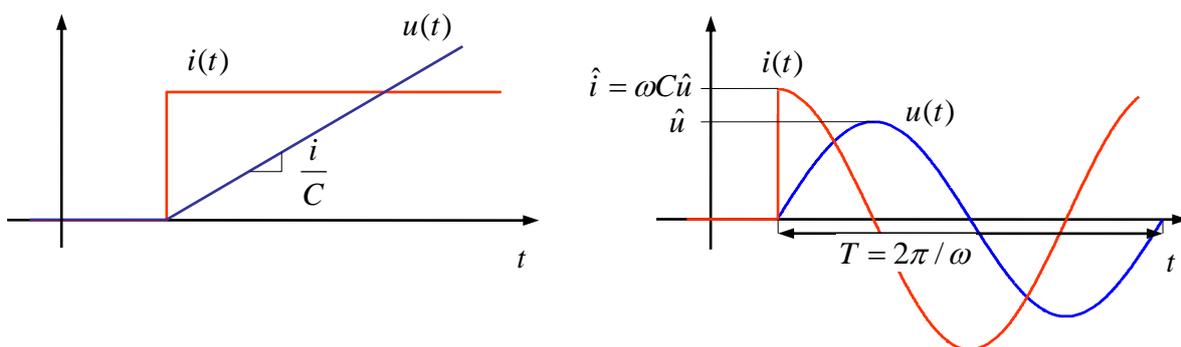


Bild 3-2: Beispiele für zeitliche Verläufe von Strom und Spannung am Kondensator

Parallelschaltung

$$C_1 \dot{u}(t) = i_1(t) \quad (3.32)$$

$$C_2 \dot{u}(t) = i_2(t) \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow$$

$$(C_1 + C_2) \dot{u}(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (3.34)$$

$$C \dot{u}(t) = i(t) \quad (3.22)$$

mit der resultierenden Ersatzkapazität der Parallelschaltung:

$$C = C_1 + C_2 \quad (3.35)$$

Reihenschaltung

$$C_1 \dot{u}_1(t) = i(t) \quad (3.36)$$

$$C_2 \dot{u}_2(t) = i(t) \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{u}_1(t) = \frac{1}{C_1} i(t) \quad (3.38)$$

$$\dot{u}_2(t) = \frac{1}{C_2} i(t) \quad (3.39)$$

$$\dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i(t) \quad (3.40)$$

$$C \dot{u}(t) = i(t) \quad (3.22)$$

mit der resultierenden Ersatzkapazität der Reihenschaltung:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (3.41)$$

Merke: Kapazitäten verhalten sich in Reihen- und Parallelschaltung ähnlich wie Leitwerte.

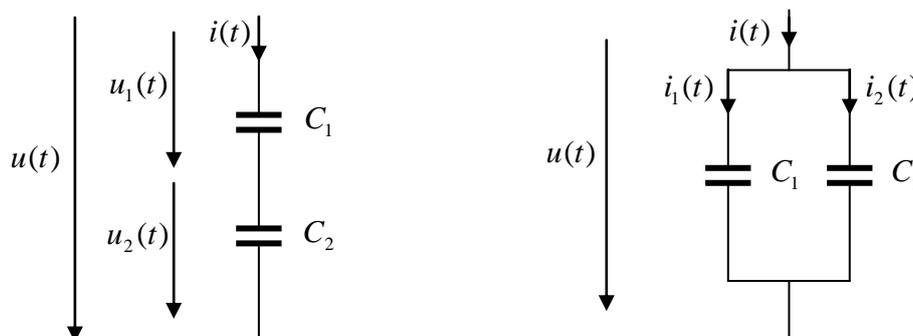


Bild 3-3: Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren

3.4 Drossel oder Spule

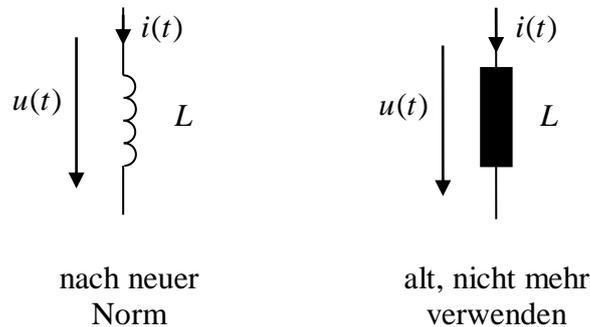


Bild 3-4: Schaltsymbole der Drossel

Ausgangspunkt ist das Induktionsgesetz (vgl. Abschnitt 1.4). Es soll aber berücksichtigt werden, dass Spulen in der Regel nicht nur aus einer einzigen, sondern mehreren Windungen bestehen. In diesem Fall ergibt sich der magnetische *Verkettungsfluss* ψ als Integration über eine entsprechend vielschichtige Fläche. Unter der vereinfachenden Annahme, dass jede Windung vom gleichen magnetischen Fluss durchsetzt wird, ist der Verkettungsfluss einfach ein ganzzahliges Vielfache des einfachen Flusses,

$$\psi = N\phi \quad (3.42)$$

wobei N die Windungszahl der Spule ist. Das Induktionsgesetz hat wieder die gleiche Form, lediglich tritt statt des (einfachen) Flusses ϕ der mehrfach verkettete Fluss auf:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = u(t) \quad (3.43)$$

Das Induktionsgesetz gilt in immer gleicher Form unabhängig davon, wie das Magnetfeld bzw. seine Änderung zustande kommt. Es kann durch fremde Erregungen wie durch eine andere Spule in einem Transformator (*Gegeninduktion*), durch Bewegung oder Formänderung der Spule in einem fremden Magnetfeld wie beispielsweise bei elektrischen Maschinen (*Bewegungsinduktion*) oder aber durch den eigenen Strom i der Spule selbst erzeugt werden (*Selbstinduktion*). Wir betrachten hier nur den letzten Fall. In diesem Fall kann der magnetische Verkettungsfluss ψ bei Bauelementen mit linearen Materialien als proportional zum Strom i angenommen werden. Die Proportionalitätskonstante wird als Induktivität L bezeichnet:

$$\psi = Li \quad (3.44)$$

Die Maßeinheit der Induktivität ist das Henry (H):

$$[L] = 1\text{H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung lässt sich dann in der Form

$$L \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad (3.45)$$

bzw.

$$L\dot{i}(t) = u(t) \quad (3.46)$$

schreiben. Dies ist die konstitutive Gleichung der Spule (auch hier gilt das Verbraucherzählpfeilsystem). Dieses idealisierte Verhalten berücksichtigt nicht den Innenwiderstand und mögliche kapazitive Effekte realer Bauelemente.

Wie schon beim Kondensator beachte man die korrekte Anwendung der Begriffe: Das induktive *Bauelement* heißt *Spule* oder *Drosselspule*, oft zu *Drossel* verkürzt. Dieses Bauelement wird durch den *Kennwert* der *Induktivität*, ggf. zusätzlich auch durch seinen Innenwiderstand charakterisiert.

Induktivität einer langen Zylinderspule

Eine Zylinderspule mit N Windungen und Querschnittsfläche A , bei der die Länge l sehr groß gegenüber dem Durchmesser ist, besitzt die Induktivität

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r AN^2}{l} \quad (3.47)$$

wobei μ_r die *relative Permeabilität* bzw. die *Permeabilitätszahl* des Kernmaterials und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m die *Permeabilität* des Vakuums⁴ ist. Das gleiche Ergebnis gilt auch für torusförmige Spulen (Ringkernspulen), sofern die Abmessungen des Torusquerschnitts klein gegenüber dem Torusdurchmesser sind. Man vergleiche die Formel für die Kapazität des Plattenkondensators! (ohne Herleitung)

Leistung, Energie

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i^2(t)) = \frac{dw_L(t)}{dt} = \dot{w}_L(t) \quad (3.48)$$

Innere Energie der Drossel (vgl. Kondensator):

⁴ Die Permeabilität des Vakuums, die auch als *magnetische Feldkonstante* bezeichnet wird, war bis 2019 auf diesen „glatten“ Wert *festgelegt*. Auf diese Weise wurde im Internationalen System der Maßeinheiten die Maßeinheit des elektrischen Stroms definiert: 1 A war definiert als derjenige Strom, der jeweils zwei sehr lange, hinreichend dünne, im Abstand von 1 m angeordnete Leiter durchfließt, wenn diese je 1 m Leiterlänge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N aufeinander ausüben. Im Mai 2019 wurde diese Definition aufgehoben und statt ihrer der Wert der Elementarladung festgelegt. Seitdem ist der obige Wert der magnetischen Feldkonstante nur noch eine (sehr gute) Näherung.

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (3.49)$$

Dynamisches Verhalten

Wird der Strom der Drossel vorgegeben, folgt daraus eindeutig die Spannung:

$$u(t) = L\dot{i}(t) \quad (3.46)$$

Beispiel: Sinusförmige Größen:

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t - \alpha) \quad (3.50)$$

$$\Rightarrow u(t) = \omega L \hat{i} \cos(\omega t - \alpha) \quad (3.51)$$

Spannungs- und Stromamplituden stehen bei einer solchen sinusförmigen Speisung im Zusammenhang

$$\hat{u} = \omega L \hat{i} \quad (3.52)$$

Die Spannungsschwingung eilt dabei dem Strom voraus.

Wird dagegen die Spannung vorgegeben, ist der Anfangswert des Stroms unbestimmt:

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (3.53)$$

Merke: Der Strom in einer Drossel kann sich nicht sprungförmig verändern.

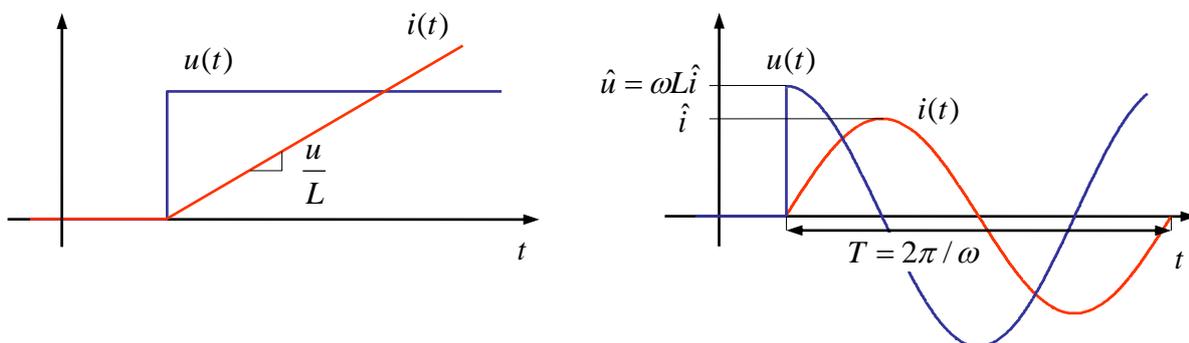


Bild 3-5: Beispiele für zeitliche Verläufe von Strom und Spannung an der Drossel

Reihenschaltung

$$L_1 \dot{i}(t) = u_1(t) \quad (3.54)$$

$$L_2 \dot{i}(t) = u_2(t) \quad (3.55)$$

$$\Rightarrow$$

$$(L_1 + L_2) \dot{i}(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (3.56)$$

$$L \dot{i}(t) = u(t) \quad (3.46)$$

mit der resultierenden Ersatzinduktivität der Reihenschaltung:

$$L = L_1 + L_2 \quad (3.57)$$

Parallelschaltung

$$L_1 \dot{i}_1(t) = u(t) \quad (3.58)$$

$$L_2 \dot{i}_2(t) = u(t) \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{i}_1(t) = \frac{1}{L_1} u(t) \quad (3.60)$$

$$\dot{i}_2(t) = \frac{1}{L_2} u(t) \quad (3.61)$$

$$\dot{i}_1(t) + \dot{i}_2(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) u(t) \quad (3.62)$$

$$L \dot{i}(t) = u(t) \quad (3.46)$$

mit der resultierenden Ersatzinduktivität der Parallelschaltung:

$$L = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (3.63)$$

Merke: Induktivitäten verhalten sich in Reihen- und Parallelschaltung ähnlich wie Widerstände.

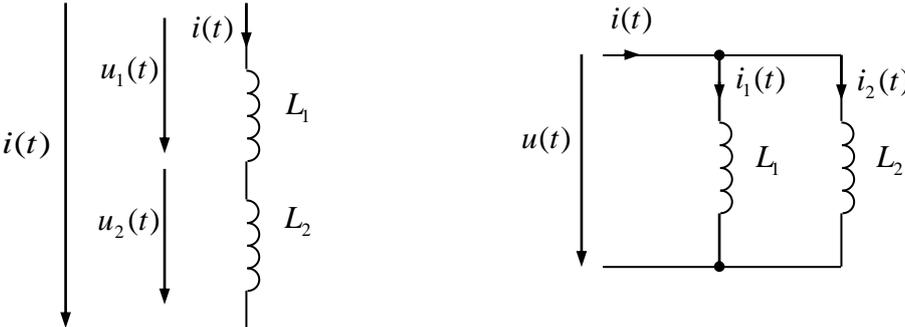


Bild 3-6: Reihen- und Parallelschaltung von Drosseln

4 Nichtlineare Elemente

4.1 Nichtlineare Drossel

Insbesondere Spulen mit ferromagnetischen Kernen zeigen Sättigungsverhalten. Magnetischer Fluss und elektrischer Strom sind dann nicht mehr proportional. Das Induktionsgesetz ist aber ein physikalisches Grundgesetz, dieses gilt weiterhin:

$$u(t) = \dot{\psi}(t) \quad (4.1)$$

Statt des nun nicht mehr gültigen linearen Zusammenhangs zwischen ψ und i wird nun angenommen, dass es eine wie auch immer geartete nichtlineare Kennlinie der Art

$$\psi = \psi(i) \quad (4.2)$$

gebe. Diese wird *Magnetisierungskennlinie* genannt.

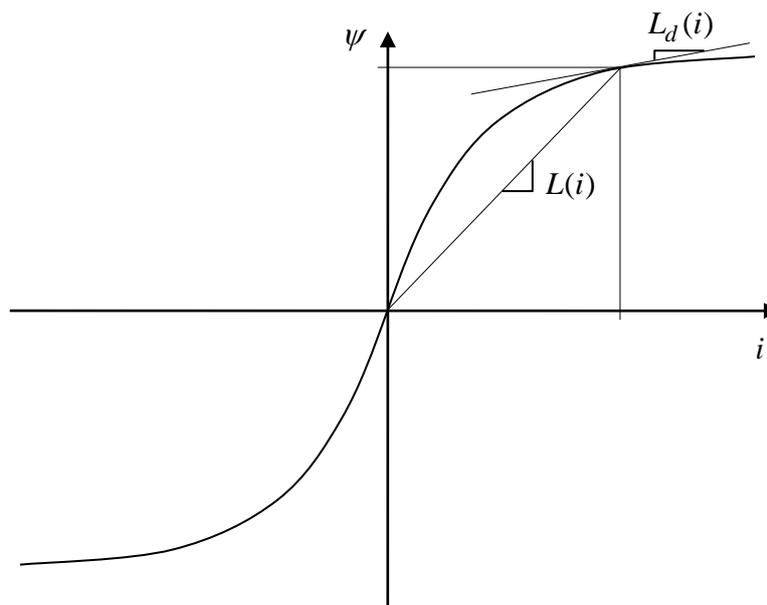


Bild 4-1: Magnetisierungskennlinie

Durch Einsetzen und Anwendung der Kettenregel ergibt sich eine neue Differenzialgleichung als konstitutive Gleichung:

$$u(t) = \dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{di} \dot{i}(t) = L_d(i) \dot{i}(t) \quad (4.3)$$

Die Gleichung gleicht formell jener bei linearen Verhältnissen. Hierbei ist aber die sogenannte *differenzielle Induktivität*

$$L_d(i) = \frac{d\psi}{di} \quad (4.4)$$

maßgeblich. Es lässt sich zwar auch eine Induktivität als stromabhängiges Verhältnis von Fluss und Strom definieren,

$$L(i) = \frac{\psi}{i} \quad (4.5)$$

diese hat aber für das dynamische Verhalten keine Bedeutung.

Leistung und Energie

$$p(t) = u(t)i(t) = \dot{\psi}(t)i(t) \quad (4.6)$$

$$w_L(t_1) - w_L(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\psi(t)}{dt} i(t) dt = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t_1)} i d\psi \quad (4.7)$$

Auch im nichtlinearen Fall lässt sich also die äußere Arbeit zu einer inneren magnetischen Energie w_L integrieren. Die geometrische Interpretation der magnetischen Energie als Flächeninhalt der Magnetisierungskennlinie ist in folgendem Diagramm dargestellt (vgl. die Formel für die magnetische Energie für die lineare Drossel, diese Energie entspräche einer Dreiecksfläche):

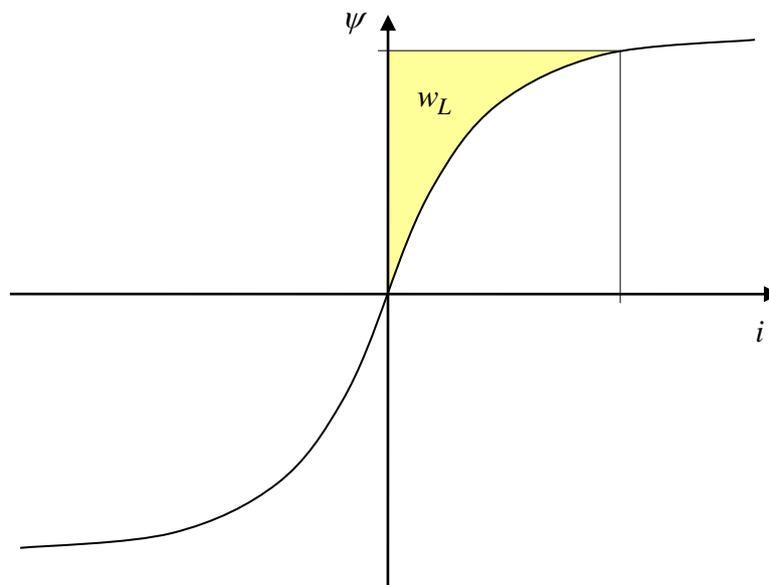


Bild 4-2: Magnetische Energie in einer nichtlinearen Drossel

4.2 Nichtlinearer Kondensator

Anders als induktive Bauelemente zeigen Kondensatoren keine nennenswerte Sättigung. Ein Beispiel mit deutlich nichtlinearem Verhalten ist aber ein MOSFET-Transistor im gesperrten Zustand: Die in der Sperrschicht gespeicherte Ladung ist nicht proportional zur Drain-Source-Spannung, sondern deutlich nichtlinear.

Ausgangspunkt ist wieder die Ladungsbilanz

$$i(t) = \dot{q}(t) \quad (4.8)$$

die als physikalisches Grundgesetz auch im nichtlinearen Fall gelten muss. Es werde nun angenommen, es gäbe einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Ladung q und Spannung u :

$$q = q(u) \quad (4.9)$$

Einsetzen und Kettenregel liefert:

$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{dq}{du} \dot{u}(t) = C_d(u) \dot{u}(t) \quad (4.10)$$

mit der differentiellen Kapazität

$$C_d(u) = \frac{dq}{du} \quad (4.11)$$

Kapazität, jetzt spannungsabhängig:

$$C(u) = \frac{q}{u} \quad (4.12)$$

Leistung und Energie

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)\dot{q}(t) \quad (4.13)$$

$$w_C(t_1) - w_C(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dq(t)}{dt} u(t) dt = \int_{q(t_0)}^{q(t_1)} u dq \quad (4.14)$$

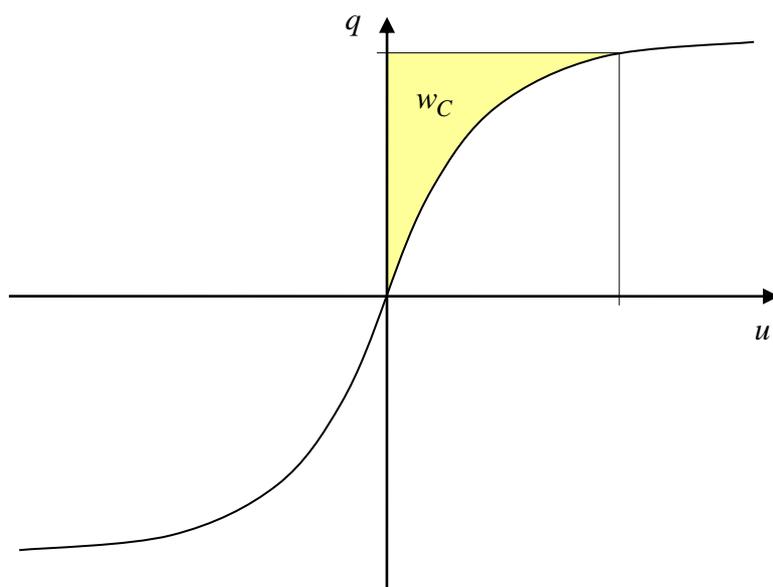


Bild 4-3: Geometrische Interpretation der Energie eines nichtlinearen Kondensators

5 Leistung, Arbeit, Energie im elektrischen Netzwerk

5.1 Arbeit und Energie

Das Integral der elektrischen Leistung an einem Zwei- oder Mehrpol über der Zeit

$$w[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt \quad (5.1)$$

ist die geleistete (elektrische) *Arbeit*. Vereinfacht gesprochen, bezeichnen wir diese Arbeit nur dann als *Energie* dieses Elements, wenn diese als Speichergröße identifiziert werden kann (insbesondere kann diese dann auch wieder abgegeben werden). Mathematisch genauer formuliert sprechen wir von Energie, wenn das obige Leistungsintegral so integriert werden kann, dass das Ergebnis nur eine Funktion der Zustandsgrößen⁵ $x(t)$ zum End- bzw. Anfangszeitpunkt ist:

$$w[t_0, t_1] = w(t_1) - w(t_0) = w(x(t_1)) - w(x(t_0)) \quad (5.2)$$

Diese Funktion $w(x(t))$ heißt dann innere Energie. Wie schon nachgewiesen, existieren für Kondensator und Spule derartige Energien, die für lineare Fälle

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (5.3)$$

und

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (5.4)$$

lauten. Für den Widerstand findet man eine solche innere Energie *nicht*.

5.2 Energiebilanz im Netzwerk

Die Leistung an einem Element k in einem elektrischen Netzwerk sei $p_k(t)$, die dem Netzwerk über äußere Klemmen zugeführte Leistung sei $p_e(t)$. Die Leistungsbilanz im Netzwerk lautet damit

$$p_e(t) = \sum_{k=1}^N p_k(t) \quad (5.5)$$

⁵ Zustandsgrößen nennt man einen Satz von Variablen, deren Kenntnis ausreicht, um den Zustand eines Systems vollständig zu beschreiben.

Sind einige der Elemente Energiespeicher (Kondensatoren oder Spulen oder andere Elemente, die dem Kriterium nach Abschnitt 5.1 genügen), lässt sich eine Gesamtenergie des Netzwerks definieren

$$w(t) = \sum_{k \in \text{Speicher}} w_k(t) \quad (5.6)$$

Damit:

$$p_e(t) = \dot{w}(t) + p_i(t) \quad (5.7)$$

wobei

$$p_i(t) = \sum_{k \notin \text{Speicher}} p_k(t) \quad (5.8)$$

die innere Leistung ist. Diese setzt sich aus Verlusten z. B. der Widerstände zusammen.

Spezialfälle dieser Leistungs- oder Energiebilanz:

- Netzwerk enthalte keine Elemente, die Leistung vernichten oder erzeugen, z. B. ein Netzwerk nur aus Spulen und Kondensatoren

$$p_e(t) = \dot{w}(t) \quad (5.9)$$

- dto., darüber hinaus werde keine äußere Leistung zugeführt. Dann folgt eine *Energieerhaltung*:

$$\dot{w}(t) = 0 \quad (5.10)$$

bzw.

$$w(t) = \text{const.} \quad (5.11)$$

- Netzwerk enthalte gar keine Speicher: Die von außen zugeführte Leistung wird dann momentan auf die Netzwerkelemente verteilt:

$$p_e(t) = p_i(t) = \sum_k p_k(t) \quad (5.12)$$

6 Gleichstromsteller

Transformatoren dienen der Umformung von Wechselspannungen oder –strömen. Die Umformung von Gleichspannungen wird mit einem gänzlich anderen Funktionsprinzip bewerkstelligt. Im Folgenden werden die beiden einfachsten Strukturen vorgestellt, um eine Gleichspannung herauf- oder herunterzusetzen: Der *Tiefsetzsteller* und der *Hochsetzsteller*.

Derartige Gleichstromsteller werden für verschiedene Anwendungen und Leistungsklassen mit Spannungsbereich von wenigen Volt bis zu einigen 100 V oder sogar kV und Leistungen von etwa 100mW bis zu einigen 100 kW oder mehr eingesetzt.

6.1 Tiefsetzsteller

6.1.1 Prinzip

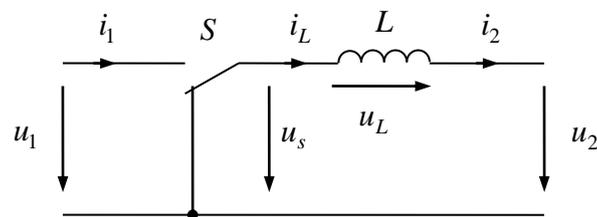


Bild 6-1: Prinzipschaltbild des Tiefsetzstellers

Annahme konstanter Spannungen:

$$u_1(t) = U_1 \quad , \quad u_2(t) = U_2 \quad .$$

Der Schalter S wird mit dem *Tastverhältnis*

$$D = \frac{T_e}{T_s} \quad (6.1)$$

getaktet (s. Bild 6-1).

Begriffe:

T_e	<i>Einschaltzeit</i> (Schalter oben)
T_a	<i>Ausschaltzeit</i> (Schalter unten)
$T_s = T_e + T_a$	<i>Schaltperiode</i>
$f_s = \frac{1}{T_s}$	<i>Schaltfrequenz</i>

Stellerspannung:

$$u_s(t) = \begin{cases} u_1(t) = U_1 & \text{während der Einschaltzeit} \\ 0 & \text{während der Ausschaltzeit} \end{cases} \quad (6.2)$$

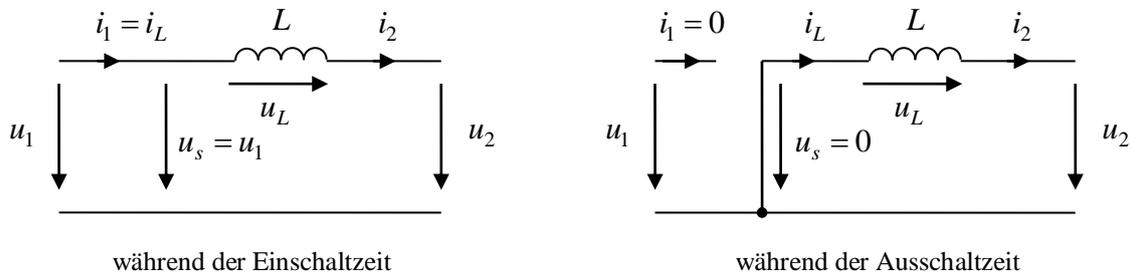


Bild 6-2: Ersatzschaltbilder während Ein- und Ausschaltzeit

Analyse des stationären Verhaltens

Zeitlicher Verlauf des Stroms $i_L(t)$ (vgl. Bild 6-2): Aus

$$L \dot{i}_L(t) = u_L(t) = u_s(t) - U_2 \quad (6.3)$$

folgt während der Einschaltzeit $t \in [0, T_e]$:

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} t \quad (6.4)$$

und während der Ausschaltzeit $t \in [T_e, T_s]$:

$$i_L(t) = i_L(T_e) - \frac{U_2}{L} (t - T_e) = i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} T_e - \frac{U_2}{L} (t - T_e) \quad (6.5)$$

Der Drosselstrom $i_L(t)$ ist genau dann stationär (bzw. periodisch), wenn

$$i_L(T_s) = i_L(0)$$

Daraus folgt:

$$i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} T_e - \frac{U_2}{L} (T_s - T_e) = i_L(0)$$

$$(U_1 - U_2) T_e - U_2 (T_s - T_e) = 0$$

$$U_1 T_e - U_2 T_s = 0$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_e}{T_s} = D \quad (6.6)$$

Das Tastverhältnis bestimmt ähnlich wie das Verhältnis der Windungszahlen beim Transformator das Verhältnis der Spannungen!

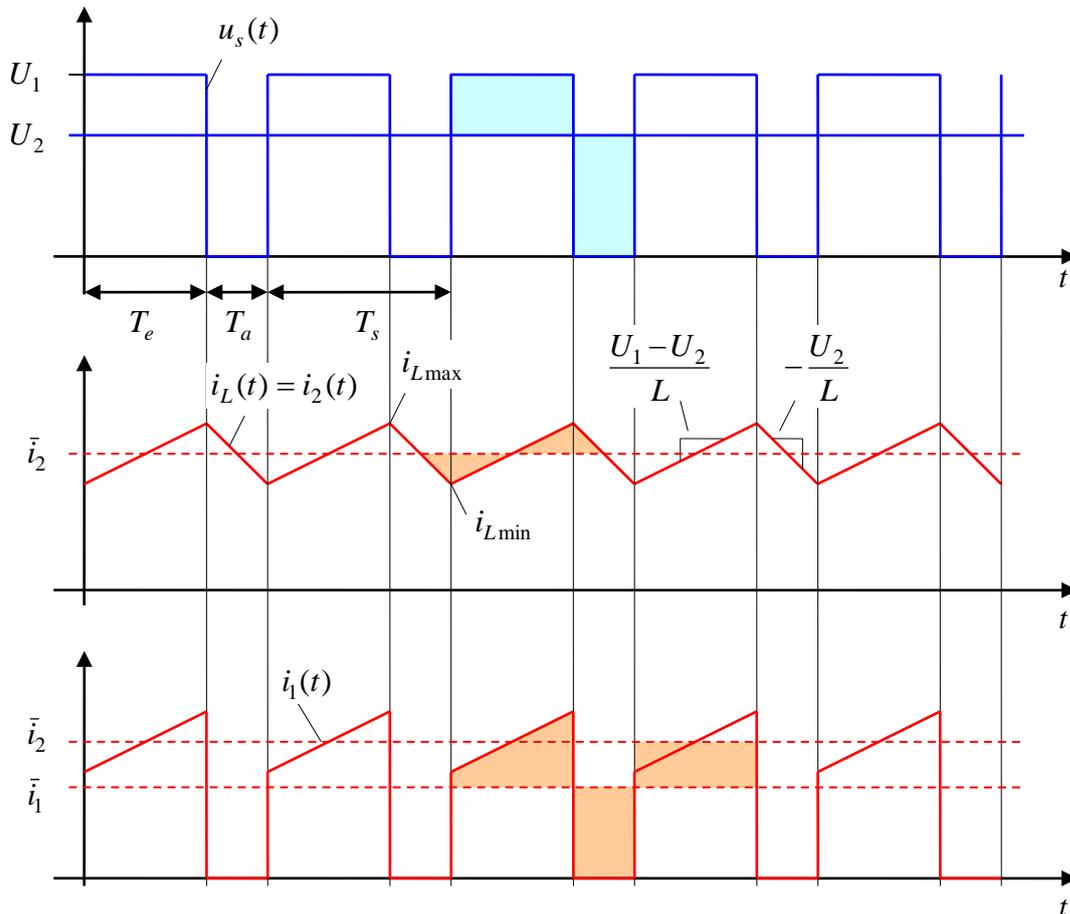


Bild 6-3: Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller im stationären Zustand

Andere alternative Betrachtung mit *Mittelwerten*: Der Strom $i_L(t)$ ändert sich über eine Periode T_s nicht, wenn die Drosselspannung $u_L(t)$ im Mittel Null ist, $\bar{u}_L = 0$, denn aus

$$L \dot{i}_L(t) = u_L(t) \quad (6.7)$$

folgt durch Integration über eine Schaltperiode T_s :

$$L(i_L(T_s) - i_L(0)) = \int_0^{T_s} u_L(t) dt = T_s \bar{u}_L = 0 \quad (6.8)$$

Aus der Maschengleichung:

$$u_s(t) = u_L(t) + U_2 \quad (6.9)$$

erhält man die Aussage über die Mittelwerte im stationären Zustand:

$$\bar{u}_s = \bar{u}_L + U_2 = U_2 \quad (6.10)$$

Der Mittelwert der Stellerspannung ist aber

$$\bar{u}_s = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} u_s(t) dt = \frac{T_e U_1}{T_s} = D U_1 \quad (6.11)$$

Daher folgt

$$\bar{u}_s = U_2 = D U_1 \quad (6.12)$$

bzw.

$$\frac{U_2}{U_1} = D \quad (6.13)$$

Für den Mittelwert des Eingangsstroms $i_1(t)$ ergibt sich:

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_1(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_e} i_L(t) dt = \frac{T_e}{T_s} \bar{i}_L = \frac{T_e}{T_s} \bar{i}_2 \quad (6.14)$$

$$\bar{i}_1 = D \bar{i}_2 \quad (6.15)$$

Also

$$D = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\bar{i}_1}{\bar{i}_2} \quad (6.16)$$

Der Drosselstrom $i_L(t)$ ist niemals konstant, sondern schwankt stets nach einem dreieckförmigen Verlauf hin und her. Die Schwankungsbreite des Stroms i_L bestimmt sich zu

$$\Delta i_L = i_{L\max} - i_{L\min} = i_L(T_e) - i_L(T_s) = \frac{U_2}{L} T_a = \frac{D(1-D) T_s U_1}{L} \quad (6.17)$$

Die maximale Stromschwankungsbreite ergibt sich für das Tastverhältnis $D = 0,5$ zu

$$\Delta i_{L\max} = \frac{T_s U_1}{4L} \quad (6.18)$$

Damit:

$$\Delta i_L = 4D(1-D)\Delta i_{L\max} \quad (6.19)$$

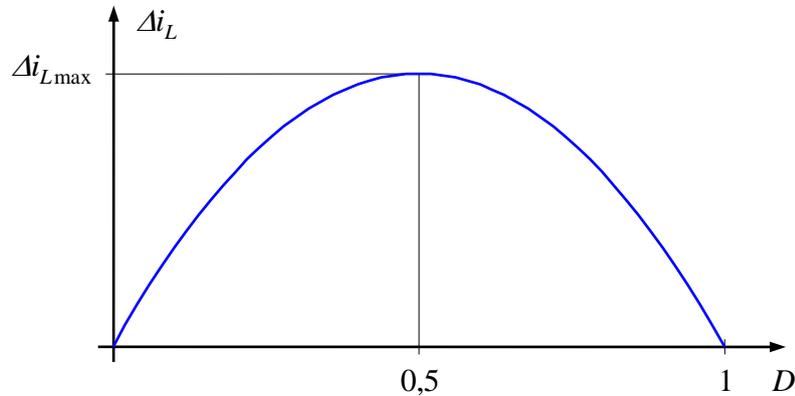


Bild 6-4: Stromschwankung über Tastverhältnis

Die Stromschwankung kann über die *Glättungsdrossel* L oder über die Schaltperiode T_s bzw. über die Schaltfrequenz $f_s = 1/T_s$ beeinflusst werden. Typische Schaltfrequenzen liegen im Bereich einiger 100 Hz (im Leistungsbereich einiger MW mit Spannungen bis zu einigen kV) bis zu einigen 100 kHz (im Kleinspannungsbereich von wenigen Volt und wenigen Watt). Im letzteren Fall kommen MOSFET statt Bipolar-Transistoren zum Einsatz

6.1.2 Mit Glättungskondensator

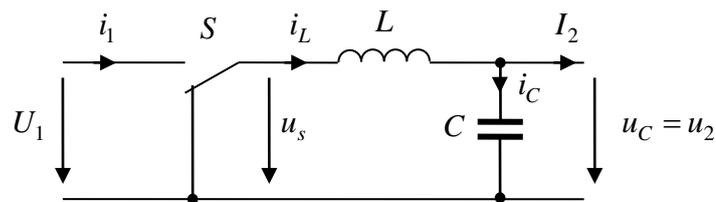


Bild 6-5: Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

Ist die Ausgangsspannung u_2 nicht von sich aus konstant, kann ein Kondensator zur Glättung eingesetzt werden. Es wird ein konstanter Laststrom

$$i_2 = I_2$$

angenommen. Im stationären Zustand muss der Kondensatorstrom

$$i_C(t) = i_L(t) - I_2 \quad (6.20)$$

im zeitlichen Mittel Null sein, $\bar{i}_C = 0$. Daher gilt

$$\bar{i}_L = I_2 \quad (6.21)$$

Die resultierende Schwankung der Kondensatorspannung

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t') dt' = \frac{1}{C} \int (i_L(t') - I_2) dt' \quad (6.22)$$

ergibt sich durch einfache geometrische Betrachtung aus den dreieckförmigen Stromkurvenformen zu (vgl. das folgende Bild 6-6)

$$\Delta u_C = u_{C_{\max}} - u_{C_{\min}} = \frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_2} (i_L(t') - I_2) dt' = \frac{1}{C} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Delta i_L (t_2 - t_1) = \frac{1}{4C} \Delta i_L \frac{T_s}{2} \quad (6.23)$$

$$\Delta u_C = \frac{D(1-D) T_s^2 U_1}{8LC} \quad (6.24)$$

Hierbei wird vereinfachend angenommen, dass die Spannungsschwankung Δu_C klein gegenüber der mittleren Kondensatorspannung $\bar{u}_C = \bar{u}_2$ ist, so dass die Rückwirkung auf den Verlauf der Ströme vernachlässigt werden kann. Die maximal mögliche Spannungsschwankung wird bei $D = 0,5$ erreicht:

$$\Delta u_{C_{\max}} = \frac{T_s^2 U_1}{32LC} \quad (6.25)$$

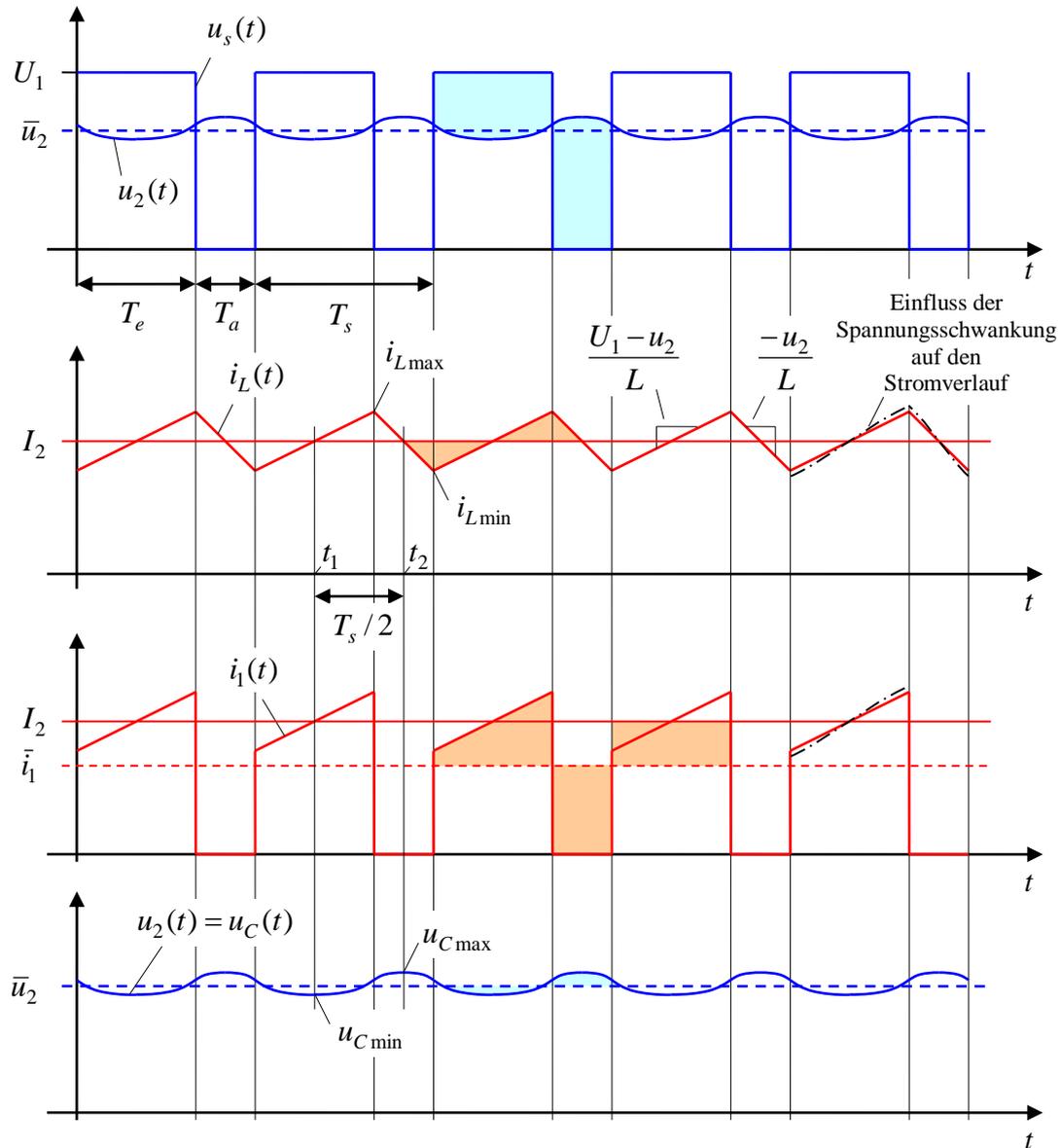


Bild 6-6: Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller mit Glättungskondensator

6.1.3 Realisierung

Der bislang idealisierte Schalter wird schaltungstechnisch durch Halbleiterbauelemente realisiert. Das Bild 6-7 zeigt eine Schaltung mit einem Transistor und einer Diode. Der Transistor wird dabei stets schaltend betrieben. Ohne auf die näheren Eigenschaften eines Transistors hier näher einzugehen, soll dies bedeuten, dass der Transistor entweder ausgeschaltet ist, also keinen Strom führt und Sperrspannung aufnimmt, oder aber im eingeschalteten Zustand den Strom leitet und dann keine Spannung an diesem abfällt. Die letzte Annahme ist natürlich eine Idealisierung und nur unvollkommen erfüllt, denn bei einem Bipolartransistor, wie er Bild 6-7 verwendet wurde, liegt bei voller Durchsteuerung im sogenannten gesättigtem Betrieb die typische Kollektor-Emitter-Restspannung bei einigen 100mV, beim sogenannten IGBT (isolated gate bipolar transistor), einem speziellen Leistungstransistor, kann diese auch im Bereich einiger Volt liegen. Dieser Restspannung-

sabfall des Transistor als auch die Flussspannung der Diode wurden bei der vorangegangenen Modellierung vernachlässigt.

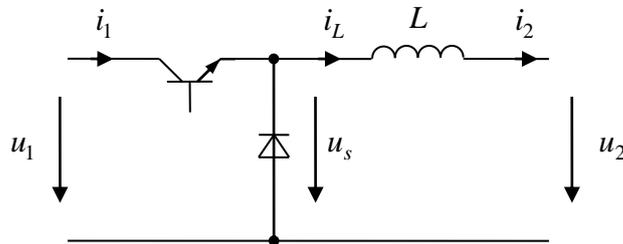


Bild 6-7: Realisierung des Tiefsetzstellers mit Transistor und Diode

Man möge überprüfen, dass diese Schaltung tatsächlich die Funktion des in Bild 6-1 dargestellten Schalters erfüllt:

Nehmen wir an, es fließe ein positiver Strom $i_L > 0$ und der Transistor sei nicht angesteuert, also im gesperrten Zustand. Dann muss der Strom den Weg durch die Diode nehmen, die also leitend ist. Im leitenden Zustand fällt an dieser nur eine geringe Flussspannung ab, also $u_s \approx 0$. Das heißt also, der in Bild 6-1 dargestellte idealisierte Schalter befindet sich in der unteren Schaltposition.

Wird nun der Transistor angesteuert, so dass dieser leitet wird und seine Längsspannung zusammenbricht, fällt nun an der Diode die Spannung (unter Vernachlässigung der Transistor-Restspannung) die Eingangsspannung an, die positiv angenommen werden soll, $u_s \approx u_1$. Damit wird die Diode in Sperrrichtung belastet, die folglich den Strom nicht mehr führen kann. Statt dessen muss der Strom i_L nun den Pfad durch den Transistor nehmen, was bedeutet, dass sich der idealisierte Schalter aus Bild 6-1 in der oberen Position befindet.

Bei dieser Kontrolle wird aber eine wichtige Bedingung deutlich: Sowohl der Strom i_L als auch die Spannung u_1 mussten als positiv angenommen werden. Bei der idealisierten Schaltung wurden zwar die Diagramme für positive Spannung und positiven Strom gezeichnet, doch war das bislang keine zwingende Annahme. Bei der hier vorliegenden Schalterrealisierung ist dies nun aber eine zwingende Voraussetzung⁶.

Insbesondere soll folgender Umstand beachtet werden: Selbst wenn der Anfangswert des Stroms i_L positiv, aber recht klein ist, kann es passieren, dass der Strom auf der fallenden Flanke den Wert Null erreicht, bevor der Transistor neu eingeschaltet wird. In diesem Fall erlischt der Strom und verharrt solange bei Null, bis der Transistor neu eingeschaltet wird. In diesem Zwischenzustand leitet weder die Diode noch der Transistor. Es ergibt sich eine Stromlücke, die dieser Betriebsart ihren Namen gibt. Die genauere Untersuchung dieses *lückenden Betriebs* sei den weiterführenden Lehrveranstaltungen vorbehalten. Hier soll nur

⁶ Andere, aufwändigere Schalterrealisierungen können durchaus auch negative Ströme und/oder Spannungen hantieren. Interessierte seien auf die weiterführenden Lehrveranstaltungen verwiesen.

darauf hingewiesen werden, dass die vorangegangene Modellierung des Tiefsetzstellers für den lückenden Betrieb seine Gültigkeit verliert und nicht angewandt werden darf. Unsere Modellierung bleibt gültig, solange der Strommittelwert größer als die halbe Schwankungsbreite ist,

$$\bar{i}_L = \bar{i}_2 > \frac{1}{2} \Delta i_L . \quad (6.26)$$

Der Fall

$$\bar{i}_L = \bar{i}_2 = \frac{1}{2} \Delta i_L \quad (6.27)$$

heißt *Lückgrenzbetrieb*, denn dann touchiert die untere Spitze des dreieckförmigen Stromverlaufs gerade die Null wie in Bild 6-9 gezeigt.

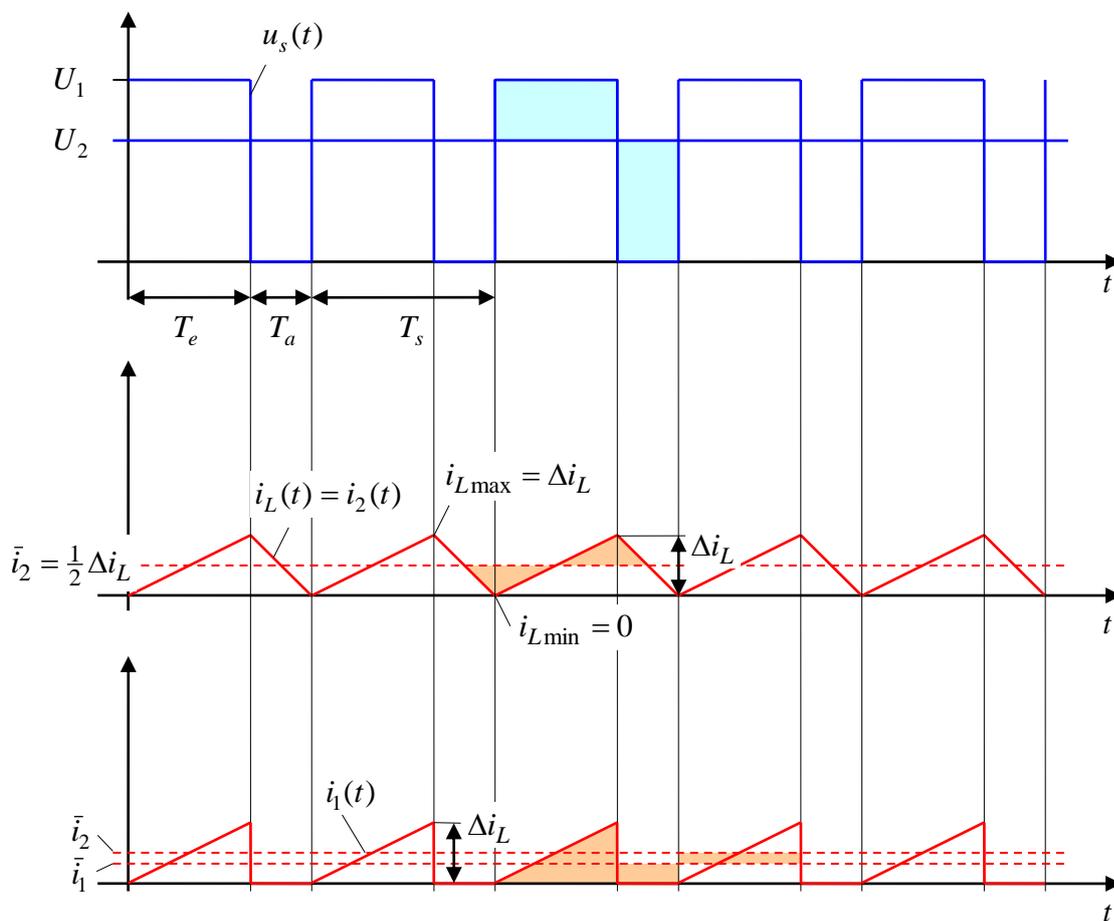


Bild 6-8: Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller im Lückgrenzbetrieb

6.2 Hochsetzsteller

6.2.1 Prinzip

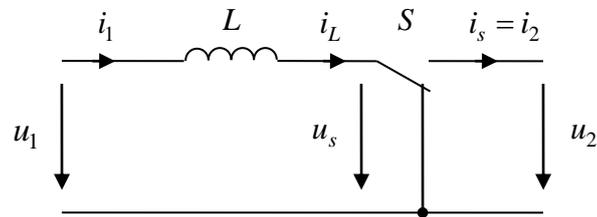


Bild 6-9: Prinzipbild des Hochsetzstellers

Annahme konstanter Spannungen:

$$u_1(t) = U_1 \quad , \quad u_2(t) = U_2 \quad .$$

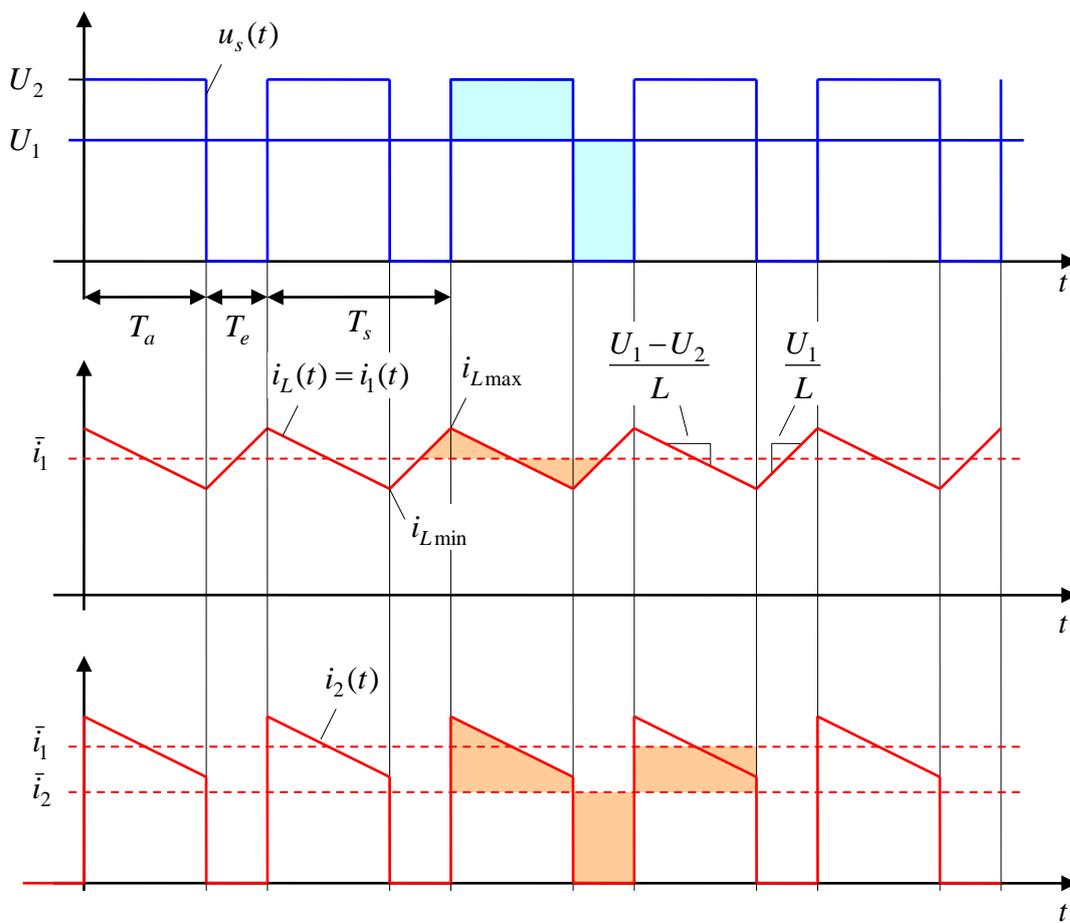


Bild 6-10: Zeitliche Verläufe beim Hochsetzsteller im stationären Zustand

Die Intervalle T_e und T_a werden hier anders definiert als beim Tiefsetzsteller: Während T_e ist der Schalter in der unteren Position, so dass $u_s = 0$; während T_a ist der Schalter in der oberen Position. Die Motivation zu dieser Definition ergibt sich erst beim Blick auf die Realisierung des Schalter durch Transistor und Diode (s. Abschnitt 6.2.3).

Tastverhältnis:

$$D = \frac{T_e}{T_s} \quad (6.1)$$

Im stationären Zustand gilt:

$$1 - D = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\bar{i}_2}{\bar{i}_1} \quad (6.28)$$

Stromschwankung:

$$\Delta i_L = i_{L\max} - i_{L\min} = \frac{U_1}{L} T_e = \frac{DT_s U_1}{L} = \frac{D(1-D) T_s U_2}{L} \quad (6.29)$$

6.2.2 Mit Glättungskondensator

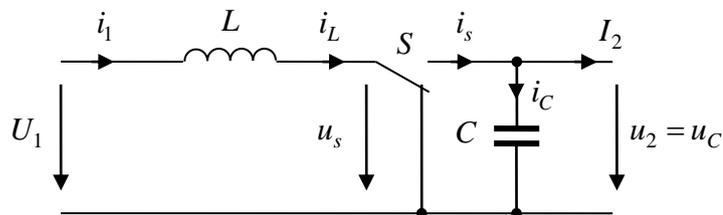


Bild 6-11: Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

Glättung der Ausgangsspannung mit Glättungskondensator. Annahme konstanten Laststroms

$$i_2(t) = I_2$$

Im stationären Zustand gilt wegen $\bar{i}_C = 0$

$$\bar{i}_s = I_2 \quad (6.30)$$

Spannungsschwankung:

$$\Delta u_C = u_{C \max} - u_{C \min} = \frac{I_2}{C} T_e = \frac{I_2 D T_s}{C} = \frac{D(1-D) T_s \bar{i}_1}{C} \quad (6.31)$$

wobei die Rückwirkung der Spannungsschwankung auf die Stromverläufe vernachlässigt wurde.

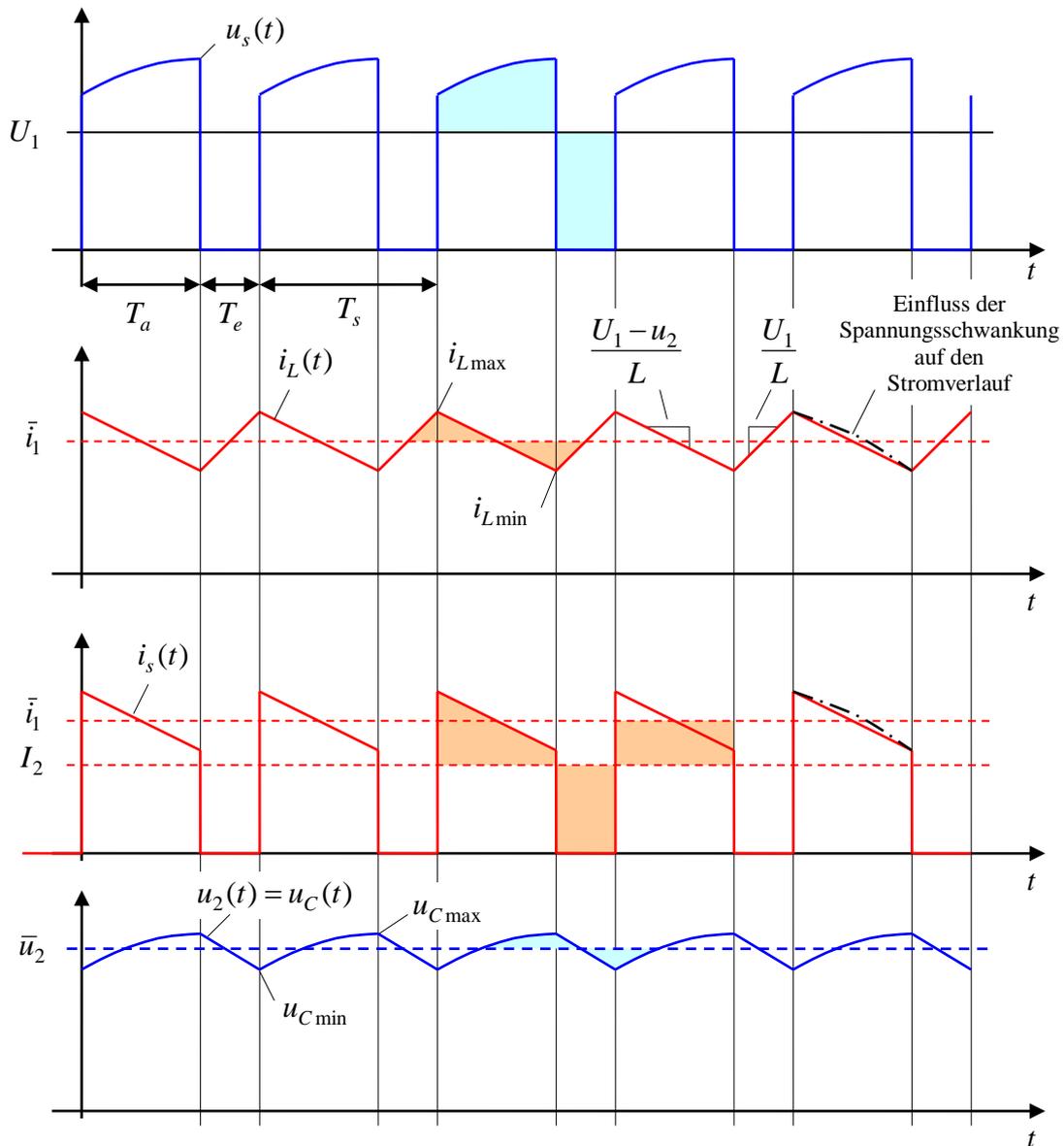


Bild 6-12: Zeitliche Verläufe beim Hochsetzsteller mit Glättungskondensator

6.2.3 Realisierung

Der Schalter wird wieder durch einen Transistor und eine Diode realisiert, wobei der eingeschaltete Transistor hier der „unteren“ Stellung des idealisierten Schalters entspricht. Auch bei dieser Realisierung müssen positive Spannungen und Ströme angenommen werden. Die Ausführungen über den lückenden und den Lückgrenzbetrieb gelten entsprechend wie in Abschnitt 6.1.3.

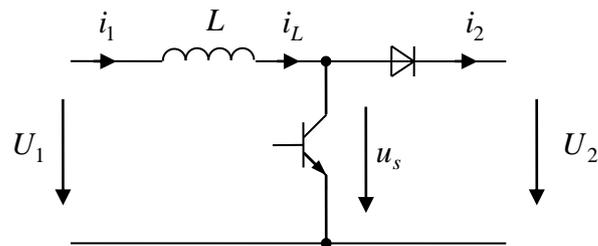


Bild 6-13: Realisierung des Hochsetzstellers mit Transistor und Diode

7 Elementare Ausgleichsvorgänge

7.1 RC-Glied

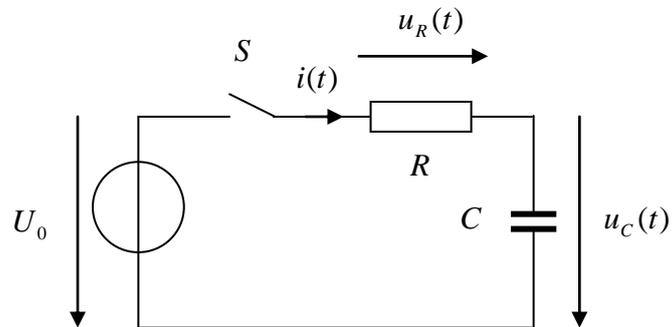


Bild 7-1: RC-Glied mit Schalter an Spannungsquelle

Wenn Schalter S geschlossen, gilt die Maschengleichung:

$$U_0 = u_R(t) + u_C(t) \quad (7.1)$$

$$u_R(t) = i(t)R \quad (7.2)$$

$$C\dot{u}_C(t) = i(t) \quad (7.3)$$

Auflösen und Einsetzen:

$$i(t) = \frac{1}{R}u_R(t) = \frac{1}{R}(U_0 - u_C(t)) \quad (7.4)$$

$$C\dot{u}_C(t) = \frac{1}{R}(U_0 - u_C(t)) \quad (7.5)$$

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = U_0 \quad (7.6)$$

Inhomogene, lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung!

Lösungsweg: Irgendeine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (partikuläre Lösung) + allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung:

Eine Lösung der inhomogenen Dgl. erraten, z.B.:

$$u_{Ci}(t) = U_0 = \text{const.} \quad (7.7)$$

Lösung der homogenen Dgl.

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0 \quad (7.8)$$

durch Exponentialansatz:

$$u_{Ch}(t) = u_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.9)$$

Einsetzen des Ansatzes in die Differenzialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} -RC \frac{1}{\tau} u_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau}} + u_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0 \\ \left[-RC \frac{1}{\tau} + 1 \right] u_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Die Exponentialfunktion ist niemals Null. Unter der Annahme $u_{Ch} \neq 0$ muss also die Klammer gleich Null sein und es folgt

$$\tau = RC \quad (7.11)$$

Die Konstante τ heißt Zeitkonstante des RC -Gliedes. (Diskutieren Sie auch den Fall $u_{Ch} = 0$!)

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{Ch}(t) + u_{Ci}(t) \\ &= u_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Die Konstante u_{Ch0} ist immer noch unbekannt. Diese Konstante wird nun durch die Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingung bestimmt: Der Schalter schalte bei $t = 0$, Anfangsspannung des Kondensators sei

$$u_C(0) = u_{C0} \quad (7.13)$$

Also:

$$u_{C0} = u_{Ch}(0) + u_{Ci}(0) = u_{Ch0} + U_0 \quad (7.14)$$

$$u_{Ch0} = u_{C0} - U_0 \quad (7.15)$$

Damit findet man als endgültige Lösung für die Kondensatorspannung:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= (u_{C0} - U_0) e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \\ &= u_{C0} e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Der stationäre Endwert ist

$$u_C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = U_0 \quad (7.17)$$

Aus der Spannung lässt sich nun auch der Strom berechnen:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \dot{u}_C(t) \\ &= -\frac{C}{\tau} (u_{C0} - U_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{1}{R} (U_0 - u_{C0}) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

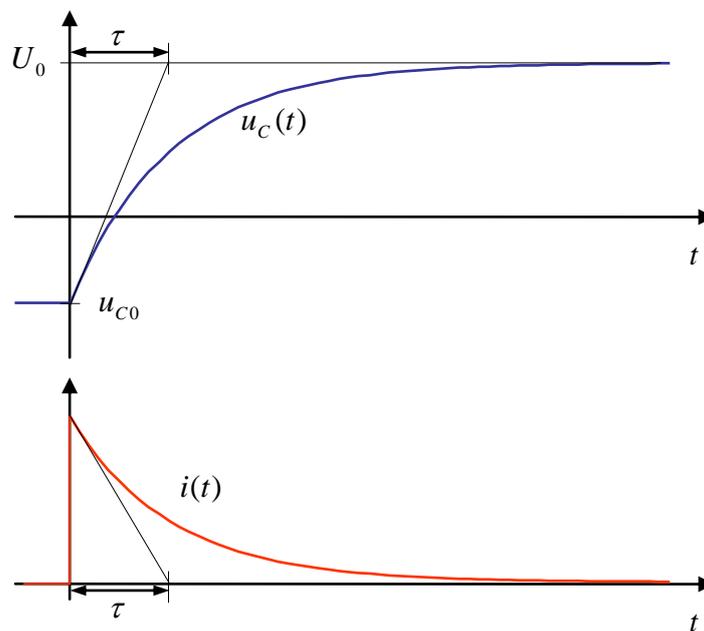


Bild 7-2: Ausgleichsvorgang beim RC-Glied

Speziell bei entladendem Kondensator als Anfangszustand:

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (7.19)$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.20)$$

7.2 *RL*-Glied

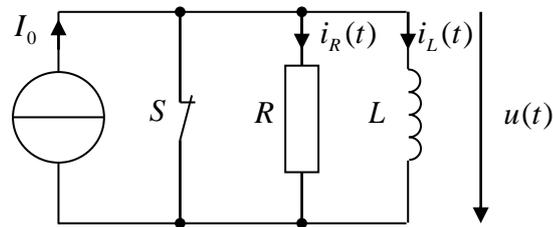


Bild 7-3: *RL*-Glied mit Schalter an Stromquelle

Wenn Schalter S geöffnet, Knotengleichung:

$$I_0 = i_R(t) + i_L(t) \quad (7.21)$$

$$u(t) = i_R(t)R \quad (7.22)$$

$$L\dot{i}_L(t) = u(t) \quad (7.23)$$

Auflösen und Einsetzen:

$$u(t) = Ri_R(t) = R(I_0 - i_L(t)) \quad (7.24)$$

$$L\dot{i}_L(t) = R(I_0 - i_L(t)) \quad (7.25)$$

$$\frac{L}{R}\dot{i}_L(t) + i_L(t) = I_0 \quad (7.26)$$

Vorgehen analog wie beim *RC*-Glied.

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (7.27)$$

heißt Zeitkonstante des *RL*-Gliedes.

Allgemeine Lösung:

$$i_L(t) = i_{Lh0}e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \quad (7.28)$$

Anpassen der Lösung an die Anfangsbedingung: Schalter schalte bei $t = 0$, Spulenanfangsstrom sei

$$i_L(0) = i_{L0} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= (i_{L0} - I_0) e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \\
 &= i_{L0} e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{7.30}$$

Stationärer Endwert:

$$i_L(\infty) = I_0 \tag{7.31}$$

Berechnung der Spannung:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= L \dot{i}_L(t) \\
 &= -\frac{L}{\tau} (i_{L0} - I_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= R(I_0 - i_{L0}) e^{-\frac{t}{\tau}}
 \end{aligned}
 \tag{7.32}$$

Speziell bei stromloser Drossel als Anfangszustand:

$$i_L(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \tag{7.33}$$

$$u(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.34}$$

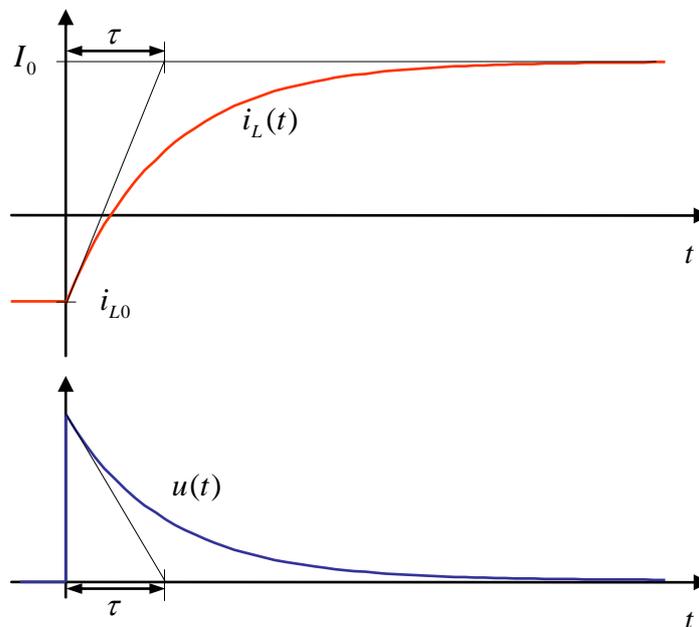


Bild 7-4: Ausgleichsvorgang beim RL -Glied

7.3 Anfangs-Endwert-Darstellung für *RC*- und *RL*-Glieder

Bei einfachen *RC*- und *RL*-Gliedern folgt der Ausgleichsvorgang immer dem gleichen Schema:

Für die Größe, die die Energie des Speichers beschreibt, also der Strom bei der Drossel oder die Spannung beim Kondensator, gilt stets:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + x_\infty \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \quad (7.35)$$

Anfangswert:

$$x_0 = x(t_0) \quad (7.36)$$

Stationärer Endwert:

$$x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (7.37)$$

- Bestimmung des Anfangswertes direkt aus Maschen- oder Knotengleichung oder der Anfangswert ist direkt gegeben.
- Bestimmung des stationären Endwerts: Kondensator gedanklich durch idealen Isolator, Drossel durch idealen Leiter ersetzen und Strom- bzw. Spannungswert an diesen Klemmen durch Netzwerkanalyse bestimmen.
- Bestimmung der Zeitkonstanten: Kondensator bzw. Spule aus dem Netzwerk herauslösen, dann den wirksamen Widerstand der restlichen Schaltung an den freigeschnittenen Klemmen bestimmen.

8 Schwingkreise

8.1 LC-Schwingkreis

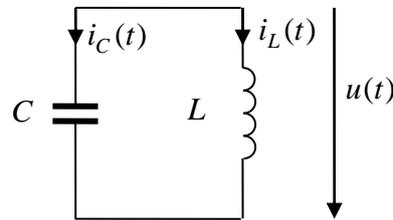


Bild 8-1: Schwingkreis

$$C\dot{u}_C = i_C \quad (8.1)$$

$$L\dot{i}_L = u_L \quad (8.2)$$

$$u_C = u_L = u \quad (8.3)$$

$$-i_C = i_L = i \quad (8.4)$$

$$C\ddot{u} = -\dot{i} = -\frac{1}{L}u \quad (8.5)$$

$$LC\ddot{u} + u = 0 \quad (8.6)$$

Die Spannung u gehorcht einer autonomen linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung! (Stellen Sie ebenso eine Differentialgleichung für den Strom auf!)

Es wird wieder eine Exponentialfunktion als Lösung angesetzt. Später wird sich herausstellen, dass es komplexwertige Lösungen gibt. Die ggf. komplexe Konstante \underline{U} wird daher schon jetzt mit einem Unterstrich gekennzeichnet:

$$u = \underline{U}e^{st} \quad (8.7)$$

$$\ddot{u} = \underline{U}s^2e^{st} \quad (8.8)$$

$$LC\underline{U}s^2e^{st} + \underline{U}e^{st} = 0 \quad (8.9)$$

Die resultierende Gleichung in s heißt *charakteristische Gleichung* bzw. das darin vorkommende Polynom wird *charakteristisches Polynom* genannt:

$$LCs^2 + 1 = 0 \quad (8.10)$$

$$s^2 = -\frac{1}{LC} \quad (8.11)$$

$$s_{1,2} = \pm \frac{j}{\sqrt{LC}} \quad (8.12)$$

Die Lösungen s_1, s_2 der charakteristischen Gleichung heißen *Eigenwerte*. Obwohl s_1, s_2 also imaginäre Zahlen sein können, werden sie üblicherweise nicht mit einem Unterstrich gekennzeichnet.

Abkürzungen:

Kennkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.13)$$

Kennwiderstand:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.14)$$

Allgemeine Lösung

$$u(t) = \underline{U}_1 e^{j\omega_0 t} + \underline{U}_2 e^{-j\omega_0 t} \quad (8.15)$$

Da die Lösung reell sein soll, müssen die Koeffizienten $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ zueinander konjugiert komplex sein⁷:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1^* \quad (8.16)$$

Darstellung mit Sinus und Kosinus:

$$u(t) = U_c \cos \omega_0 t + U_s \sin \omega_0 t \quad (8.17)$$

$$U_c = 2 \operatorname{Re}(\underline{U}_1) \quad (8.18)$$

$$U_s = -2 \operatorname{Im}(\underline{U}_1) \quad (8.19)$$

Strom:

$$i(t) = -C\dot{u}(t) = C\omega_0 U_c \sin \omega_0 t - C\omega_0 U_s \cos \omega_0 t \quad (8.20)$$

⁷ $\underline{z}^* = x - jy$ bezeichne die zu $\underline{z} = x + jy$ konjugiert komplexe Zahl

Anfangsbedingungen:

$$i_0 = i(0) = -C\omega_0 U_s \quad (8.21)$$

$$u_0 = u(0) = U_c \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= i_0 \cos \omega_0 t + C\omega_0 u_0 \sin \omega_0 t \\ &= i_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{Z_0} u_0 \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos \omega_0 t - \frac{1}{C\omega_0} i_0 \sin \omega_0 t \\ &= u_0 \cos \omega_0 t - Z_0 i_0 \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (8.24)$$

Betrachtet man die Schwingungsamplituden von Strom und Spannung,

$$\hat{u} = \sqrt{u_0^2 + Z_0^2 i_0^2} \quad (8.25)$$

$$\hat{i} = \sqrt{i_0^2 + \frac{u_0^2}{Z_0^2}} \quad (8.26)$$

so ergibt sich, dass für deren Verhältnis gerade der Kennwiderstand maßgeblich ist:

$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = Z_0 \quad (8.27)$$

Energie im Schwingkreis:

$$\begin{aligned} w(t) &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{1}{2} L i^2(t) + \frac{1}{2} C u^2(t) \\ &= \frac{1}{2} L \left(i_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{Z_0} u_0 \sin \omega_0 t \right)^2 + \frac{1}{2} C (u_0 \cos \omega_0 t - Z_0 i_0 \sin \omega_0 t)^2 \\ &= \frac{1}{2} L i_0^2 + \frac{1}{2} C u_0^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (8.28)$$

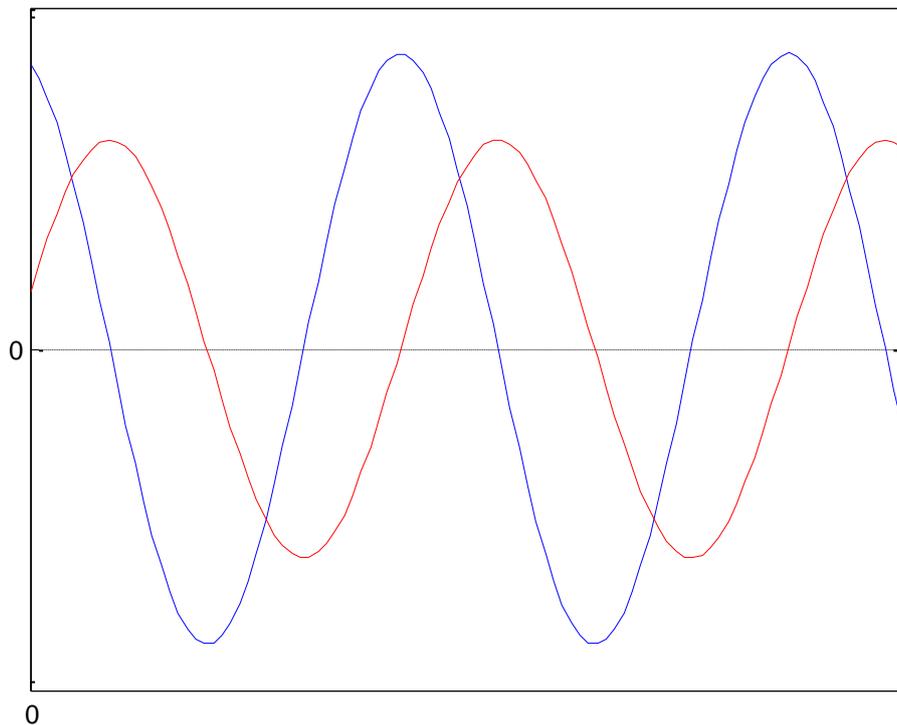


Bild 8-2: Zeitliche Verläufe von Spannung und Strom des LC-Schwingkreises

Fragen:

- Welche Kurve zeigt den Strom, welche die Spannung?
- Kennzeichnen Sie die Anfangswerte!
- Identifizieren Sie ω_0 !
- Skizzieren Sie die Energieverläufe im Kondensator und in der Drossel!

8.2 RLC-Parallelschwingkreis

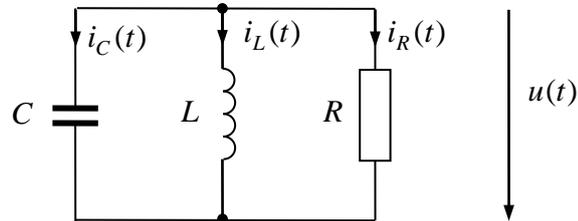


Bild 8-3: RLC-Parallelschwingkreis

$$i_C + i_L + i_R = 0 \quad (8.29)$$

$$\dot{i}_C + \dot{i}_L + \dot{i}_R = 0 \quad (8.30)$$

$$C\ddot{u} + \frac{1}{L}u + \frac{1}{R}\dot{u} = 0 \quad (8.31)$$

$$LC\ddot{u} + \frac{L}{R}\dot{u} + u = 0 \quad (8.32)$$

Exponentialansatz:

$$u = \underline{U}e^{st} \quad (8.33)$$

$$LC\underline{U}s^2e^{st} + \frac{L}{R}\underline{U}se^{st} + \underline{U}e^{st} = 0 \quad (8.34)$$

$$LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1 = 0 \quad (8.35)$$

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.36)$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}} \quad (8.37)$$

Abkürzungen:

Kennkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.38)$$

Kennwiderstand:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.39)$$

Dämpfung oder Dämpfungsgrad⁸:

$$d = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \frac{Z_0}{R} \quad (8.40)$$

Mit diesen Kennzahlen lassen sich die Differenzialgleichung und die charakteristische Gleichung in den Standardformen

$$\ddot{u} + 2d\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (8.41)$$

$$s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (8.42)$$

schreiben. Es folgen die Wurzeln (Eigenwerte) der charakteristischen Gleichung als

$$s_{1,2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \quad (8.43)$$

Allgemeine Lösung für die Spannung

$$u(t) = \underline{U}_1 e^{s_1 t} + \underline{U}_2 e^{s_2 t} \quad (8.44)$$

Allgemeine Lösung für die Ströme

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{1}{R} [\underline{U}_1 e^{s_1 t} + \underline{U}_2 e^{s_2 t}] \quad (8.45)$$

$$i_C(t) = C\dot{u}(t) = C[\underline{U}_1 s_1 e^{s_1 t} + \underline{U}_2 s_2 e^{s_2 t}] \quad (8.46)$$

$$i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t) = -\left(Cs_1 + \frac{1}{R}\right)\underline{U}_1 e^{s_1 t} - \left(Cs_2 + \frac{1}{R}\right)\underline{U}_2 e^{s_2 t} \quad (8.47)$$

⁸ In der Literatur findet sich für den Dämpfungsgrad auch die alternative Definition $d' = Z_0/R$. Hier wird die in der Systemtheorie und Regelungstechnik übliche Definition der Dämpfung verwendet.

Fallunterscheidung:

Schwache Dämpfung: $d < 1$, die Eigenwerte bilden ein konjugiert komplexes Paar:

$$s_1 = s_2^* \quad (8.48)$$

$$s_{1,2} = -\omega_0 d \pm j\omega_0 \sqrt{1-d^2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_d \quad (8.49)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0 d} \quad (8.50)$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-d^2} \quad (8.51)$$

Außerdem muss gelten:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2^* \quad (8.52)$$

Umrechnung der Exponentialdarstellung in Darstellung mit Sinus und Kosinus:

$$u(t) = \underline{U}_1 e^{s_1 t} + \underline{U}_2 e^{s_2 t} = \underline{U}_1 e^{s_1 t} + \underline{U}_1^* e^{s_1^* t} = (U_c \cos \omega_d t + U_s \sin \omega_d t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.53)$$

$$U_c = 2 \operatorname{Re}(\underline{U}_1) \quad (8.54)$$

$$U_s = -2 \operatorname{Im}(\underline{U}_1) \quad (8.55)$$

Ströme:

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{1}{R} (U_c \cos \omega_d t + U_s \sin \omega_d t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.56)$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \dot{u}(t) = C \left[\omega_d (-U_c \sin \omega_d t + U_s \cos \omega_d t) - \frac{1}{\tau} (U_c \cos \omega_d t + U_s \sin \omega_d t) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= C \left[\left(\omega_d U_s - \frac{1}{\tau} U_c \right) \cos \omega_d t - \left(\omega_d U_c + \frac{1}{\tau} U_s \right) \sin \omega_d t \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{R} (U_c \cos \omega_d t + U_s \sin \omega_d t) e^{-\frac{t}{\tau}} - C \left[\left(\omega_d U_s - \frac{1}{\tau} U_c \right) \cos \omega_d t - \left(\omega_d U_c + \frac{1}{\tau} U_s \right) \sin \omega_d t \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \left[\left(-\omega_d C U_s + \left\langle \frac{C}{\tau} - \frac{1}{R} \right\rangle U_c \right) \cos \omega_d t + \left(\omega_d C U_c + \left\langle \frac{C}{\tau} - \frac{1}{R} \right\rangle U_s \right) \sin \omega_d t \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \left[\left(-\omega_d C U_s - \frac{1}{2R} U_c \right) \cos \omega_d t + \left(\omega_d C U_c - \frac{1}{2R} U_s \right) \sin \omega_d t \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (8.58)$$

Anfangsbedingungen:

$$u(0) = u_0 = U_c \quad (8.59)$$

$$i_L(0) = i_{L0} = -\omega_d C U_s - \frac{1}{2R} U_c \quad (8.60)$$

$$\Rightarrow U_s = -\frac{i_{L0}}{\omega_d C} - \frac{u_0}{2\omega_d RC} \quad (8.61)$$

Zeitlicher Verlauf:

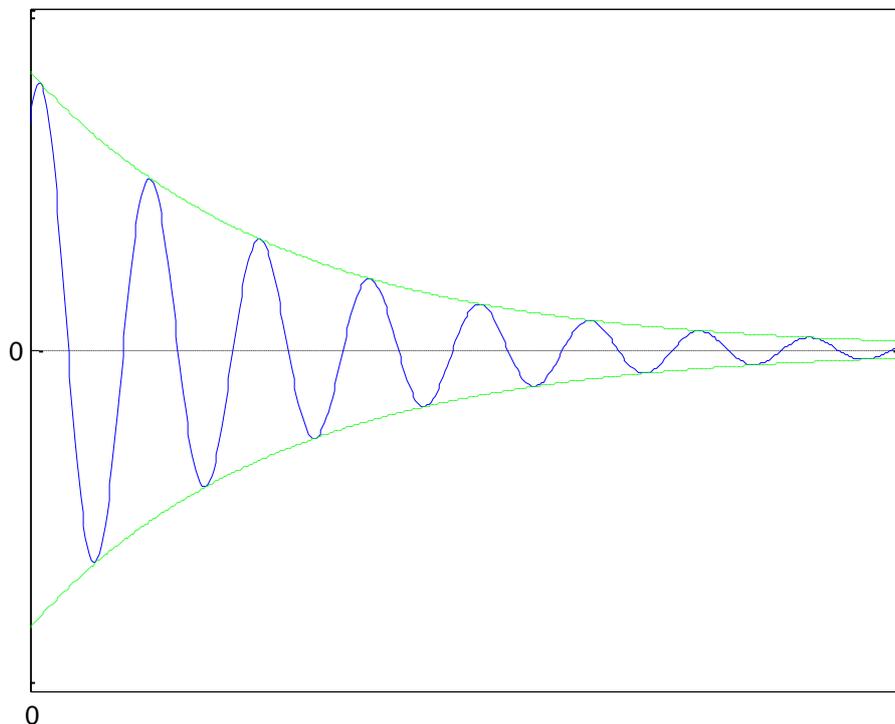


Bild 8-4: Beispiel für Verlauf der Spannung beim *RLC*-Parallelschwingkreis im Fall schwacher Dämpfung $d < 1$

- Skizzieren Sie im Spannungsverlauf die Kennwerte τ , ω_d !
- Skizzieren Sie die Verläufe der Ströme i_R , i_L , i_C .

Es stellt sich also eine gedämpfte Schwingung ein. Wir sprechen im Fall schwacher Dämpfung auch vom *Schwingfall*.

Starke Dämpfung: $d > 1$: beide Eigenwerte sind reell:

$$s_{1,2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \quad (8.62)$$

Ebenso die Konstanten

$$\underline{U}_{1,2} = U_{1,2} \quad (8.63)$$

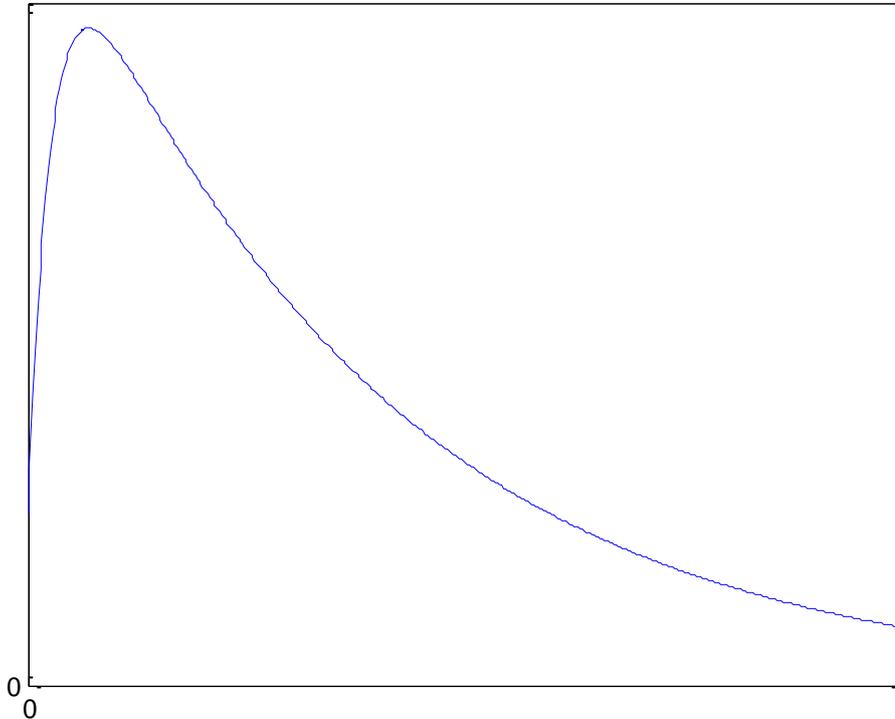


Bild 8-5: Beispiel für Verlauf der Spannung beim *RLC*-Parallelschwingkreis im Fall starker Dämpfung $d > 1$

Es findet keine Schwingung statt, es liegt bei starker Dämpfung der *aperiodische* Fall vor.

Aperiodischer Grenzfall: $d = 1$:

Der aperiodische *Grenzfall* ist die Grenze des aperiodischen Falls. Dann sind beide Eigenwerte reell und gleich:

$$s_1 = s_2 = -\omega_0 \quad (8.64)$$

In diesem Fall stellen wir fest, dass über den üblichen Exponentialansatz mit diesen Eigenwerten weiterhin eine, aber eben nur *eine* Lösung der Differentialgleichung gefunden werden kann, da beide Eigenwerte gleich sind. Die Anpassung an *zwei* unabhängige Anfangsbedingungen (Spulenstrom und Kondensatorspannung) kann damit nicht gelingen. Das ist ein Hinweis, dass das Lösungssystem noch nicht vollständig ist. Für den aperiodischen Grenzfall ist der Lösungsansatz folgendermaßen zu erweitern:

$$u = U_0 e^{st} + U_1 t e^{st} \quad (8.65)$$

Dies möge durch Einsetzen in die Differenzialgleichung verifiziert werden. Weitere Details können den mathematischen Grundlagenlehrbüchern entnommen werden. In der Praxis lässt sich der Fall $d = 1$ wegen nicht vermeidbarer Bauteiltoleranzen ohnehin nie exakt einstellen.

Zeichnen Sie die Lage der Eigenwerte s_1, s_2 für alle Dämpfungsfälle in Abhängigkeit von d bei konstanter Kennkreisfrequenz ω_0 in der komplexen Ebene!

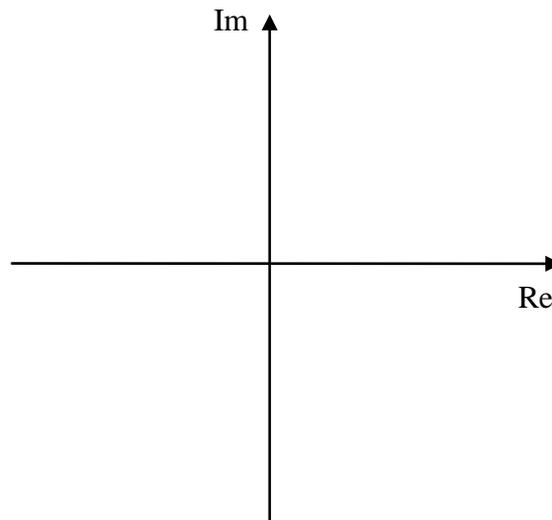


Bild 8-6: Lage der Eigenwerte in Abhängigkeit der Dämpfung
(zu vervollständigen)

8.3 RLC-Reihenschwingkreis

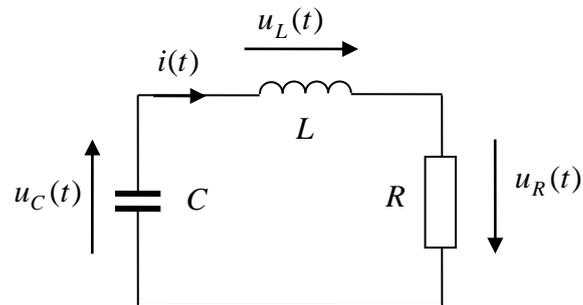


Bild 8-7: RLC-Reihenschwingkreis

$$u_C + u_L + u_R = 0 \quad (8.66)$$

$$\dot{u}_C + \dot{u}_L + \dot{u}_R = 0 \quad (8.67)$$

$$\frac{1}{C}i + L\ddot{i} + Ri = 0 \quad (8.68)$$

$$LC\ddot{i} + RC\dot{i} + i = 0 \quad (8.69)$$

Exponentialansatz:

$$i(t) = \underline{I}e^{st} \quad (8.70)$$

Charakteristische Gleichung:

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \quad (8.71)$$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.72)$$

Eigenwerte:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (8.73)$$

Abkürzungen:

Kennkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.74)$$

Kennwiderstand:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.75)$$

Dämpfung:

$$d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} \quad (8.76)$$

Mit diesen Abkürzungen lassen sich Differenzialgleichung und charakteristische Gleichung schreiben als

$$\ddot{i} + 2d\omega_0\dot{i} + \omega_0^2 i = 0 \quad (8.77)$$

$$s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (8.78)$$

die somit genau gleich lauten wie die des *RLC*-Parallelschwingkreises. Lösungen:

$$s_{1,2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \quad (8.79)$$

Allgemeine Lösung für den Strom:

$$i(t) = \underline{I}_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 e^{s_2 t} \quad (8.80)$$

Allgemeine Lösung für die Spannungen:

$$u_R(t) = Ri(t) = R[\underline{I}_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 e^{s_2 t}] \quad (8.81)$$

$$u_L(t) = Li\dot{(t)} = L[\underline{I}_1 s_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 s_2 e^{s_2 t}] \quad (8.82)$$

$$u_C(t) = -u_R(t) - u_L(t) = -(Ls_1 + R)\underline{I}_1 e^{s_1 t} - (Ls_2 + R)\underline{I}_2 e^{s_2 t} \quad (8.83)$$

Weitere Diskussion der Lösungen wie beim Parallelschwingkreis! Siehe dort.

8.4 Aufschaltung von sprungförmigen Größen auf RLC -Netzwerke

In den vorangegangenen Abschnitten wurden sogenannte *Anfangswertprobleme* von Netzwerken ohne äußere Einspeisungen behandelt. Werden Spannungen oder Ströme zusätzlich von außen aufgeschaltet, wird das Superpositionsverfahren angewendet. Dieses darf wegen der Linearität des Gleichungssystems angewendet werden.

Beispiel:

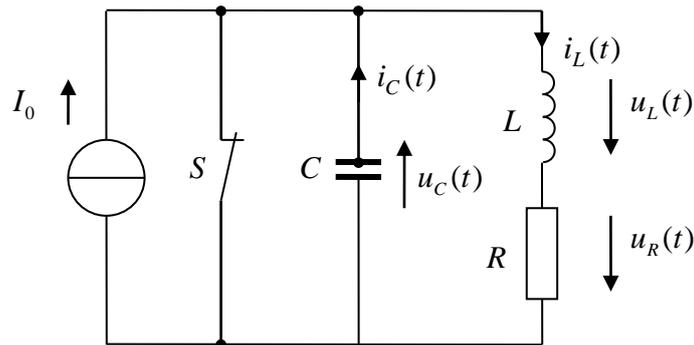


Bild 8-8: Ausgleichsvorgang einer RLC -Schaltung

Bei *geschlossenem* Schalter S ist

$$u_C = 0 \quad (8.84)$$

sowie

$$u_L + u_R = 0 \quad (8.85)$$

$$L\dot{i}_L + Ri_L = 0 \quad (8.86)$$

Es findet also nur ein einfacher Ausgleichsvorgang des RL -Gliedes mit exponentiellem Verlauf und Abklingzeitkonstante L/R statt; es gibt keine Schwingung. Der Strom der Stromquelle wird ebenfalls über den Schalter kurzgeschlossen. Ist der Schalter genügend lange geschlossen, wird der Strom i_L Null. Also seien

$$u_C(0) = u_{C0} = 0 \quad (8.87)$$

$$i_L(0) = i_{L0} = 0 \quad (8.88)$$

als Anfangswerte für den Zeitpunkt $t = 0$ angenommen, zu dem der Schalter *geöffnet* wird. Nun gilt die Maschengleichung

$$u_C + u_L + u_R = 0 \quad (8.89)$$

bzw. für die Zeitableitung

$$\dot{u}_C + \dot{u}_L + \dot{u}_R = 0 \quad (8.90)$$

Einsetzen der Bauelementgleichungen (konstitutive Gleichungen) führt zu der *inhomogenen* Differenzialgleichung

$$\frac{1}{C}(i_L - I_0) + L\ddot{i}_L + R\dot{i}_L = 0 \quad (8.91)$$

$$LC\ddot{i}_L + RC\dot{i}_L + i_L = I_0 \quad (8.92)$$

Der homogene Teil der Differenzialgleichung ist der des *Reihenschwingkreises* (!).

Lösungsweg für die inhomogene Differenzialgleichung:

1. Homogene Lösung (ohne äußeren Strom) siehe vorangegangener Abschnitt:

$$i_{Lh}(t) = \underline{I}_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 e^{s_2 t} \quad (8.93)$$

2. Irgendeine partikuläre Lösung, am einfachsten die *stationäre Lösung*:

$$i_{Li}(t) = I_0 = \text{const.} \quad (8.94)$$

3. Allgemeine Lösung durch Superposition:

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Li}(t) = I_0 + \underline{I}_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 e^{s_2 t} \quad (8.95)$$

Daraus folgen die Spannungen:

$$u_R(t) = R i_L(t) = R \left[I_0 + \underline{I}_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 e^{s_2 t} \right] \quad (8.96)$$

$$u_L(t) = L \dot{i}_L(t) = L \left[\underline{I}_1 s_1 e^{s_1 t} + \underline{I}_2 s_2 e^{s_2 t} \right] \quad (8.97)$$

$$u_C(t) = -u_R(t) - u_L(t) = -R I_0 - (L s_1 + R) \underline{I}_1 e^{s_1 t} - (L s_2 + R) \underline{I}_2 e^{s_2 t} \quad (8.98)$$

4. Anfangsbedingungen

$$0 = i_L(0) = i_{L0} = I_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (8.99)$$

$$0 = u_C(0) = u_{C0} = -R I_0 - (L s_1 + R) \underline{I}_1 - (L s_2 + R) \underline{I}_2 \quad (8.100)$$

Die weitere Rechnung beschränkt sich auf den Fall schwacher Dämpfung $d < 1$. Dann gilt

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2^* \quad (8.101)$$

$$s_1 = s_2^* \quad (8.102)$$

Also folgt aus der Anfangsbedingung für den Spulenstrom

$$I_c = 2 \operatorname{Re} \underline{I}_1 = -I_0 \quad (8.103)$$

und aus der Anfangsbedingung für die Kondensatorspannung

$$0 = -RI_0 - 2 \operatorname{Re}[(Ls_1 + R)\underline{I}_1] \quad (8.104)$$

Mit

$$s_1 = \omega_0 \left(-d + j\sqrt{1-d^2} \right) \quad (8.105)$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -RI_0 - 2 \operatorname{Re}[(Ls_1 + R)\underline{I}_1] = -RI_0 - 2R \operatorname{Re} \underline{I}_1 - 2L \operatorname{Re}[s_1 \underline{I}_1] \\ &= -2L \left(-\omega_0 d \operatorname{Re} \underline{I}_1 - \omega_0 \sqrt{1-d^2} \operatorname{Im} \underline{I}_1 \right) \end{aligned} \quad (8.106)$$

Also

$$\operatorname{Im} \underline{I}_1 = -\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \operatorname{Re} \underline{I}_1 \quad (8.107)$$

bzw.

$$I_s = \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} I_c = -\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} I_0 \quad (8.108)$$

Vollständige Lösung mit angepassten Anfangsbedingungen für schwache Dämpfung in Darstellung mit Sinus- und Kosinustermen für $t > 0$:

$$i_L(t) = I_0 \left[1 - \left(\cos \omega_d t + \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \sin \omega_d t \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (8.109)$$

mit

$$\tau = \frac{1}{d\omega_0} = \frac{2Z_0}{R\omega_0} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{LC} = 2 \frac{L}{R} \quad (8.110)$$

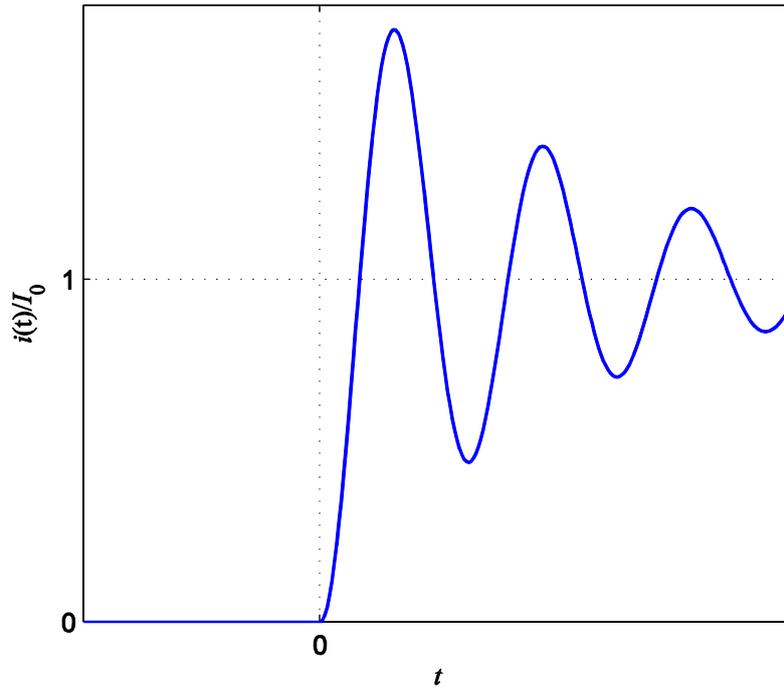


Bild 8-9: Ausgleichsvorgang des Stroms

Wie verhält sich die Kondensatorspannung? Leiten Sie die Gleichungen her und skizzieren Sie den Verlauf.

9 Sinusförmige Vorgänge in linearen Netzwerken

9.1 Sinusförmige Größen

Sinusförmige Größen sind spezielle periodische Größen; sie lassen sich auf verschiedene Arten schreiben:

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9.1)$$

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (9.2)$$

$$x(t) = X_c \cos \omega t + X_s \sin \omega t \quad (9.3)$$

Die Darstellungen sind äquivalent und in einander umrechenbar. Letztendlich wird eine sinusförmige Größe durch nur drei Konstanten charakterisiert:

- die Amplitude \hat{x} ,
- die Kreisfrequenz ω ,
- die Phasenverschiebung φ_0 .

Umrechnung dieser Konstanten ausgehend vom Additionstheorem:

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) = \hat{x} [\cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0] \quad (9.4)$$

$$\hat{x} = \sqrt{X_c^2 + X_s^2} \quad (9.5)$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{X_s}{X_c} \Leftrightarrow \varphi_0 = \begin{cases} -\tan^{-1}(X_s / X_c) & \text{für } X_c > 0 \\ \pi - \tan^{-1}(X_s / X_c) & \text{für } X_c < 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

bzw.

$$X_c = \hat{x} \cos \varphi_0 \quad (9.7)$$

$$X_s = -\hat{x} \sin \varphi_0 \quad (9.8)$$

Weitere abgeleitete Konstanten:

- Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{\omega}$
- Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$
- Effektivwert $X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

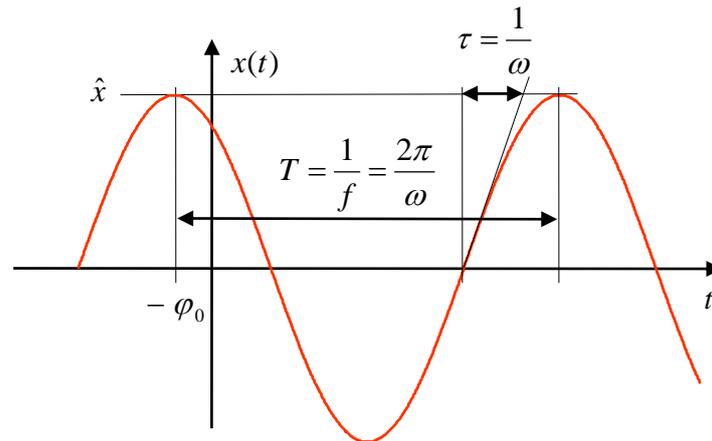


Bild 9-1: Sinusförmiges Signal

Frequenz vs. Kreisfrequenz: Die Frequenz f wird in *Hertz*⁹, Abkürzung: 1 Hz = 1/s, gemessen. Die Kreisfrequenz ω unterscheidet sich nur um den dimensionslosen Faktor 2π von der Frequenz f . Als Maßeinheit der Kreisfrequenz wird das Hertz üblicherweise nicht verwendet, sondern stets 1/s oder s^{-1} , geschrieben.

Einige Eigenschaften sinusförmiger Größen:

- Der Mittelwert einer sinusförmigen Größe über eine Periode ist Null: $\bar{x} = 0$
- Seien $x_1(t), x_2(t)$ sinusförmige Größen der *gleichen Frequenz* ω , so ist die Superposition $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ ebenfalls sinusförmig mit dieser Frequenz
- Die Ableitung einer sinusförmigen Größe nach der Zeit ist ebenfalls sinusförmig mit gleicher Frequenz: $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\hat{x} \omega \sin(\omega t + \varphi_0)$
- Das Produkt zweier sinusförmigen Größen mit beliebigen Frequenzen ist als Summe zweier sinusförmiger Größen darstellbar, wobei die Summen- und Differenzfrequenzen auftreten (Additionstheorem der Trigonometrie):

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (9.9)$$

$$\Rightarrow$$

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = \frac{\hat{x}_1 \hat{x}_2}{2} [\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)] \quad (9.10)$$

⁹ Dies hat nichts mit dem Herzschlag, sondern mit *Heinrich Hertz* zu tun, der die aus der Maxwellschen Theorie resultierenden elektromagnetischen Wellen erzeugte und nachwies.

9.2 Darstellung sinusförmiger Größen mit komplexen Zeigern

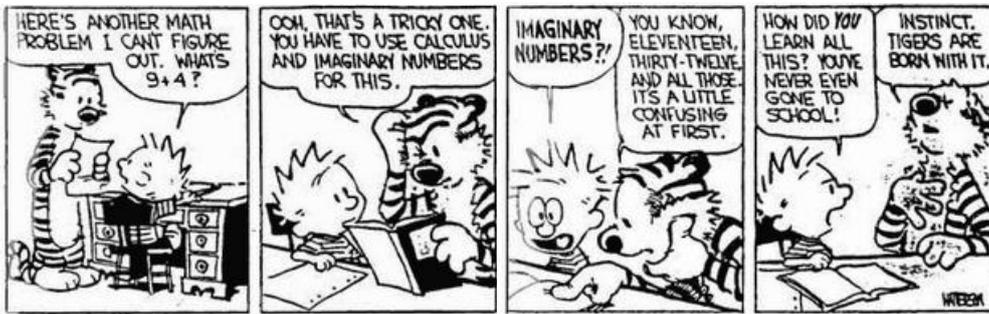


Bild 9-2: Zur Didaktik imaginärer Zahlen

Imaginäre Einheit: i, j (in der Elektrotechnik wird j bevorzugt)

Anbindung an die reellen Zahlen: $j^2 = -1$

Darstellung komplexer Zahlen nach Real- und Imaginärteil: $\underline{x} = x_r + jx_i$

Darstellung komplexer Zahlen nach Betrag und Winkel (Darstellung nach Euler): $\underline{x} = \hat{x}e^{j\phi}$

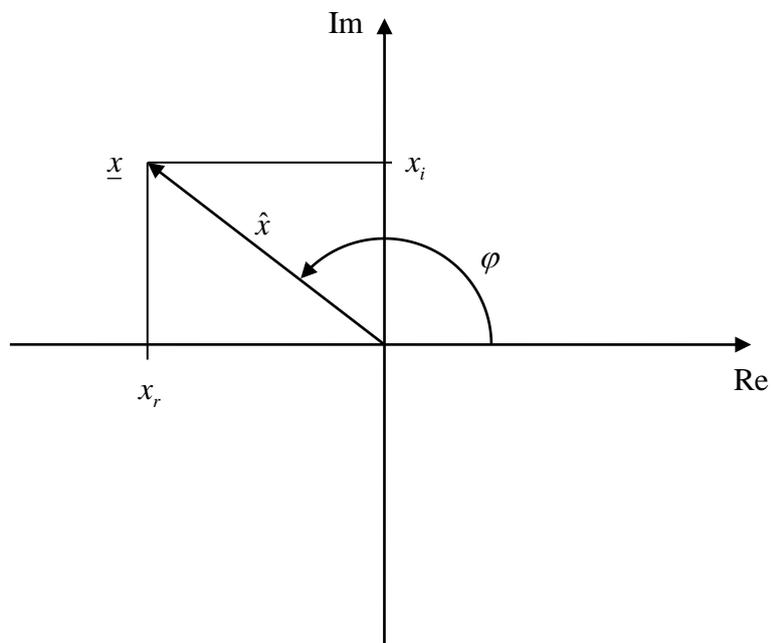


Bild 9-3: Komplexer Zeiger

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (9.11)$$

Damit:

$$\hat{x} = |\underline{x}| = \sqrt{x_r^2 + x_i^2} \quad (9.12)$$

$$\varphi = \arccos \frac{x_r}{\hat{x}} \operatorname{sgn} x_i \quad (9.13)$$

$$x_r = \hat{x} \cos \varphi \quad (9.14)$$

$$x_i = \hat{x} \sin \varphi \quad (9.15)$$

Komplexe Darstellung reeller sinusförmiger Verläufe:

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t)) \quad (9.16)$$

mit

$$\underline{x}(t) = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \quad (9.17)$$

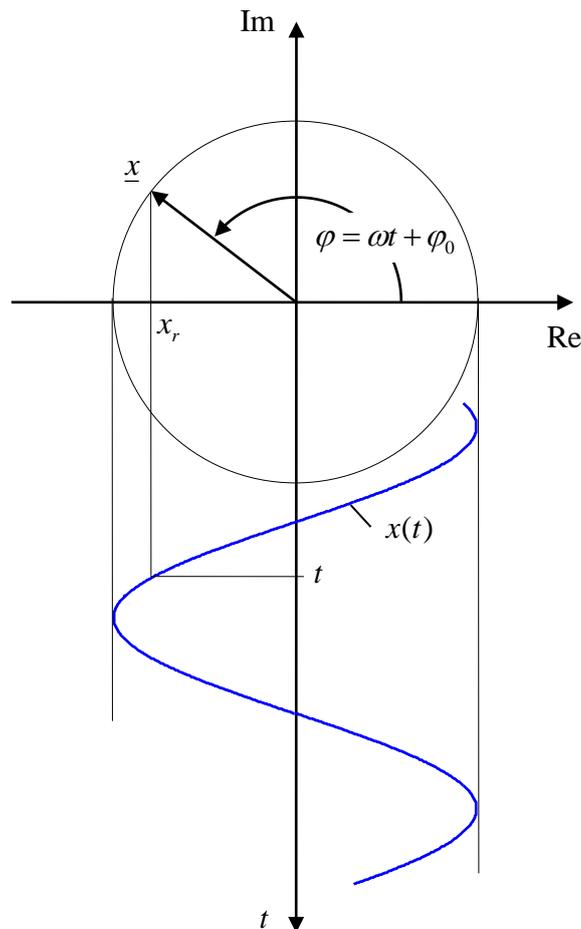


Bild 9-4: Zusammenhang zwischen einem Schwingungsvorgang und seiner Darstellung durch einen komplexen Zeiger

Komplexer Momentanwertzeiger:

$$\underline{x}(t) = \hat{x}e^{j(\omega t + \phi_0)} = \hat{x}e^{j\phi_0}e^{j\omega t} = \underline{\hat{x}}e^{j\omega t} \quad (9.18)$$

Die *komplexe Amplitude*

$$\underline{\hat{x}} = \hat{x}e^{j\phi_0} \quad (9.19)$$

beinhaltet die beiden Kenngrößen Amplitude und Phasenverschiebung der periodischen Funktion. Die Frequenz wird dadurch nicht angezeigt.

$$\hat{x} = |\underline{\hat{x}}| \quad (9.20)$$

$$\varphi_0 = \arg(\underline{\hat{x}}) \quad (9.21)$$

Gebräuchlich sind außerdem *Effektivwertzeiger*:

$$\underline{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\hat{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}e^{j\varphi_0} = Xe^{j\varphi_0} \quad (9.22)$$

9.3 Sinusförmige Größen an Zweipolen

Annahme: Spannung und Strom an einem Zweipol seien sinusförmig und von gleicher Frequenz, jedoch mit unterschiedlicher Phasenlage:

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (9.23)$$

$$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (9.24)$$

Differenz-Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (9.25)$$

Achtung: Vorzeichenkonvention des Phasenwinkels:

- $\varphi > 0$: Strom eilt der Spannung nach (sog. *induktives* Verhalten)
- $\varphi < 0$: Spannung eilt dem Strom nach (sog. *kapazitives* Verhalten)

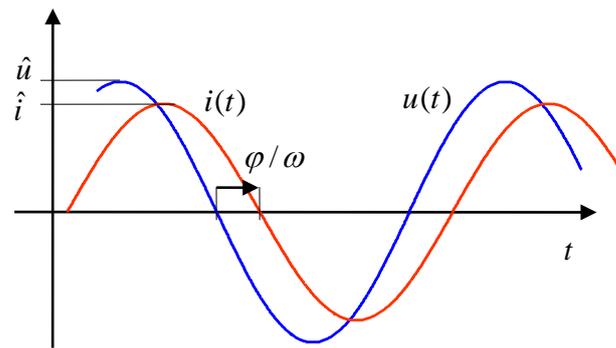


Bild 9-5: Sinusförmige Verläufe von Strom und Spannung an einem Zweipol

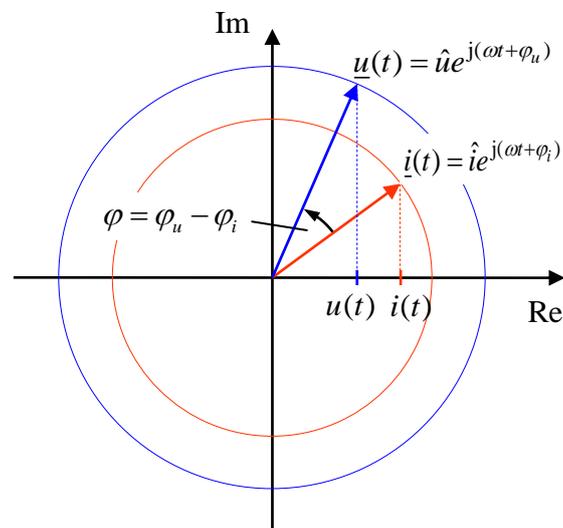


Bild 9-6: Darstellung der Schwingung durch komplexe Zeiger

9.4 Impedanz und Admittanz

Annahme: Spannung und Strom eines Zweipols seien sinusförmig mit gleicher Frequenz.

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (9.26)$$

$$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (9.27)$$

Darstellung mit Effektivwert- bzw. Momentanwertzeigern:

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi_u} \quad (9.28)$$

$$\underline{I} = Ie^{j\varphi_i} \quad (9.29)$$

$$u(t) = \operatorname{Re}(\underline{u}(t)) \quad (9.30)$$

$$\underline{u}(t) = \sqrt{2}Ue^{j(\omega t + \varphi_u)} = \sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t} \quad (9.31)$$

$$i(t) = \operatorname{Re}(\underline{i}(t)) \quad (9.32)$$

$$\underline{i}(t) = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \varphi_i)} = \sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t} \quad (9.33)$$

Quotient der Momentanwertzeiger:

$$\frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t}}{\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \quad (9.34)$$

Der Quotient ist unter *bestimmten Voraussetzungen* unabhängig von den Amplituden bzw. Effektivwerten sowie der Phasenlage und wird *Impedanz* oder *komplexer Widerstand* genannt:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U}{I}e^{j\phi} \quad (9.35)$$

Die Impedanz als Verhältnis von Spannung zu Strom lässt sich als frequenzabhängiger *Wechselspannungswiderstand* auffassen. Weitere Begriffe:

Wirkwiderstand oder *Resistanz*: $R = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = Z \cos \varphi$

Blindwiderstand oder *Reaktanz*: $X = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = Z \sin \varphi$

Scheinwiderstand $Z = |\underline{Z}|$

Damit:

$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (9.36)$$

Der Kehrwert der Impedanz heißt *Admittanz* oder *komplexer Leitwert*:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U}e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = \frac{I}{U}e^{-j\varphi} \quad (9.37)$$

Weitere abgeleitete Begriffe:

Wirkleitwert oder *Konduktanz* $G = \operatorname{Re}(\underline{Y}) = Y \cos \varphi$

Blindleitwert oder *Suszeptanz* $B = \operatorname{Im}(\underline{Y}) = -Y \sin \varphi$

Scheinleitwert $Y = |\underline{Y}|$

Damit:

$$\underline{Y} = G + jB = Ye^{-j\varphi} \quad (9.38)$$

Umrechnungen zwischen Admittanzen und Impedanzen:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{Z^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}$$

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{B}{Y^2}$$

Offene Fragen zur Einführung von Impedanz und Admittanz:

- Wann gibt es überhaupt sinusförmige Ströme und Spannungen an Zweipolen?
- Unter welchen Bedingungen ist der Quotient von Spannungs- und Stromzeiger unabhängig von den Amplitude und den Anfangsphasenwinkeln?

Verschiebung einer *allgemeinen* Antwort auf später. Zunächst *spezielle* Betrachtung der elementaren Zweipole Widerstand, Spule, Kondensator:

9.5 Impedanzen und Admittanzen der elementaren Zweipole

Widerstand

Annahme sinusförmigen Stroms:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= Ri(t) \\
 &= \sqrt{2} R \operatorname{Re}(\underline{I}e^{j\omega t}) \\
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(R\underline{I}e^{j\omega t}) \\
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U}e^{j\omega t})
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

mit

$$\underline{U} = R\underline{I} \tag{9.40}$$

Das Ohmsche Gesetz gilt also auch für die komplexen Zeiger! Impedanz und Admittanz des Widerstands sind demnach:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R \tag{9.41}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} = G \tag{9.42}$$

\underline{Z} und \underline{Y} sind unabhängig von den Amplituden und Phasenwinkeln!

Kondensator

Annahme sinusförmiger Spannung

$$\begin{aligned}
 i(t) &= C\dot{u}(t) \\
 &= \sqrt{2} C \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) \\
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re}\left(C \frac{d}{dt}(\underline{U}e^{j\omega t})\right) \\
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(j\omega C\underline{U}e^{j\omega t}) \\
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{I}e^{j\omega t})
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

mit

$$\underline{I} = j\omega C\underline{U} \tag{9.44}$$

bzw.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} \quad (9.45)$$

$$\underline{Y} = j\omega C \quad (9.46)$$

Die Differenziation nach der Zeit geht bei der Rechnung mit komplexen Zeigern in eine Multiplikation mit $j\omega$ über:

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \quad (9.47)$$

Kurz:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \quad (9.48)$$

Daher nennt man $j\omega$ auch *Differenzialoperator*.

Drossel

Annahme sinusförmigen Stroms:

$$\begin{aligned} u(t) &= L\dot{i}(t) \\ &= L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\underline{I}e^{j\omega t}) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re}\left(L \frac{d}{dt}(\underline{I}e^{j\omega t})\right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(j\omega L \underline{I}e^{j\omega t}) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (9.49)$$

mit

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} \quad (9.50)$$

bzw.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L \quad (9.51)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} \quad (9.52)$$

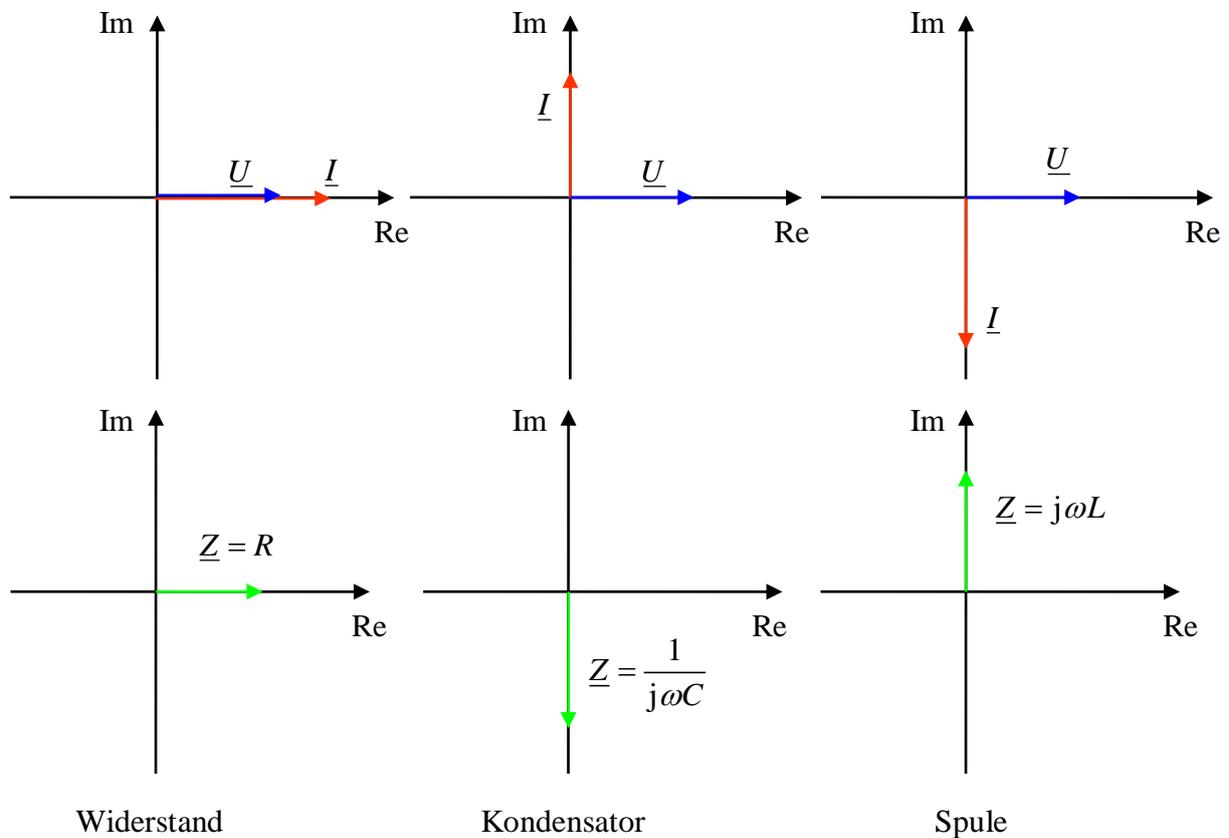


Bild 9-7: Zeigerdiagramme für die Impedanzen von Widerstand, Kondensator und Spule

Die Wahl der absoluten Winkel für die Spannungs- und Stromzeiger ist willkürlich (da sich gezeigt hat, dass Impedanz und Admittanz von den Anfangswinkeln nicht abhängen).

Hier ist der Spannungszeiger in Richtung der reellen Achse ausgerichtet.

Bemerkung: Soll betont werden, dass die Impedanz \underline{Z} bzw. die Admittanz \underline{Y} von der Frequenz abhängen, schreiben wir meist $\underline{Z}(j\omega)$ bzw. $\underline{Y}(j\omega)$. Zwar liegt die Schreibweise $\underline{Z}(\omega)$ bzw. $\underline{Y}(\omega)$ sogar eher nahe und ist in diesem Zusammenhang gleichberechtigt, doch wird häufig die erste Variante aus folgenden Gründen benutzt:

- In den hier auftretenden Ausdrücken tritt die Frequenz ω immer im Produkt mit der imaginären Einheit j auf. Ausdrücke wie $-\omega^2$ können als $(j\omega)^2$ interpretiert werden.
- Im Kontext der Laplace-Transformation, die Sie nicht in dieser, aber in späteren Lehrveranstaltungen kennen lernen werden, wird sich zeigen, dass sich die frequenzabhängige Impedanz aus einer sogenannten Laplace-Übertragungsfunktion $\underline{Z}(s)$ mit einer unabhängigen komplexen Variable s aus dem Spezialfall $s = j\omega$ ergibt.

9.6 Reihenschaltung und Parallelschaltung

Reihenschaltung zweier Zweipole

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (9.53)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{U}_1e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\underline{U}_2e^{j\omega t}) \quad (9.54)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \quad (9.55)$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I}$$

$$\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I} \quad (9.56)$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (9.57)$$

mit

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad (9.58)$$

Die Impedanz in einer Reihenschaltung bestimmt sich durch die komplexe Summe der Teilimpedanzen. Für die resultierende Gesamtadmittanz gilt demnach

$$\underline{Y} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2}} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \quad (9.59)$$

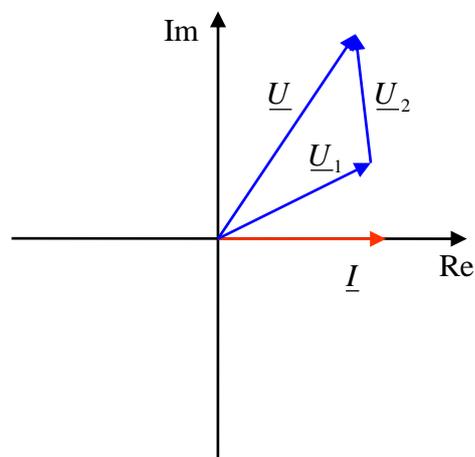


Bild 9-8: Zeigerdiagramm für die Reihenschaltung

Achtung: Zwar addieren sich die komplexen Spannungszeiger bei der Reihenschaltung,

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \quad , \quad \hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \quad ,$$

nicht aber die reellen Effektivwerte oder reellen Amplituden! Der Gesamteffektivwert lässt sich lediglich durch

$$U \leq U_1 + U_2$$

abschätzen (sogenannte *Dreiecksungleichung*).

Parallelschaltung zweier Zweipole

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (9.60)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{I}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{I}_1e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\underline{I}_2e^{j\omega t}) \quad (9.61)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (9.62)$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U}$$

$$\underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U} \quad (9.63)$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad (9.64)$$

mit

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \quad (9.65)$$

bzw.

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (9.66)$$

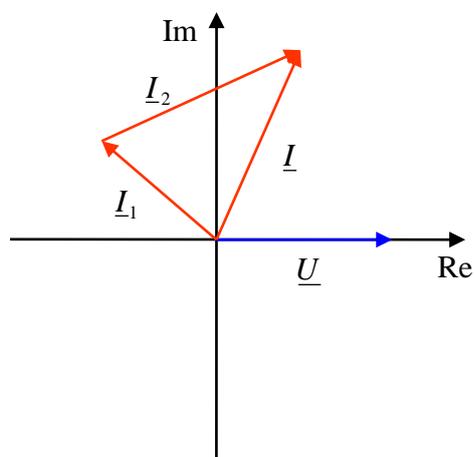


Bild 9-9: Zeigerdiagramm für die Parallelschaltung

Achtung: Zwar addieren sich die komplexen Zeiger bei der Parallelschaltung,

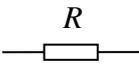
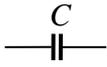
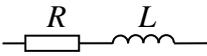
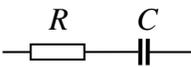
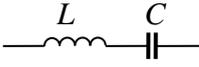
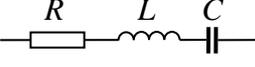
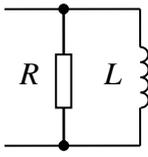
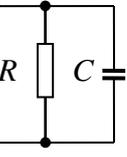
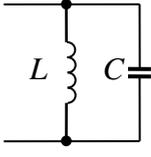
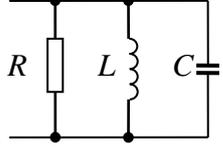
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad , \quad \hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 \quad ,$$

nicht aber die reellen Effektivwerte. Es gilt wiederum nur eine Abschätzung

$$I \leq I_1 + I_2$$

Fazit: Jeder aus den elementaren Zweipolen Widerstand, Kondensator, Spule durch Parallel- und Reihenschaltung aufgebaute Zweipol besitzt selbst eine Impedanz, die nach den angegebenen Gleichungen bestimmt werden kann.

9.7 Impedanzen einiger Zweipole

Zweipol	$\underline{Z}(j\omega)$	Abkürzungen
	R	
	$j\omega L$	
	$\frac{1}{j\omega C}$	
	$R + j\omega L = R(1 + j\omega\tau)$	$\tau = \frac{L}{R}$
	$R + \frac{1}{j\omega C} = R \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau}$	$\tau = RC$
	$\frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega C} = Z_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{j\omega\omega_0}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
	$\frac{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}{j\omega C} = Z_0 \frac{\omega_0^2 + 2jd\omega\omega_0 - \omega^2}{j\omega\omega_0}$	$d = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0}$
	$\frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R} = R \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$	$\tau = \frac{L}{R}$
	$\frac{R}{1 + j\omega RC} = R \frac{1}{1 + j\omega\tau}$	$\tau = RC$
	$\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = Z_0 \frac{j\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
	$\frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R - \omega^2 LC} = Z_0 \frac{j\omega\omega_0}{\omega_0^2 + 2jd\omega\omega_0 - \omega^2}$	$d = \frac{1}{2} \frac{Z_0}{R}$

9.8 Allgemeine Voraussetzungen für die Rechnung mit Impedanzen und Admittanzen

Aufgreifen der offenen Fragen aus 9.4:

- Wann sind Ströme und Spannungen an einem Zweipol sinusförmig?
- Wann sind die Quotienten der komplexen Zeiger (Impedanz, Admittanz) unabhängig von Amplitude und Phasenlage?

Offensichtlich ist dies der Fall, wenn ein elektrischer Zweipol aus den elementaren Elementen Widerstand, Kondensator und Spule aufgebaut wird. Dies soll nun aber unter etwas allgemeineren Annahmen betrachtet werden.

Das Verhalten von Strom und Spannung eines Zweipols werde durch eine allgemeine Differenzialgleichung der Form

$$a_0 u(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_2 \ddot{u}(t) + \dots + a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} = b_0 i(t) + b_1 \dot{i}(t) + b_2 \ddot{i}(t) + \dots + b_m \frac{d^m i(t)}{dt^m} \quad (9.67)$$

beschrieben. Die Differenzialgleichung ist

- von endlicher Ordnung
- *linear*, d. h.:
seien $u_1(t), i_1(t); u_2(t), i_2(t)$ zwei Lösungen, so ist mit beliebigen Konstanten c_1, c_2 auch
 $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), i(t) = c_1 i_1(t) + c_2 i_2(t)$ eine Lösung.
- *zeitinvariant*:
Sei $u(t), i(t)$ eine Lösung, so ist auch $u(t-T), i(t-T)$ für beliebige Zeitverschiebung T eine Lösung.

Zeigen Sie die letzten beiden Punkte durch Einsetzen!

Zweipole bzw. Systeme, die diese Voraussetzungen erfüllen, heißen *linear zeitinvariant* (*linear time-invariant*), kurz *LZI-* oder *LTI-*Systeme. Allgemein lässt sich zeigen, dass sich für *LTI-*Systeme die oben gestellten Fragen positiv beantworten lassen. Für diese Systeme gibt es stets sinusförmige Ströme und Spannungen als Lösung und der Quotient $\underline{U}/\underline{I}$ ist

- unabhängig von den Amplituden U und I ,
- unabhängig von den absoluten Phasenwinkeln φ_u, φ_i ; nur der Differenz-Phasenwinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ geht ein.

Nur unter diesen Voraussetzung ist es möglich, Impedanzen zu bestimmen und damit zu arbeiten!

Die obige allgemeine Differenzialgleichung stellt eine durchaus umfangreiche Klasse von LTI-Systemen, nicht aber alle denkbaren. Der Nachweis wird hier nur auf solche LTI-Systeme beschränkt, die sich durch eine solche Differenzialgleichung darstellen lassen:

Der Ansatz

$$u(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) \quad (9.68)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{I}e^{j\omega t}) \quad (9.69)$$

wird in die Differenzialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[\underline{U}e^{j\omega t} \left(a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\underline{I}e^{j\omega t} \left(b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^m \right) \right] \end{aligned} \quad (9.70)$$

$$\begin{aligned} & \underline{U} \left(a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n \right) \\ &= \underline{I} \left(b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^m \right) \end{aligned} \quad (9.71)$$

Es gibt sinusförmige Lösungen mit

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n} \quad (9.72)$$

Der Quotient, die Impedanz, ist also tatsächlich unabhängig von Amplitude und Anfangsphasenwinkel und ergibt sich allein aus den Koeffizienten der Differenzialgleichung:

$$\underline{Z} = \underline{Z}(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n} \quad (9.73)$$

10 Frequenzabhängige Darstellungen von Impedanzen und Admittanzen

10.1 RC-Parallelschaltung

Unter einer *Ortskurve* versteht man die grafische Darstellung einer Impedanz \underline{Z} oder Admittanz \underline{Y} in der komplexen Ebene in Abhängigkeit der Frequenz ω . Hierbei wird nur die frequenzabhängige Trajektorie des Endpunktes des komplexen Zeigers gezeichnet. Dies soll an einem Beispiel dargestellt werden:

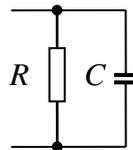


Bild 10-1: RC-Parallelschaltung

Die Ortskurve der Admittanz

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{R}(1 + j\omega\tau) \quad (10.1)$$

mit

$$\tau = RC \quad (10.2)$$

ist in der komplexen Ebene eine Gerade, die parallel zur imaginären Achse verläuft.

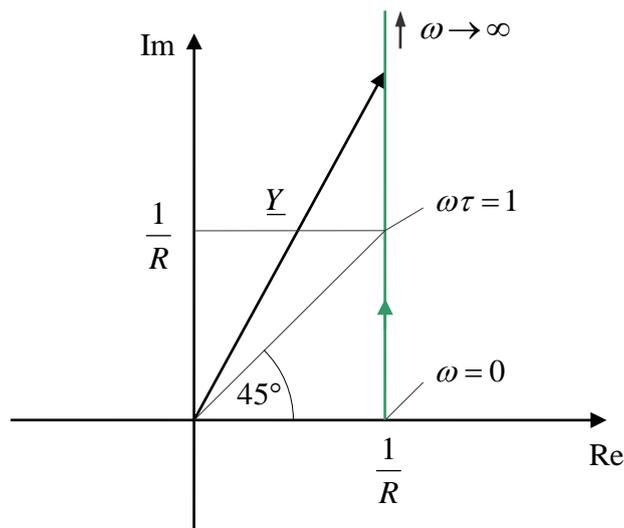


Bild 10-2: Admittanzortskurve der RC-Parallelschaltung

Die Impedanzortskurve in der komplexen Ebene ist ein Kreis, wie man durch folgende Umformungen erkennt. Der Vereinfachung halber wird die Impedanz auf den Widerstand bezogen:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{Z}} &= \frac{\underline{Z}}{R} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + j\omega\tau} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1 - j\omega\tau}{2(1 + j\omega\tau)}\end{aligned}\quad (10.3)$$

Der Betrag des 2. Summanden ist

$$\left| \frac{1 - j\omega\tau}{2(1 + j\omega\tau)} \right| = \frac{|1 - j\omega\tau|}{2|1 + j\omega\tau|} = \frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{2\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{2}\quad (10.4)$$

Die Ortskurve ist folglich ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse bei $R/2$ und Radius $R/2$. Die Ortskurve startet bei $\omega = 0$ auf der reellen Achse im Punkt $\underline{Z} = R$. Für $\omega \rightarrow \infty$ strebt sie gegen $\underline{Z} = 0$, wobei der Winkel gegen -90° geht. Der Winkel von -45° wird bei der Frequenz

$$\omega\tau = 1, \quad \omega = \frac{1}{\tau}\quad (10.5)$$

angenommen.

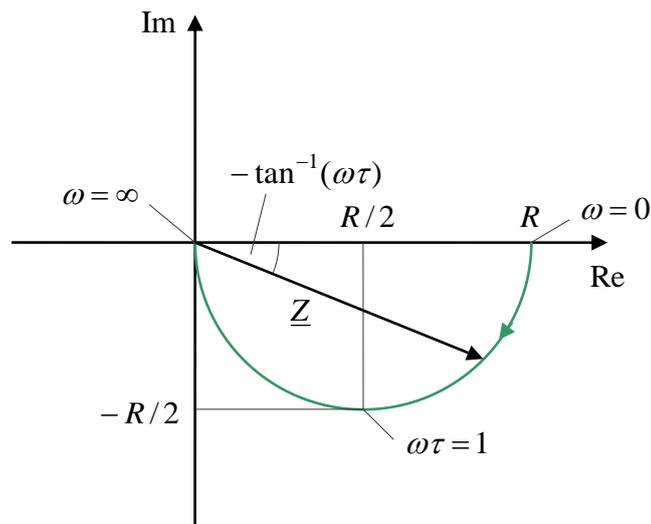


Bild 10-3: Impedanzortskurve der RC-Parallelschaltung

An Ortskurven lassen sich gut Beträge und Winkel, also die Scheinwiderstände bzw. Scheinleitwerte und die Phasendrehungen, auch die Reaktanzen, Resistenzen bzw.

Konduktanzen und Suszeptanzen ablesen. Es fällt aber schwer, zu einer konkreten Frequenz den entsprechenden Punkt der Ortskurve zu identifizieren, wenn nicht eine Frequenzskala auf der Ortskurve angebracht wird. Die Frequenzabhängigkeit lässt sich einfacher im Bode-Diagramm überblicken:

Im Bode-Diagramm werden Amplitude und Winkel in separaten Teilbildern über der Frequenz dargestellt. Die beiden Teilbilder heißen *Amplitudengang* oder *Betragsgang* und *Phasengang*. Das folgende Bild zeigt eine solche Darstellungen der Impedanz der *RC*-Parallelschaltung.

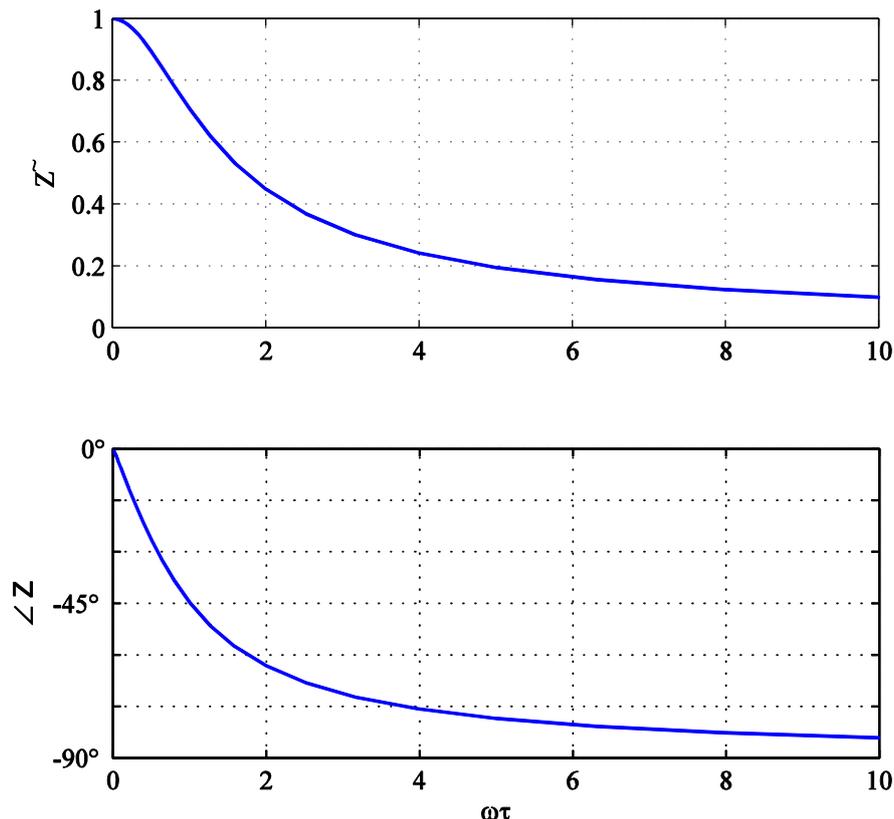


Bild 10-4: Amplituden- und Phasengang der Impedanz der *RC*-Parallelschaltung, Darstellung mit linearen Achsen

Eine solche Darstellung mit linearen Achsen ist jedoch wenig aussagekräftig. Skaliert man dagegen die Achsen für Amplitude und Frequenz dagegen logarithmisch, treten viele Charakteristika viel deutlicher heraus. Für die Amplitude verwendet man dabei üblicherweise die Darstellung in Dezibel:

$$\text{dB}(x) = 20 \lg x \quad (10.6)$$

x	$\text{dB}(x)$
1	0
10	20
100	40
0,1	-20
0,01	-40
$\sqrt{10}$ *	10
$\sqrt{2}$	3,01
2	6,02
$1/\sqrt{2}$	-3,01
1/2	-6,02

Die Motivation dieser dB-Definition ergibt sich aus dem Wert von 10 dB (s. *): Eine Erhöhung einer Spannung oder eines Stroms an einem ohmschen Widerstand um 10 dB resultiert in einer 10-fachen Leistung.

Die logarithmische Darstellung ist aber nur für dimensionslose Größen möglich. Während also Amplitudengänge einer Strom- oder Spannungs*verstärkung* direkt logarithmisch dargestellt werden können, ist eine Impedanz oder Admittanz zuvor auf einen geeigneten Bezugswert zu beziehen. Denkbar ist, diese einfach auf 1Ω zu beziehen, doch vorteilhafter verwendet man eine natürliche, sich aus der Problemstellung ergebende Bezugsgröße, beispielsweise die Kenn-Impedanz Z_0 oder Kenn-Admittanz Y_0 .

Im vorliegenden Beispiel wurde bereits die auf R bezogene Impedanz \tilde{Z} eingeführt, welche also dimensionslos ist. Die resultierende Darstellung mit logarithmischen Achsen ist im folgenden Bild zu sehen. In dieser Darstellung bekommen sowohl der Amplitudengang als auch der Phasengang sehr charakteristische Formen, was man in der linearen Darstellung nicht oder nur sehr schwer erkennt¹⁰:

- Der Amplitudengang strebt für kleine und große Frequenzen asymptotisch Geraden zu. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist die sogenannte Knickfrequenz. Diese wird durch $\omega = 1/\tau$ bestimmt.
- Die fallende Asymptote hat eine Steigung von -20 dB/Dekade
- Bei der Knickfrequenz beträgt die Abweichung von den Asymptoten -3 dB. Der Phasenwinkel ist dort -45° .
- Die Abweichung des Amplitudengangs von den Asymptoten ist symmetrisch zur Knickfrequenz
- Der Phasengang ist symmetrisch zur Knickfrequenz
- Auch der Phasengang kann überschlägig durch Geradenstücke approximiert werden.

¹⁰ Die Darstellung des Frequenzverhaltens mit *Logarithmus des Betrags* $\ln \tilde{Z}$ und Winkel φ ist gegenüber derjenigen mit Betrag und Winkel nicht zuletzt aufgrund tiefliegender mathematischer Zusammenhänge überlegen, die hier nur angedeutet werden sollen: Die *Funktionentheorie* zeigt, dass Real- und Imaginärteil sogenannter analytischer Funktionen, wie die Impedanz oder Admittanz eine ist, nicht voneinander unabhängig sind, sondern bestimmten Gesetzmäßigkeiten gehorchen. Dies gilt auch für den Logarithmus der Impedanz (bzw. der Admittanz), deren Realteil der Logarithmus des Betrags (also des Scheinwiderstands) und deren Imaginärteil der Phasenwinkel ist: $\ln \tilde{Z} = \ln \tilde{Z} + j\varphi$.

- Die Fehler dieser Approximationen sind weiter unten dargestellt. Sie betragen in der Amplitude max. 3 dB, in der Phase max. 6° .
- Die logarithmische Frequenzskalierung erlaubt außerdem einen Überblick über einen großen Frequenzbereich als bei linearer Achse.

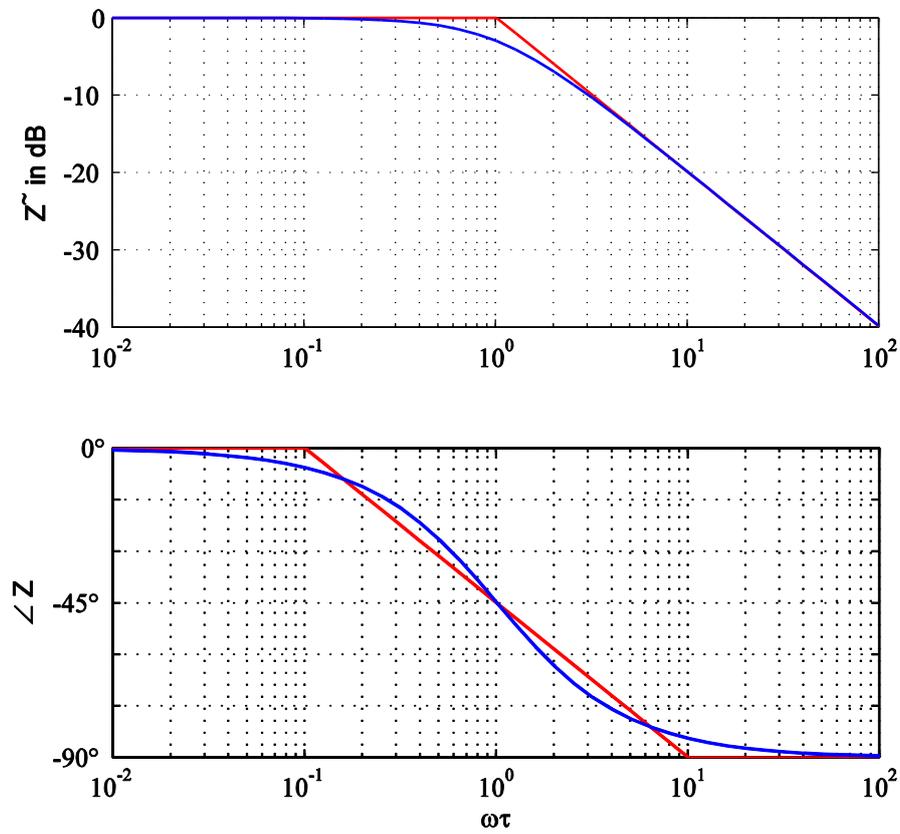


Bild 10-5: Bodediagramm der bezogenen Impedanz der RC -Parallelschaltung, exakter Frequenzgang und Approximation durch Geradenstücke

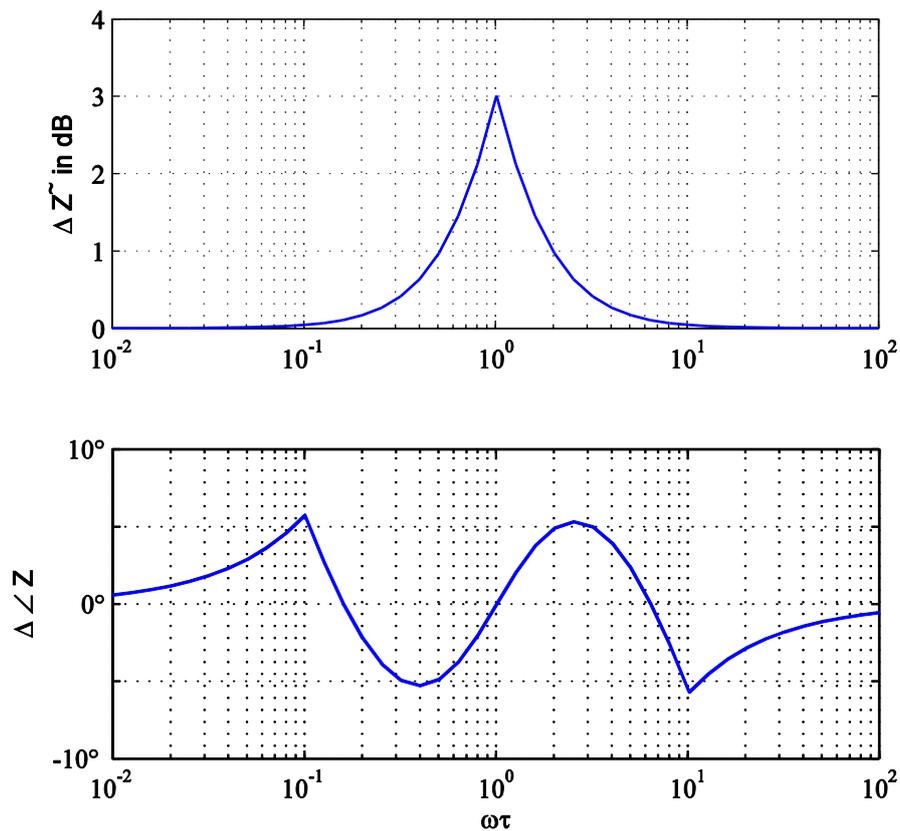


Bild 10-6: Fehler der Approximation durch Geradenstücke nach Amplitude und Winkel

Geht man vom Bodediagramm der Impedanz zu dem der Admittanz über, wird ein weiterer Vorteil der logarithmischen Darstellung ersichtlich. Bei der Bildung des Kehrwerts werden sowohl Amplitude als auch die Phase einfach gespiegelt:

$$\underline{\tilde{Y}} = \frac{1}{\underline{\tilde{Z}}} \Rightarrow \text{dB}(\underline{\tilde{Y}}) = -\text{dB}(\underline{\tilde{Z}}), \quad \angle \underline{\tilde{Y}} = -\angle \underline{\tilde{Z}} \quad (10.7)$$

Das Bodediagramm kann nun sofort aus dem der Impedanz abgeleitet werden:

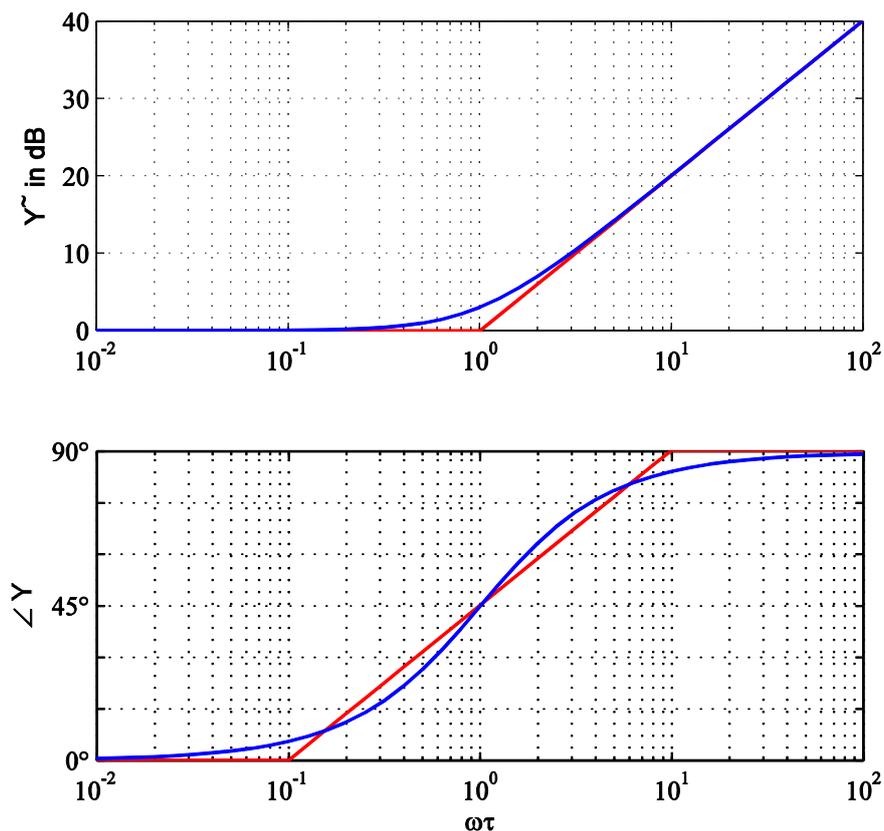


Bild 10-7: Bodediagramm der bezogenen Admittanz der RC -Parallelschaltung, exakter Frequenzgang und Approximation durch Geradenstücke

10.2 RL -Reihenschaltung



Bild 10-8: RL -Reihenschaltung

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R(1 + j\omega\tau) \quad (10.8)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R(1 + j\omega\tau)} \quad (10.9)$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (10.10)$$

$$\underline{\tilde{Z}} = \frac{\underline{Z}}{R} = 1 + j\omega\tau \quad (10.11)$$

$$\underline{\tilde{Y}} = R\underline{Y} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (10.12)$$

Die RL -Reihenschaltung zeigt also eine ähnliche Charakteristik wie die RC -Parallelschaltung, nur dass die Rollen von Impedanz und Admittanz vertauscht sind.

10.3 *RL*-Parallelschaltung

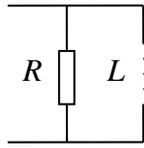


Bild 10-9: *RL*-Parallelschaltung

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau} \quad (10.13)$$

$$\underline{Z} = R \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (10.14)$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (10.15)$$

$$\tilde{\underline{Y}} = R\underline{Y} = \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau} \quad (10.16)$$

$$\tilde{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}}{R} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (10.17)$$

Die Ortskurven der Impedanz und Admittanz sind eine Geraden bzw. ein Kreise, was man ähnlich wie in Abschnitt 10.1 schnell nachgewiesen werden kann.

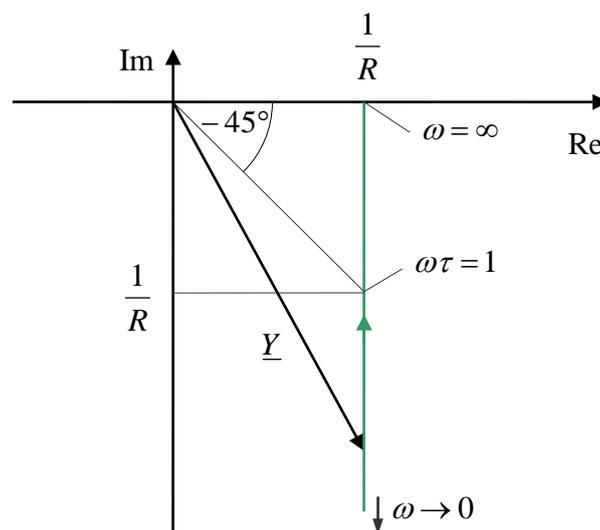


Bild 10-10: Admittanzortskurve der *RL*-Parallelschaltung

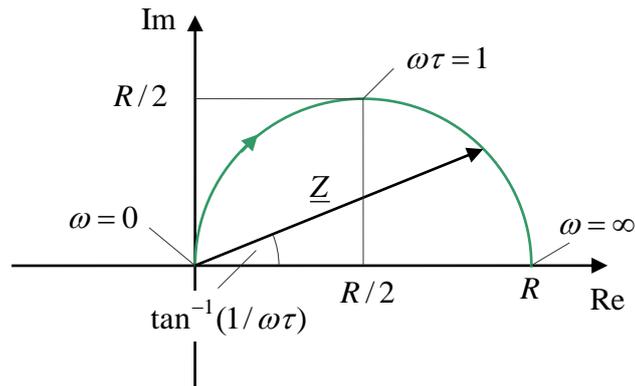


Bild 10-11: Impedanzortskurve der RL -Parallelschaltung

10.4 RC -Reihenschaltung

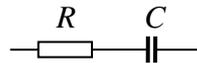


Bild 10-12: RC -Reihenschaltung

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau} \quad (10.18)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (10.19)$$

$$\tau = RC \quad (10.20)$$

$$\underline{\tilde{Z}} = \frac{\underline{Z}}{R} = \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau} \quad (10.21)$$

$$\underline{\tilde{Y}} = R\underline{Y} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (10.22)$$

Die normierte Impedanz und Admittanz gleichen denen der RL -Parallelschaltung, nur das wiederum die Rollen von Impedanz und Admittanz vertauscht sind.

10.5 RLC-Parallelschwingkreis

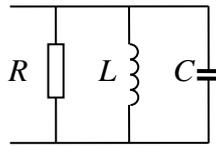


Bild 10-13: RLC-Parallelschaltung

Bestimmung der Admittanz:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{Z_0} \frac{\omega_0^2 + 2jd\omega\omega_0 - \omega^2}{j\omega\omega_0} = Y_0 \frac{1 + 2jd\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2}{j\omega/\omega_0} \quad (10.23)$$

Verwendete Abkürzungen (vgl. Abschnitt 8.2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.24)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (10.25)$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{Z_0}{R} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.26)$$

Zweckmäßigerweise bezieht man die Frequenz auf die Kennkreisfrequenz,

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (10.27)$$

Diese *normierte Frequenz* Ω wird auch als *Verstimmung* bezeichnet. Die Admittanz erhält damit die folgende Gestalt:

$$\underline{Y} = Y_0 \frac{1 + 2jd\Omega - \Omega^2}{j\Omega} \quad (10.28)$$

Für die Impedanz ergibt sich

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = Z_0 \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (10.29)$$

die normierte Impedanz ist

$$\underline{\tilde{Z}} = \frac{\underline{Z}}{Z_0} = \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (10.30)$$

Die Ortskurve der Admittanz ist eine zur imaginären Achse parallele Gerade, anders als in Bild 10-10 eine vollständige Gerade. Auch ist die Frequenz-Bezifferung der Ortskurve hier eine andere.

Die Ortskurve der Impedanz ist demnach wieder ein Kreis, und zwar hier ein Vollkreis. Dies kann man aber hier noch einmal separat nachweisen:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= Z_0 \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \\
 &= Z_0 \left[\frac{1}{4d} + \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} - \frac{1}{4d} \right] \\
 &= Z_0 \left[\frac{1}{4d} + \frac{4dj\Omega - (1 + 2jd\Omega - \Omega^2)}{4d(1 + 2jd\Omega - \Omega^2)} \right] \\
 &= Z_0 \left[\frac{1}{4d} - \frac{1 - 2jd\Omega - \Omega^2}{4d(1 + 2jd\Omega - \Omega^2)} \right] \\
 &= \frac{Z_0}{4d} \left[1 - \frac{1 - 2jd\Omega - \Omega^2}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \right] = \frac{R}{2} \left[1 - \frac{1 - 2jd\Omega - \Omega^2}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \right]
 \end{aligned} \tag{10.31}$$

Der Betrag des 2. Summanden in der Klammer ist gleich 1. Die Ortskurve ist also ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse bei $R/2$ und einem Radius von $R/2$. Der maximale Scheinwiderstand wird gerade in dem Punkt erreicht, in welchem die Ortskurve die reelle Achse schneidet, also \underline{Z} rein reell ist. Dies ist bei

$$\Omega = 1 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \omega_0 \tag{10.32}$$

mit

$$Z_{\max} = \max_{\omega} |\underline{Z}| = R \tag{10.33}$$

der Fall. Bei der Frequenz $\Omega = 1$ macht sich also nur der Widerstand R in der Impedanz bemerkbar. Die Erklärung hierfür ist, dass sich bei dieser Frequenz die komplexen Leitwerte von Spule und Kondensator genau kompensieren.

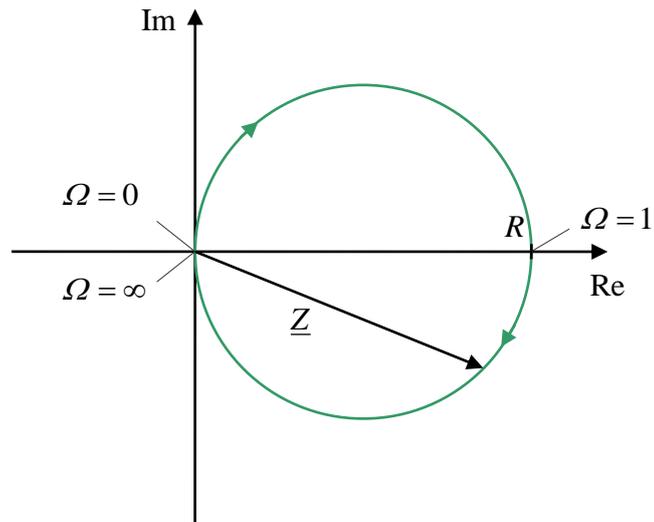


Bild 10-14: Impedanzortskurve des *RLC*-Parallelschwingkreises

Das Verhältnis von maximaler Impedanz und Kennimpedanz wird als *Güte*

$$Q_p = \frac{Z_{\max}}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} \quad (10.34)$$

bezeichnet. Die Güte gibt also die Resonanzüberhöhung an. Außerdem lässt sich näherungsweise das Verhalten der Impedanz für kleine und große Frequenzen untersuchen. Die Ergebnisse sind der folgenden Tabelle dargestellt.

	\tilde{Z}	$\varphi = \angle \tilde{Z}$
$\Omega \ll 1$	$\approx \Omega$	$\approx +90^\circ$
$\Omega = 1$	$= Q_p$	$= 0^\circ$
$\Omega \gg 1$	$\approx \frac{1}{\Omega}$	$\approx -90^\circ$

Diese Charakteristika spiegeln sich unmittelbar im Bodediagramm wieder. Die asymptotischen Näherungskurven stellen sich im Amplitudengang als Geraden mit Steigungen von +20 dB/Dekade bzw. -20 dB/Dekade dar.

Ganz allgemein stellen sich Amplitudengänge der Form

$$A = A_0 \Omega^n \quad (10.35)$$

(mit positiven oder negativen ganzzahligen Exponenten n), welche häufig als Asymptoten komplizierter Amplitudengänge auftreten, in doppelt-logarithmischen Achsen als Geraden dar:

$$\text{dB}(A) = 20 n \lg \Omega + \text{dB}(A_0) \quad (10.36)$$

Diese Geraden haben die Steigung

$$\frac{\text{dB}(A) - \text{dB}(A_0)}{\lg \Omega} = 20 n \quad (10.37)$$

was üblicherweise als „ $n \cdot 20$ dB pro Dekade“ bezeichnet wird.

Je größer die Güte, also je kleiner die Dämpfung, desto schneller dreht die Phase beim Durchgang durch die Resonanzstelle $\Omega = 1$. Wir untersuchen dazu die Winkeländerung:

$$\varphi = \angle \tilde{Z} = \angle \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} = -\angle \frac{1 + 2jd\Omega - \Omega^2}{j\Omega} = -\angle \left(\frac{1}{j\Omega} + 2d + j\Omega \right) = -\arctan \frac{\Omega - \frac{1}{\Omega}}{2d} \quad (10.38)$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{2d} \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega - \frac{1}{\Omega}}{2d} \right)^2} \quad (10.39)$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} (\Omega = 1) = -\frac{1}{d} = -2Q_p$$

Da die Frequenzachse logarithmisch skaliert ist, interessiert dementsprechend die Steigung in der logarithmischen Darstellung. Diese berechnet sich aus dem vorangegangenen Ergebnis wie folgt:

$$\frac{d\varphi}{d(\lg \Omega)} = \frac{d\varphi}{d\left(\frac{\ln \Omega}{\ln 10}\right)} = \ln 10 \frac{d\varphi}{d(\ln \Omega)} = \ln 10 \frac{d\varphi}{\frac{d\Omega}{\Omega}} = \Omega \ln 10 \frac{d\varphi}{d\Omega} \quad (10.40)$$

$$\frac{d\varphi}{d(\lg \Omega)} (\Omega = 1) = -\frac{\ln 10}{d}$$

Legt man an den Phasengang im Punkt $\Omega = 1$ eine Tangente mit der berechneten Steigung, schneidet diese die waagerechten $\pm 90^\circ$ -Linien (also $\pm \pi/2$) in der logarithmischen Skalierung an den Stellen

$$\lg \Omega_{1,2} = \mp \frac{\pi}{2 \ln 10} d \approx \mp 0,7d \quad \text{bzw.} \quad \Omega_{1,2} \approx 10^{\mp 0,7d} \quad (10.41)$$

Für das Beispiel $d = 0,1$ schneidet die Tangente die -90° -Achse also bei $\Omega_2 \approx 10^{0,7d} \approx 1,175$, vgl. Bild 10-15. Mit Hilfe dieser Tangente lässt sich der Phasengang bereits recht genau skizzieren.

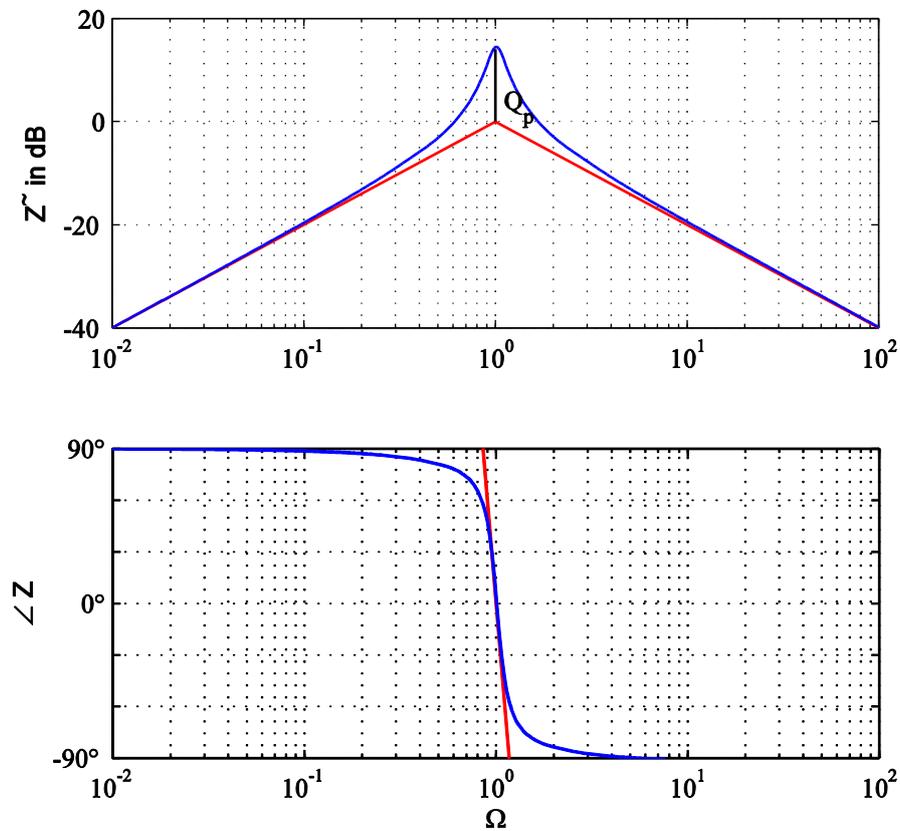


Bild 10-15: Bodediagramm der Impedanz des RLC -Parallelschwingkreises hier für $d = 0,1$ bzw. $Q_p = 5$, dargestellt sind im Amplitudengang die beiden Asymptoten mit $\pm 20\text{dB/Dek.}$, im Phasengang die Tangente im Punkt $\Omega = 1$

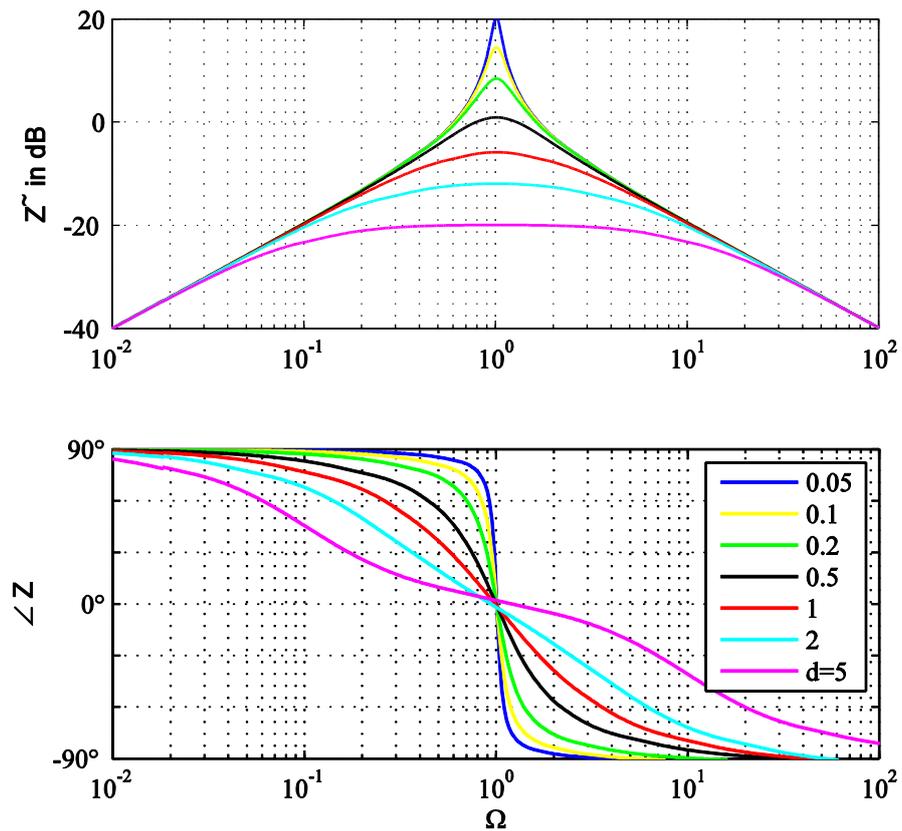


Bild 10-16: Bodediagramm der Impedanz des *RLC*-Parallelschwingkreises mit d als Parameter

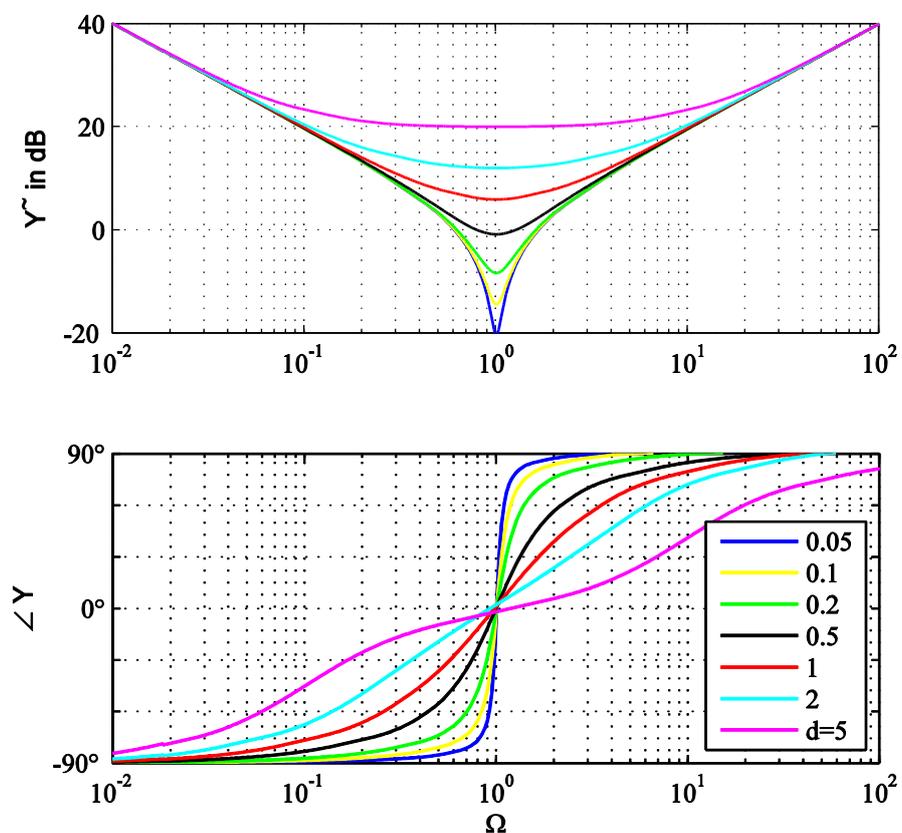


Bild 10-17: Bodediagramm der Admittanz des *RLC*-Parallelschwingkreises mit d als Parameter

Die *Bandbreite* ist derjenige Frequenzbereich, in welchem das Verhältnis von Scheinwiderstand Z zum maximalen Scheinwiderstand Z_{\max} größer als $1/\sqrt{2}$ ist. In Dezibeln entspricht dies einem maximal erlaubten Abfall um 3 dB. Bei der Bestimmung dieser Frequenzgrenzen arbeitet man vorteilhafterweise mit dem Betragsquadrat, um die sonst auftretenden Quadratwurzeln zu vermeiden:

$$\frac{\underline{Z}}{Z_{\max}} = \frac{\underline{Z}}{Z_0} \frac{Z_0}{Z_{\max}} = \frac{2jd\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (10.42)$$

$$\frac{Z^2}{Z_{\max}^2} = \frac{4d^2\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2} = \frac{1}{2} \quad (10.43)$$

$$4d^2\Omega^2 = \frac{1}{2} \left[(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2 \right]$$

$$(1 - \Omega^2)^2 = 4d^2\Omega^2$$

$$|1 - \Omega^2| = 2d|\Omega| \quad (10.44)$$

Fallunterscheidung: Annahme $\Omega > 1$:

$$\Omega^2 - 2d\Omega - 1 = 0 \quad (10.45)$$

Positive Lösung liefert obere Grenzfrequenz (negative Lösung bleibt außer Acht):

$$\Omega_{B2} = d + \sqrt{d^2 + 1} \quad (10.46)$$

Annahme $0 < \Omega < 1$:

$$\Omega^2 + 2d\Omega - 1 = 0 \quad (10.47)$$

Die positive Lösung liefert diesmal untere Grenzfrequenz:

$$\Omega_{B1} = -d + \sqrt{d^2 + 1} \quad (10.48)$$

Normierte Bandbreite:

$$\Delta\Omega_B = \Omega_{B2} - \Omega_{B1} = 2d = \frac{1}{Q_p} \quad (10.49)$$

bzw.

$$\Delta\omega_B = \frac{\omega_0}{Q_p} \quad (10.50)$$

Die Bandbreite ist umgekehrt proportional zur Güte. Anders ausgedrückt: Das Produkt aus normierter Bandbreite und Güte ist stets gleich 1:

$$Q_p \Delta\Omega_B = 1 \quad (10.51)$$

Man beachte, dass außerdem gilt

$$\Omega_{B1} \Omega_{B2} = 1 \quad (10.52)$$

Diese Eigenschaft drückt aus, dass die beiden Frequenzgrenzen auf der logarithmischen Frequenzachse genau symmetrisch um $\Omega = 1$ angeordnet sind.

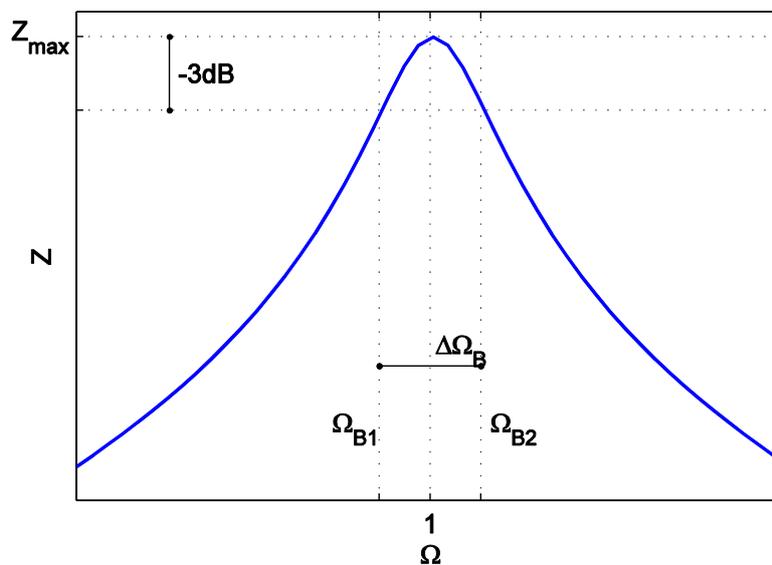


Bild 10-18: Zur Definition der Bandbreite

10.6 RLC-Reihenschwingkreis

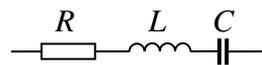


Bild 10-19:

$$\tilde{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}}{Z_0} = \frac{1 + 2j\Omega - \Omega^2}{j\Omega} \quad (10.53)$$

$$\tilde{Y} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (10.54)$$

Die Impedanz und Admittanz erhalten wieder die gleiche Form wie beim *RLC*-Parallelschwingkreis, nur das abermals die Rollen vertauscht sind. Daher können die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt direkt übertragen werden.

Für die Güte des Reihenschwingkreises gilt entsprechend

$$Q_s = \frac{Y_{\max}}{Y_0} = \frac{1}{2d} = \frac{1/R}{Y_0} \quad (10.55)$$

11 Übertragungsfunktionen

Bislang wurden bei Impedanzen und Admittanzen die komplexen Zeiger von Strom und Spannung an denselben Klemmen eines Netzwerks ins Verhältnis gesetzt. Ganz allgemein kann man auch den Quotient *beliebiger* komplexer Zeiger in einem Netzwerk bilden. Ein solcher Quotient wird *Übertragungsfunktion* genannt, z.B.:

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \quad (11.1)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \quad (11.2)$$

Setzt man zwei Spannungen bzw. zwei Ströme ins Verhältnis, spricht man von einer frequenzabhängigen *Spannungsverstärkung* bzw. *Stromverstärkung*:

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad (11.3)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \quad (11.4)$$

Beispiel: Übertragungsverhalten eines RLC-Reihenschwingkreises

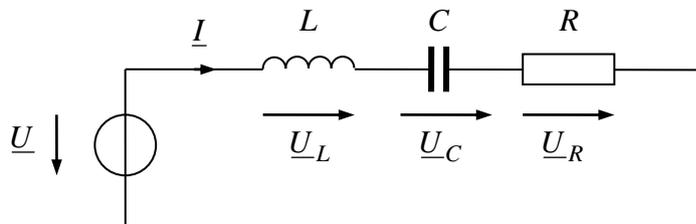


Bild 11-1: RLC-Reihenschaltung

Impedanz:

$$\underline{Z} = \frac{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}{j\omega C} \quad (11.5)$$

bzw.

$$\frac{\underline{Z}}{Z_0} = \frac{1 + 2jd\Omega - \Omega^2}{j\Omega} \quad (11.6)$$

Admittanz:

$$\frac{\underline{Y}}{Y_0} = \frac{j\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (11.7)$$

Im Folgenden sollen die frequenzabhängigen Verhältnisse der Teilspannungen \underline{U}_L , \underline{U}_C , \underline{U}_R zur Gesamtspannung \underline{U} untersucht werden.

$$\underline{H}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}} = \frac{j\omega L}{\underline{Z}} = j\Omega \frac{\underline{Y}}{Y_0} = \frac{-\Omega^2}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (11.8)$$

$$\underline{H}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\Omega} \frac{\underline{Y}}{Y_0} = \frac{1}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (11.9)$$

$$\underline{H}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}} = R\underline{Y} = \frac{1}{Q_s} \frac{\underline{Y}}{Y_0} = \frac{2jd\Omega}{1 + 2jd\Omega - \Omega^2} \quad (11.10)$$

Das Resonanzmaximum von $H_R = |\underline{H}_R|$ liegt wie das der Admittanz bei $\Omega_R = 1$ mit

$$H_{R\max} = 1$$

Die Maxima von H_L und H_C liegen aber bei anderen Frequenzen. Die Frequenz des Maximums von H_C wird durch Nullstellensuche der 1. Ableitung bestimmt. Einfacher ist es aber, das Maximum von H_C^2 , noch einfacher, das Minimum von $1/H_C^2$ zu suchen, wobei man nochmals Rechenarbeit sparen kann, indem man nicht nach Ω , sondern nach Ω^2 differenziert:

$$\frac{1}{H_C^2} = (1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2 \quad (11.11)$$

$$\frac{d(1/H_C^2)}{d(\Omega^2)} = -2(1 - \Omega^2) + 4d^2 = 0 \quad (11.12)$$

$$\Omega^2 = 1 - 2d^2 \quad (11.13)$$

$$\Omega_C = \sqrt{1 - 2d^2} \quad (11.14)$$

Die Stelle des Maximums von H_L bestimmt man auf ähnlich konzentriertem Rechenweg¹¹:

$$\frac{1}{H_L^2} = \frac{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}{\Omega^4} = \left(\frac{1}{\Omega^2} - 1\right)^2 + 4d^2 \frac{1}{\Omega^2} \quad (11.15)$$

$$\frac{d(1/H_L^2)}{d(1/\Omega^2)} = 2\left(\frac{1}{\Omega^2} - 1\right) + 4d^2 = 0 \quad (11.16)$$

$$\Omega_L = \frac{1}{\sqrt{1 - 2d^2}} \quad (11.17)$$

Demnach gilt

$$\Omega_C \Omega_L = 1 \quad (11.18)$$

Das bedeutet, dass diese beiden Resonanzstellen sich auf der logarithmischen Frequenzachse symmetrisch um $\Omega = 1$ anordnen. Die Ergebnisse bedeuten aber, dass es reelle Lösungen nur gibt, wenn die Dämpfung klein genug ist, genauer:

$$d^2 < \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad d < \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{bzw.} \quad Q_s > \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ist die Dämpfung größer bzw. die Güte kleiner, prägt sich keine Resonanzüberhöhung mehr aus. Die Maxima von H_L und H_C gewinnt man durch Einsetzen. Beide resultieren zu

$$H_{C\max} = H_{L\max} = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}} = \frac{Q_s}{\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q_s)^2}}} \quad (11.19)$$

Für große Güte bzw. kleine Dämpfung wird dies sehr gut durch

$$H_{C\max} = H_{L\max} \approx Q_s \quad (11.20)$$

genähert. Für die Frequenz $\Omega = 1$ gilt sogar exakt (vgl. Frequenzkennlinien)

$$\underline{H}_L(\Omega = 1) = jQ_s \quad (11.21)$$

und

$$\underline{H}_C(\Omega = 1) = -jQ_s \quad (11.22)$$

¹¹ Selbstverständlich gelangt man auch ohne solche rechen sparende Substitutionen auf dem konventionellen Weg der Kurvendiskussion zum selben Ergebnis, hat dann aber einige Zeilen mehr zu schreiben.

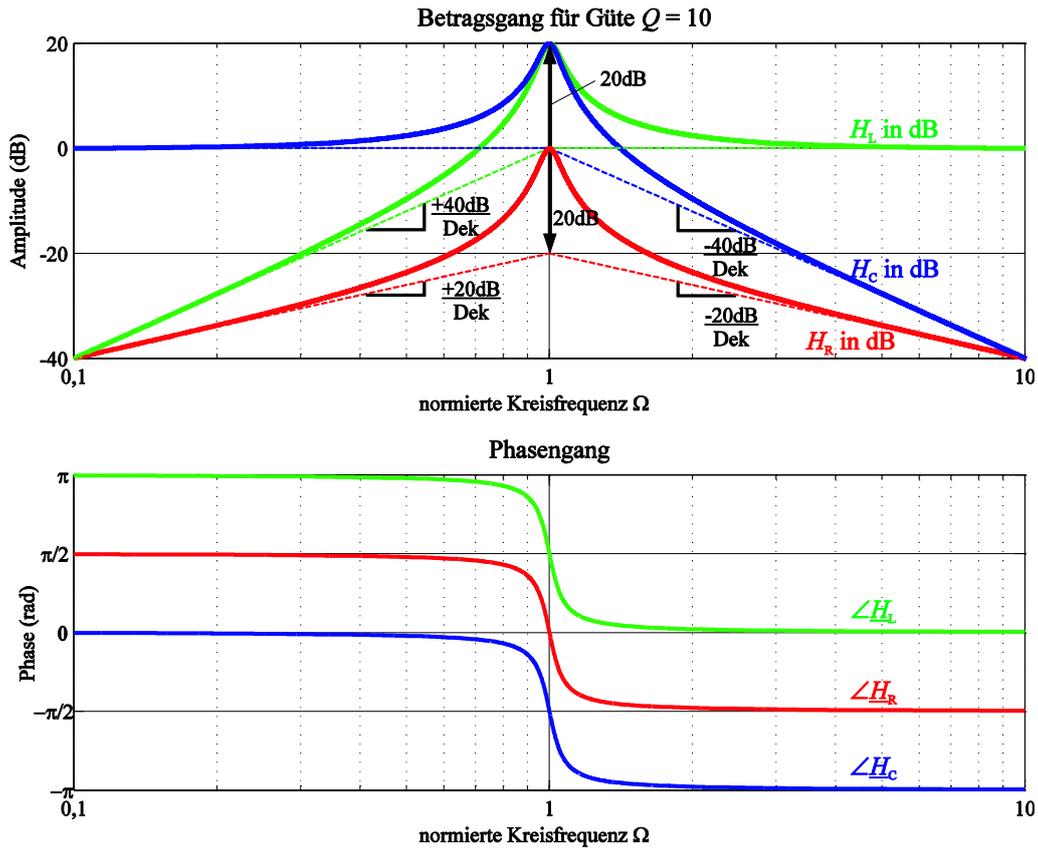


Bild 11-2: Spannungsverstärkungen beim RLC -Reihenschwingkreis, für Güte $Q = 10$

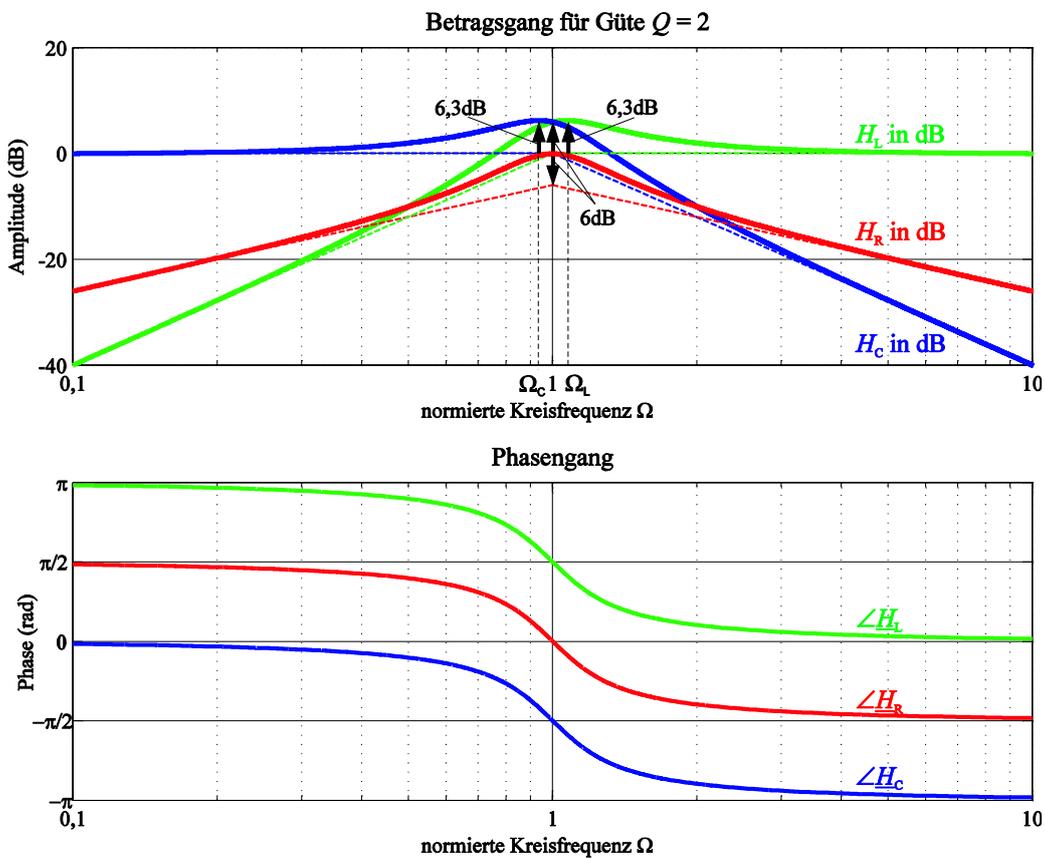


Bild 11-3: Spannungsverstärkungen beim RLC -Reihenschwingkreis, für Güte $Q = 2$

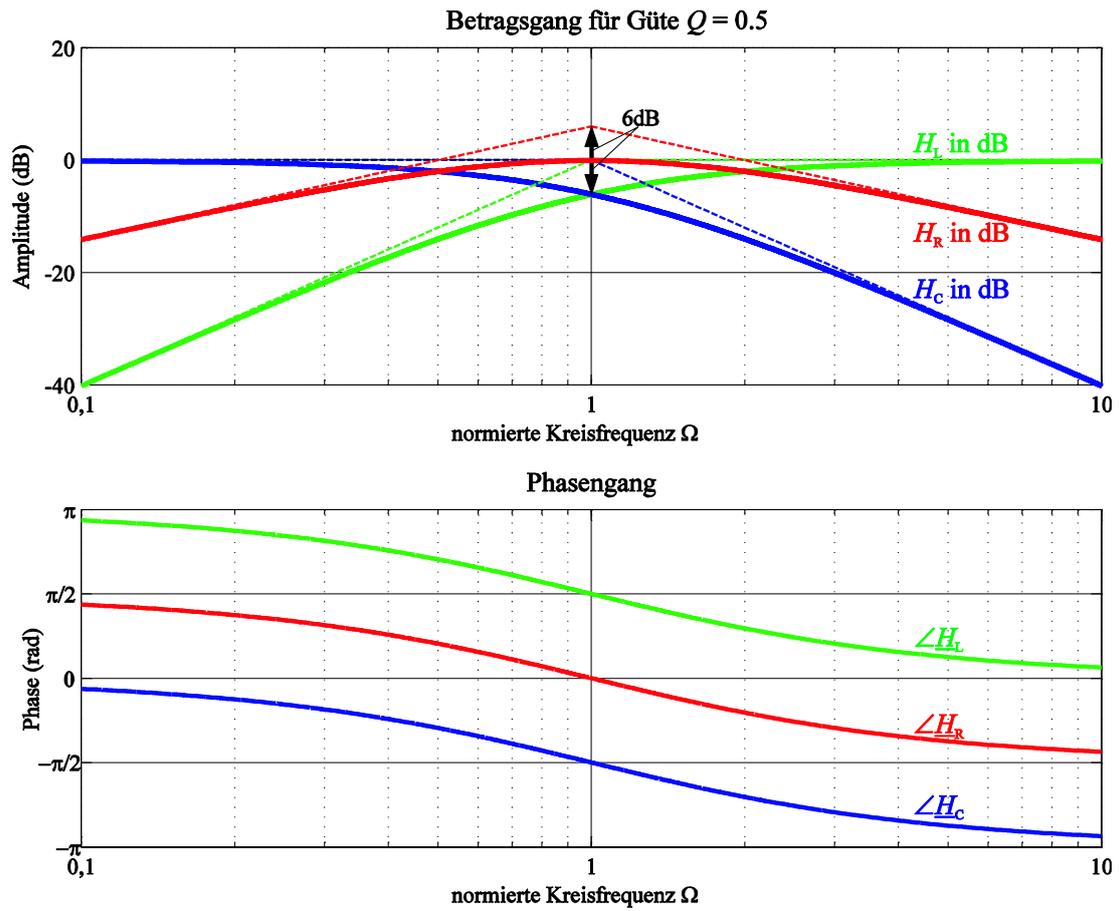


Bild 11-4: Spannungsverstärkungen beim RLC -Reihenschwingkreis, für Güte $Q = 0,5$

12 Leistung bei sinusförmigen Vorgängen

12.1 Momentan-, Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Es werde ein Verbraucherzählpfeilsystem angenommen:

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (12.1)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (12.2)$$

Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= 2UI \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \\ &= UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \end{aligned} \quad (12.3)$$

Die Momentanleistung besteht aus einem zeitlich konstanten Term und einem mit der doppelten Frequenz oszillierenden Term. Weitere Umformung liefert:

$$\begin{aligned} p(t) &= UI [\cos \varphi + \cos \varphi \cos 2(\omega t + \varphi_u) + \sin \varphi \sin 2(\omega t + \varphi_u)] \\ &= UI \cos \varphi [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)] + UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \quad (12.4)$$

Alternative Rechnung mit komplexen Zeigern:

$$u(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U} e^{j\omega t}) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{U} e^{j\omega t} + \underline{U}^* e^{-j\omega t}] \quad (12.5)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{I} e^{j\omega t}) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{I} e^{j\omega t} + \underline{I}^* e^{-j\omega t}] \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= \frac{1}{2} [\underline{U} e^{j\omega t} + \underline{U}^* e^{-j\omega t}] [\underline{I} e^{j\omega t} + \underline{I}^* e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} [\underline{U} \underline{I}^* + \underline{U}^* \underline{I} + \underline{U} \underline{I} e^{2j\omega t} + \underline{U}^* \underline{I}^* e^{-2j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I}^*) + \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I} e^{2j\omega t}) \\ &= UI \operatorname{Re}(e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}) + UI \operatorname{Re}(e^{j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \end{aligned} \quad (12.7)$$

Hieran erkennt man, dass die Momentanleistung aus zwei Anteilen besteht:

- Einem Gleichanteil der Größe $UI \cos \varphi$.
- Einem mit der doppelten Frequenz oszillierenden Term mit der Amplitude UI .

Es soll aber noch eine andere Darstellung erarbeitet werden:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= UI \operatorname{Re}\left(e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}\right) + UI \operatorname{Re}\left(e^{j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}\right) \\
 &= UI \operatorname{Re}\left(e^{j\varphi}\right) + UI \operatorname{Re}\left(e^{j(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)}\right) \\
 &= UI \operatorname{Re}\left(e^{j\varphi}\right) + UI \operatorname{Re}\left(e^{-j\varphi} e^{j(2\omega t + 2\varphi_u)}\right) \\
 &= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos 2(\omega t + \varphi_u) + UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \varphi_u) \\
 &= UI \cos \varphi (1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)) + UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \varphi_u)
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

In dieser Darstellung identifizieren wir drei Terme:

- Wiederum den Gleichanteil der Größe $UI \cos \varphi$.
- Einen mit der doppelten Frequenz oszillierenden Term, welchen wir in dieser Phasenlage auch bei einem ohmschen Widerstand erwarten würden. Die Amplitude dieser Schwingung ist genau so groß wie der Gleichanteil $UI \cos \varphi$. Auch diese Eigenschaft entspräche der Leistung an einem ohmschen Widerstand.
- Einen weiteren mit der doppelten Frequenz oszillierenden Term, allerdings mit einer gegenüber dem vorangegangenen Term um 90° voreilenden Phasenlage und einer Amplitude von $UI \sin \varphi$.

Die mittlere Leistung einer Periode heißt *Wirkleistung*. Das ist auch der Gleichanteil der Momentanleistung:

$$P = \bar{p} = UI \cos \varphi = \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I}^*) \tag{12.9}$$

Die Wirkleistung P ist aber gleichzeitig die Amplitude des oszillierenden Leistungsanteils, welcher in Phase mit der Leistungspendelung an einem ohmschen Widerstand ist. Der Term

$$\lambda = \cos \varphi \tag{12.10}$$

heißt *Leistungsfaktor* oder *Wirkfaktor*.

Als *Blindleistung* wird die Amplitude der Leistungsschwingung mit der um 90° verschobenen Phase bezeichnet:

$$Q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im}(\underline{U} \underline{I}^*) \tag{12.11}$$

Die *Scheinleistung* wird einfach als Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung definiert:

$$S = UI \quad (12.12)$$

Unter Verwendung der Wirk- und Blindleistung lässt sich die Momentanleistung schreiben als

$$p(t) = P(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)) + Q \sin 2(\omega t + \varphi_u) \quad (12.13)$$

Aus der ersten obigen Darstellung der Momentanleistung sehen wir, dass die Scheinleistung S die Schwingungsamplitude des gesamten oszillierenden Anteils ist:

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) = P + S \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \quad (12.14)$$

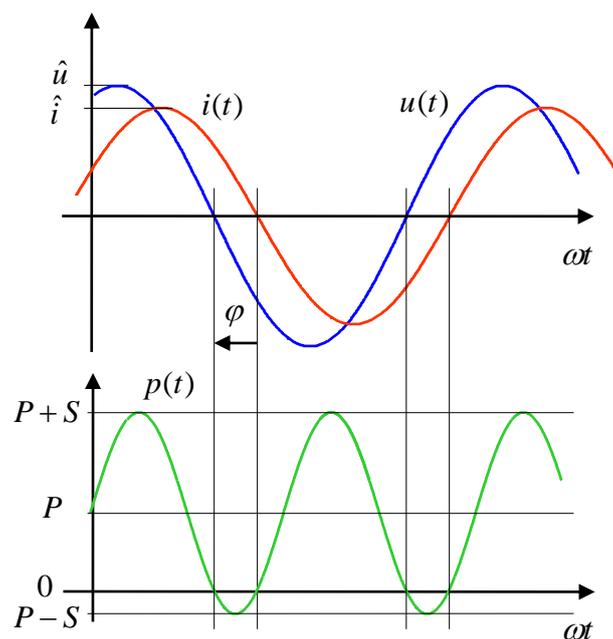


Bild 12-1: Momentwerte von Spannung, Strom und Leistung

Wirk-, Blind-, Scheinleistung und der Phasenwinkel hängen also wie folgt zusammen:

$$P = S \cos \varphi \quad (12.15)$$

$$Q = S \sin \varphi \quad (12.16)$$

bzw.

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (12.17)$$

Letzteres lässt sich geometrisch interpretieren.

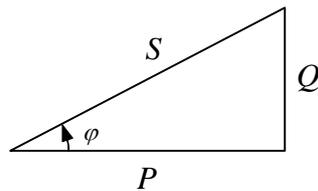


Bild 12-2: Geometrische Interpretation der Beziehung zwischen Wirk-, Blind-, Scheinleistung und dem Phasenwinkel:

Wirk- und Blindleistung lassen sich zu einem *komplexen Leistungszeiger*

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = P + jQ = S e^{j\varphi} \quad (12.18)$$

zusammenfassen. Damit erhalten wir eine weitere Interpretation der Momentanleistung $p(t)$ als Realteil eines mit der doppelten Frequenz um den Mittelpunkt \underline{S} rotierenden Zeigers der Länge S :

$$p(t) = \operatorname{Re}\left(\underline{S} + S e^{j(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}\right) = \operatorname{Re}\left(\underline{S} + \underline{S} e^{j2(\omega t + \varphi_i)}\right) \quad (12.19)$$

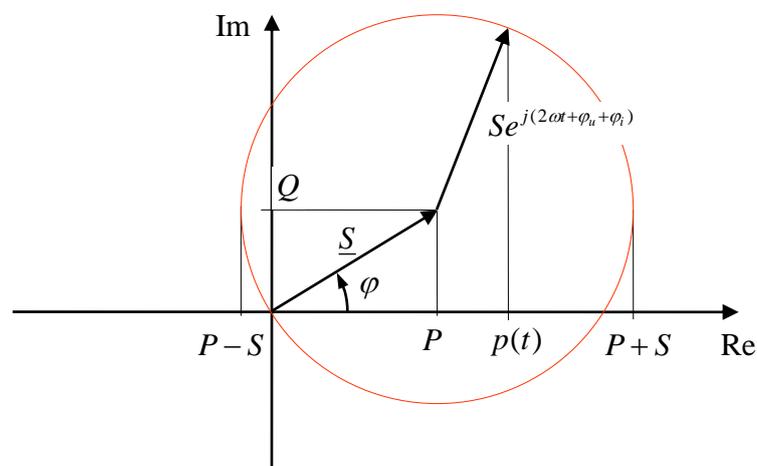


Bild 12-3: Interpretation der Momentanleistung als Realteil eines rotierenden komplexen Zeigers

Begriffe (für *Verbraucherzählrichtung*):

$P > 0$	verbrauchend, dissipierend oder motorisch
$P < 0$	erzeugend oder generatorisch
$Q > 0$	induktiv
$Q < 0$	kapazitiv

Maßeinheiten

$$[P] = 1 \text{ W} = 1 \text{ VA}$$

$$[Q] = 1 \text{ VA}$$

$$[S] = 1 \text{ VA}$$

Bei Blind- und Scheinleistungen wird die Einheit 1 VA, obwohl es formal korrekt wäre, üblicherweise nicht als 1 W geschrieben¹².

Im *Generatorzählpeilsystem* kehren sich die Vorzeichen bzw. die Bedeutungen um:

$P > 0$ erzeugend oder generatorisch, *liefert* Wirkleistung

$P < 0$ verbrauchend, dissipierend oder motorisch

$Q > 0$ *liefert* Blindleistung, zeigt also kapazitives Verhalten

$Q < 0$ *benötigt* Blindleistung, zeigt also induktives Verhalten

Darstellungen mit Admittanzen und Reaktanzen

Mit

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} = (R + jX)\underline{I} \quad (12.20)$$

bzw.

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} = (G + jB)\underline{U} \quad (12.21)$$

folgen die Darstellungen (vgl. Abschnitt 9.4)

P	Q	S
RI^2	XI^2	ZI^2
GU^2	$-BU^2$	YU^2

¹² Für die Blindleistung ist die Einheit „1 var“ zwar weit verbreitet (*r* für *reactive*, also für die Blindkomponente), und sogar nach DIN 1301, Teil 1 zulässig, doch besteht weder Grund noch Notwendigkeit, für die Blindleistung eine gesonderte Einheit einzuführen, da 1 VA als Einheit völlig ausreicht. Die Einheit „var“ ist im System der internationalen Einheiten nicht vorgesehen. Beispiele anderer, leider immer wieder ins Kraut schießender unzulässiger Schreibweisen: A_{eff} , V_{ss} , W_{el} , U/min usw. Korrekt: Der Effektivwert des Strom ist $I=5$ A, die Spannungsschwankung beträgt $U_{\text{ss}}=0,5$ V, die elektrische Leistung ist $P_{\text{el}}=1,5$ MW, die Drehzahl (das ist die Zahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit) beträgt $n=1000/\text{min}$.

Bedeutung der Blind- und Scheinleistung

Elektrotechnische Komponenten und Systeme werden häufig nach den Effektivwerten des zu führenden Stroms I und der Spannung U bemessen und ausgelegt (einfachstes Beispiel: Kabel). Das Produkt beider Größen ist die Scheinleistung. Die Scheinleistung ist also ein Maß für die Bemessung, damit meist auch für die Kosten. Bei Systemen der Energieübertragung und -wandlung möchte man häufig bei gegebener Scheinleistung möglichst viel Wirkleistung umzusetzen, also einen Leistungsfaktor $\cos \varphi$ möglichst nahe 1 erreichen.

Der normale Haushaltsstromzähler misst nur die Wirkleistung, die Blindleistung bleibt außer Acht. Die Energieversorgungsunternehmen (EVU) stellen jedoch bei großen Stromverbrauchern auch die bereitgestellte Blindleistung in Rechnung bzw. setzen Grenzwerte für den zulässigen Leistungsfaktor des Verbrauchers.

12.2 Leistung und Energie

Nach obigen Abschnitt gilt

$$p(t) = P(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)) + Q \sin 2(\omega t + \varphi_u) \quad (12.13)$$

Nach Abschnitt 5 gilt auch die Energiebilanz:

$$p(t) = p_i(t) + \dot{w}(t) \quad (12.22)$$

Aus einer Mittelwertbildung über eine Periode folgt, dass die zugeführte Wirkleistung im zeitlichen Mittel die im Innern des Zweipols verbrauchte (dissipierte) Leistung sein muss,

$$P = \overline{p(t)} = \overline{p_i} + \overline{\dot{w}} = \overline{p_i} \quad (12.23)$$

denn für periodische Vorgänge muss gelten

$$\overline{\dot{w}} = 0 \quad (12.24)$$

Eine einfache Zuordnung der mit Kosinus und Sinus oszillierenden Terme in der Momentanleistung zu den Termen $p_i(t)$ und $\dot{w}(t)$ gelingt im Allgemeinen jedoch *nicht*. Es gelingt im Allgemeinen auch nicht, allein durch Betrachtung von Wirk- und Blindleistung ohne Kenntnis der inneren Struktur des Zweipols eine Aussage über die mittlere gespeicherte Energie zu gewinnen.

Für Kondensatoren und Spulen können wir aber durch Kenntnis der inneren Zusammenhänge als mittlere gespeicherte Energien angeben:

$$W_C = \overline{w_C} = \frac{1}{2} \overline{Cu^2(t)} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2\omega} UI = \frac{S}{2\omega} = -\frac{Q}{2\omega} \quad (12.25)$$

$$W_L = \overline{w_L} = \frac{1}{2} \overline{Li^2(t)} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\omega} UI = \frac{S}{2\omega} = \frac{Q}{2\omega} \quad (12.26)$$

Für die Scheitelwerte der gespeicherten Energien gilt:

$$\hat{w}_C = 2W_C = -\frac{Q}{\omega} \quad (12.27)$$

$$\hat{w}_L = 2W_L = \frac{Q}{\omega} \quad (12.28)$$

12.3 Wirk- und Blindstrom

Wirkstrom:

$$I_w = I \cos \varphi \quad (12.29)$$

Blindstrom:

$$I_b = I \sin \varphi \quad (12.30)$$

Damit lassen sich Wirk- und Blindleistung schreiben als

$$P = UI_w \quad (12.31)$$

$$Q = UI_b \quad (12.32)$$

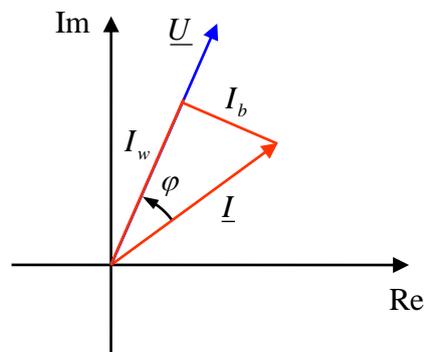


Bild 12-4: Wirk- und Blindstrom im Zeigerdiagramm

In Parallelschaltungen addieren sich die Wirk- und Blindströme der einzelnen Zweipole:

$$I_w = \sum_k I_{wk} \quad (12.33)$$

$$I_b = \sum_k I_{bk} \quad (12.34)$$

Ebenso gilt:

$$P = \sum_k P_k \quad (12.35)$$

$$Q = \sum_k Q_k \quad (12.36)$$

auch

$$\underline{S} = \sum_k \underline{S}_k \quad (12.37)$$

Solches gilt aber *nicht* für die Summe der Scheinleistungen $\sum_k S_k$!

12.4 Wirk- und Blindspannung

Wirkspannung:

$$U_w = U \cos \varphi \quad (12.38)$$

Blindspannung:

$$U_b = U \sin \varphi \quad (12.39)$$

Damit lassen sich Wirk- und Blindleistung schreiben als

$$P = U_w I \quad (12.40)$$

$$Q = U_b I \quad (12.41)$$

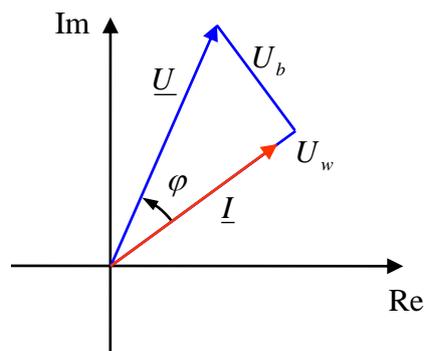


Bild 12-5: Wirk- und Blindspannung im Zeigerdiagramm

In Reihenschaltungen addieren sich die Wirk- und Blindspannungen der einzelnen Zweipole:

$$U_w = \sum_k U_{wk} \quad (12.42)$$

$$U_b = \sum_k U_{bk} \quad (12.43)$$

Ebenso gilt:

$$P = \sum_k P_k \quad (12.35)$$

$$Q = \sum_k Q_k \quad (12.36)$$

$$\underline{S} = \sum_k \underline{S}_k \quad (12.37)$$

12.5 Wirk- und Blindleistungsbilanz sowie Gesamtenergie in Netzwerken

Aus den Abschnitten 12.3 und 12.4 folgt, dass sich Wirk- und Blindleistung über die Elemente eines Netzwerks bilanzieren:

$$P = \sum_k P_k \quad (12.35)$$

$$Q = \sum_k Q_k \quad (12.36)$$

sowie für die komplexen Leistungszeiger

$$\underline{S} = \sum_k \underline{S}_k \quad (12.37)$$

Ähnliches gilt *nicht* für die Summe der Scheinleistungen $\sum_k S_k$, ebenso nicht für die Phasenwinkel.

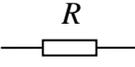
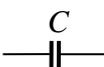
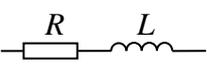
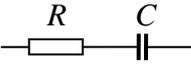
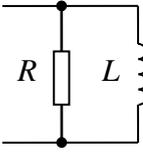
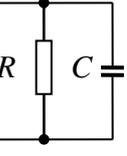
Aus der Bilanz der Blindleistungen ergibt sich, dass Elemente mit positiver und negativer Blindleistung sich gegenseitig kompensieren können. Dies ist der wesentliche Gedanke bei der Blindleistungskompensation, bei der die (häufig induktive) Blindleistung eines Verbrauchers durch einen Blindleistungskompensator mit entgegengesetzter (meist kapazitiver) Blindleistung kompensiert wird.

Wird ein Netzwerk aus elementaren R , L , C -Elementen aufgebaut, lässt sich für die mittlere im gesamten Netzwerk gespeicherte Energie nach Abschnitt 12.2 finden:

$$W = \sum_k W_k = \frac{1}{2\omega} \sum_k |Q_k| \quad (12.44)$$

Aufgrund der Betragsbildung in der Summe lässt sich die Gesamtenergie im Allgemeinen nicht aus der Gesamtblindleistung bestimmen.

12.6 Tabelle für Schein-, Wirk- und Blindleistungen

	φ	S	P	Q
	0	$RI^2 = \frac{U^2}{R}$	$RI^2 = \frac{U^2}{R}$	0
	$+\frac{\pi}{2}$	ωLI^2	0	ωLI^2
	$-\frac{\pi}{2}$	ωCU^2	0	$-\omega CU^2$
	$+\arctan \frac{\omega L}{R}$	$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I^2$	RI^2	ωLI^2
	$-\arctan \frac{1}{\omega RC}$	$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} I^2$	RI^2	$-\frac{I^2}{\omega C}$
	$+\arctan \frac{R}{\omega L}$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} U^2$	$\frac{U^2}{R}$	$\frac{U^2}{\omega L}$
	$-\arctan \omega RC$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} U^2$	$\frac{U^2}{R}$	$-\omega CU^2$

13 Reale Bauelemente (L, C, R)

13.1 Normreihen

Standardisierte Bauelemente werden für bestimmte Normwerte bereitgehalten. Die Werte ergeben sich durch logarithmische Teilung einer Dekade und Rundung auf möglichst glatte Werte. Es gibt die Normreihen E3, E6, E12, E24:

E3	E6	E12	E24	logarithmische Teilung
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0000
			1,1	1,1007
		1,2	1,2	1,2115
			1,3	1,3335
	1,5	1,5	1,5	1,4678
			1,6	1,6156
		1,8	1,8	1,7783
			2,0	1,9573
2,2	2,2	2,2	2,2	2,1544
			2,4	2,3714
		2,7	2,7	2,6102
			3,0	2,8730
	3,3	3,3	3,3	3,1623
			3,6	3,4807
		3,9	3,9	3,8312
			4,3	4,2170
4,7	4,7	4,7	4,7	4,6416
			5,1	5,1090
		5,6	5,6	5,6234
			6,2	6,1897
	6,8	6,8	6,8	6,8129
			7,5	7,4989
		8,2	8,2	8,2540
			9,1	9,0852
10	10	10	10	10,0000

13.2 Kennwerte

Idealisierte Bauelemente werden allein durch den Wert ihres Widerstands, der Induktivität oder der Kapazität bestimmt. Reale Bauelemente werden darüber hinaus durch eine Zahl weiterer Spezifikationen beschreiben.

Grundsätzlich lassen sich die angegebenen Daten in zwei Kategorien einteilen:

- Betriebskennwerte, die das Verhalten im normalen Betrieb charakterisieren
- Grenzwerte, die keinesfalls verletzt werden dürfen

Je nach Bauelement und Einsatzbereich sind dies z.B.:

Betriebskennwerte:

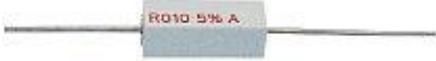
- Kennwert des Widerstands, der Induktivität der Kapazität
- Toleranzen der Kennwerte
- typische Verlustleistung
- Angaben über parasitäre Effekte (z. B. Innenwiderstand und Kapazität bei Spulen)
- Grenzfrequenz
- Temperaturkoeffizient
- Angaben über Abweichungen von der Linearität
- geometrische Abmaße
- Schutzklasse
- usw.

Grenzwerte:

- maximale Spannung
- maximaler Strom
- maximale Änderungsrate von Strom oder Spannung (Strom- oder Spannungssteilheit)
- maximale Spitzen-Verlustleistung
- maximale Dauerleistung
- zulässiger Bereich der Betriebstemperatur
- zulässiger Bereich der Luftfeuchtigkeit
- zulässige Umgebungsbedingungen (z.B. explosive Gase)
- zulässige Bereiche der Temperatur und Luftfeuchtigkeit für Transport, Lagerung und Montage (Löttemperatur)
- mechanische Beanspruchbarkeit
- Lebensdauer, Zahl der Temperaturzyklen
- usw.

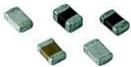
13.3 Bauformen

13.3.1 Widerstände

	<p>SMD-Widerstand 0,125 W bis 70 °C</p>
	<p>SMD-Leistungs-Widerstand 1 W, zulässige Betriebsspannung 300 V bis 155 °C</p>
	<p>Drahtwiderstände 4 W Toleranz $\pm 5\%$. Nicht gewickelt, sehr geringe Induktivität</p>
	<p>Drahtwiderstände 50Ω/25 W</p>
	<p>Drahtwiderstände 10Ω/100 W Toleranz 5%.</p>
	<p>Drahtwiderstände 300 W.</p>
	<p>Bremswiderstände für Schaltschränke, 1,0-50 kW z. B. für Antriebe mit Frequenzumrichtern.</p>

	<p>Widerstandsspannungsteiler für Hochspannungs-Messung ca. 500kV</p>
---	---

13.3.2 Kondensatoren

	<p>Keramischer Kondensator, unipolar, Hohe Resonanzfrequenz bis 10MHz. Spannung 50 V</p>
	<p>SMD Keramischer Kondensator, unipolar, Nennspannung 50V</p>
	<p>Tantal-Kondensator mit radialen Anschlüssen, Polaritätskennzeichnung (+), kleiner Verlustfaktor.</p>
	<p>SMD Tantal-Kondensator bis 35V. Frequenzbereich bis 1MHz</p>
	<p>Elektrolytkondensator, Low-ESR besonders im Frequenzbereich 10kHz – 1MHz, Temperaturbereich: -55 bis +105 °C.</p>

 <p>A small cylindrical surface-mount electrolytic capacitor with a blue top and silver base. The top is marked with '220µF' and '35V'.</p>	<p>SMD Elektrolytkondensator bis 50V, Polaritätskennzeichnung (-), Temperaturbereich: -40 bis +85 °C</p>
 <p>Two film capacitors. The top one is red and yellow, marked 'WIMA FKP 1 6800 2000-700~'. The bottom one is blue, marked 'BB1130 X2 MKP/SH 40/100/21/C' and 'IEC384 14(2) 250V~ 250V~'.</p>	<p>Folienkondensator, Temperaturbereich -55 bis +100 °C.</p>
 <p>A cylindrical electrolytic capacitor with a black body and silver terminals. It is marked with '250µF', '50V', and '105°C'.</p>	<p>Hochspannungskondensator, Einsatz für Schaltnetzteile, Kapazitätstoleranz $\pm 20\%$ · Temperaturbereich ≤ 250 V: -40 bis +105 °C, ≤ 400 V: -25 bis +105 °C.</p>
 <p>A large cylindrical screw capacitor with a black body and two screw terminals. It is marked with 'EPCOS LL B43456-A5228-M 2200µF (M) 450 V- 25/085/56 04.01 Made in Germany'.</p>	<p>Schraubenkondensator, für hochprofessionelle Stromversorgungsgeräte, hohe Strombelastbarkeit, spannungslose Lagerung bis 10 Jahre möglich.</p>

13.3.3 Drosseln

	<p>SMD Drossel 10 bis 1000 mH Frequenzbereich bis 20MHz Nennstrom 400 to 3500 mA</p>
	<p>Entstördrosseln, z. B. für Thyristor- und Triac-Schaltungen</p>
	<p>Luftspule</p>
	<p>Entstördrossel mit Ferrit-Ringkern</p>
	<p>Drossel mit EI-Ferritkern</p>

13.4 Reales Verhalten

Modellierung des realen Verhaltens durch *Ersatzschaltbilder* mit idealen Elementen.

Die Wahl des passenden Ersatzschaltbildes (also des Modells) ist abhängig von der Problemstellung und der notwendigen Detaillierungstiefe. Die Entscheidung für ein Modell erfolgt aufgrund:

- Modell-Verifikation durch Messung unter Problem-typischen Bedingungen
- durch Vergleich verschiedener Modellierungsansätze (wenn Messungen nicht möglich sind)
- Erfahrung

Beispiele für verschiedene Modelle bzw. Ersatzschaltbilder:

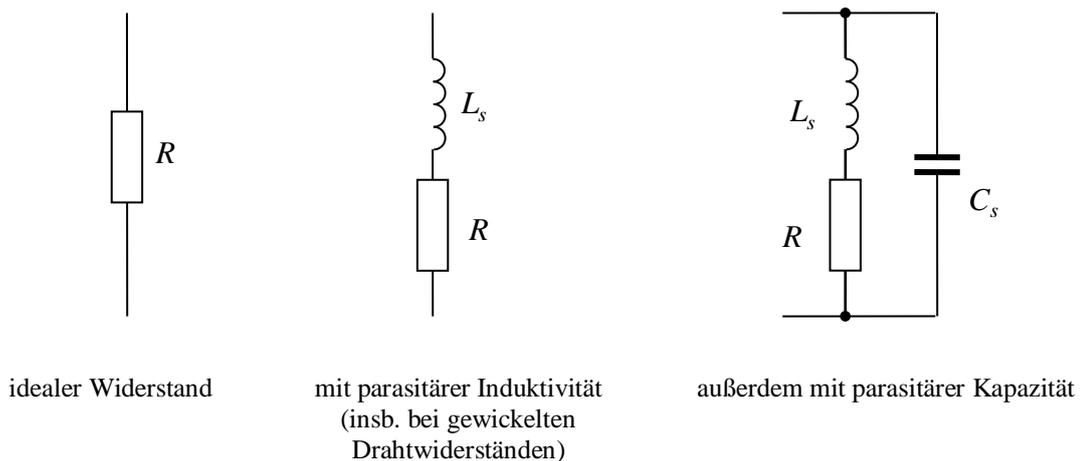
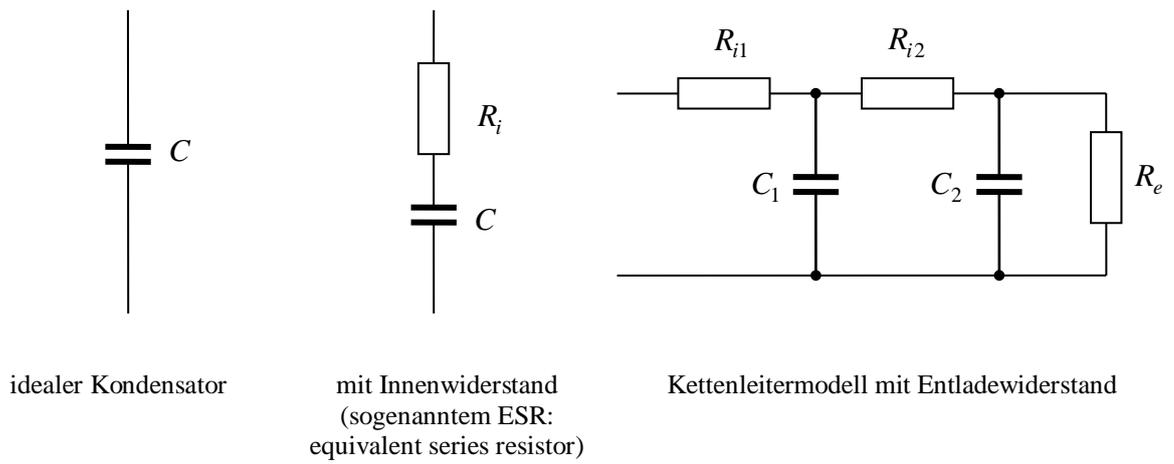
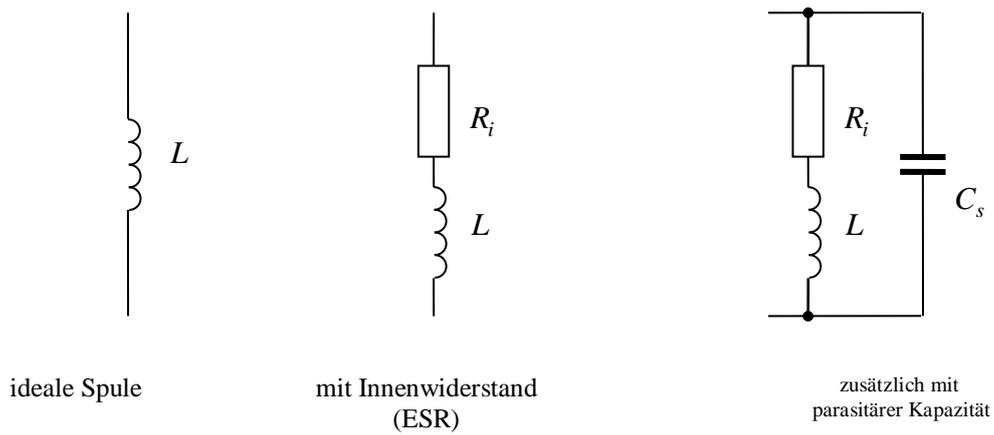


Bild 13-1: Ersatzschaltbilder eines realen Widerstands

**Bild 13-2:** Ersatzschaltbilder eines realen Kondensators**Bild 13-3:** Ersatzschaltbilder einer realen Spule

13.5 Verlustwinkel und Verlustfaktor

Als reaktive Bauelemente bezeichnet man Kondensatoren und Spulen, da diese im Idealfall nur eine Reaktanz, aber keine Resistanz aufweisen. Die Güte realer Bauelemente wird durch die Abweichung vom idealen Verhalten bewertet. Dazu wird der *Verlustwinkel* eingeführt. Dieser ist die Abweichung vom idealen Phasenwinkel von 90° bei induktiven bzw. von -90° bei kapazitiven Bauelementen:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\angle \underline{Z}| = \frac{\pi}{2} - |\varphi| \quad (13.1)$$

Der Phasenwinkel φ der Impedanz lässt sich über ihren Real- und Imaginärteil, also der Resistanz und Reaktanz bestimmen:

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} \quad (13.2)$$

$$\tan |\varphi| = \frac{|X|}{R} \quad (13.3)$$

Daraus folgt:

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - |\varphi| \right) = \frac{R}{|X|} \quad (13.4)$$

$$\tan \delta = \frac{R}{|X|} = \frac{|B|}{G} \quad (13.5)$$

Der Term $\tan \delta$ wird *Verlustfaktor* genannt. Er wird durch Messung der Reaktanz und Resistanz bzw. der Suszeptanz und der Konduktanz bestimmt. Typischerweise sind Verlustwinkel und Verlustfaktor nicht konstant, sondern frequenzabhängig.

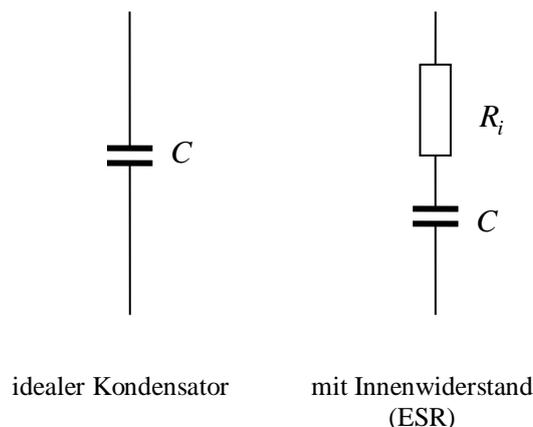


Bild 13-4: Beispiel: Kondensator mit Innenwiderstand

Der äquivalente Serienwiderstand R_i eines Kondensators (auch R_{ESR} , engl.: Equivalent Series Resistor) fasst verschiedene Verluste eines realen Kondensators zusammen:

- Ohmsche Verluste der Zuleitungen
- Dielektrische Verluste durch Umladung des Kondensators
- Isolationsverluste

Impedanz des Ersatzschaltbildes und resultierender Verlustfaktor:

$$\underline{Z} = R_i + \frac{1}{j\omega C} \quad (13.6)$$

$$R = R_i \quad (13.7)$$

$$X = -\frac{1}{\omega C} \quad (13.8)$$

$$\tan \delta = \frac{R}{|X|} = \omega R_i C \quad (13.9)$$

14 Spulen mit Kern

14.1 Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises

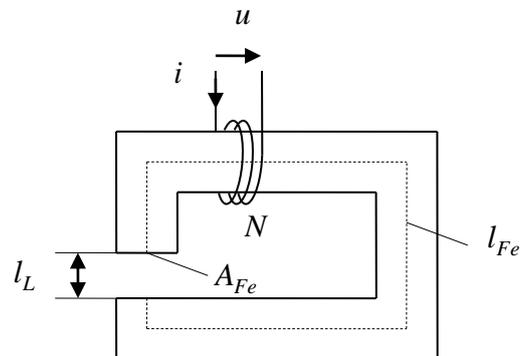


Bild 14-1: Drossel mit Ringkern und Luftspalt

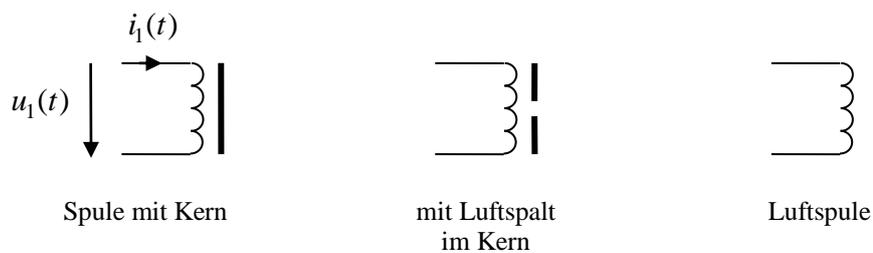


Bild 14-2: Schaltzeichen einer Drossel

Magnetischer Fluss:

$$\phi = \int_A b \cdot dA \quad (14.1)$$

Magnetische Spannung:

$$\theta = \int_l h \cdot ds \quad (14.2)$$

b : magnetische Flussdichte

h : magnetische Feldstärke

Annahme stückweise homogener Felder im k -ten Element des magnetischen Kreises:

$$\phi_k = A_k b_k \quad (14.3)$$

$$\theta_k = l_k h_k \quad (14.4)$$

Annahme eines linearen Materialgesetzes:

$$b_k = \mu_{rk} \mu_0 h_k \quad (14.5)$$

ergibt

$$\theta_k = R_k \phi_k \quad (14.6)$$

mit dem *magnetischen Widerstand* oder der *magnetischen Reluktanz*

$$R_k = \frac{\theta_k}{\phi_k} = \frac{l_k}{A_k \mu_{rk} \mu_0} \quad (14.7)$$

Der Kehrwert des magnetischen Widerstands ist die magnetische Leitfähigkeit

$$\Lambda_k = \frac{1}{R_k} = \frac{\phi_k}{\theta_k} = \frac{A_k \mu_{rk} \mu_0}{l_k} \quad (14.8)$$

Im einem einfachen magnetischen Kreis gilt (Quellenfreiheit des magnetischen Feldes):

$$\phi = \phi_k = \text{const.} \quad (14.9)$$

Das Induktionsgesetz:

$$u = N \dot{\phi} = \dot{\psi} \quad (14.10)$$

Wird ein ohmscher Innenwiderstand R_i der Spule berücksichtigt, lautet die Gleichung:

$$u - R_i i = N \dot{\phi} = \dot{\psi} \quad (14.11)$$

Die Größe

$$\psi = N \phi \quad (14.12)$$

heißt *Verkettungsfluss*.

Der Durchflutungssatz:

$$\sum_k \theta_k = Ni \quad (14.13)$$

Die Quelle der magnetischen Spannung Ni heißt *Durchflutung*.

Es folgt

$$\psi = \frac{N^2 i}{R_{\text{magn}}} \quad (14.14)$$

mit dem gesamten magnetischen Widerstand

$$R_{\text{magn}} = R_L + R_{Fe} \quad (14.15)$$

Häufig kann der Kernwiderstand bei hochpermeablem Material gegenüber einem Luftspalt vernachlässigt werden:

$$R_{\text{magn}} \approx R_L \quad (14.16)$$

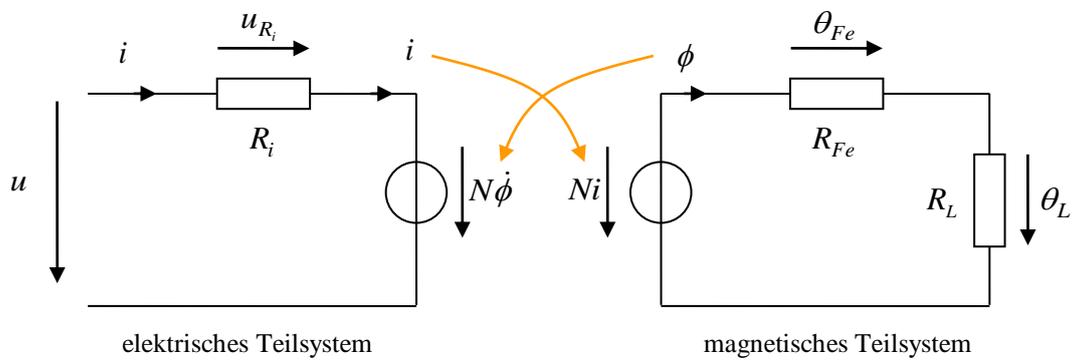


Bild 14-3: Ersatzschaltbild einer Drossel mit elektrischen und magnetischem Teilsystem

14.2 Induktivität und Energie

Vgl. Abschnitte 3.4 und 4.1!

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{N^2}{R_{\text{magn}}} = N^2 \Lambda \quad (14.17)$$

Je geringer der magnetische Widerstand, desto größer die Induktivität. Ohne Luftspalt wird bei ansonsten gleich bleibenden Parametern die größte Induktivität erreicht:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{N^2 A_{Fe} \mu_{rFe} \mu_0}{l_{Fe}} \quad (14.18)$$

Energie (vgl. Abschnitt 3.4):

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 \quad (14.19)$$

Anscheinend steigt die speicherbare Energie mit der Induktivität. Das ist aber ein Trugschluss bzw. nur für die Betrachtung konstanten Stroms richtig. Andere Darstellung der Energie:

$$w_L = \frac{1}{2L} \psi^2 = \frac{1}{2} \phi^2 R_{\text{magn}} \quad (14.20)$$

Bei gegebenem magnetischem Material ist die Flussdichte begrenzt und somit auch der Fluss und Verkettungsfluss begrenzt. Bei einem maximal möglichen Fluss nimmt die speicherbare Energie also mit steigender Induktivität ab!

Physikalische Interpretation: Die magnetische Energie wird im Wesentlichen im Luftspalt, kaum im Eisen gespeichert. Eine Drossel, die Energie speichern soll, muss einen Luftspalt oder einen äquivalenten magnetischen Widerstand haben. Das hochpermeable Kernmaterial dient lediglich der Flussführung und Flusskonzentration durch die Wicklung.

Viele weitere sinnvolle Darstellungsformen für die magnetische Energie:

$$\begin{aligned} w_L &= \frac{1}{2} Li^2 \\ &= \frac{1}{2} \psi i \\ &= \frac{1}{2} \phi Ni \\ &= \frac{1}{2} \phi^2 R_{\text{magn}} \\ &= \frac{1}{2} \phi \sum_k \theta_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \phi \theta_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_k A_k b_k l_k h_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_k V_k b_k h_k \\ &= \frac{1}{2} \int_V bh \, dV \end{aligned} \quad (14.21)$$

Hierbei sind

$$V_k = A_k l_k \quad (14.22)$$

die Volumina der Elemente und V das Gesamtvolumen.

Die Größe

$$\frac{1}{2} bh$$

ist die Energiedichte des magnetischen Feldes.

14.3 Beziehungen zwischen Scheinleistung, Geometrie und Material

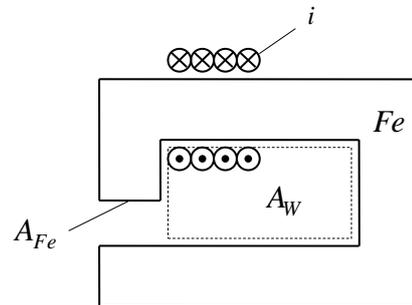


Bild 14-4: Zur Definition von Wicklungsfenster und Kernquerschnitt

A_{Fe} : Querschnittsfläche des Kerns

A_W : Fläche des Wicklungsfensters

Sinusförmige Speisung:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad (14.23)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\omega} \sin \omega t \quad (14.24)$$

$$b(t) = \frac{\psi(t)}{NA_{Fe}} = \frac{\sqrt{2} U}{\omega NA_{Fe}} \sin \omega t = \hat{b} \sin \omega t \quad (14.25)$$

Scheitelwert der Flussdichte:

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{2} U}{\omega N A_{Fe}} \quad (14.26)$$

Bei einer gegebenen maximalen Flussdichte \hat{b}_{\max} des Kernmaterials folgt die maximale Spannung

$$U_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}_{\max} \omega N A_{Fe} \quad (14.27)$$

Fenster (Window) für Wicklung:

$$A_W = \frac{A_{Cu} N}{k_{cu}} \quad (14.28)$$

N : Windungszahl

A_{Cu} : Drahtquerschnitt

k_{Cu} : Füllfaktor, typische Werte: 0,25-0,65 (Drahtwicklungen) bis 0,8-0,9 (für Formspulen)

Maximaler Strom bei gegebener maximaler Stromdichte J_{\max} (Effektivwert):

$$I_{\max} = A_{Cu} J_{\max} = \frac{A_W k_{Cu} J_{\max}}{N} \quad (14.29)$$

Maximale Scheinleistung:

$$S_{\max} = U_{\max} I_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{\max} \hat{b}_{\max} \omega k_{Cu} A_{Fe} A_W \quad (14.30)$$

Das Produkt

$$A_p = A_{Fe} A_W \quad (14.31)$$

heißt *Flächenprodukt* und ist eine typische Kenngröße magnetischer Bauelemente (Einheit: $[A_p] = \text{m}^4$) und steht in direkter Beziehung zur Scheinleistung:

$$A_p = \frac{\sqrt{2}}{J_{\max} \hat{b}_{\max} \omega k_{Cu}} S_{\max} \quad (14.32)$$

Werden magnetische Bauelemente gleicher Konstruktion, aber unterschiedlicher geometrischer Skalierung, welche durch eine charakteristische Längenabmessung l beschrieben werde, miteinander verglichen, ergeben sich die folgenden *Wachstumsgesetze*:

Länge	l
Volumen	$V \sim l^3$
Masse	$M \sim l^3$
Kernquerschnitt	$A_{Fe} \sim l^2$
Wicklungsfenster	$A_W \sim l^2$
Flächenprodukt	$A_p \sim l^4$
Scheinleistung	$S_{\max} \sim A_p \sim l^4 \sim V^{4/3}$

Über den Zusammenhang zwischen Scheinleistung und Flächenprodukt können also die geometrischen Abmessungen des Transformators festgelegt werden. Weiterhin muß noch die Windungszahl und der magnetische Widerstand festgelegt werden. Die Windungszahl folgt aus (14.27) zu

$$N = \frac{\sqrt{2} U_{\max}}{\hat{b}_{\max} A_{Fe} \omega} \quad (14.33)$$

Der benötigte magnetische Widerstand wird über

$$R_{\text{magn}} = \frac{NI}{\phi} = \frac{\sqrt{2} NI_{\max}}{\hat{b}_{\max} A_{Fe}} = \frac{\sqrt{2} NS_{\max}}{\hat{b}_{\max} A_{Fe} U_{\max}} \quad (14.34)$$

bestimmt. Diese Reluktanz wird entweder bei hochpermeablen Kernen durch einen entsprechenden Luftspalt oder durch Kernmaterial mit passender Permeabilität realisiert.

Bei hochpermeablem Kernmaterial wird der magnetische Gesamtwiderstand im Wesentlichen allein durch den Luftspalt bestimmt,

$$R_{\text{magn}} \approx \frac{l_L}{\mu_0 A_{Fe}} \quad (14.35)$$

und es folgt für die notwendige Luftspaltbreite

$$l_L = \mu_0 A_{Fe} R_{\text{magn}} = \frac{2\mu_0 S_{\max}}{\hat{b}_{\max}^2 A_{Fe} \omega} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 J_{\max} k_{Cu} A_W}{\hat{b}_{\max}} \quad (14.36)$$

Wird der magnetische Widerstand ohne Luftspalt, aber unter Verwendung von Kernmaterial mittlerer Permeabilität (Index *Fe* wird weiterhin verwendet) konzipiert, folgt aus dem magnetischen Widerstand

$$R_{\text{magn}} = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_{rFe} A_{Fe}} \quad (14.37)$$

für die notwendige Permeabilitätszahl

$$\mu_{rFe} = \frac{l_{Fe}}{A_{Fe} \mu_0 R_{\text{magn}}} = \frac{l_{Fe} \hat{b}_{\max}^2 A_{Fe} \omega}{2\mu_0 S_{\max}} = \frac{\hat{b}_{\max} l_{Fe}}{\sqrt{2} \mu_0 J_{\max} k_{Cu} A_W} \quad (14.38)$$

In diesem Fall werden typischerweise Kerne aus pulverisierten Materialien (Pulverkerne) eingesetzt.

Bei diesen Entwurfsschritten tritt die gewünschte Induktivität explizit gar nicht auf. Sie ist aber über den Zusammenhang

$$U_{\max} = X I_{\max} = \omega L I_{\max} \quad (14.39)$$

indirekt in den Bemessungsgrößen für Strom und Spannung enthalten.

Typische Werte verschiedener Materialien

Material	\hat{b}_{\max}/T	μ_r
Ferrite (<i>NiZn, MnZn</i>)	0,1-0,5	10-2000
Dynamobleche (<i>Fe</i>)	1-1,5	1000-10000
Permalloy, MuMetall (<i>FeNi</i>)	1	10000-50000
<i>Fe</i> -Pulverkerne	0,5-1,9	10-100
<i>FeNi</i> -Pulverkerne	1-1,5	20-300
<i>FeSiAl</i> -Pulverkerne	1	25-120

Die maximalen effektiven Stromdichten J_{\max} in *Cu* liegen (je nach Gesamtvolumen der Wicklung und Kühlung) in der Größenordnung von 1 bis 10 A/mm². Bei sehr hohem Kühlaufwand können Werte bis zu 100 A/mm² erreicht werden (wodurch sich aber typischerweise der Füllfaktor verschlechtert), mit supraleitenden Spulen sogar einige kA/mm².

Zusammenfassung der Auslegung eines magnetischen Bauelements:

- Anforderung festlegen: Z. B. $U_{\max}, I_{\max}, \omega$ oder U_{\max}, L, ω bzw. I_{\max}, L, ω
- daraus folgt S_{\max}
- Materialvorauswahl liefert \hat{b}_{\max} , Wickelverfahren und Kühlung (häufig Erfahrungswerte) bestimmen k_{Cu} und J_{\max}
- damit Flächenprodukt A_p bestimmen, s. (14.32)
- A_W, A_{Fe} festlegen, hier gibt es einen Konstruktionsfreiheitsgrad α : $A_W = \alpha \sqrt{A_p}$, $A_W = \sqrt{A_p} / \alpha$. Ggf. für ersten Entwurf mit $\alpha = 1$ starten
- geometrische Konstruktion mit den Flächen A_W, A_{Fe} ausführen bzw. passende Standardkerne auswählen
- Luftspalt bestimmen bzw. Materialauswahl über μ_r festlegen, s. (14.36) bzw. (14.39)
- Windungszahl N festlegen, s. (14.33)

In der Regel wird es mehrere Iterationsschleifen dieser Prozedur benötigen, da die verfügbaren Kerne nach Material und Geometrie den idealen Werten nur mehr oder weniger entsprechen.

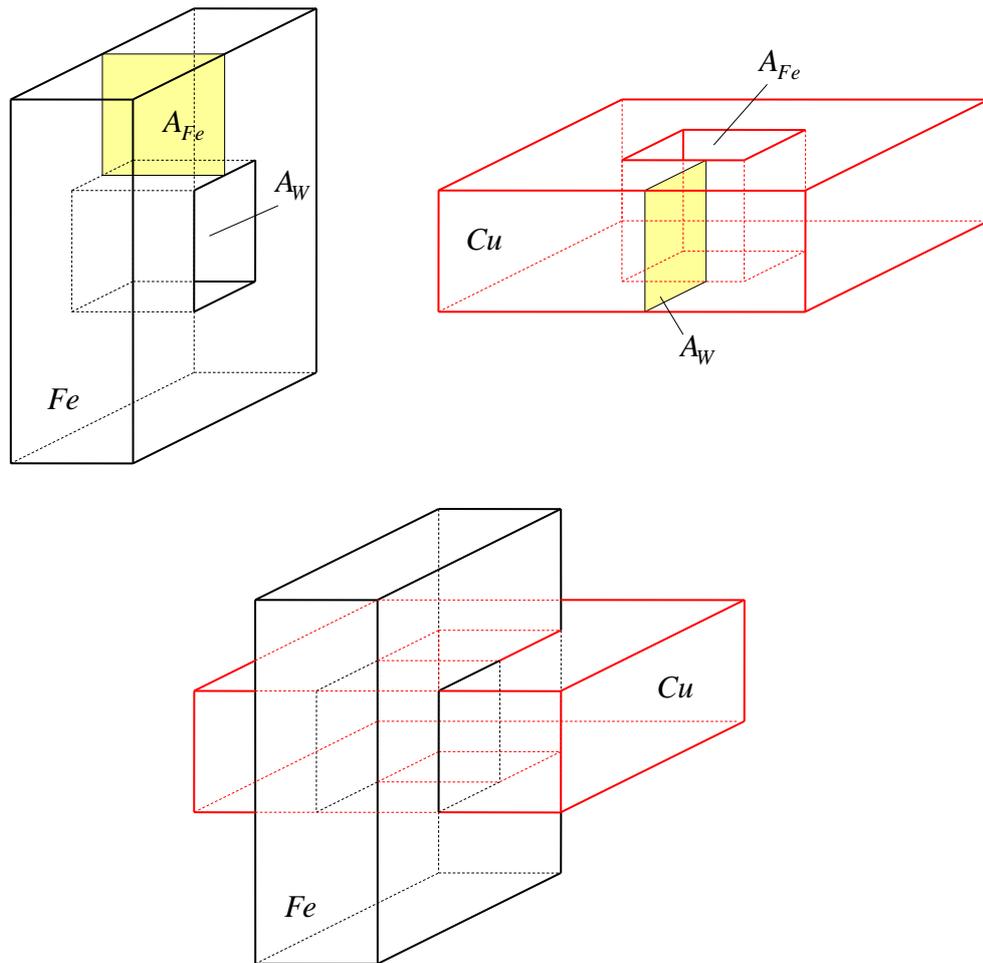


Bild 14-5: Geometrische Darstellung der Durchdringung von magnetischem und elektrischem Kreis

14.4 Kraftwirkung

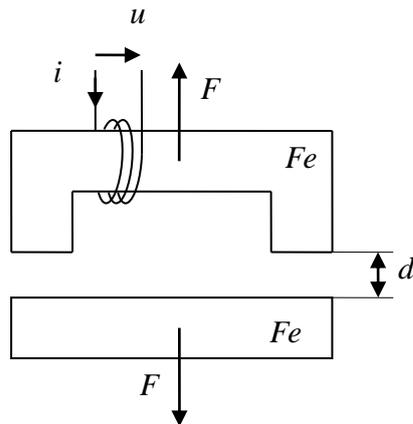


Bild 14-6: Zur magnetischen Kraft

Magnetischer Druck (Vorgriff auf Feldtheorie):

$$p = \frac{1}{2}bh \quad (14.40)$$

Der magnetische Druck ist gleich der Energiedichte. Betrachtung der Einheiten:

$$\begin{aligned} [p] &= 1 \frac{\text{A}}{\text{m}} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \\ &= 1 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

An der Grenzfläche Luft-Eisen wirkt die Druckdifferenz:

$$\Delta p = p_L - p_{Fe} = \frac{1}{2}(b_L h_L - b_{Fe} h_{Fe}) \quad (14.41)$$

Die Kraft ergibt sich also als

$$F = 2A_{Fe}\Delta p \quad (14.42)$$

Wegen

$$h_{Fe} \approx 0 \quad (14.43)$$

und

$$b_L = b_{Fe} \quad (14.44)$$

gilt näherungsweise

$$\Delta p \approx \frac{1}{2} b_L h_L \quad (14.45)$$

und somit für die Kraft:

$$F = 2A_{Fe}\Delta p = A_{Fe}b_L h_L \approx \frac{\mu_0 A_{Fe} N^2 i^2}{l_L^2} = \frac{\mu_0 A_{Fe} N^2 i^2}{4d^2} \quad (14.46)$$

14.5 Nichtlineare Magnetisierung

Viele magnetische Materialien können nur näherungsweise für kleine Feldstärken bzw. Flussdichten durch das lineare Materialgesetz

$$b = \mu_0 \mu_r h \quad (14.47)$$

beschrieben werden. Für größere Felder wird das Verhalten stark nichtlinear (gesättigt). Der Zusammenhang wird dann durch eine nichtlineare Kennlinie beschrieben (Unterscheidung von Funktionswert und Funktionsname durch Klein- und Großbuchstaben):

$$b = B(h) \quad (14.48)$$

Unter der Annahme homogener Felder folgt die Kennlinie zwischen magnetischer Spannung und Fluss durch Umskalierung der Materialkennlinie:

$$\phi = Ab = AB(h) = AB\left(\frac{\theta}{l}\right) = \Phi(\theta) \quad (14.49)$$

Entsprechendes folgt für den Zusammenhang zwischen Verkettungsfluss und Strom, sofern der magnetische Kreis nur aus dem einen betrachteten Element besteht:

$$\psi = NAb = NAB(h) = NAB\left(\frac{Ni}{l}\right) = \Psi(i) \quad (14.50)$$

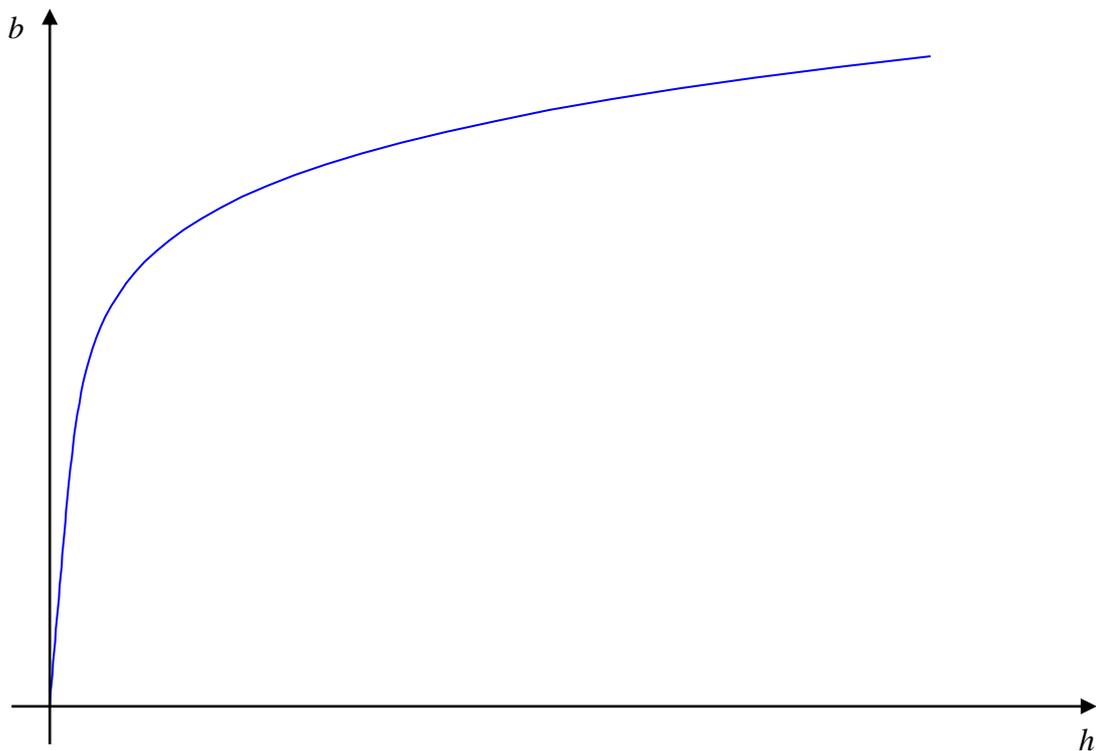


Bild 14-7: Typische Magnetisierungskennlinie mit Sättigung

Besteht der magnetische Kreis aus einem nichtlinearem Element (Kern), einem linearen magnetischen Widerstand (Luftspalt) und einer magnetischen Spannungsquelle (Durchflutung der Wicklung) wie im dargestellten Bild, so kann die Lösung der resultierenden nichtlinearen Gleichung grafisch ermittelt werden: Dazu werden die nichtlineare Kennlinie ϕ über Θ_{Fe} (oder umgekehrt) sowie die lineare Kennlinie der magnetischen Spannungsquelle Ni mit dem magnetischen Innenwiderstand R_{magn} gezeichnet und der Schnittpunkt bestimmt.

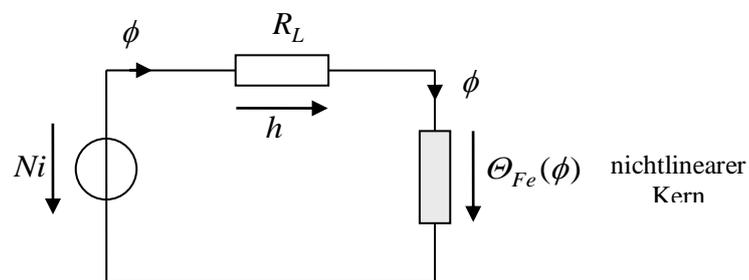


Bild 14-8: Nichtlinearer magnetischer Kreis

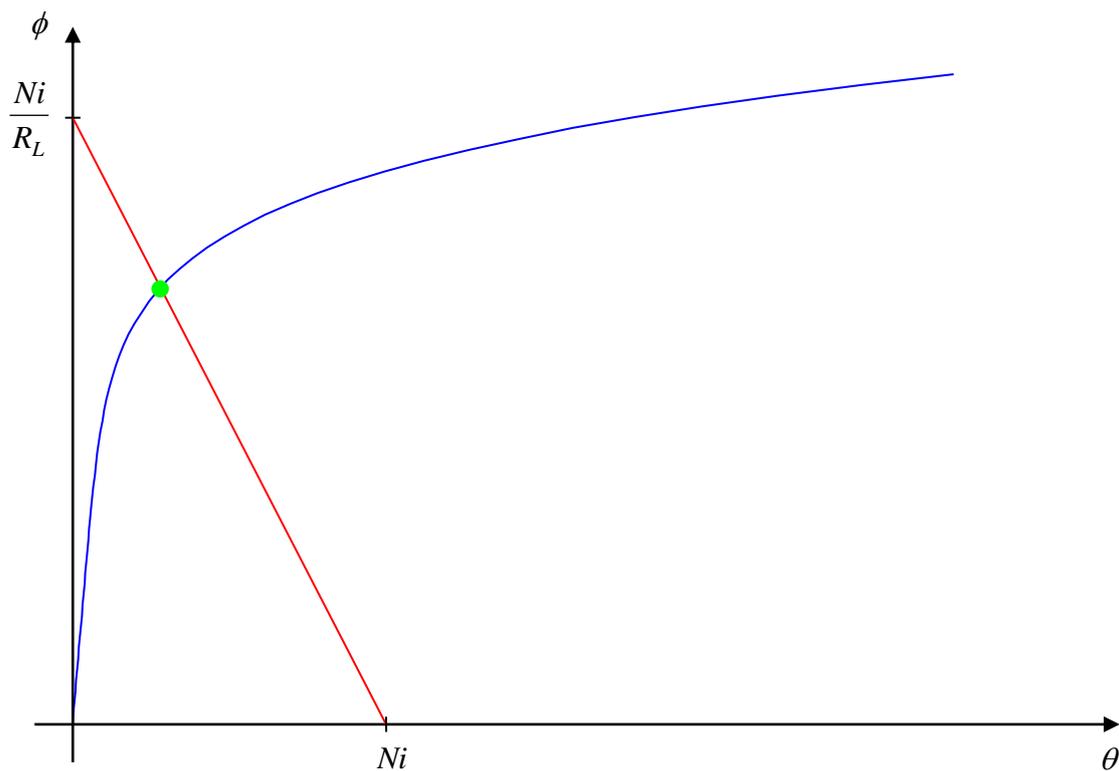


Bild 14-9: Schnittpunkt der Kennlinien der magnetischen Quelle mit linearem Innenwiderstand mit der Kennlinie der nichtlinearen Reluktanz

Alternativ: Bildung der gesamten magnetischen Spannung

$$v = \theta_L + \theta_{Fe} = R_L \phi + \Theta_{Fe}(\phi) \quad (14.51)$$

als neue nichtlineare Kennlinie. Die nichtlineare Kennlinie wird um die Luftspaltgerade geschert:

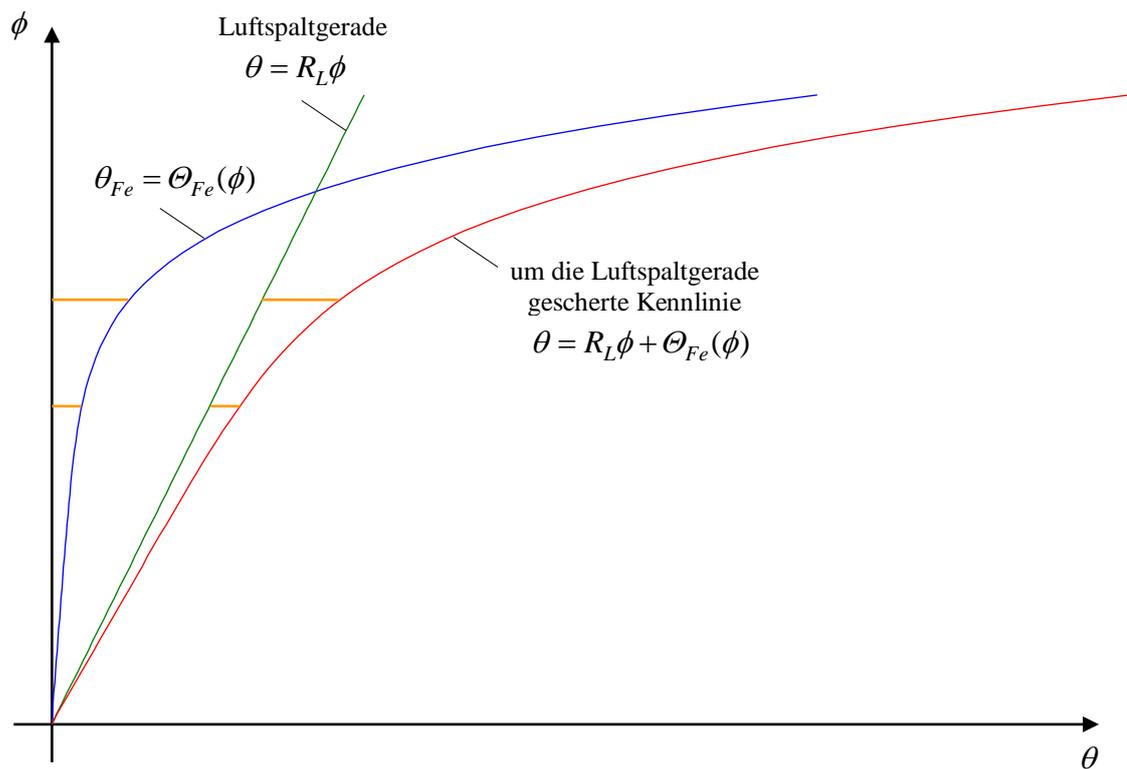


Bild 14-10: Gescherte Gesamt-Magnetisierungskennlinie

Wird eine Spule mit nichtlinearer Magnetisierung mit sinusförmiger Spannung beaufschlagt,

$$\dot{\psi}(t) = u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad (14.52)$$

folgt ein sinusförmiger Verkettungsfluss

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{2} U}{\omega} \sin \omega t \quad (14.53)$$

der Strom dagegen ist nicht sinusförmig, sondern resultiert aus der Umkehrfunktion zu $\Psi(i)$:

$$i = \Psi^{-1}(\psi) = I(\psi) \quad (14.54)$$

Je nachdem, wie weit die Magnetisierungskennlinie bis in die Sättigung angesteuert wird, resultiert eine mehr oder weniger starke Stromverzerrung:

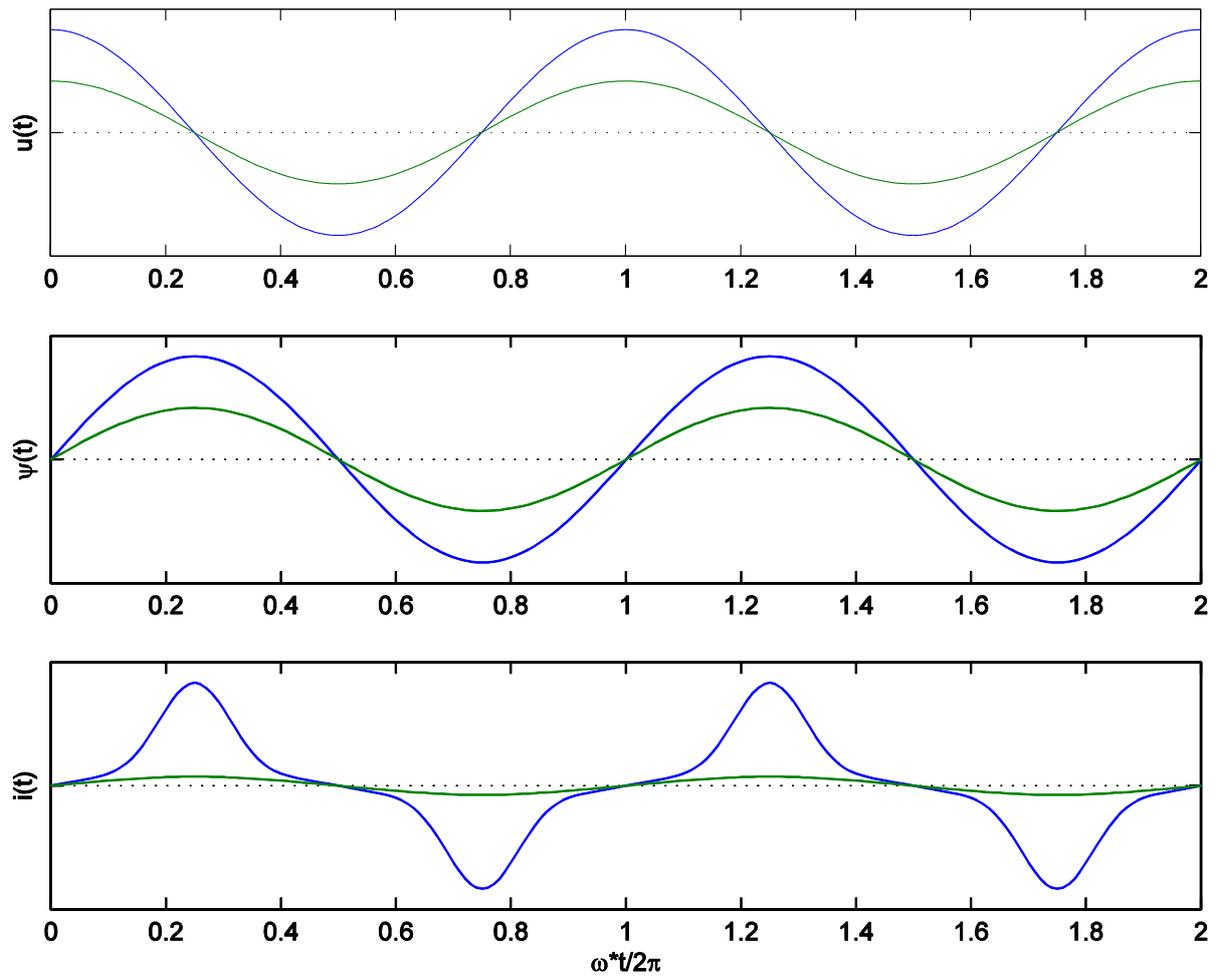


Bild 14-11: Zeitliche Verläufe bei einer nichtlinearen Drossel

14.6 Hysterese

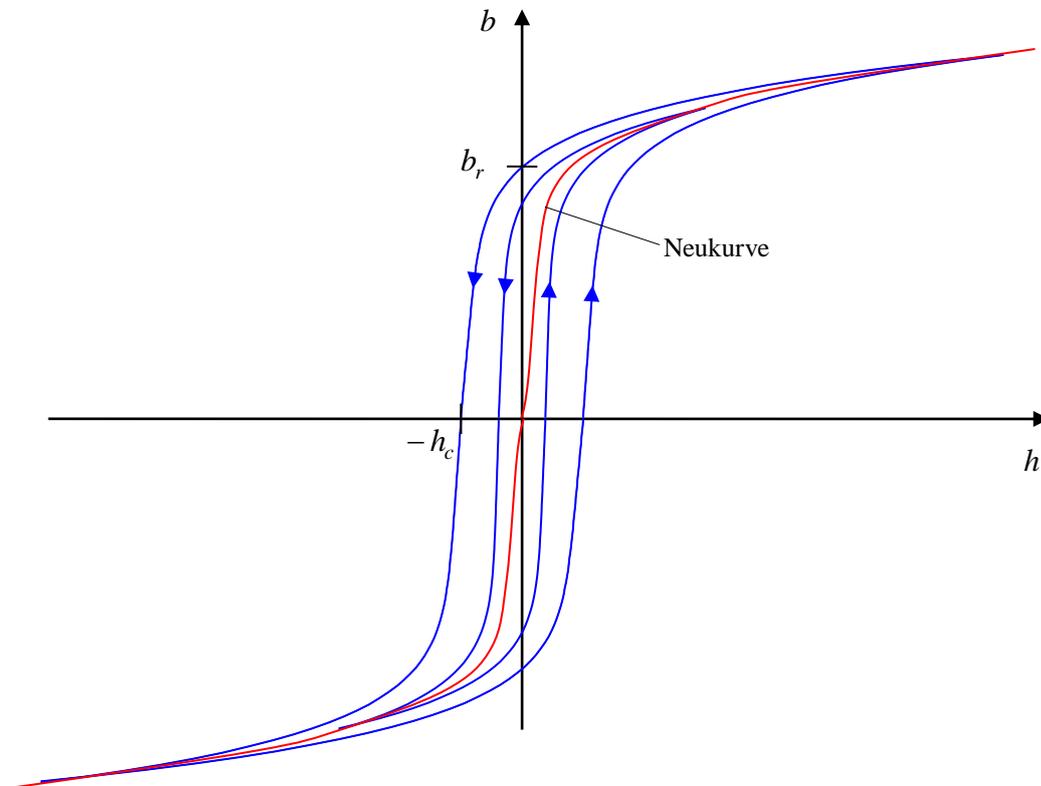


Bild 14-12: Hysterese eines magnetischen Materials

b_r : remanente Flussdichte

h_c : Koerzitivfeldstärke

Die Kurve, die die Umkehrpunkte der aussteuerungsabhängigen Hystereseschleifen verbindet, heißt *Kommutierungskurve*.

Die Form der Hysterese hängt ab von der Vorgeschichte, die Gestalt ändert sich auch mit der Frequenz. Bei nicht vollständigem Umlauf bzw. bei asymmetrischer Aussteuerung ergeben sich weitere Abweichungen.

Um Materialien mit Hysterese zuverlässig zu entmagnetisieren, werden Wechselfelder mit langsam abnehmender Amplitude aufgeschaltet.

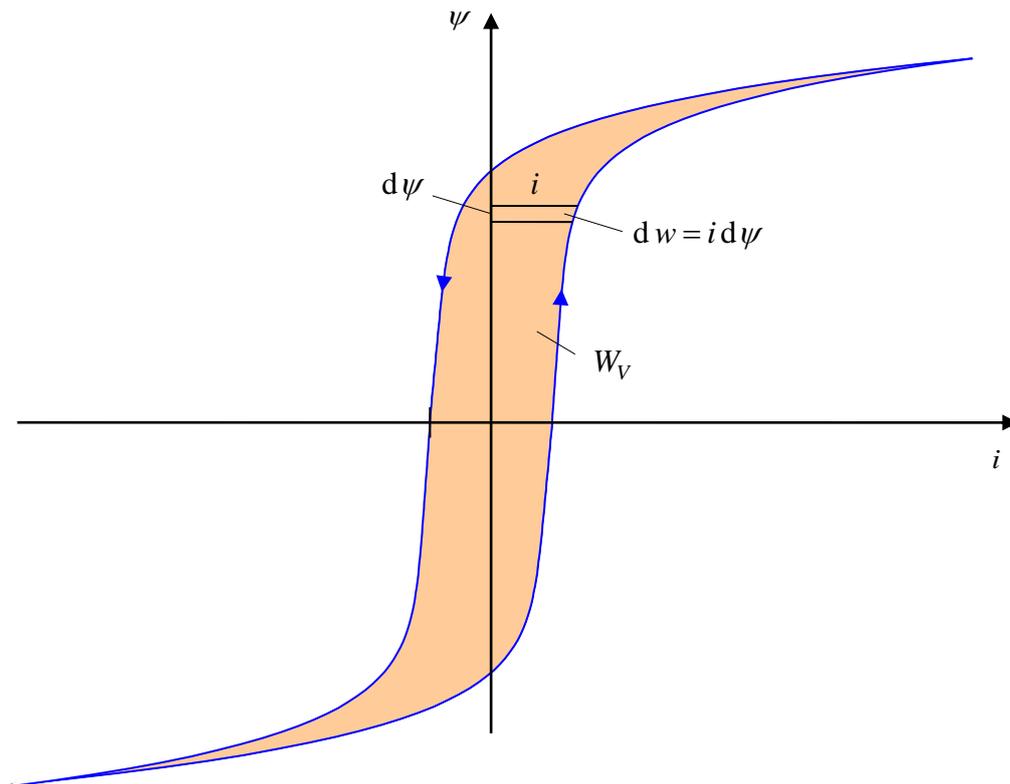


Bild 14-13: Verlustarbeit bei der Hysterese

Wegen

$$W_V = \int d w = \int p(t) dt = \int u(t)i(t) dt = \int \dot{\psi}(t)i(t) dt = \int i(\psi) d\psi = \int v(\varphi) d\varphi \quad (14.55)$$

gibt die von der Hysterese umschlossene Fläche die *Ummagnetisierungs-* oder *Hystereseverluste* an. Ist T die Periodendauer eines Umlaufs, ist die mittlere Verlustleistung

$$P_V = \frac{W_V}{T} = f W_V \quad (14.56)$$

In erster Näherung sind die Verluste also der Frequenz proportional.

$$P_V \sim f \quad (14.57)$$

Für höhere Frequenzen gilt dies nicht mehr, da sich auch die Gestalt der Hysterese frequenzabhängig ändert. Die Verluste können dann überproportional steigen:

$$P_V \sim f^{e_f}, \quad e_f \approx 1...2 \quad (14.58)$$

Für die Abhängigkeit von der Amplitude kann als grobe Näherung angesetzt werden:

$$P_V \sim \hat{b}^{e_b} ; \quad e_b \approx 2...3 \quad (14.59)$$

Die Zusammenfassung dieser beiden empirischen Gesetze führt zu der sogenannten *Steinmetz-Gleichung*

$$P_V = K f^{e_f} \hat{b}^{e_b} \quad (14.60)$$

15 Transformator

15.1 Aufbau, Schaltzeichen

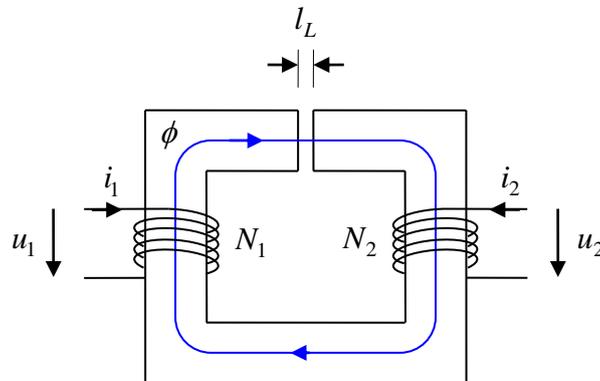


Bild 15-1: Zwei-Wicklungs-Transformator mit Luftspalt
(dargestellt sind gleichsinnige Wicklungsrichtungen)

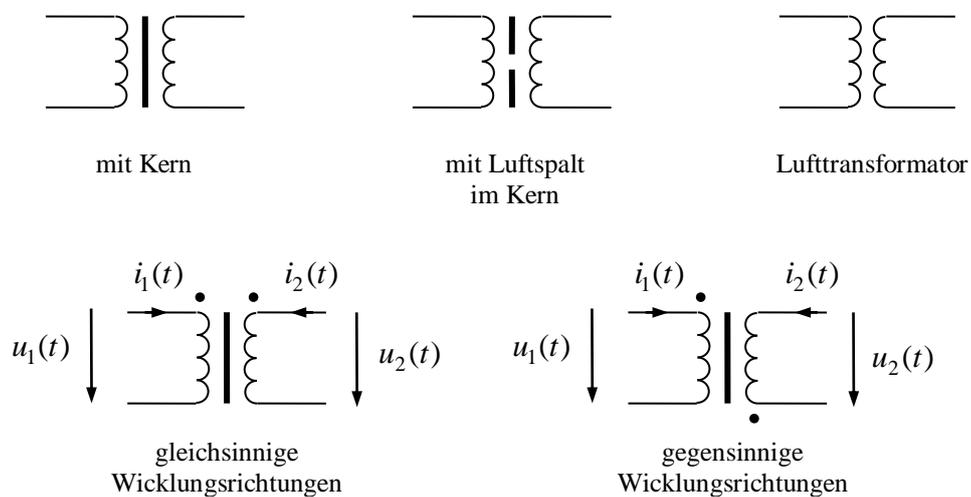


Bild 15-2: Elektrische Schaltbilder
(mit Verbraucherzählpfeilsystemen auf Primär- und Sekundärseite)

15.2 Idealisiertes Verhalten

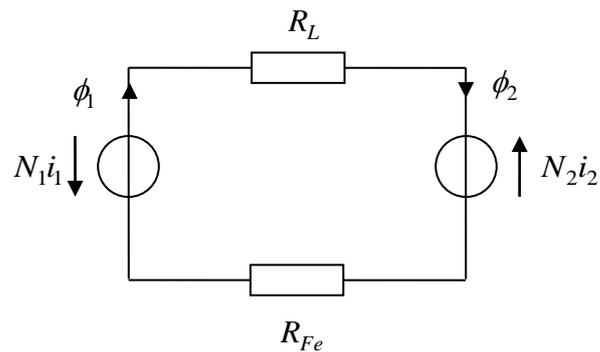


Bild 15-3: Einfaches Reluktanzmodell

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 \quad (15.1)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\psi_1}{N_1} = \frac{\psi_2}{N_2} \quad (15.2)$$

\Rightarrow ¹³

$$\frac{\dot{\psi}_1}{N_1} = \frac{\dot{\psi}_2}{N_2} \quad (15.3)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} \quad (15.4)$$

bzw.

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = \alpha \quad (15.5)$$

α : Übersetzungsverhältnis (vielfach auch \dot{u})

$$\phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_{\text{magn}}} = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_L + R_{Fe}} \quad (15.6)$$

¹³ nur unter der Annahme, dass die Flussanfangswerte verschwinden, ist auch der Umkehrschluss möglich

bzw.

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \phi R_{magn} \quad (15.7)$$

Zunächst idealisierte Annahme $R_{magn} = 0$ (kein Luftspalt, hochpermeabler Kern):

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad (15.8)$$

bzw.

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\alpha \quad (15.9)$$

Ströme und Spannungen der Primär- und der Sekundärseite werden beim idealen Transformator genau mit dem Übersetzungsverhältnis übersetzt.

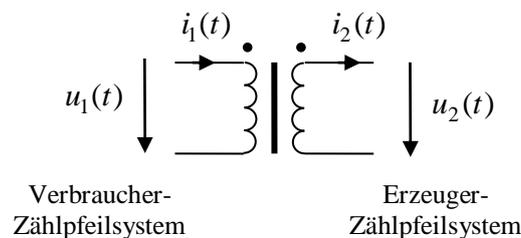


Bild 15-4: Schaltbild mit gemischten Zählfeilsystemen

Wenn man sich für ein solches gemischtes Zählfeilsystem entscheidet, muss dies aber auch im magnetischen Ersatzschaltbild durch Umkehr des Zählpfeiles von i_2 ebenfalls berücksichtigt werden:

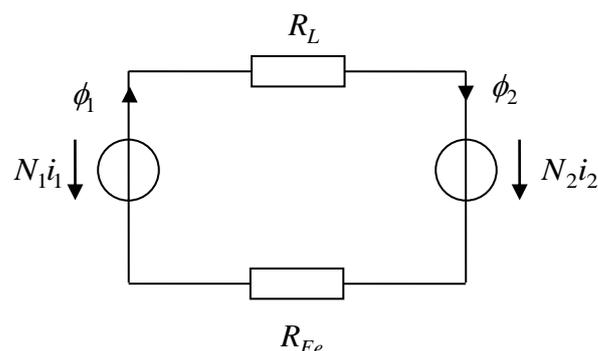


Bild 15-5: Einfaches Reluktanzmodell, gemischtes Zählfeilsystem

Verwendet man gemischte Zählfeilsysteme bei gleichsinnigen Wicklungen wie in obigem Bild, lassen sich die Strom- und Spannungsübersetzungen mit positivem Vorzeichen schreiben:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} = \alpha \quad (15.10)$$

Die komplexe Zeigerrechnung für sinusförmige Größen lässt sich auch auf Transformatoren anwenden:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \alpha \quad (15.11)$$

Es gilt die Leistungsbilanz (gemischtes Zählpeilsystem):

$$p_1 = u_1 i_1 = p_2 = u_2 i_2 \quad (15.12)$$

Der ideale Transformator speichert keine Energie!

Schein-, Wirk- und Blindleistung sind beim idealen Transformator (gemischte Zählpeilsysteme) auf Primär- und Sekundärseite gleich (invariant):

$$S_1 = U_1 I_1 = S_2 = U_2 I_2 \quad (15.13)$$

bzw.

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* \quad (15.14)$$

$$P_1 = \operatorname{Re} \underline{S}_1 = P_2 = \operatorname{Re} \underline{S}_2 \quad (15.15)$$

$$Q_1 = \operatorname{Im} \underline{S}_1 = Q_2 = \operatorname{Im} \underline{S}_2 \quad (15.16)$$

Das ideale Transformatorverhalten beruht auf folgenden Annahmen:

- beide Wicklungen sind ideal miteinander verkettet, es gibt keinen *Streufluss*
- der magnetische Widerstand des Kreises ist Null
- die ohmschen Widerstände der Wicklungen sind Null

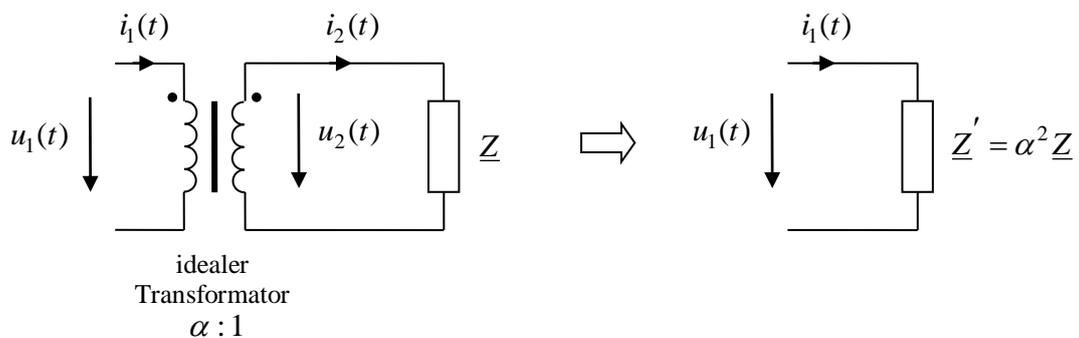


Bild 15-6: Transformation von Impedanzen

$$\underline{Z} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{U_1}{I_1} \quad (15.17)$$

Auf die Primärseite transformierte Impedanz:

$$\underline{Z}' = \frac{U_1}{I_1} = \alpha^2 \underline{Z} \quad (15.18)$$

15.3 Messwandler und Übertrager

Transformatoren, die so gestaltet sind, dass sie dem idealen Verhalten möglichst nahe kommen, werden als Wandler oder Übertrager eingesetzt. Hierbei steht nicht die Leistungs-, sondern die Signalübertragung, ggf. auch die galvanische Trennung von Ein- und Ausgang im Vordergrund.

15.3.1 Stromwandler

Werden Transformatoren zum Zwecke der Strommessung eingesetzt, spricht man von *Stromwandlern*. Diese werden dann verwendet, wenn entweder eine *Potenzialtrennung* notwendig oder der zu messende Strom zu groß für eine direkte Messung durch den eigentlichen Stromsensor ist. In diesem Fall werden Übersetzungsverhältnisse $\alpha < 1$ gewählt. Der Stromwandler darf nur einen geringen ohmschen Widerstand aufweisen und benötigt daher hinreichende Leiterquerschnitte. Oft ist $N_1 = 1$, d. h. die Primärwicklung wird nur einmal durch den Kern geführt.

Der in der Regel sehr kleine Innenwiderstand R_i des sekundärseitigen Stromsensors übersetzt sich auf die Primärseite nach dem vorangegangenen Abschnitt entsprechend

$$R'_i = \alpha^2 R_i < R_i \quad (15.19)$$

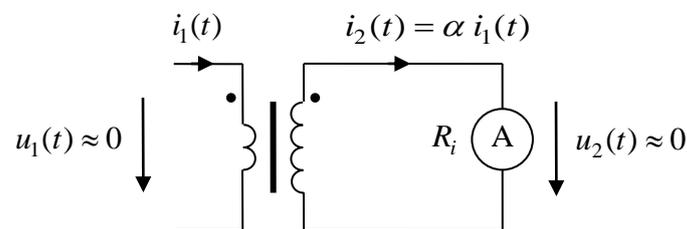


Bild 15-7: Stromwandler

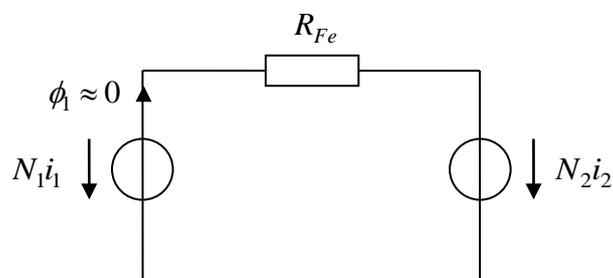


Bild 15-8: Magnetischer Kreis des Stromwandlers

Da der Innenwiderstand des Stromsensors in der Regel klein ist, ist die Sekundär- und damit auch die Primärspannung gering. Der Stromwandler wird spannungsmäßig nur wenig belastet, daher ist der magnetische Fluss im Kern klein. Ein ggf. nicht-idealer magnetischer Kernwiderstand verursacht daher trotzdem keinen großen magnetischen Spannungsabfall und beeinträchtigt das Stromübersetzungsverhältnis kaum. Aus dem nicht idealen magnetischen Widerstand und dem elektrischen Widerständen von Stromsensor und Wicklungen resultiert letztlich eine untere Grenzfrequenz (s. Bild 15-9) von

$$\omega_{\min} = \frac{\alpha^2(R_2 + R_i)}{L_1} = \frac{(R_2 + R_i)R_{Fe}}{N_2^2} \quad (15.20)$$

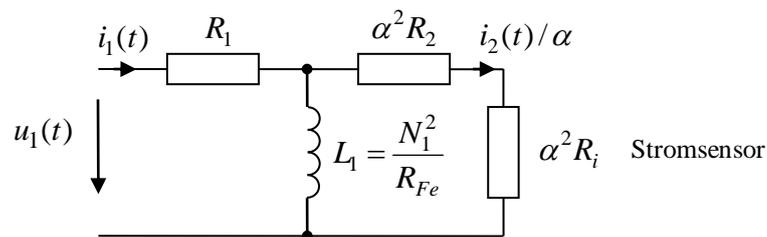


Bild 15-9: Elektrisches Ersatzschaltbild des Stromwandlers
(Transformation der Größen auf die Primärseite)

Mit einem Stromwandler können folglich keine Gleichströme gemessen werden. Sollen auch Gleichströme gemessen werden, kann man sich des Kompensationsprinzips bedienen. Ein Sensor (Hall-Sensor) misst im Luftspalt eines Stromwandlers das Magnetfeld. Eine steuerbare Stromquelle wird so reguliert, bis das magnetische Feld verschwindet.

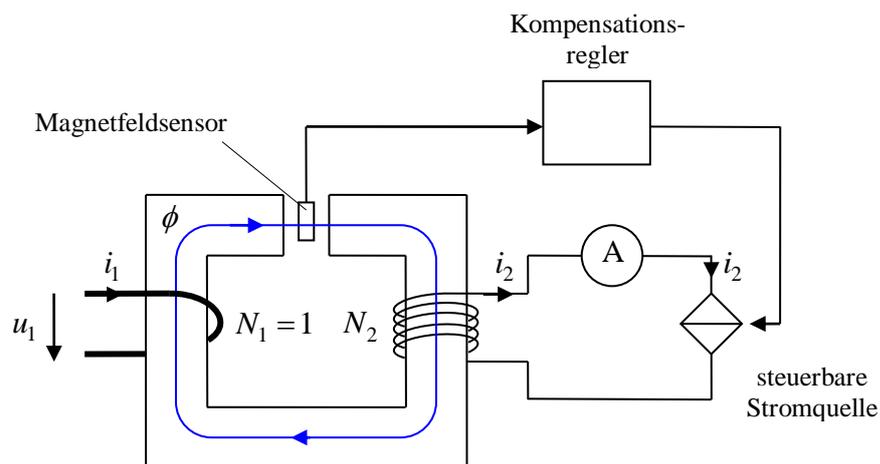


Bild 15-10: Strommessung nach dem Kompensationsprinzip

15.3.2 Spannungswandler

Ist die zu messende Spannung zu groß für den eigentlichen Spannungssensor, kann sie durch einen Transformator mit $\alpha > 1$ heruntergesetzt werden.

Der Innenwiderstand des Spannungssensors R_i übersetzt sich auf die Primärseite nach dem vorangegangenen Abschnitt entsprechend

$$R'_i = \alpha^2 R_i > R_i \quad (15.21)$$

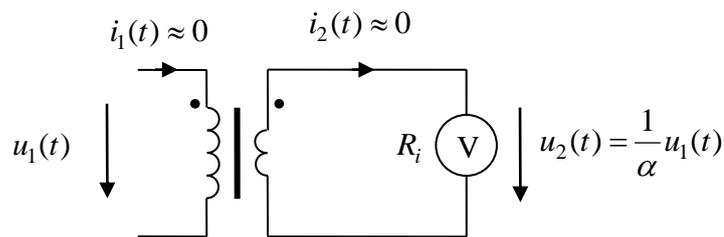


Bild 15-11: Spannungswandler

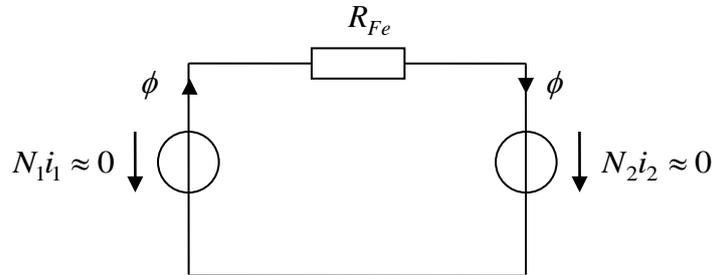


Bild 15-12: Magnetischer Kreis des Spannungswandlers

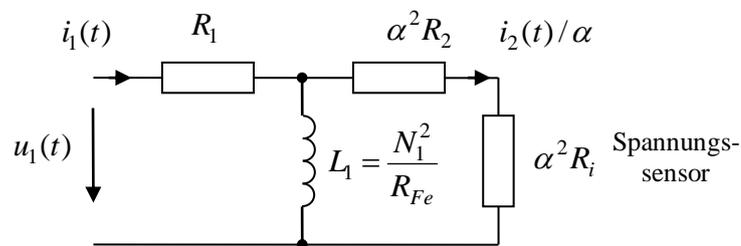


Bild 15-13: Elektrisches Ersatzschaltbild des Spannungswandlers

Da der Spannungssensor einen hohen Innenwiderstand aufweisen sollte, ist der Sekundärstrom und damit auch der Primärstrom klein. Der Spannungswandler wird strommäßig also nur sehr gering belastet. Er kommt daher mit geringen Leiterquerschnitten

aus, der Widerstand der Sekundärwicklung kann gegenüber dem Innenwiderstands des Spannungssensors in der Regel vernachlässigt werden. Auf der Primärseite ergibt sich jedoch aus Primärwiderstand und Induktivität eine untere Grenzfrequenz von

$$\omega_{\min} = \frac{R_1}{L_1} = \frac{R_1 R_{Fe}}{N_1^2} \quad (15.22)$$

Hierbei ist aber die Sättigung des Kerns und die damit verbundene Veränderung der Induktivität nicht berücksichtigt: Es gilt unter Vernachlässigung von R_1

$$\dot{b}(t) = \frac{1}{N_1 A_{Fe}} u_1(t) \quad (15.23)$$

Die Annahme einer maximalen Flussdichte \hat{b}_{\max} führt bei angenommener sinusförmiger Spannung

$$u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \cos \omega(t) \quad (15.24)$$

zu der zusätzlichen Einschränkung an Amplitude und Frequenz

$$\frac{U_1}{\omega} < \frac{N_1 A_{Fe} \hat{b}_{\max}}{\sqrt{2}}$$

15.4 Modellierung von Transformatoren mit Streuung

Im Folgenden werden wieder gleichsinnige Wicklungen und Verbraucherzählpeilsysteme auf Primär- und Sekundärseite angenommen:

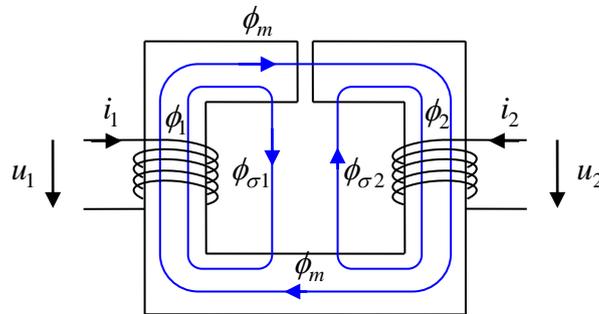


Bild 15-14: Streuflüsse im Transformator mit Luftspalt

Streuung: die nicht vollständige Verkettung zweier Wicklungen; der Anteil des Flusses einer Wicklung, der nicht mit der anderen verkettet ist, heißt *Streufluss*: $\phi_{\sigma 1}$, $\phi_{\sigma 2}$. Der Anteil des Flusses, der beide Wicklungen miteinander verkettet, ist der *Hauptfluss* ϕ_m (m : main oder mutual).

Eine Streuung ist nicht grundsätzlich unerwünscht, sondern ist bei manchen Anwendungen durchaus sinnvoll und nutzbringend.

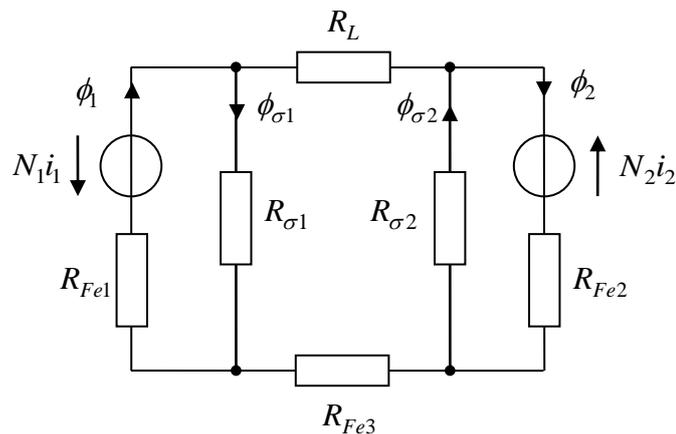


Bild 15-15: Reluktanzmodell mit Luftspalt und Streuwegen

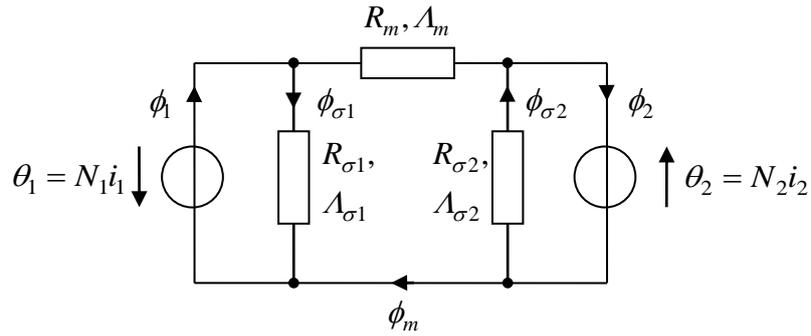


Bild 15-16: Vereinfachtes Reluktanzmodell

Berechnung des magnetischen Kreises:

$$\phi_{\sigma 1} = \frac{N_1 i_1}{R_{\sigma 1}} \quad (15.25)$$

$$\phi_{\sigma 2} = \frac{N_2 i_2}{R_{\sigma 2}} \quad (15.26)$$

$$\phi_m = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_m} \quad (15.27)$$

$$\phi_1 = \left(\frac{1}{R_{\sigma 1}} + \frac{1}{R_m} \right) N_1 i_1 + \frac{1}{R_m} N_2 i_2 = (\Lambda_m + \Lambda_{\sigma 1}) N_1 i_1 + \Lambda_m N_2 i_2 \quad (15.28)$$

$$\phi_2 = \left(\frac{1}{R_{\sigma 2}} + \frac{1}{R_m} \right) N_2 i_2 + \frac{1}{R_m} N_1 i_1 = (\Lambda_m + \Lambda_{\sigma 2}) N_2 i_2 + \Lambda_m N_1 i_1 \quad (15.29)$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_m + \Lambda_{\sigma 1} & \Lambda_m \\ \Lambda_m & \Lambda_m + \Lambda_{\sigma 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (15.30)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{i} \quad (15.31)$$

mit den Vektoren und Matrizen

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Lambda_m + \Lambda_{\sigma 1} & \Lambda_m \\ \Lambda_m & \Lambda_m + \Lambda_{\sigma 2} \end{bmatrix} \quad (15.32)$$

wobei

$$A_m = \frac{1}{R_m}, \quad A_{\sigma 1} = \frac{1}{R_{\sigma 1}}, \quad A_{\sigma 2} = \frac{1}{R_{\sigma 2}} \quad (15.33)$$

die magnetischen Leitwerte der Haupt- und Streuwege sind. Die magnetische Leitwertmatrix ist symmetrisch,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (15.34)$$

Übergang auf mehrfach verkettete Flüsse:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (15.35)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{i} = \mathbf{L} \mathbf{i} \quad (15.36)$$

Die Matrix

$$\mathbf{L} = \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (15.37)$$

heißt *Induktivitätsmatrix*. Die Induktivitätsmatrix ist ebenfalls symmetrisch:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^T, \quad \text{bzw.} \quad L_{12} = L_{21} \quad (15.38)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{m1} + L_{\sigma 1} & L_m \\ L_m & L_{m2} + L_{\sigma 2} \end{bmatrix} \quad (15.39)$$

mit

$$L_m = N_1 N_2 A_m = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (15.40)$$

$$L_{m1} = N_1^2 A_m = \frac{N_1^2}{R_m} \quad (15.41)$$

$$L_{m2} = N_2^2 A_m = \frac{N_2^2}{R_m} \quad (15.42)$$

$$L_{\sigma 1} = N_1^2 A_{\sigma 1} = \frac{N_1^2}{R_{\sigma 1}} \quad (15.43)$$

$$L_{\sigma 2} = N_2^2 A_{\sigma 2} = \frac{N_2^2}{R_{\sigma 2}} \quad (15.44)$$

Begriffe:

- L_{11} : primäre Selbstinduktivität
- L_{22} : sekundäre Selbstinduktivität
- L_m : Hauptinduktivität oder Gegeninduktivität
- L_{m1} : primäre Hauptinduktivität
- L_{m2} : sekundäre Hauptinduktivität
- $L_{\sigma 1}$: primäre Streuinduktivität
- $L_{\sigma 2}$: sekundäre Streuinduktivität

Streuung oder Streuziffer

$$\sigma = \frac{L_{11}L_{22} - L_m^2}{L_{11}L_{22}} = 1 - \frac{L_m^2}{L_{11}L_{22}} = 1 - \frac{L_{m1}L_{m2}}{L_{11}L_{22}} \quad (15.45)$$

Transformation der Größen der Primärseite mit dem Übersetzungsverhältnis:

$$u'_1 = \frac{1}{\alpha} u_1 \quad (15.46)$$

$$\psi'_1 = \frac{1}{\alpha} \psi_1 \quad (15.47)$$

$$i'_1 = \alpha i_1 \quad (15.48)$$

Induktivitätsmatrix für die transformierten Größen:

$$\begin{bmatrix} \psi'_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}' \begin{bmatrix} i'_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (15.49)$$

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} L'_m + L'_{\sigma 1} & L'_m \\ L'_m & L'_m + L_{\sigma 2} \end{bmatrix} \quad (15.50)$$

mit

$$L'_m = N_2^2 A_m = L_{m2} \quad (15.51)$$

$$L'_{\sigma 1} = N_2^2 A_{\sigma 1} = \frac{1}{\alpha^2} L_{\sigma 1} \quad (15.52)$$

Die Streuung ist gegenüber dieser Transformation invariant:

$$\sigma = \sigma' \quad (15.53)$$

Die Summe der Ströme

$$i_{\mu} = i_1' + i_2 \quad (15.54)$$

heißt *Magnetisierungsstrom*.

Interpretation in einem elektrischen Ersatzschaltbild (sog. *T-Ersatzschaltbild*):

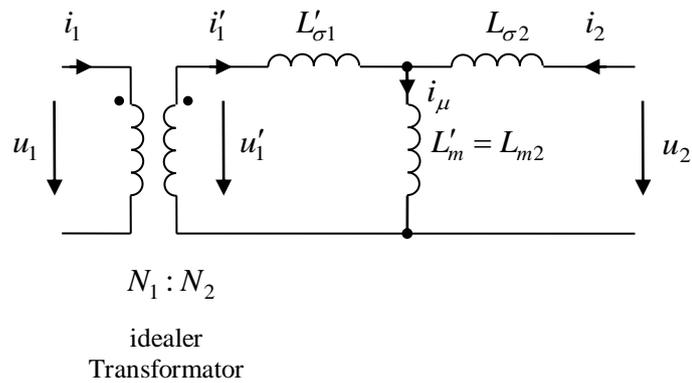


Bild 15-17: T-Ersatzschaltbild des Transformators mit Streuung, Transformation der Primärgrößen auf die Sekundärseite

Je nach Erfordernis können alternativ die sekundärseitigen Größen auf die Primärseite transformiert werden:

$$u'_2 = \alpha u_2 \quad (15.55)$$

$$\psi'_2 = \alpha \psi_2 \quad (15.56)$$

$$i'_2 = \frac{1}{\alpha} i_2 \quad (15.57)$$

$$L'_m = N_1^2 A_m = L_{m1} \quad (15.58)$$

$$L'_{\sigma 2} = N_1^2 A_{\sigma 2} = \alpha^2 L_{\sigma 2} \quad (15.59)$$

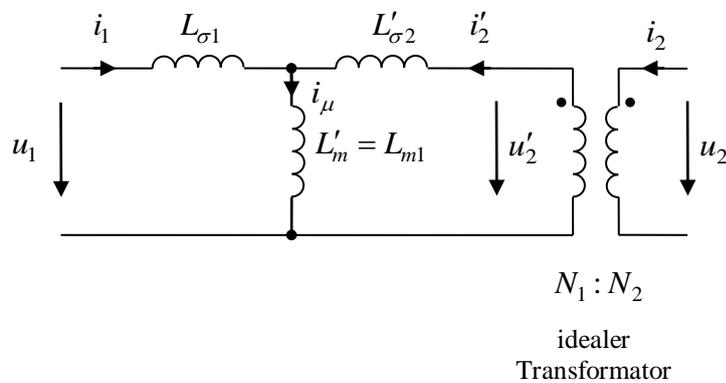


Bild 15-18: T-Ersatzschaltbild des Transformators mit Streuung, Transformation der Sekundärgrößen auf die Primärseite

Zusammenfassung der bisherigen Einsichten: Ein Transformator kann drei verschiedenen Funktionen dienen:

- Spannungs- bzw. Stromanpassung
- Potentialtrennung
- Bereitstellung eines induktives Verhalten

15.5 Berücksichtigung der Verluste

Berücksichtigung der Innenwiderstände der Wicklungen:

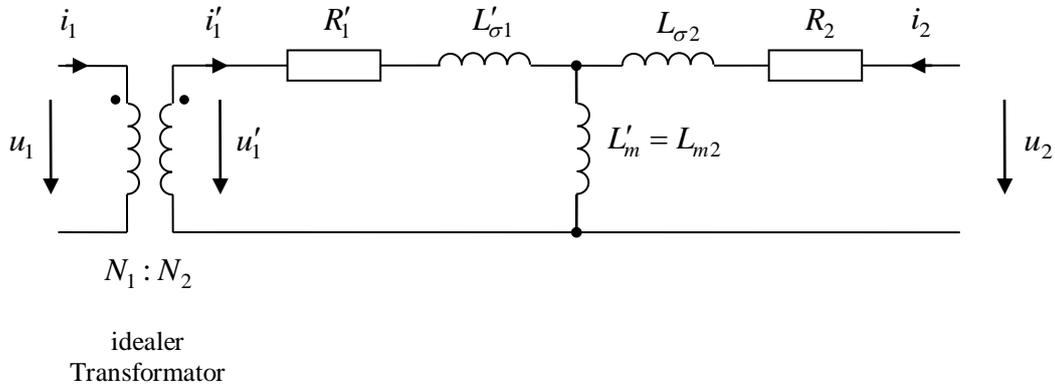


Bild 15-19: T-Ersatzschaltbild des Transformators mit Streuungen und elektrischen Widerständen

$$R'_1 = \frac{N_2^2}{N_1^2} R_1 = \frac{1}{\alpha^2} R_1 \quad (15.60)$$

Die Eisen- oder Kernverluste setzen sich aus den Ummagnetisierungs- oder Hystereseverlusten und den Wirbelstromverlusten zusammen. Beide Verlustterme können im Ersatzschaltbild näherungsweise durch einen ohmschen Widerstand parallel zur Hauptinduktivität berücksichtigt werden.

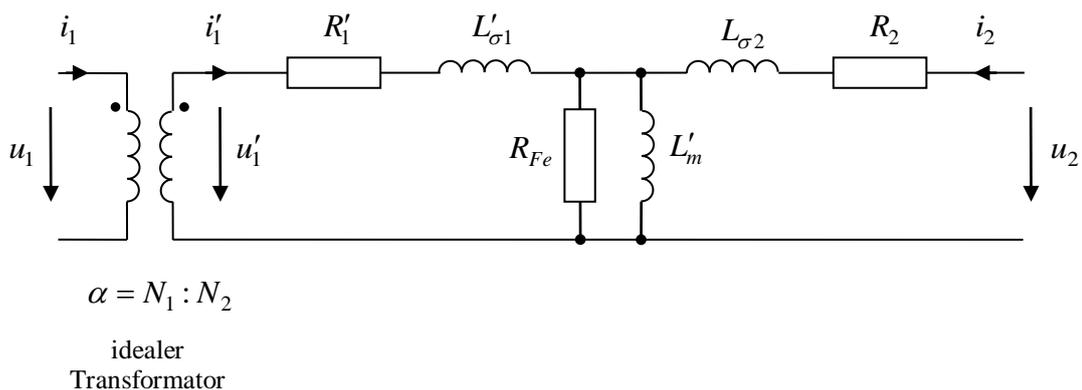


Bild 15-20: T-Ersatzschaltbild mit Berücksichtigung der Kernverluste

15.6 Leerlaufverhalten

Im Leerlauf (Sekundärwicklung offen) fließt nur Magnetisierungsstrom. Die Streuinduktivitäten und Innenwiderstände sind meist klein gegenüber der Hauptinduktivität, so dass für den Leerlauf das folgende vereinfachte Ersatzschaltbild benutzt werden kann:

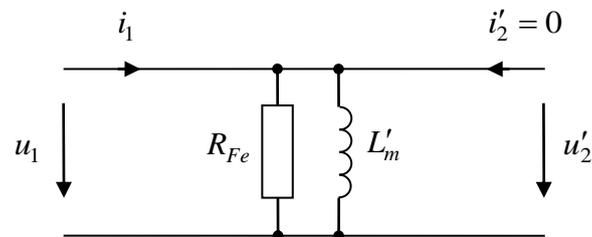


Bild 15-21: Leerlauf-Ersatzschaltbild

Im Leerlauf gilt auch für den realen Transformator mit guter Genauigkeit

$$\frac{U_1}{U_2} = \alpha \quad (15.61)$$

Wird ein Transformator an eine sinusförmige Netzspannung geschaltet, entsteht – je nach Einschaltzeitpunkt – ein Gleichanteil im Fluss (nur wenn im Spannungsmaximum oder Minimum eingeschaltet wird, resultiert kein Fluss-Gleichanteil). Dadurch wird das magnetische Material stark einseitig gesättigt. In Folge entstehen hohe Spitzen im Magnetisierungsstrom, welcher über den dadurch verursachten Spannungsabfall am Innenwiderstand der Primärwicklung den Flussgleichanteil langsam abbaut. Dieser Vorgang heißt *Rush-Effekt*. Insbesondere bei großen Transformatoren mit kleinen Innenwiderständen kann dies etliche Sekunden oder sogar Minuten dauern.

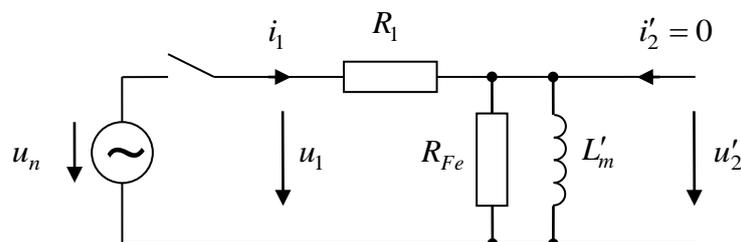


Bild 15-22: Zum Einschaltproblem beim Transformator

15.7 Kurzschluss und Verhalten bei Belastung

Beim Kurzschluss der Primär- oder der Sekundärwicklung oder bei großer Belastung können Magnetisierungsstrom und Kernverluste vernachlässigt werden.

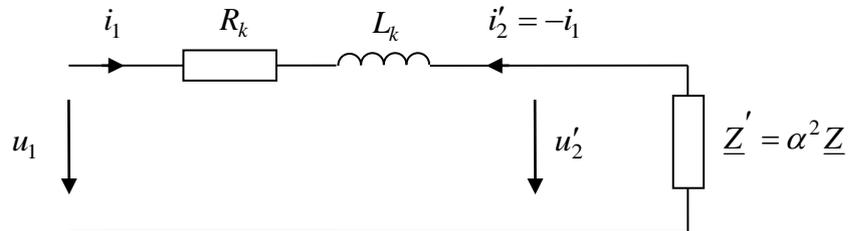


Bild 15-23: Ersatzschaltbild für größere Belastung oder Kurzschluss

$$R_k = R_1 + R'_2 \quad (15.62)$$

$$L_k = L_{\sigma 1} + L'_{\sigma 2} \quad (15.63)$$

Kurzschlussimpedanz (bei $\underline{Z}' = 0$):

$$\underline{Z}_k = R_k + j\omega L_k = R_k + jX_k \quad (15.64)$$

Nennimpedanz:

$$Z_N = \frac{U_{1N}}{I_{1N}} \quad (15.65)$$

Relative Kurzschlussspannung:

$$u_k = \frac{Z_k}{Z_N} \quad (15.66)$$

Interpretation der Kurzschlussspannung: Im Kurzschlussversuch wird die Spannung der jeweils nicht kurzgeschlossenen Wicklung so lange erhöht, bis Nennstrom fließt.

Relative Streuung und relative Resistanz

$$x_k = \frac{X_k}{Z_N}, \quad r_k = \frac{R_k}{Z_N} \quad (15.67)$$

Bei Transformatoren großer Leistung ist der Innenwiderstand meist recht klein, konkret $R_k \ll X_k$. Dann gilt

$$u_k \approx x_k \quad (15.68)$$

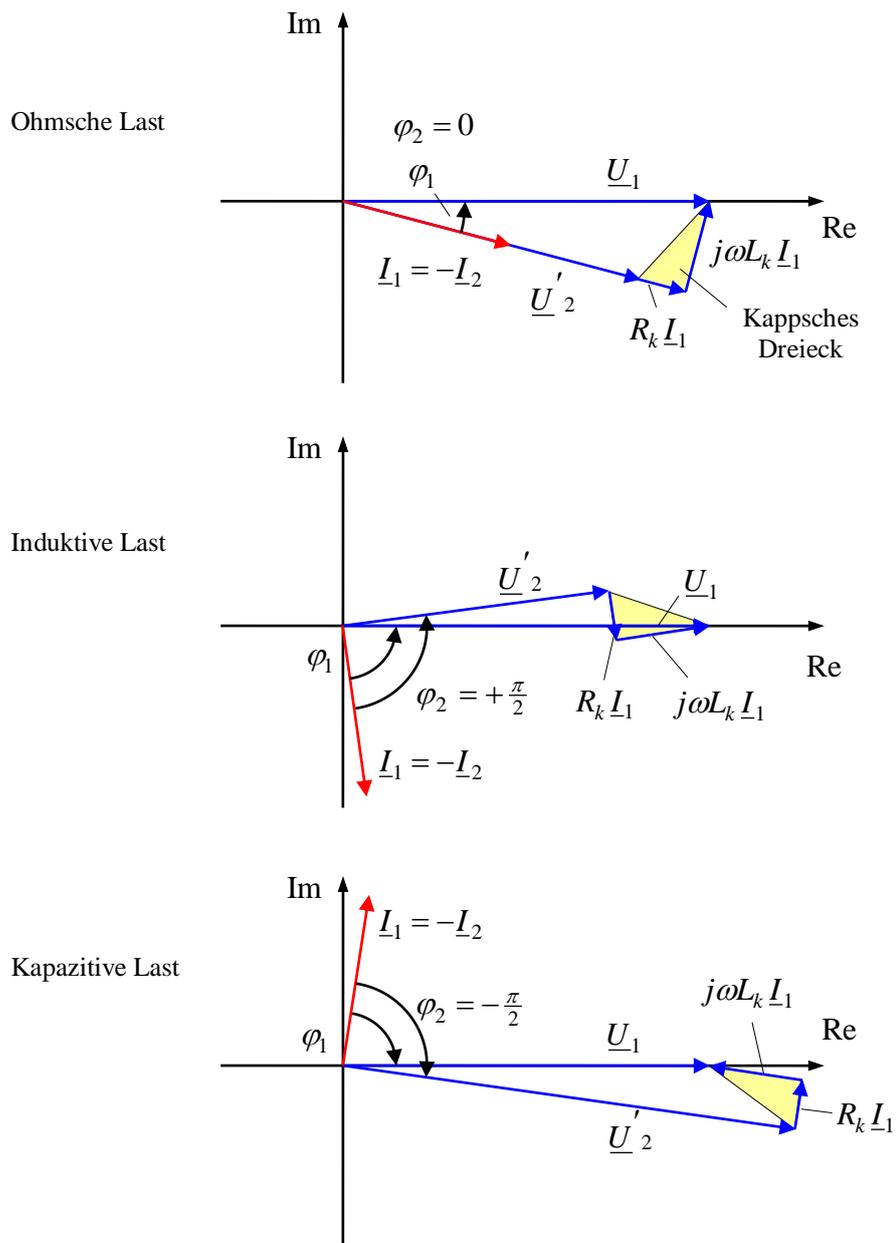


Bild 15-24: Zeigerdiagramme am Transformator für verschiedene Lastfälle

15.8 Zusammenhang zwischen Geometrie und Scheinleistung

Die Zusammenhänge zwischen Scheinleistung und geometrischer Bemessung wie bei der Spule (vgl. Abschnitt 14.3) gelten ähnlich auch für den Transformator. Beim Zwei-Wicklungstransformator müssen sich aber zwei Wicklungen das Wicklungsfenster teilen:

$$A_W = A_{W1} + A_{W2} \quad (15.69)$$

Berücksichtigt man unterschiedliche Füllfaktoren der beiden Wicklungen, erhält man

$$A_W = A_{W1} + A_{W2} = \frac{N_1 I_{\max 1}}{k_{Cu1} J_{\max}} + \frac{N_2 I_{\max 2}}{k_{Cu2} J_{\max}} \quad (15.70)$$

Die Durchflutungen sind jedoch gleich groß,

$$N_1 I_{\max 1} = N_2 I_{\max 2} \quad (15.71)$$

sofern man wiederum den Magnetisierungsstrom vernachlässigt. Analog zum Rechengang in Abschnitt 14.3 erhalten wir:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{\max} \hat{b}_{\max} \omega k'_{Cu} A_{Fe} A_W \quad (15.72)$$

mit

$$k'_{Cu} = \frac{1}{\frac{1}{k_{Cu1}} + \frac{1}{k_{Cu2}}} \quad (15.73)$$

16 Gleichstrommotor

16.1 Wirkprinzip

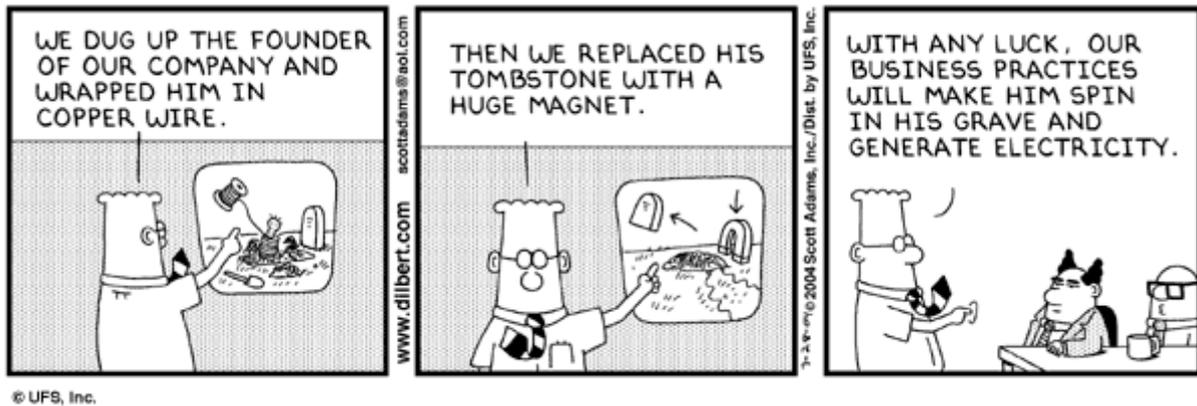


Bild 16-1: Wirkprinzip elektromagnetischer Induktion

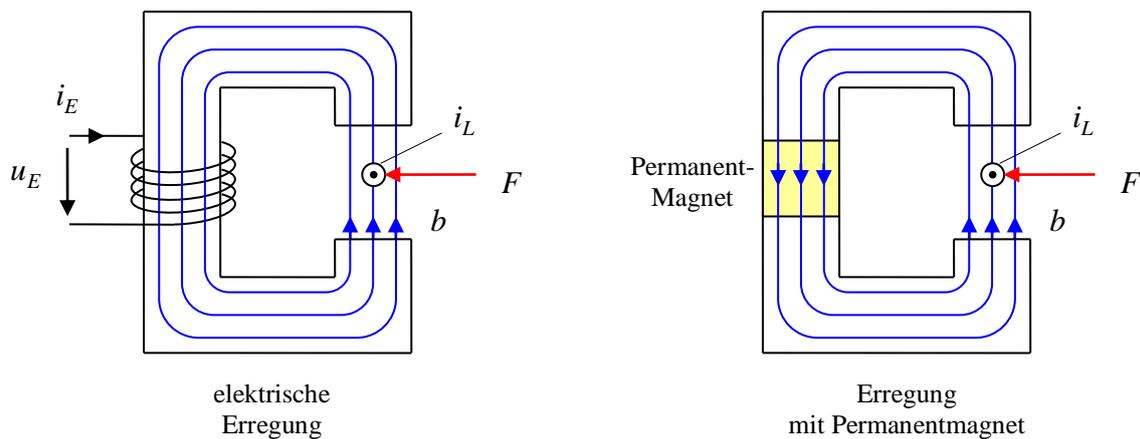


Bild 16-2: Wirkprinzip aufgrund der Lorentzkraft

Kraftwirkung auf den stromdurchflossenen Leiter (*Lorentzkraft*), vektorielle Formulierung:

$$\vec{F} = i_L \vec{l} \times \vec{b} \quad (16.1)$$

Hierbei ist \vec{l} die gerichtete Länge des Leiterabschnitts, der dem Magnetfeld ausgesetzt ist. Stehen die vektoriellen Größen wie in der dargestellten Anordnung senkrecht aufeinander, können wir schreiben.

$$F = i_L b l \quad (16.2)$$

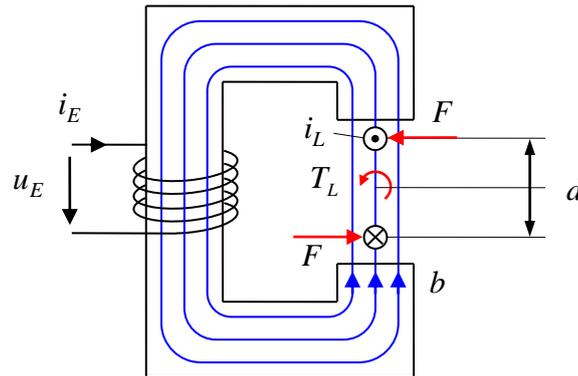


Bild 16-3: Drehmoment auf Leiterschleife

Drehmoment (torque):

$$T_L = 2F \frac{d}{2} = Fd = i_L b d l \quad (16.3)$$

Induzierte Spannung in der Leiterschleife, entweder aus Induktionsgesetz:

$$u_L = \dot{\psi}_L = 2b \frac{d}{2} \omega l = b d l \omega \quad (16.4)$$

oder aus der Leistungsbilanz:

$$p_{el} = p_{mech} \quad (16.5)$$

$$u_L i_L = T_L \omega = i_L b d l \omega \quad (16.6)$$

$$u_L = b d l \omega \quad (16.7)$$

Der Term

$$\phi_0 = b d l \quad (16.8)$$

lässt sich als der magnetische Fluss deuten, der die Leiterschleife bei senkrechter Ausrichtung und bei homogener Flussdichte durchdringen würde. Hiermit:

$$u_L = \dot{\phi}_0 \omega \quad (16.9)$$

$$T_L = \phi_0 i_L \quad (16.10)$$

16.2 Aufbau

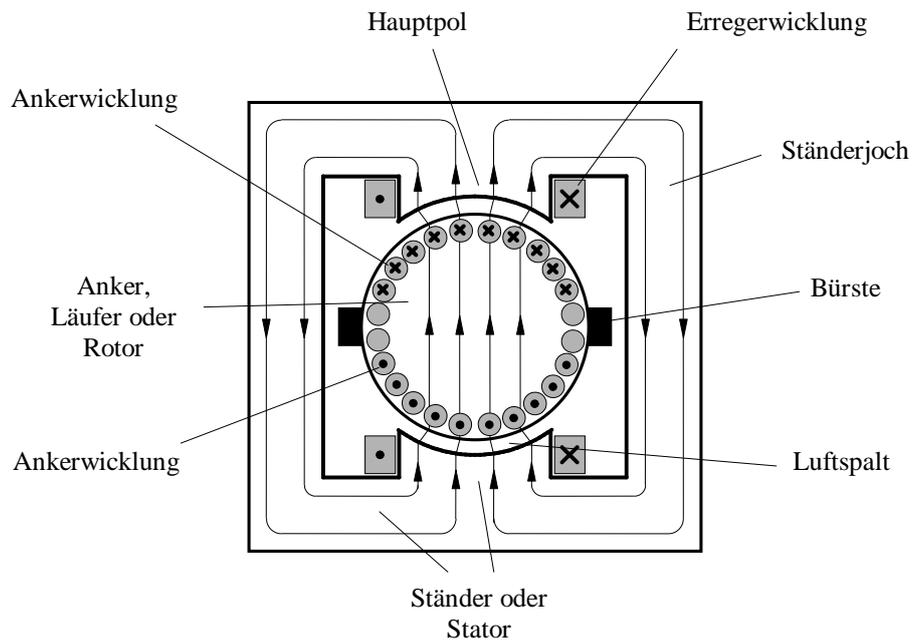


Bild 16-4: Schnittskizze eines Gleichstrommotors

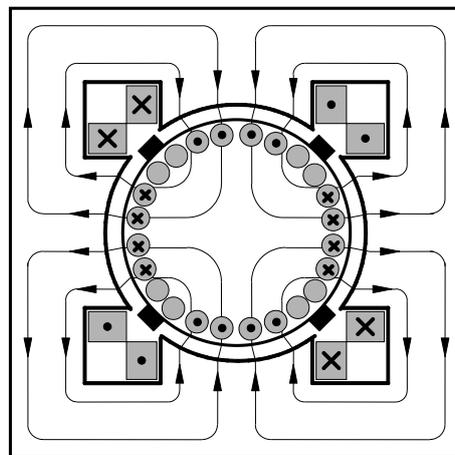


Bild 16-5: Gleichstrommotor mit zwei Polpaaren, $p = 2$

16.3 Kommutator und Ankerwicklungsschemata

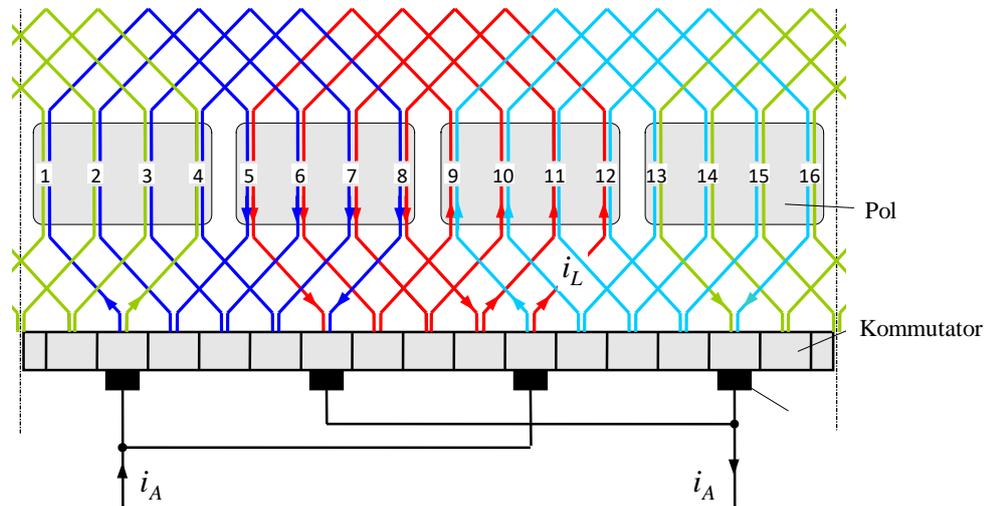


Bild 16-6: Wicklungsschema des Ankers
Schleifenwicklung, hier für $p = 2$,
Zahl der parallelen Zweige $2a = 2p$

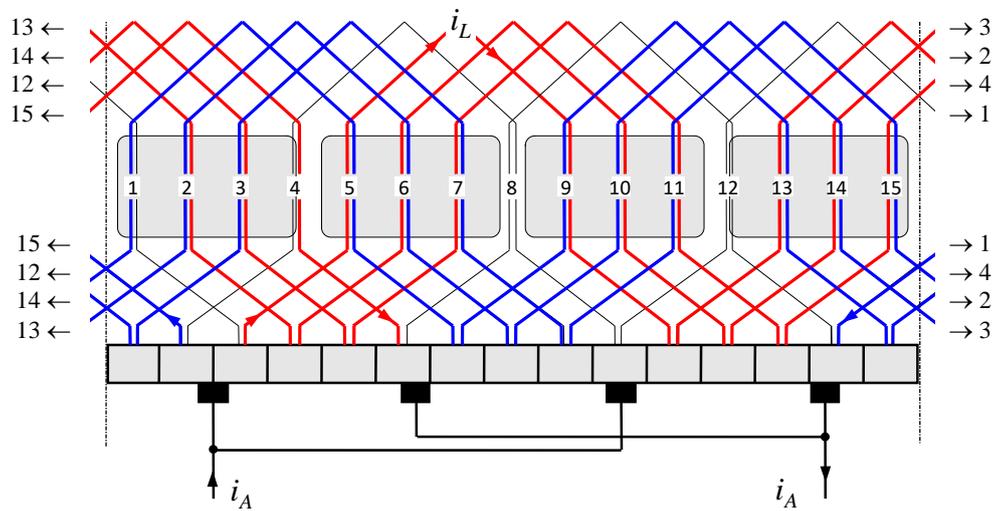


Bild 16-7: Wicklungsschema des Ankers
Wellenwicklung, hier für $p = 2$,
Zahl der parallelen Zweige $2a = 2$

16.4 Mathematische Modellierung

Bezeichnungen:

T_L	Drehmoment einer Leiterschleife
T	gesamtes Drehmoment des Ankers (Luftspaltdrehmoment)
N_A	Zahl der Anker-Leiterschleifen
N_E	Gesamtzahl der Erregerwindungen aller Pole
$2a$	Zahl der parallelen Ankerstromzweige
p	Polpaarzahl
α	Polbedeckung, Verhältnis der aktiven Polflächen zur Ankeroberfläche
ϕ_E	Erregerfluss
b_E	Erregerflussdichte
l	aktive Länge des Ankers
d	Ankerdurchmesser
δ	Luftspaltbreite
A_{pol}	Polfläche

Resultierendes auf den Anker wirkendes Drehmoment:

$$T = N_A T_L \alpha = N_A \phi_0 \alpha i_L = N_A b_E d l \alpha i_L \quad (16.11)$$

Ankerstrom i_A teilt sich auf $2a$ Zweige auf:

$$i_L = \frac{1}{2a} i_A \quad (16.12)$$

$$\phi_E = b_E A_{pol} = \frac{\pi d l \alpha}{2p} b_E \quad (16.13)$$

Damit:

$$T = \frac{p N_A}{a \pi} \phi_E i_A = c_M \phi_E i_A \quad (16.14)$$

Die Konstante

$$c_M = \frac{p N_A}{a \pi} \quad (16.15)$$

heißt *Motorkonstante*. Sie ist eine dimensionslose Zahl, die nur vom konstruktiven Aufbau abhängt. Mit der Abkürzung

$$\psi'_E = c_M \phi_E = \frac{\alpha N_A d l b_E}{2a} \quad (16.16)$$

lässt sich die Drehmomentgleichung sehr knapp als

$$T = \psi'_E i_A \quad (16.17)$$

schreiben. Die induzierte Spannung (*elektromotorische Kraft, EMK*) folgt wieder aus der Leistungsbilanz,

$$u_i = c_M \phi_E \omega = \psi'_E \omega \quad (16.18)$$

oder alternativ durch Summation der induzierten Spannungen der in Reihe geschalteten Leiterschleifen.

Spannungsgleichung des Ankerkreises unter Berücksichtigung des Ankerwiderstands R_A , der Ankerinduktivität L_A und des Bürstenspannungsabfalls u_B :

$$u_A = u_i + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B \quad (16.19)$$

Mit guter Genauigkeit kann der Bürstenspannungsabfall u_B als eine konstante, vom Ankerstrom unabhängige Spannung von etwa 1 V angesetzt werden.

Erregerstromkreis:

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E \quad (16.20)$$

Beachte: Im Allgemeinen sind zwei Wicklungen stets über die Gegeninduktivität miteinander gekoppelt. Die Flüsse von Erreger- und Ankerwicklung sind aber durch die zueinander senkrechte Anordnung nicht miteinander verkettet, so dass die Gegeninduktivität zwischen diesen Wicklungen Null ist.

Bestimmung der Induktivität des Erregerkreises: Hierzu wird der magnetische Widerstand der Eisenwege gegenüber dem des Luftspalts vernachlässigt:

$$L_E = \frac{1}{R_L} = \frac{\mu_0 A_{Pol}}{2\delta} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l}{2\delta \cdot 2p} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l}{4p\delta} \quad (16.21)$$

Ist N_E die Gesamt-Windungszahl aller in Reihe geschalteten Erregerpulen, wirkt je Polpaar die magnetische Spannung (Durchflutung oder magnetomotorische Kraft, MMF)

$$\theta_E = \frac{N_E i_E}{p} \quad (16.22)$$

woraus sich der Erregerfluss (je Pol) zu

$$\phi_E = \Lambda_E \theta_E = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l N_E}{4 p^2 \delta} i_E \quad (16.23)$$

ergibt. Ein Motor wird so konstruiert, dass die Flussdichte

$$b_E = \frac{\phi_E}{A_{pol}} = \frac{\mu_0 N_E}{2 p \delta} i_E \quad (16.24)$$

nicht zu stark im gesättigten Teil der Magnetisierungskennlinie liegt. Typische Werte liegen im Bereich von 1 bis 1,4 T.

Der Erregerfluss ist mit allen N_E Windungen verkettet; der mehrfach verkettete Erregerfluss ist also

$$\psi_E = N_E \phi_E = N_E \Lambda_E \theta_E = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l N_E^2}{4 p^2 \delta} i_E \quad (16.25)$$

Die Erregerinduktivität ergibt sich dann zu

$$L_E = \frac{\psi_E}{i_E} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l N_E^2}{4 p^2 \delta} \quad (16.26)$$

Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen

Drehmoment

$$T = c_M \phi_E i_A = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \quad (16.27)$$

Erregerfluss

$$\psi_E = L_E i_E \quad (16.28)$$

$$\psi'_E = \frac{c_M L_E}{N_E} i_E = L'_E i_E \quad (16.29)$$

Ankerspannung

$$u_A = \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B \quad (16.30)$$

Erregerspannung

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E \quad (16.20)$$

Ersatzschaltbilder

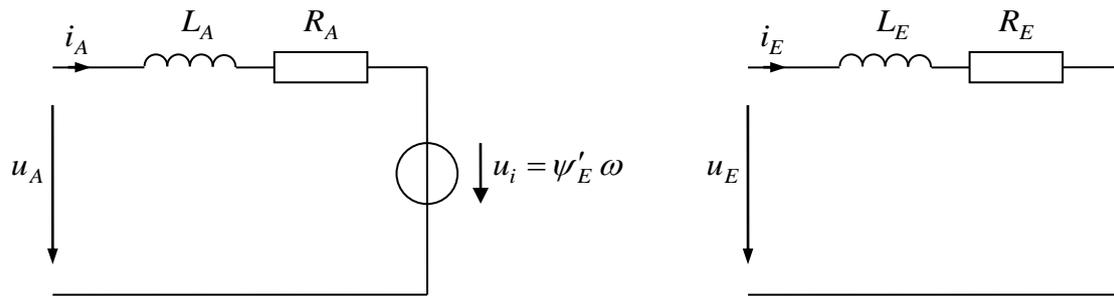


Bild 16-8: Ersatzschaltbilder des Anker- und des Erregerkreises

Dynamisches Verhalten

Das dynamische Verhalten des Anker- bzw. Erregerstroms entspricht dem eines RL -Glieds. Die maßgeblichen Anker- und Erregerzeitkonstanten sind

$$\tau_A = \frac{L_A}{R_A} \quad (16.31)$$

und

$$\tau_E = \frac{L_E}{R_E} \quad (16.32)$$

16.5 Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad

Elektrische Leistung (Verbraucherzählpeilsystem):

$$P_{el} = P_{elA} + P_{elE} = u_A i_A + u_E i_E \quad (16.33)$$

Mechanische Leistung (Erzeugerzählpeilsystem):

$$P_{mech} = \omega T \quad (16.34)$$

Energiebilanz:

$$P_{el} = \dot{w}_A + \dot{w}_E + P_V + P_{mech} \quad (16.35)$$

Verlustleistung:

$$P_V = P_{VA} + P_{VE} = R_E i_E^2 + R_A i_A^2 \quad (16.36)$$

Innere Energien:

$$w_A = \frac{1}{2} L_A i_A^2 \quad (16.37)$$

$$w_E = \frac{1}{2} L_E i_E^2 \quad (16.38)$$

Wirkungsgrad des Ankerkreises (Vernachlässigung der Erregerverluste) im stationären Zustand für den motorischen Betrieb:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{mech}}{P_{elA}} = \frac{\omega T}{U_A I_A} = \frac{\omega T}{(R_A I_A + \psi'_E \omega) I_A} = \frac{\omega T}{\left(R_A \frac{T}{\psi'_E} + \psi'_E \omega \right) \frac{T}{\psi'_E}} \\ &= \frac{\omega}{\omega + \frac{R_A}{\psi'^2_E} T} = \frac{1}{1 + \frac{R_A}{\psi'^2_E} \frac{T}{\omega}} \end{aligned} \quad (16.39)$$

16.6 Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen

Man unterscheidet verschiedene Schaltungsarten:

- *Fremderregung*: Erreger- und Ankerkreis werden aus verschiedenen elektrischen Quellen gespeist
- *Nebenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind parallel geschaltet
- *Reihenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind in Reihe geschaltet
- *Doppelschluss*: Mischform von Neben- und Reihenschluss

Wicklung	Klemmen
Ankerwicklung	A1, A2
Wendepolwicklung*	B1, B2
Kompensationswicklung*	C1, C2
Erregerwicklung für Reihenschlusschaltung	D1, D2
Erregerwicklung für Nebenschlusschaltung	E1, E2
Erregerwicklung für Fremderregung	F1, F2

* Auf diese Wicklungen wird im Rahmen dieser Lehrveranstaltung nicht eingegangen.

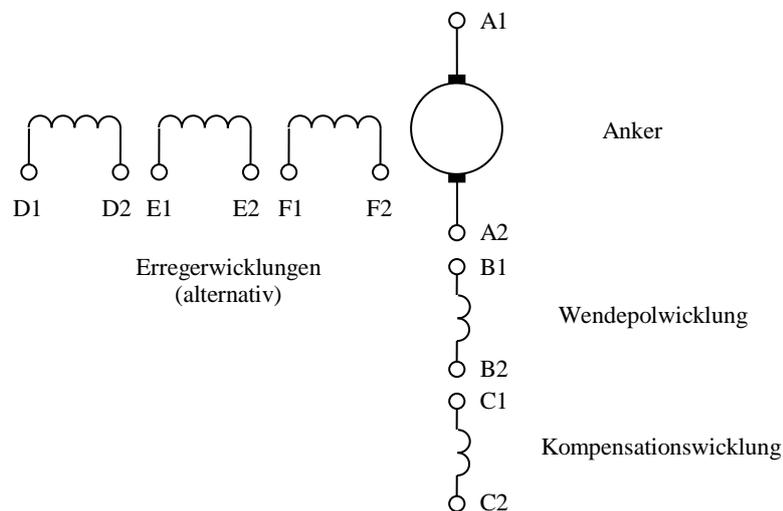


Bild 16-9: Schaltbild des Gleichstrommotors mit verschiedenen Wicklungen (Erregerwicklungen werden stets senkrecht zum Ankerstrompfad dargestellt)

16.7 Fremderregter und permanent erregter Motor

Beim fremderregten Betrieb werden Erreger- und Ankerwicklung unabhängig voneinander gespeist. Typischerweise werden der Erregerstrom und damit der Erregerfluss konstant gehalten,

$$i_E = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \phi_E = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \psi'_E = \text{const.} \quad (16.40)$$

Dies gelingt durch Aufschaltung einer konstanten Erregerspannung u_E allerdings nur unvollkommen, da sich der Strom aufgrund des temperaturabhängigen Erregerwiderstands R_E verändern kann. Ggf. wird deshalb eine Erregerstromregelung vorgesehen, welche die Erregerspannung derart reguliert, so dass stets der gewünschte Erregerstrom fließt.

Beim permanent erregten Motor wird der Erregerfluss von einem Permanentmagneten erzeugt. Sein Verhalten gleicht dem des fremderregten Motors mit konstantem Erregerstrom.

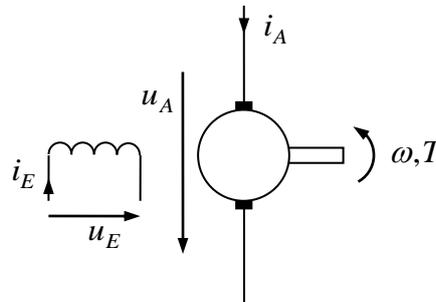


Bild 16-10: Fremderregter Gleichstrommotor

Stationäres Strom-Spannungs-Verhalten bei konstanter Drehzahl

$$U_A = \psi'_E \omega + R_A I_A \quad (16.41)$$

Wird der Anker bei sich drehender Maschine kurzgeschlossen, $U_A = 0$, fließt der *Kurzschlussstrom*

$$I_{Ak} = -\frac{\psi'_E \omega}{R_A} \quad (16.42)$$

Wird dagegen der Motor nicht belastet, also $T = 0$ und somit $I_A = 0$ stellt sich die *Leerlaufspannung*

$$U_{A0} = \psi'_E \omega \quad (16.43)$$

ein.

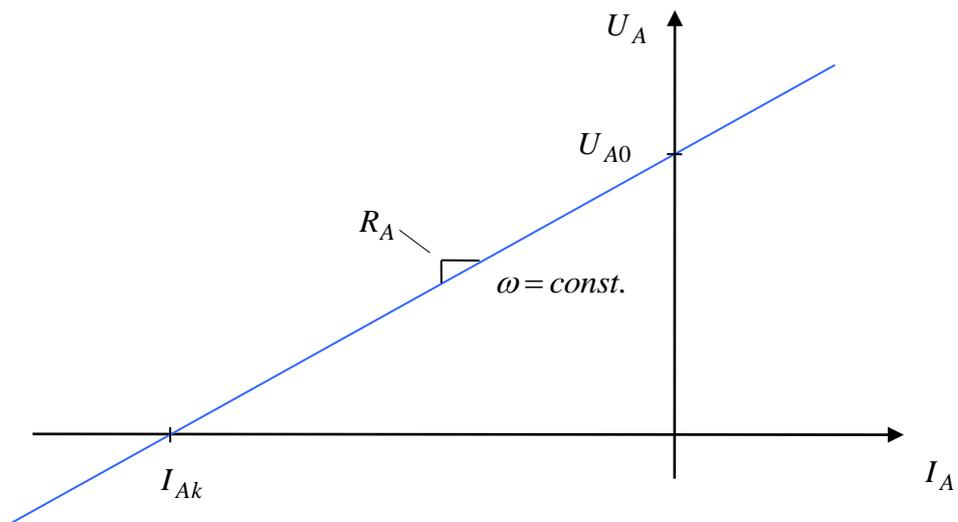


Bild 16-11: Stationäre Strom-Spannungskennlinie für eine konstante Drehfrequenz

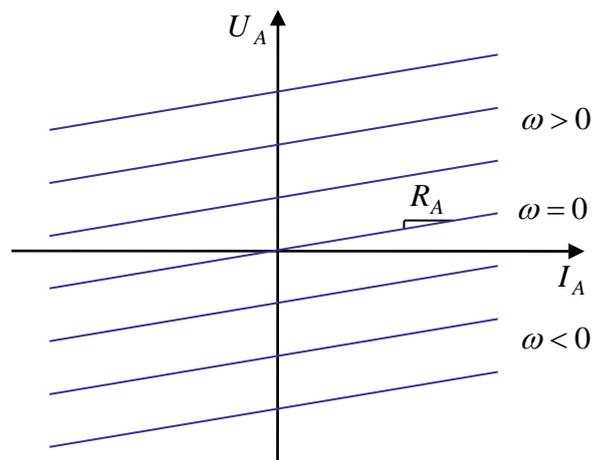


Bild 16-12: Kennlinienschar für konstante Drehfrequenzen

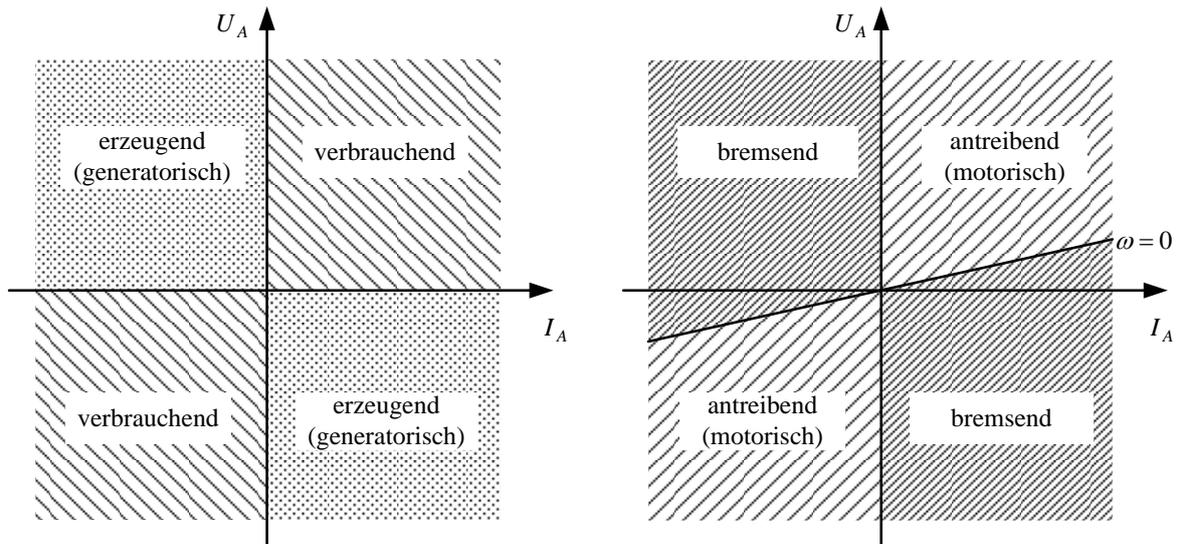


Bild 16-13: Betriebsarten dargestellt in der Strom-Spannungs-Ebene

Betriebsarten:

$P_{el} > 0$	verbrauchend, dissipierend
$P_{el} < 0$	erzeugend, generatorisch
$P_{me} > 0$	antreibend, motorisch
$P_{me} < 0$	bremsend

Stationäres Drehmoment-Drehzahl-Verhalten bei konstanter Spannung

Einsetzen der Drehmomentbeziehung in die Spannungsgleichung:

$$U_A = \frac{R_A}{\psi'_E} T + \omega \psi'_E \quad (16.44)$$

Auflösen nach ω ergibt das stationäre Drehmoment-Drehzahl-Verhalten für konstante Ankerspannung:

$$\omega = \frac{U_A}{\psi'_E} - \frac{R_A T}{\psi_E'^2} \quad (16.45)$$

Losbrech-Drehmoment und Anker-Anlaufstrom (bei $\omega = 0$):

$$I_{A0} = \frac{U_A}{R_A} \quad (16.46)$$

$$T_0 = \frac{U_A \psi'_E}{R_A} \quad (16.47)$$

Problem: Bei kleinem Ankerwiderstand kann ein sehr großer Anlaufstrom resultieren.

Leerlaufdrehzahl (bei $T = 0$ bzw. $I_A = 0$)

$$\omega_0 = \frac{U_A}{\psi'_E} \quad (16.48)$$

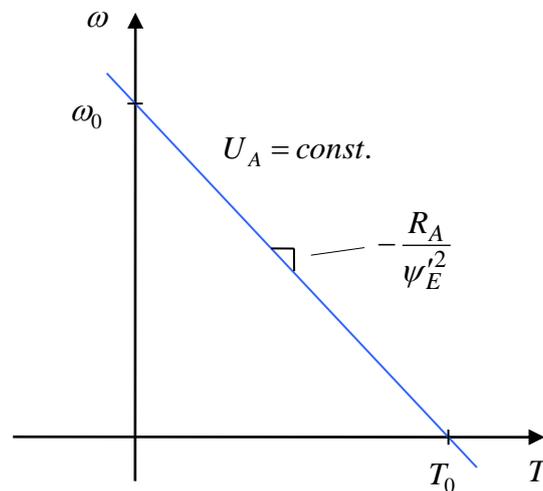


Bild 16-14: Stationäre Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie bei konstanter Ankerspannung

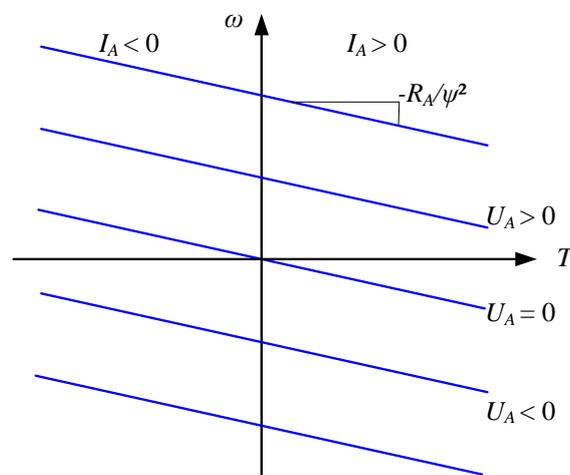


Bild 16-15: Stationäre Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien bei konstanten Ankerspannungen

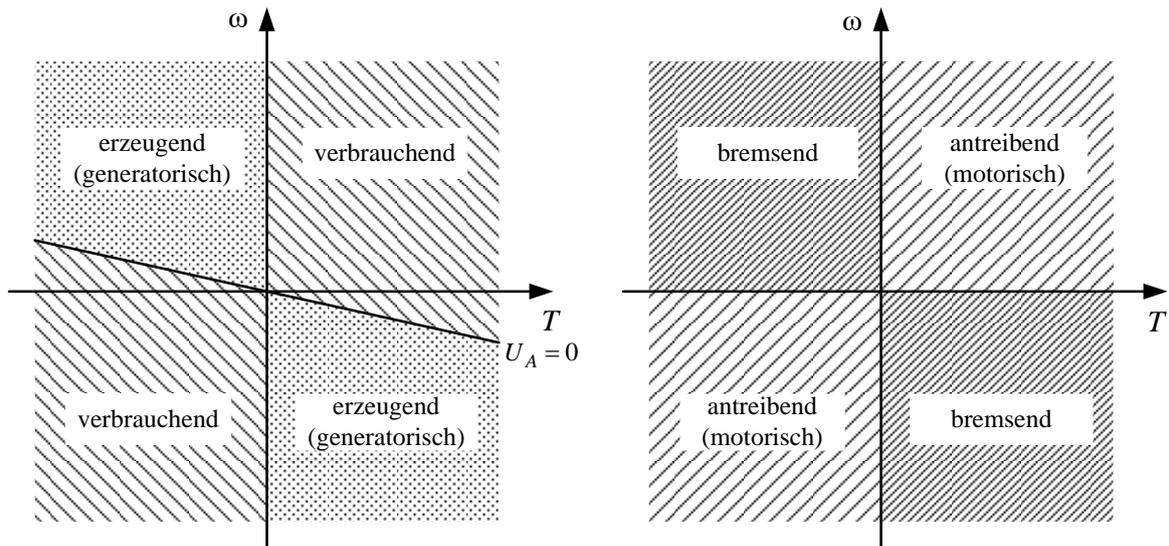


Bild 16-16: Betriebsarten dargestellt in der Drehmoment-Drehzahl-Ebene

16.8 Betrieb mit Vorwiderständen

Steht nur eine feste Speisespannung zur Verfügung, soll der Motor aber trotzdem drehzahlvariabel betrieben werden, zumindest aber das Anfahren aus dem Stillstand auf eine Betriebsdrehzahl bewerkstelligt werden, ist die klassische Lösung die Verwendung von *Vorwiderständen* im Anker- ggf. auch im Erregerkreis. Dadurch werden Einschaltströme und die Drehmomente begrenzt bzw. die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien entsprechend verändert.

Vorwiderstände erhöhen aber die Verluste und verschlechtern somit den Wirkungsgrad.

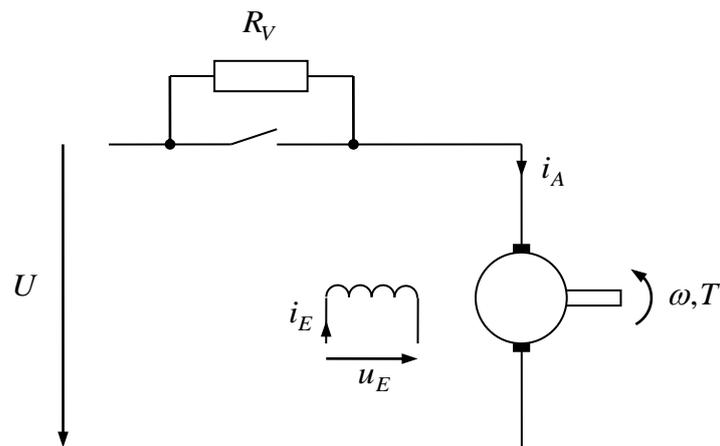


Bild 16-17: Betrieb mit Vorwiderstand

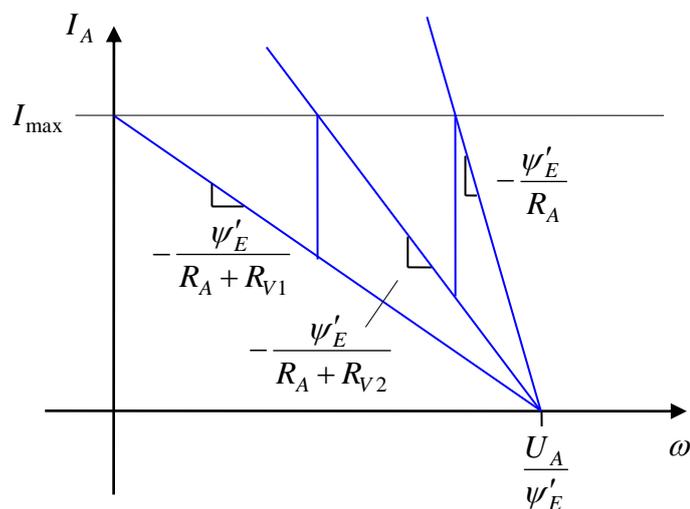


Bild 16-18: Anfahren mit Vorwiderständen

16.9 Speisung durch einen Tiefsetzsteller

Der Betrieb mit Vorwiderständen kann vermieden werden, wenn eine variable Spannungsquelle zur Verfügung steht. Hierzu kann beispielsweise ein Tiefsetzsteller dienen, der den Ankerkreis speist. Der Tiefsetzsteller benötigt eine Induktivität am Ausgang. In der Regel ist keine zusätzliche Stellerdrossel notwendig, da die Ankerinduktivität diese Funktion übernimmt. Durch Veränderung des Tastverhältnisses wird die (mittlere) Ankerspannung verändert. Ggf. kann auch der Erregerkreis durch einen weiteren Steller gespeist werden.

Durch den Tiefsetzsteller werden im Gegensatz zu Vorwiderständen nur verhältnismäßig geringe zusätzliche Verluste verursacht.

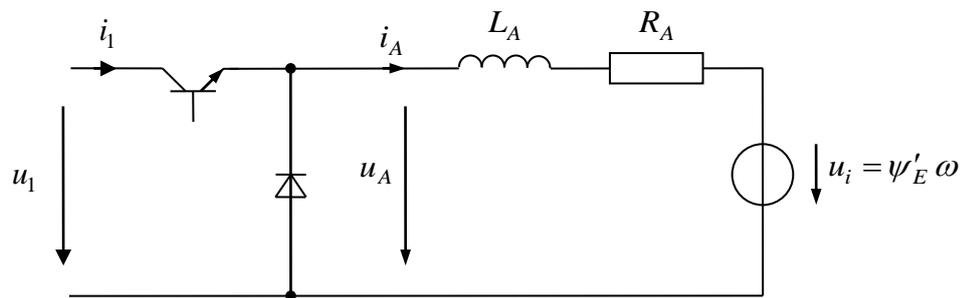


Bild 16-19: Speisung des Ankerkreises durch Tiefsetzsteller

16.10 Nebenschlussmotor

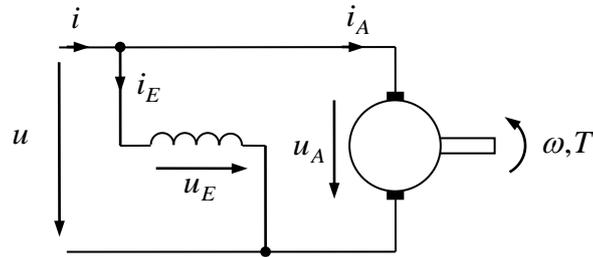


Bild 16-20: Nebenschlusschaltung

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E \omega + L_A \dot{i}_A \quad (16.49)$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \quad (16.50)$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \quad (16.51)$$

Nebenschluss:

$$u = u_A = u_E \quad (16.52)$$

$$i = i_A + i_E \quad (16.53)$$

Stationäres Verhalten:

$$I_E = \frac{U}{R_E} \quad (16.54)$$

$$I_A = \frac{U - L'_E I_E \omega}{R_A} = \frac{U - L'_E U / R_E \omega}{R_A} = \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A} U \quad (16.55)$$

$$I = I_E + I_A = \left[\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} - \frac{L'_E \omega}{R_A R_E} \right] U \quad (16.56)$$

$$T = L'_E I_E I_A = L'_E \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A R_E} U^2 \quad (16.57)$$

16.11 Reihenschlussmotor

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E \omega + L_A \dot{i}_A \quad (16.58)$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \quad (16.59)$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \quad (16.60)$$

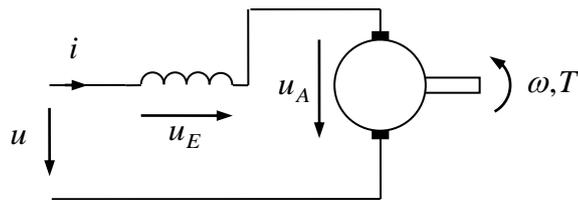


Bild 16-21: Reihenschlusschaltung

Reihenschluss:

$$u = u_A + u_E \quad (16.61)$$

$$i = i_A = i_E \quad (16.62)$$

$$R = R_A + R_E \quad (16.63)$$

$$L = L_A + L_E \quad (16.64)$$

$$u = R i + L'_E i \omega + L \dot{i}$$

$$u = (R + L'_E \omega) i + L \dot{i} \quad (16.65)$$

$$u = R'(\omega) i + L \dot{i}$$

Drehzahlabhängiger effektiver Widerstand:

$$R'(\omega) = R + L'_E \omega \quad (16.66)$$

$$T = \psi'_E i = L'_E i^2 \quad (16.67)$$

Das Drehmoment hängt quadratisch vom Strom ab und ist deshalb immer positiv oder Null (Eine Änderung des Vorzeichens ist nur durch Wechsel der Verschaltung von Erreger- und Ankerwicklung möglich, also mit $i = i_A = -i_E$.)

Stationäre Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik des Reihenschlussmotors:

$$U = R'(\omega)I = (R + L'_E \omega)I \quad (16.68)$$

$$T = L'_E I^2 = \frac{L'_E U^2}{R'^2(\omega)} = \frac{L'_E U^2}{(R + L'_E \omega)^2} \quad (16.69)$$

Die Abhängigkeit des Drehmoments von der Drehzahl ist bei konstanter Spannung also eine Hyperbel mit einer Asymptote bei

$$\omega = -\frac{R}{L'_E} \quad (16.70)$$

Wird der Reihenschlussmotor mit konstanter Spannung betrieben und dabei mechanisch entlastet, also $T \rightarrow 0$, wächst die Drehzahl über alle Grenzen, $\omega \rightarrow \infty$ (s. Bild); der Motor „geht durch“ und kann sich ggf. durch die anwachsenden Fliehkräfte selbst zerstören. Es ist daher gefährlich, einen Reihenschlussmotor ohne Last zu betreiben.

Bei negativer Drehrichtung $\omega < 0$ arbeitet der Reihenschlussmotor bremsend, für

$$\omega < -\frac{R}{L'_E} \quad (16.71)$$

darüber hinaus auch generatorisch, da sich dann unterschiedliche Vorzeichen von Strom und Spannung ergeben.

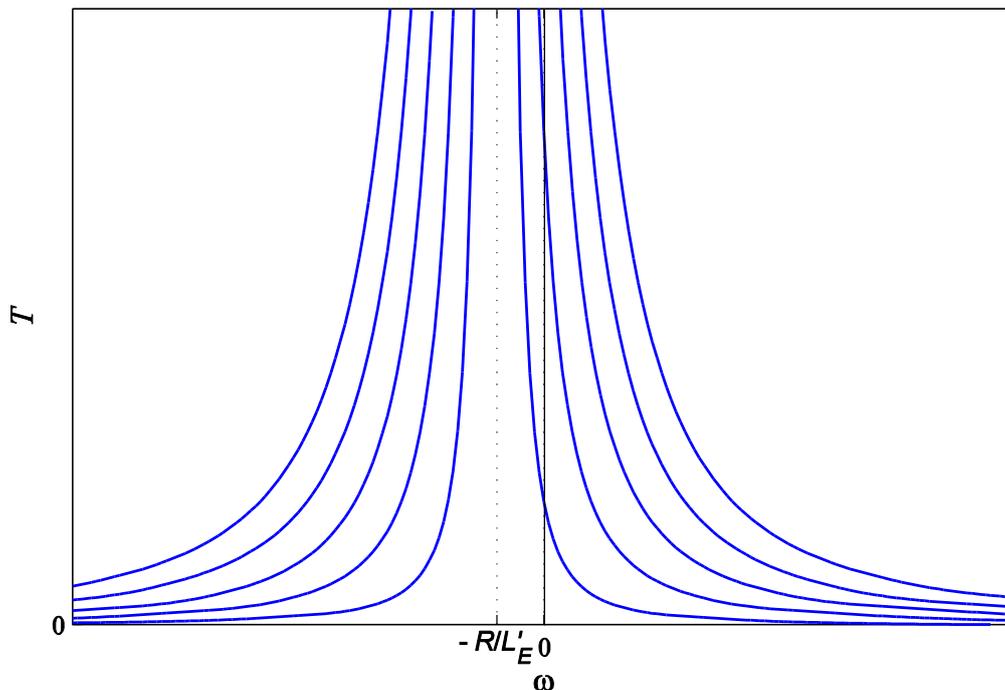


Bild 16-22: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Spannungen U bei Gleichspannungsspeisung

Da das Drehmoment nur quadratisch vom Strom abhängt, kann ein Reihenschlussmotor auch mit Wechselspannung gespeist werden. Um dies zu untersuchen, wenden wir die komplexe Wechselstromrechnung an. Es muss sorgfältig zwischen der mechanischen Drehfrequenz ω und der elektrischen Frequenz, die hier mit ω_{el} bezeichnet werden soll, unterschieden werden:

$$\underline{U} = R'(\omega) \underline{I} + j\omega_{el} L \underline{I} \quad (16.72)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R'(\omega) + j\omega_{el} L} \quad (16.73)$$

Das Drehmoment ist bei WS-Speisung nicht konstant, sondern pulsiert wegen

$$T(t) = L'_E i^2(t) \quad (16.74)$$

mit der doppelten elektrischen Frequenz $2\omega_{el}$. Das mittlere Drehmoment ergibt sich wie folgt aus dem Strom- bzw. Spannungseffektivwert:

$$\bar{T} = L'_E \bar{i}^2 = L'_E I^2 = \frac{L'_E U^2}{R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2} \quad (16.75)$$

Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik:

$$\left(R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2 \right) \bar{T} = L'_E U^2 \quad (16.76)$$

$$\bar{T} = \frac{L'_E}{(R + L'_E \omega)^2 + \omega_{el}^2 L^2} U^2 \quad (16.77)$$

Das mittlere Drehmoment ist also bei gleichem Spannungseffektivwert bei WS-Speisung etwas kleiner als bei GS-Speisung. Auch zeigt sich keine Asymptote bei $\omega = -R/L'_E$, sondern nur das Drehmoment-Maximum.

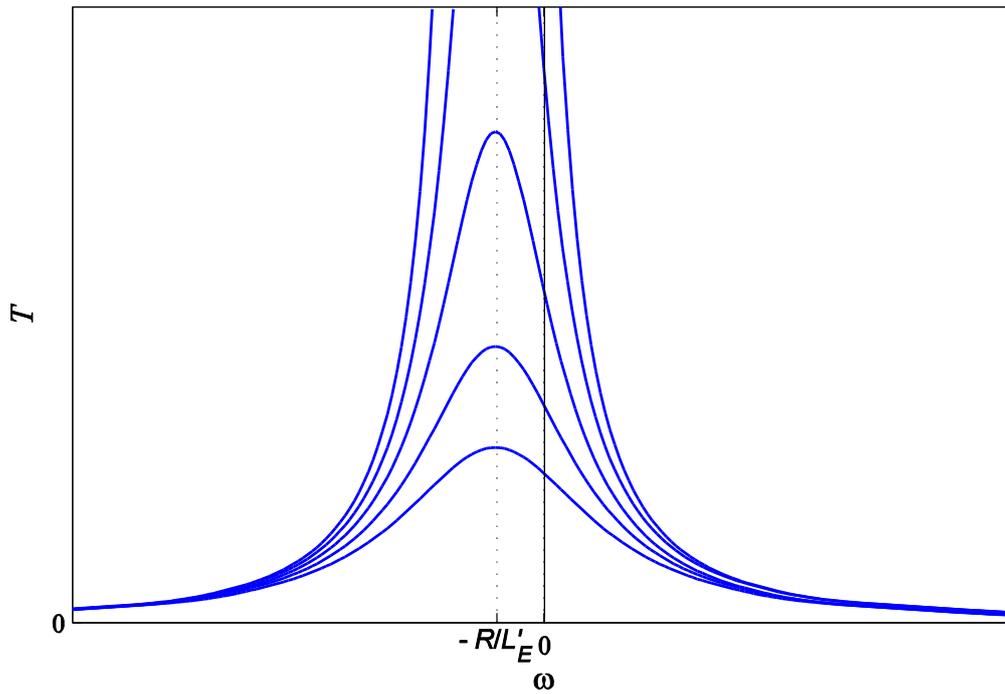


Bild 16-23: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für GS-Speisung (oberste Kurve) und verschiedene Frequenzen bei WS-Speisung, der Spannungseffektivwert U ist für alle Kurven konstant

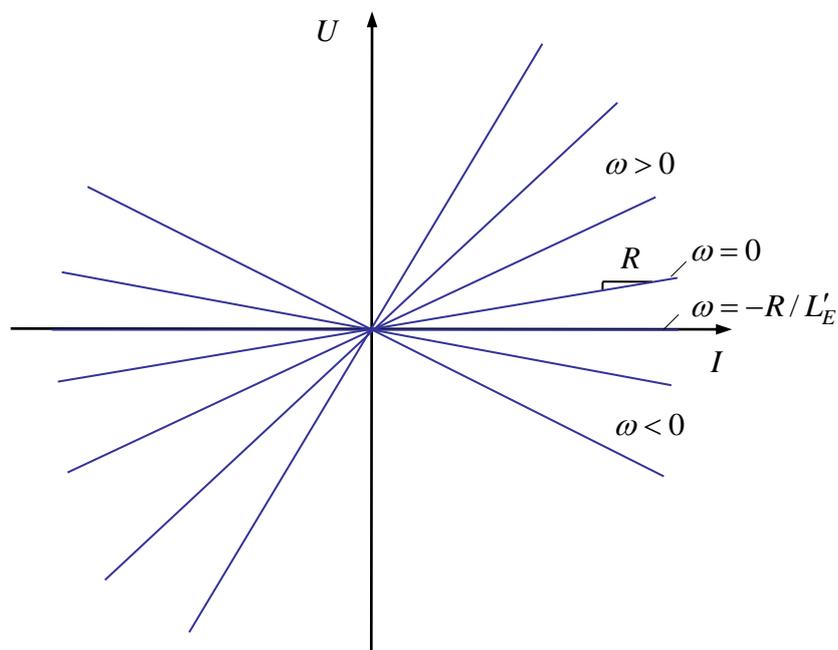


Bild 16-24: Strom-Spannungs-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Drehzahlen

17 Linearmotor

17.1 Grundprinzip, einphasiger Linearmotor

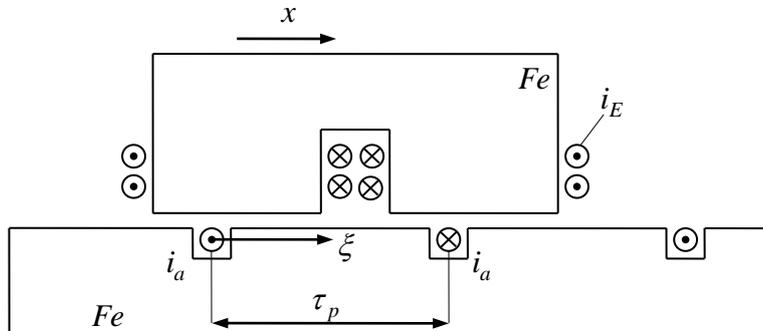


Bild 17-1: Prinzipbild Linearmotor

Bezeichnungen:

δ	Luftspalt
x	Bewegungskordinate des Läufers
ξ	Statorfeste Koordinate
b	Normalkomponente der magnetischen Flussdichte
i_E	Erregerstrom
N_E	Zahl der Erregerwindungen
i_a	Phasenstrom („Ankerstrom“ vgl. Gleichstrommotor)
A_p	Polfläche
τ_p	Polteilung
l	aktive Leiterlänge

Sinusförmige Approximation des Erregerfeldes:

$$b(\xi, x) = \hat{b} \cos \frac{\xi - x}{\tau_p} \pi \quad (17.1)$$

Ungefähre Abschätzung des Scheitelwerts der magnetischen Flussdichte aus dem magnetischen Erregerkreis, Vernachlässigung der magnetischen Widerstände der Eisenwege:

$$\hat{b} = \frac{\mu_0 N_E i_E}{2\delta} \quad (17.2)$$

Kraftwirkung auf einen Leiter des Stators mit Strom i , der sich an der Position ξ befindet:

$$F = lbi = \hat{b}li \cos \frac{\xi - x}{\tau_p} \pi \quad (17.3)$$

Leiter a ist an den Positionen $\xi = 0$ und $\xi = \tau_p$ und entsprechend periodisch fortgesetzt, aber nur jeweils zwei Leiter davon befinden sich im Erregerfeld. Gesamtkraft auf Leiter a :

$$F_a = 2\hat{b}li_a \cos \frac{x\pi}{\tau_p} \quad (17.4)$$

Richtung der Vortriebskraft hängt vom Stromvorzeichen und der Läuferposition x ab. Erzeugung einer gleichgerichteten Vortriebskraft entweder durch Stromkommutierung wie beim Gleichstrommotor oder durch Einspeisung eines Wechselstroms:

$$i_a = \hat{i} \cos \varphi_a(t) \quad (17.5)$$

$$F_a = 2\hat{b}l\hat{i} \cos \frac{x\pi}{\tau_p} \cos \varphi_a(t) \quad (17.6)$$

Wahl des Strom-Phasenwinkels abhängig von der Position x :

$$\varphi_a(t) = \frac{x(t)\pi}{\tau_p} \quad (17.7)$$

$$F_a(t) = 2\hat{b}l\hat{i} \cos^2 \varphi_a(t) = \hat{F}_a \cos^2 \varphi_a(t) \quad (17.8)$$

Resultat: Vortriebskraft nur in eine Richtung, aber pulsierend. Scheitelwert und mittlere Kraft:

$$\hat{F}_a = 2\hat{b}l\hat{i} \quad (17.9)$$

$$\bar{F}_a = \hat{b}l\hat{i} \quad (17.10)$$

Induzierte Spannung der Leiterschleife a kann aus der Leistungsbilanz gewonnen werden:

$$p_{me} = F_a \dot{x} = u_{ai} i_a \quad (17.11)$$

$$2\hat{b}li_a \cos \frac{x\pi}{\tau_p} \dot{x} = u_{ai} i_a \quad (17.12)$$

$$u_{ai} = 2\hat{b}l \cos \frac{x\pi}{\tau_p} \dot{x} = 2\hat{b}l \cos \varphi_a \dot{\varphi}_a \frac{\tau_p}{\pi} = \frac{2\tau_p \hat{b}l}{\pi} \omega \cos \varphi_a = \hat{\psi} \omega \cos \varphi_a \quad (17.13)$$

$$u_{ai} = \hat{\psi} \omega \cos \varphi_a \quad (17.14)$$

mit

$$\hat{\psi} = \frac{2\tau_p \hat{b}l}{\pi} \quad (17.15)$$

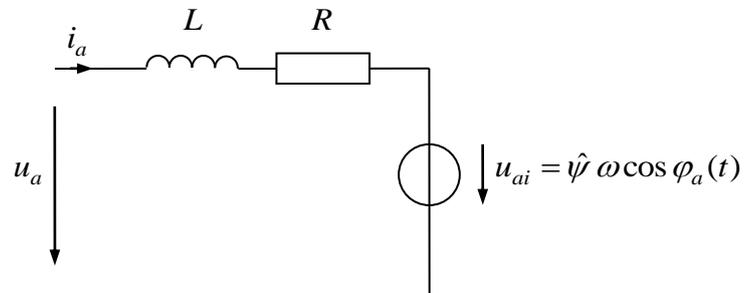


Bild 17-2: Elektrisches Ersatzschaltbild des einphasigen Linearmotors

17.2 Zweiphasiger Linearmotor

Idee zur Vermeidung der Kraftpulsation: Zweites, phasenverschobenes Wicklungssystem:

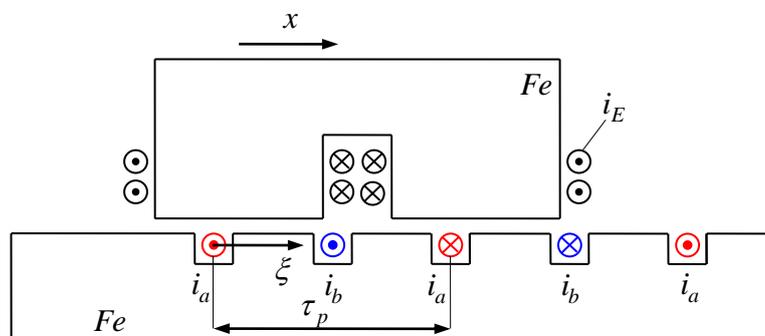


Bild 17-3: Zweiphasiger Linearmotor

Kraftwirkung auf Leiter b , Positionen $\xi = \tau_p / 2$ und $\xi = 3\tau_p / 2$:

$$F_b = 2l \hat{b} i_b \cos\left(\frac{x\pi}{\tau_p} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17.16)$$

$$i_b = \hat{i} \cos \varphi_b(t) \quad (17.17)$$

$$F_b = 2l\hat{b}\hat{i} \cos\left(\frac{x(t)\pi}{\tau_p} - \frac{\pi}{2}\right) \cos\varphi_b(t) \quad (17.18)$$

Wahl:

$$\varphi_b(t) = \frac{x(t)\pi}{\tau_p} - \frac{\pi}{2} = \varphi_a(t) - \frac{\pi}{2} \quad (17.19)$$

$$F_b(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2\varphi_b(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2\left(\varphi_a(t) - \frac{\pi}{2}\right) = 2l\hat{b}\hat{i} \sin^2\varphi_a(t) \quad (17.20)$$

Gesamtkraft:

$$F(t) = F_a(t) + F_b(t) = 2l\hat{b}\hat{i} (\cos^2\varphi_a(t) + \sin^2\varphi_a(t)) = 2l\hat{b}\hat{i} = \text{const.} \quad (17.21)$$

Gesamtkraft ist nun konstant, erfordert aber zwei Wicklungen (4 Anschlüsse), die phasenversetzt gespeist werden müssen.

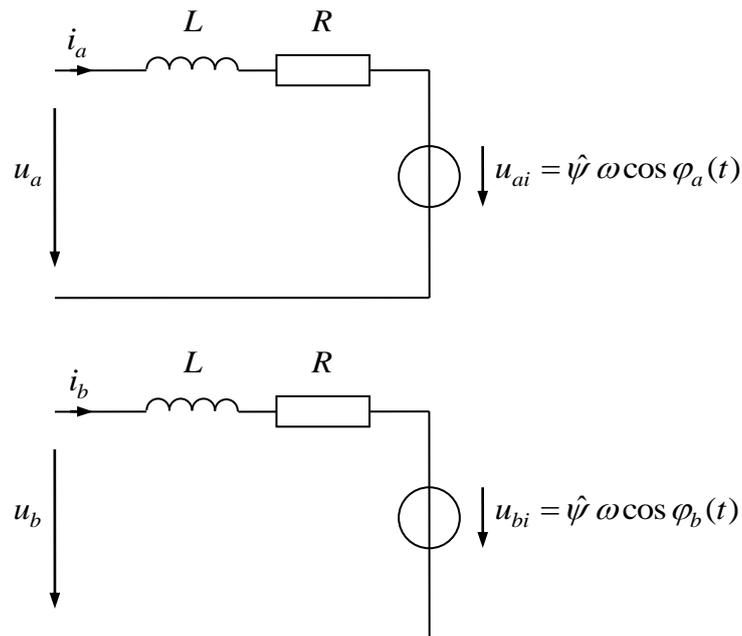


Bild 17-4: Elektrisches Ersatzschaltbild des zweiphasigen Linearmotors

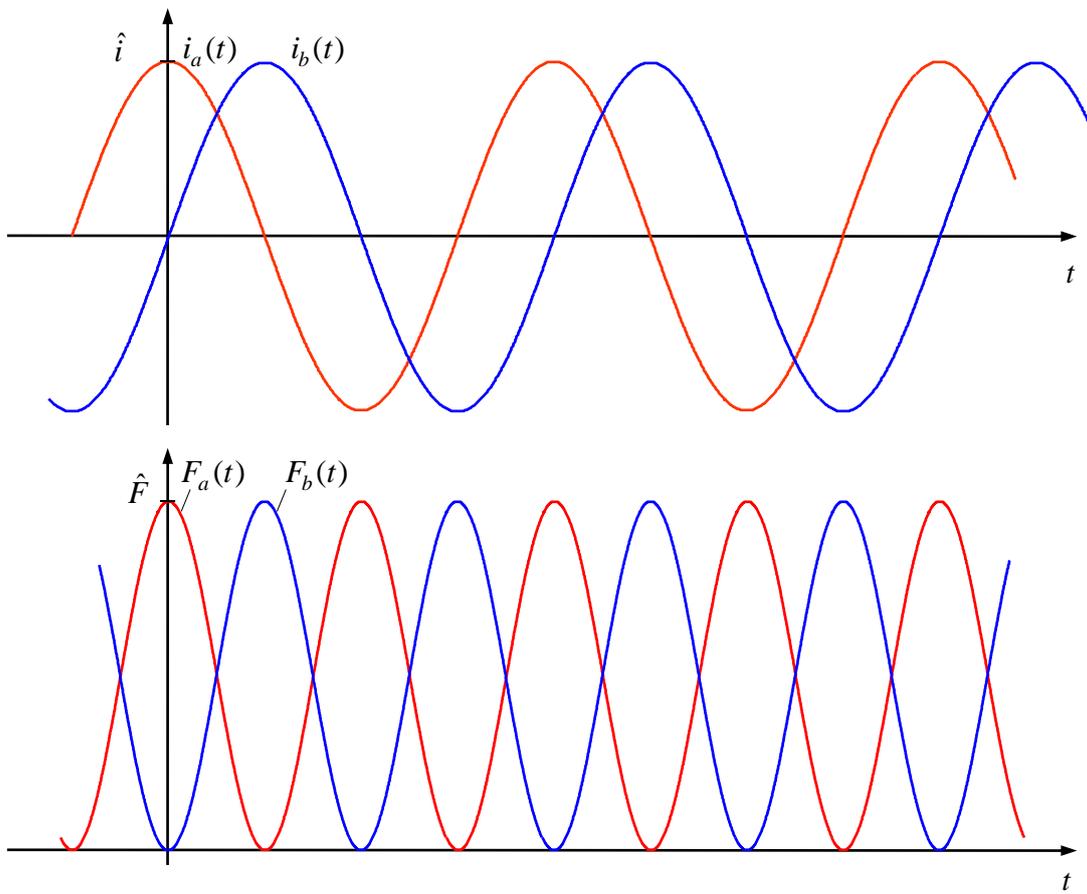


Bild 17-5: Zeitlicher Verlauf der beiden Phasenströme und der Kräfte

17.3 Drehstrom-Linearmotor

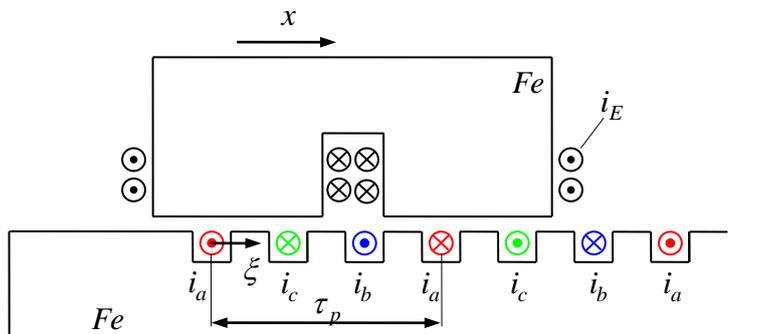


Bild 17-6: Dreiphasiger Linearmotor

$$F_a = 2\hat{b}l i_a \cos \frac{x\pi}{\tau_p} \quad (17.22)$$

$$F_b = 2l\hat{b} i_b \cos \left(\frac{x\pi}{\tau_p} - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (17.23)$$

$$F_c = 2l\hat{b} i_c \cos \left(\frac{x\pi}{\tau_p} + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (17.24)$$

$$i_a(t) = \hat{i} \cos \varphi_a(t) \quad (17.25)$$

$$i_b(t) = \hat{i} \cos \varphi_b(t) \quad (17.26)$$

$$i_c(t) = \hat{i} \cos \varphi_c(t) \quad (17.27)$$

mit

$$\varphi_a(t) = \frac{x(t)\pi}{\tau_p} \quad (17.28)$$

$$\varphi_b(t) = \frac{x(t)\pi}{\tau_p} - \frac{2\pi}{3} = \varphi_a(t) - \frac{2\pi}{3} \quad (17.29)$$

$$\varphi_c(t) = \frac{x(t)\pi}{\tau_p} + \frac{2\pi}{3} = \varphi_a(t) + \frac{2\pi}{3} \quad (17.30)$$

$$\Rightarrow \quad (17.31)$$

$$F_a(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2 \varphi_a(t) \quad (17.32)$$

$$F_b(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2 \varphi_b(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2 \left(\varphi_a(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (17.33)$$

$$F_c(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2 \varphi_c(t) = 2l\hat{b}\hat{i} \cos^2 \left(\varphi_a(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (17.34)$$

Gesamtkraft:

$$\begin{aligned} F(t) &= F_a(t) + F_b(t) + F_c(t) \\ &= 2l\hat{b}\hat{i} \left[\cos^2 \varphi_a(t) + \cos^2 \left(\varphi_a(t) - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\varphi_a(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (17.35)$$

$$F(t) = 3l\hat{b}\hat{i} \quad (17.36)$$

Ebenfalls keine Drehmomentpulsation!

Summe der Ströme:

$$i_0(t) = i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = \hat{i} \left[\cos \varphi_a(t) + \cos \left(\varphi_a(t) - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\varphi_a(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = 0 \quad (17.37)$$

Die Summe ist Null (dies ist beim zweiphasigen Motor nicht der Fall!). Umsetzung dieser Erkenntnis in technischer Realisierung: Es werden nicht 3×2 Klemmen für die Stromzufuhr benötigt, sondern nur 3, da der gemeinsame Rückstrom Null ist und deshalb keinen Leiter benötigt (*Sternschaltung*):

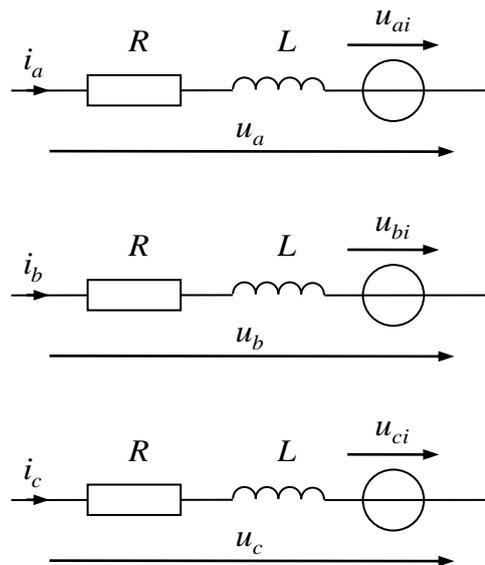


Bild 17-7: Elektrisches Ersatzschaltbild des Drehstrom-Linearmotors

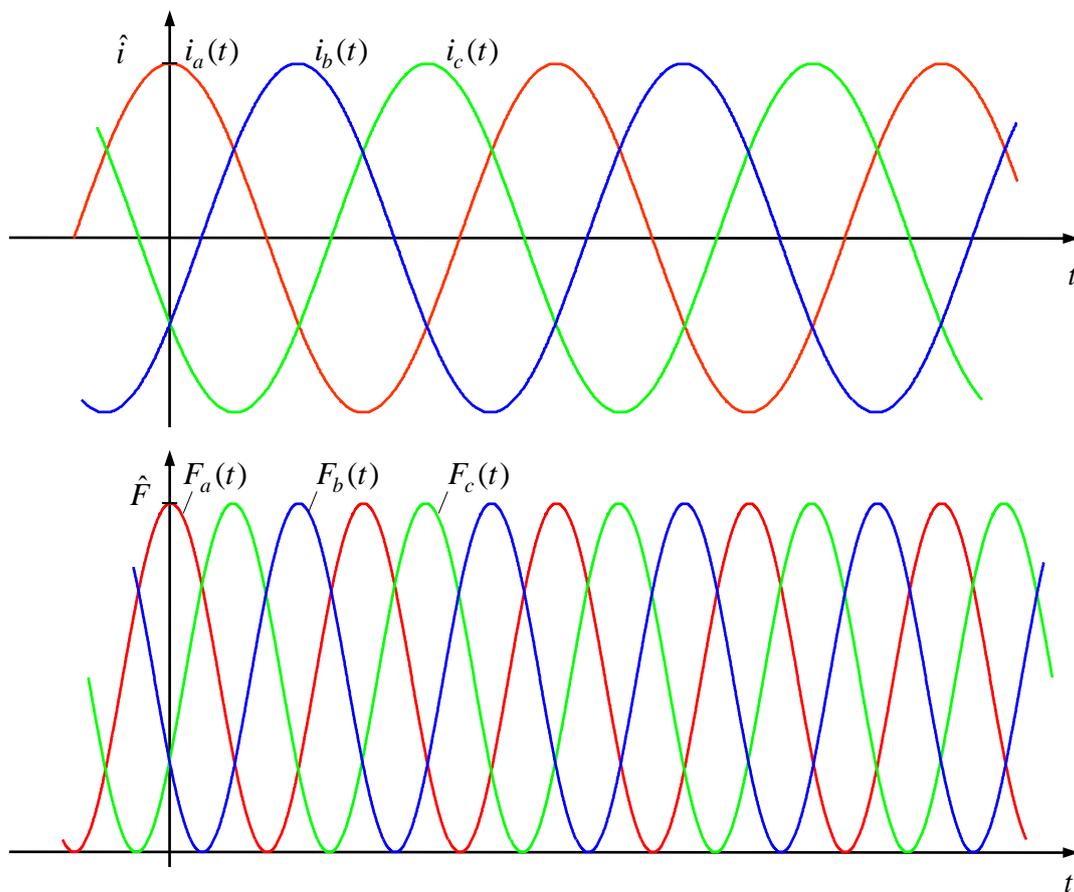


Bild 17-8: Zeitlicher Verlauf drei Phasenströme und der Kräfte



Bild 17-9: Stator des Transrapid

18 Drehstrom

18.1 Energieübertragung

Betrachtung eines Drehstromsystems aus dem Blickwinkel der Energieübertragung. Ausgangspunkt:

1. Energieübertragung mit Gleichspannung über Doppelleitung:

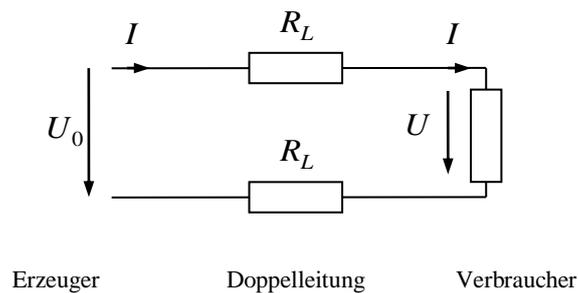


Bild 18-1: Energieübertragung über Doppelleitung

Übertragene Leistung:

$$p(t) = P = UI = \text{const.} \quad (18.1)$$

Leitungsverluste:

$$P_V = 2R_L I^2 \quad (18.2)$$

Relative Verluste:

$$v = \frac{P_V}{P} = \frac{2R_L I^2}{UI} = 2R_L \frac{I}{U} \quad (18.3)$$

Wirkungsgrad der Energieübertragung:

$$\eta = \frac{P}{P + P_V} = \frac{1}{1 + v} \quad (18.4)$$

2. Energieübertragung mit Wechselfspannung über Doppelleitung:

Gleiche Verhältnisse wie bei Gleichspannung, aber oszillierende Momentanleistung:

$$S = UI \quad (18.5)$$

$$p(t) = P + S \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \quad (18.6)$$

Verlustfaktor:

$$v = \frac{P_V}{P} = \frac{2R_L I^2}{UI} = 2R_L \frac{I}{U} \quad (18.7)$$

3. Energieübertragung mit Drehspannung über drei Leiter:

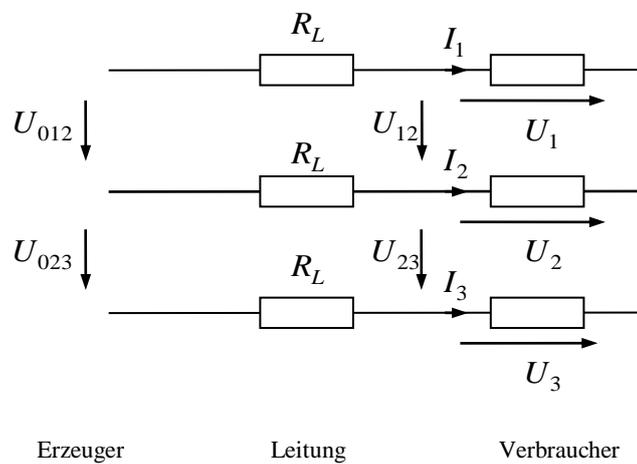


Bild 18-2: Energieübertragung über Drehstromleitung

Annahme eines symmetrischen Drehspannungssystems (gleiche Amplituden, um 120° versetzte Phasen):

$$u_1(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (18.8)$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} U \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_u\right) \quad (18.9)$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} U \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_u\right) \quad (18.10)$$

$$i_1(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (18.11)$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_i\right) \quad (18.12)$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_i\right) \quad (18.13)$$

Die Summe der Ströme und der Spannungen in einem symmetrischen Drehstromsystem ist stets Null.

Übertragene Scheinleistung:

$$S = 3UI \quad (18.14)$$

Leitungsverluste:

$$P_V = 3R_L I^2 \quad (18.15)$$

Verlustfaktor:

$$v = \frac{P_V}{P} = \frac{3R_L I^2}{3UI} = R_L \frac{I}{U} \quad (18.16)$$

Außenleiterspannungen (verkettete Spannung):

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= u_1(t) - u_2(t) = \sqrt{2} U \left[\cos(\omega t + \varphi_u) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_u\right) \right] \\ &= -\sqrt{2} U \cdot 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \sqrt{3} U \sin\left(-\omega t - \varphi_u + \frac{\pi}{3}\right) \quad {}^{14} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{3} U \cos\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad (18.17)$$

Die Außenleiterspannung ist um $\sqrt{3}$ größer als die Strangspannung.

Begrenzende Größen für ein Kabel sind seine maximale Stromtragfähigkeit und die maximale Spannung (Isolationsfestigkeit). Damit zwischen den Leitern die gleiche Spannung wie beim Einphasen-System anliegt, muss die Strangspannung um $\sqrt{3}$ herabgesetzt werden $U \rightarrow U / \sqrt{3}$.

¹⁴ $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

Selbst dann ist der Verlustfaktor

$$v = \frac{P_V}{P} = \frac{3R_L I^2}{3U / \sqrt{3} I} = \sqrt{3} R_L \frac{I}{U} \quad (18.18)$$

besser als beim Einphasensystem. Die dann übertragene Scheinleistung ist

$$S = \sqrt{3} UI \quad (18.19)$$

D.h. bei gleichen Leiterströmen und gleichen Außenleiterspannungen überträgt ein Drei-Leiter-Drehstromkabel mit 1,5-fachem Materialeinsatz (3 statt 2 Leiter) und 1,5-fach höheren Verlusten das 1,73-fache der Leistung einer Doppelleitung. Das ist eine Erhöhung der Ausbeute um 15%.

18.2 Komplexe Zeiger der Sternschaltung

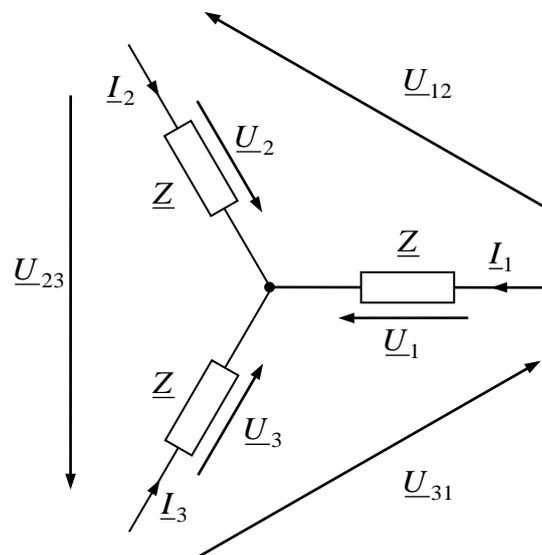


Bild 18-3: Sternschaltung aus jeweils gleichen Impedanzen \underline{Z} :

Strangspannungen: \underline{U}_i

Strangströme: \underline{I}_i

Außenleiterspannungen oder verkettete Spannungen: $\underline{U}_{ij} = \underline{U}_i - \underline{U}_j$

Bei der Sternschaltung sind Außenleiterströme und Strangströme gleich.

Annahme eines *symmetrischen* Drehspannungssystems, d. h. die Strangspannungen seien sinusförmig, von gleicher Amplitude und Frequenz sowie ihrer Phasenlage um jeweils 120° versetzt. Beschreibung durch komplexe Zeiger, Momentanwerte der Strangspannungen:

$$u_1(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_1 e^{j\omega t}) \quad (18.20)$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_u) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_2 e^{j\omega t}) \quad (18.21)$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_u) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_3 e^{j\omega t}) \quad (18.22)$$

Mit dem 120° -Drehoperator

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (18.23)$$

folgt

$$\underline{U}_2 = \underline{a}^{-1} \underline{U}_1 \quad (18.24)$$

$$\underline{U}_3 = \underline{a} \underline{U}_1 \quad (18.25)$$

Eigenschaften des Drehoperators:

$$\underline{a}^{-1} = \underline{a}^2, \quad \underline{a}^{-2} = \underline{a}, \quad \underline{a}^3 = 1, \quad \underline{a}^* = \underline{a}^{-1} \quad (18.26)$$

Verkettete Spannungen:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = (1 - \underline{a}^{-1}) \underline{U}_1 = \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) \underline{U}_1 = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} \underline{U}_1 = -j\sqrt{3} \underline{a} \underline{U}_1 \quad (18.27)$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = (\underline{a}^{-1} - \underline{a}) \underline{U}_1 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) \underline{U}_1 = \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{2}} \underline{U}_1 = -j\sqrt{3} \underline{U}_1 \quad (18.28)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = (\underline{a} - 1) \underline{U}_1 = \left(e^{+j\frac{2\pi}{3}} - 1\right) \underline{U}_1 = \sqrt{3} e^{j\frac{5\pi}{6}} \underline{U}_1 = -j\sqrt{3} \underline{a}^{-1} \underline{U}_1 \quad (18.29)$$

Die Effektivwerte der verketteten Spannungen sind um $\sqrt{3}$ größer als diejenigen der Strangspannungen.

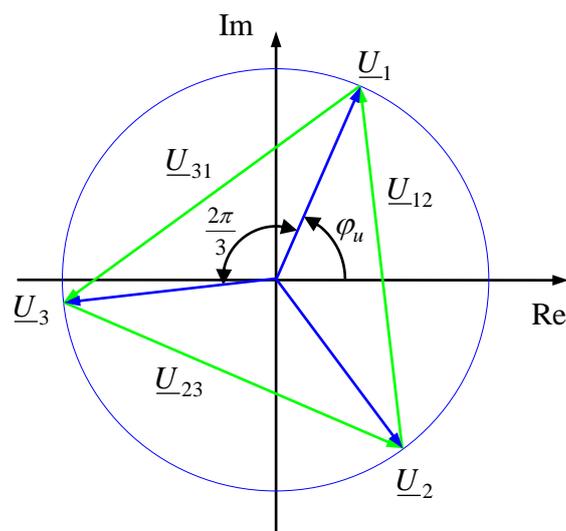


Bild 18-4: Komplexe Zeiger von Strang- und Außenleiterspannungen

Strangströme:

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}} \quad (18.30)$$

Das symmetrische System der drei Spannungszeiger bzw. der drei Stromzeiger kann stellvertretend durch einen einzigen Strangspannungszeiger $\underline{U} = \underline{U}_1$ und einen einzigen Stromzeiger $\underline{I} = \underline{I}_1$ beschrieben werden:

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad (18.31)$$

Zur Leistung tragen alle drei Stränge bei, komplexer Zeiger der Scheinleistung:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 \\ &= \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* \\ &= \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{a}^{-1} \underline{U}_1 \underline{a} \underline{I}_1^* + \underline{a}^{-2} \underline{U}_1 \underline{a}^2 \underline{I}_1^* \\ &= 3 \underline{U} \underline{I}^* = 3 \underline{Z} \underline{I}^2 \end{aligned} \quad (18.32)$$

Wirk-, Blind- und Scheinleistung:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) \quad (18.33)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) \quad (18.34)$$

$$S = |\underline{S}| \quad (18.35)$$

Momentanleistung:

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) + u_3(t)i_3(t) = P = \text{const.} \quad (18.36)$$

In einem symmetrischen Drehstromsystem ist die Momentanleistung gleich der Wirkleistung, sie pulsiert anders als im Einphasensystem nicht.

18.3 Komplexe Zeiger der Dreieckschaltung

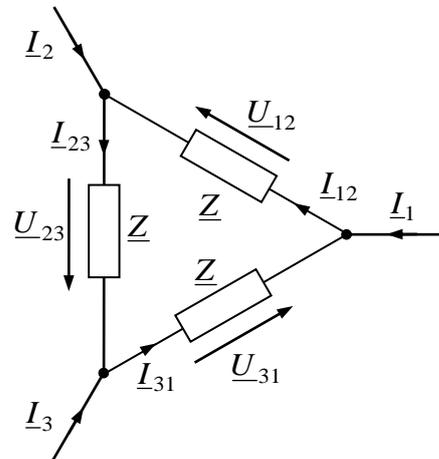


Bild 18-5: Dreieckschaltung aus jeweils gleichen Impedanzen:

Strangströme: \underline{I}_{ij}

Außenleiterströme: $\underline{I}_i = \underline{I}_{ij} - \underline{I}_{ki}$ (i, j, k zyklisch)

Strangspannungen: \underline{U}_{ij}

Bei der Dreieckschaltung sind Außenleiterspannungen und Strangspannungen gleich.

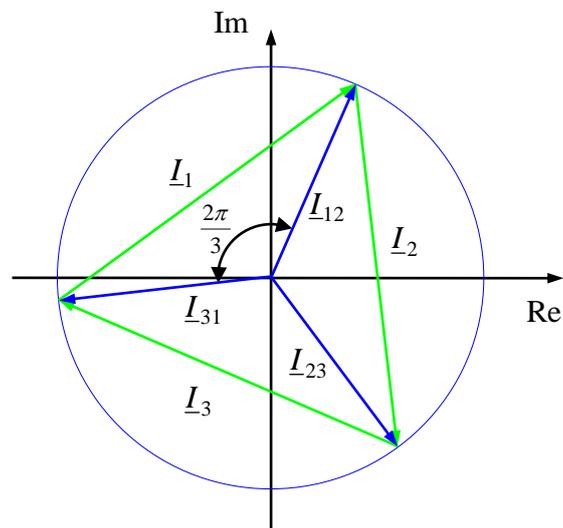


Bild 18-6: Komplexe Zeiger von Strang- und Außenleiterströmen

Die Effektivwerte der Außenleiterströme sind um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die der Strangströme.

18.4 Umrechnung zwischen Stern- und Dreieckschaltung

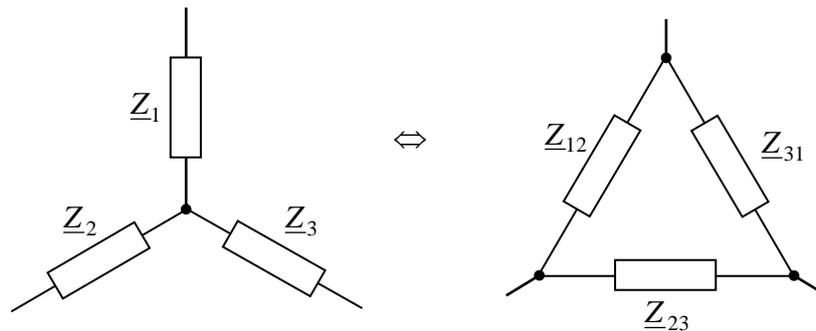


Bild 18-7: Umrechnung zwischen Stern- und Dreieckschaltung

Ausgangspunkt für die Umrechnung ist der Innenwiderstand zwischen jeweils zwei Klemmen, wobei die dritte offen bleibt. Einerseits wird dann dieser Innenwiderstand durch die Elemente der Stern- und andererseits durch diejenigen der Reihenschaltung ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{12} \parallel (\underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{23}) = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_{23} \parallel (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{31}) = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{31} \parallel (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12}) = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \end{aligned} \quad (18.37)$$

Wenn zwei dieser Gleichungen addiert und die dritte subtrahiert werden, ergeben sich die im Folgenden links stehenden Ausdrücke.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ \underline{Z}_3 &= \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \end{aligned} \quad (18.38)$$

Diese stehenden Gleichungen rechnen also die in einer Dreieckschaltung gegebenen Impedanzen in äquivalente Impedanzen einer Sternschaltung um.

Diese Gleichungen könnten nun nach den Impedanzen der Dreieckschaltung aufgelöst werden, um die Umkehrbeziehungen zu erhalten. Ein wenig übersichtlicher ist es, erneut von einer Klemmenbetrachtung auszugehen: Jetzt sollen je zwei der Klemmen untereinander

kurzgeschlossen werden und deren Admittanz zur dritten Klemme jeweils in Dreieck- und Sternschaltung untersucht werden. Das ergibt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{12} &= \frac{1}{\frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_2}} = \frac{\underline{Y}_3 \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{23} &= \frac{1}{\frac{1}{\underline{Y}_2} + \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3}} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{31} &= \frac{1}{\frac{1}{\underline{Y}_3} + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_1}} = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 + \underline{Y}_3 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}\end{aligned}\quad (18.39)$$

Das ist aber wieder die gleiche Gleichungsstruktur wie schon im System (18.37), weshalb sich auch wieder eine Lösung nach der Struktur von (18.38) ergibt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{23} &= \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{Y}_{31} &= \frac{\underline{Y}_3 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{Y}_{12} &= \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}\end{aligned}\quad (18.40)$$

Für den Spezialfall jeweils gleicher Impedanzen eines symmetrischen Systems mit

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_Y \quad (18.41)$$

und

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_\Delta \quad (18.42)$$

ergibt sich

$$\underline{Z}_Y = \frac{1}{3} \underline{Z}_\Delta \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}_\Delta = 3 \underline{Z}_Y \quad (18.43)$$

bzw. für die zugehörigen Admittanzen:

$$\underline{Y}_Y = 3 \underline{Y}_\Delta \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y}_\Delta = \frac{1}{3} \underline{Y}_Y \quad (18.44)$$

A Griechische Buchstaben

Die Kenntnis der griechischen Buchstaben ist für Ingenieure zwingend. Peinlich wird es, wenn zwar die Schriftzeichen also solche beherrscht, aber in der mündlichen Diskussion die Symbole nicht korrekt benannt werden können.

Majuskel	Minuskel	Name
A*	α	Alpha
B*	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E*	ε	Epsilon
Z*	ζ	Zeta
H*	η	Eta
Θ	θ, ϑ^{**}	Theta
I*	ι	Iota
K*	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M*	μ	My
N*	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O*	\omicron^*	Omikron
Π	π	Pi
P*	ρ	Rho
Σ	σ, ς^*	Sigma
T*	τ	Tau
Y*	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ^{**}	Phi
X*	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

* Wegen Übereinstimmung mit lateinischen Typen werden diese griechischen Buchstaben nicht als mathematische Symbole verwendet, das Schluss-Sigma ς wird ebenfalls nicht benutzt.

** Die typografische Darstellung dieser Minuskeln variiert je nach Schriftsatz.

B Literatur

Folgende Lehrbücher stehen in größerer Zahl in der Universitätsbibliothek zur Verfügung:

M. Albach:

Grundlagen der Elektrotechnik 1. Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen
Pearson-Studium, 2004

M. Albach:

Grundlagen der Elektrotechnik 2. Periodische und nicht periodische Signalformen
Pearson-Studium, 2005

L.-P. Schmidt, G. Schaller, S. Martius:

Grundlagen der Elektrotechnik 3. Netzwerke
Pearson-Studium, 2006

Weitere Lehrbücher, zum großen Teil ebenfalls im Bestand der Universitätsbibliothek:

A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter:

Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 2
Hanser-Verlag, Universitätsbibliothek: XWA1623

R. Kories, H. Schmidt-Walter:

Taschenbuch der Elektrotechnik. Grundlagen und Elektronik
Harri Deutsch-Verlag, Universitätsbibliothek: XVP3171

E. Hering, K. Bressler, J. Gutekunst:

Elektronik für Ingenieure
Springer-Verlag, Universitätsbibliothek: YEA2840

W. Ameling:

Grundlagen der Elektrotechnik, Band 1 u. 2
Bertelsmann-Verlag, Universitätsbibliothek: XVP1315

R. Unbehauen:

Grundlagen der Elektrotechnik. Band 2: Einschwingvorgänge, nichtlineare Netzwerke, theoretische Erweiterungen
Springer-Verlag, Universitätsbibliothek: YCF2075

R. Pregla:

Grundlagen der Elektrotechnik, Band 2
Hüthig-Verlag, Universitätsbibliothek: XWA1518

H. Fricke, H. Frohne, P. Vaske:

Grundlagen der Elektrotechnik
Teubner-Verlag, Universitätsbibliothek: XVP2808

A. v. Weiss, M. Krause:

Allgemeine Elektrotechnik. Grundlagen der Gleich- und Wechselstromlehre
Vieweg-Verlag, Universitätsbibliothek: XVP2060(10)

H. Clausert, G. Wiesemann:

Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 2. Wechselströme, Leitungen, Anwendungen der Laplace- und der Z-Transformation
Verlag Berliner Union, Universitätsbibliothek: XVP2167(6)

N. Mohan, T. M. Undeland, W. P. William:

Power Electronics. Converters, Applications and Design
Wiley-Verlag, Universitätsbibliothek: YAA1296

D. C. Giancoli:

Physik

Pearson-Studium, 2006

C Kleines deutsch-englisches Glossar

Englisch als Fachsprache ist heute nicht mehr zu umgehen. Daher sollten sich angehende Ingenieurinnen auch mit den englischen Fachtermini vertraut machen. Allgemeine Wörterbücher führen manchmal in die Irre.

Admittanz	admittance
Anker	armature
Anschluss	terminal
Arbeit	work
Bandbreite	bandwidth
Blindleistung	reactive power
Bodediagramm	Bode plot
Dämpfung	damping
Drehmoment	torque
Drehzahl	rotational speed, revolution speed
Dreieckschaltung	delta connection
Drossel	inductor, choke
Durchflutung	magnetomotive force (MMF)
Effektivwert	root mean square (RMS) value
elektrische Feldstärke	electric field strength
Elektromotorische Kraft	electromotive force (EMF)
Elektrotechnik	electrical engineering
Energie	energy
Erregung	excitation
Feld	field
Formfaktor	waveform factor
fremderregt	separately excited
Frequenz	frequency
Gleichspannung	direct voltage, DC voltage
Gleichstrom	direct current, DC
Gleichstrommotor	DC motor
Gleichstromsteller	DC-DC converter
Güte	quality factor
Hauptinduktivität	mutual inductance
Hochsetzsteller	boost converter
Impedanz	impedance
Induktivität	inductance
induzierte Spannung	induced voltage
Kapazität	capacitance
Knoten	node
Kondensator	capacitor, condensor
Kraft	force
Kurzschluss	short circuit
Kurzschlussstrom	short-circuit current
Ladung	charge
Last	load
Leerlaufspannung	open-circuit voltage, off-load voltage

Leistung	power
Leistungsfaktor	power factor
Leitwert	conductance, conductivity
magnetische Feldstärke	magnetic field strength
magnetische Flussdichte	magnetic flux density
magnetische Spannung, Durchflutung	magnetomotive force (MMF)
magnetischer Fluss	magnetic flux
Magnetisierungsstrom	magnetizing current
Masche	mesh
Mittelwert	mean, average value
Netzwerk	network
Ortskurve	frequency response locus
Parallelschaltung	parallel connection
Quelle	source
Reihenschaltung	series connection
Resonanzfrequenz	resonant frequency
Schaltkreis	circuit
Scheinleistung	apparent power
Scheitelfaktor	crest factor
Spannung	voltage
Spannungsquelle	voltage source
Spule	coil
Sternschaltung	star connection, Y-connection, wye connection
Streuinduktivität	leakage inductance
Strom	current
Stromquelle	current source
Tiefsetzsteller	buck converter
Transformator	transformer
Übertragungsfunktion	transfer function
Wechselspannung	alternating voltage, AC voltage
Wechselstrom	alternating current, AC
Wicklung	winding
Widerstand	resistance, resistor
Windung	turn
Winkelgeschwindigkeit	angular velocity
Wirkleistung	active power
Wirkungsgrad	efficiency
Zeitkonstante	time constant