

# **Geregelte Drehstromantriebe**

# **Controlled Three-Phase Drives**

**Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker**

Skript zur Vorlesung - Lecture Notes

2018-11-07

Universität Paderborn  
Fachgebiet Leistungselektronik  
und Elektrische Antriebstechnik

Paderborn University  
Power Electronics and  
Electrical Drives

Dieses Skriptum ist vornehmlich für die Studenten der Universität Paderborn als vorlesungsbegleitende Unterlage gedacht. Über das Internet steht es auch anderen Interessierten zur Verfügung. In jedem Fall ist nur die private, individuelle, nicht-kommerzielle Nutzung gestattet. Insbesondere ist nicht gestattet, das Skript oder Teile daraus weiter zu verbreiten, zu vervielfältigen oder in anderen Zusammenhängen zu verwenden. Ausnahmen bedürfen der Genehmigung des Verfassers. Der Verfasser ist für Hinweise auf Fehler oder Unzulänglichkeiten dankbar.

These lecture notes are primarily intended to be an accompanying lecture document for students of the University of Paderborn. It is also available for other interested readers via internet. In any case, only the private, individual, non-commercial usage is permitted. Publishing, spreading, duplicating or using these notes or part of them in another but the above mentioned context is not permitted. Exceptions always require the explicit approval of the author. The author appreciates hints, related to mistakes or inadequacies.

## Vorwort

Die Veranstaltung *Geregelte Drehstromantriebe* widmet sich dem System des elektrischen Antriebs. Der elektrische *Antrieb* besteht nicht nur aus der elektrischen Maschine, dem Motor sondern nach modernem Verständnis außerdem aus Stromrichter, Sensoren, Regelung und Leittechnik.

Nach einer Übersicht und Begriffsbestimmungen beginnt der Zugang zu dieser Thematik zunächst mit der Analyse einer elektrischen Maschine. Dies soll und kann in diesem Kontext aber nicht in der Tiefe erfolgen, wie es in einer Lehrveranstaltung zu elektrischen Maschinen der Fall wäre. Der Permanentmagnet-Synchronmotor wird als Einstieg gewählt, weil dieser wegen seiner hohen Drehmoment- und Leistungsdichte viele Anwendungsbereiche erobert hat und mittlerweile große Bedeutung besitzt. Außerdem lässt sich das wichtige Prinzip der *flussorientierten Regelung* an diesem Motor besonders übersichtlich entwickeln. Später wird dies auf den Asynchronmotor übertragen und erweitert. Neben den Regelungsprinzipien werden in Folge die Stromrichtertechnik, die Pulsweitenmodulation und die digitale Implementierung der Regelung diskutiert.

Obwohl sich dieser Kurs auf die Beispiele des Permanentmagnet-Synchronmotors und des Asynchronmotors beschränkt, sollten die Teilnehmer dann in der Lage sein, die dargestellten Prinzipien auch auf andere Antriebssysteme wie z. B. mit dem fremderregten Synchronmotor zu übertragen, welcher aus Gründen des Stoffumfangs in dieser Veranstaltung nicht behandelt wird.

Paderborn, im März 2009  
Joachim Böcker

## Preface

The course *Controlled Three-Phase Drives* is dedicated to the electric drive system. The electric drive does not only consist of the electric machine, but according to modern understanding also of power electronics, sensors and multi-level controls units.

After an overview and definitions, access to this issue is given by an analysis of the electrical machine. The permanent magnet synchronous motor is chosen as an entry into this topic. Due to its high torque and power density this motor type has gained great popularity and represents the state-of-the-art motor in a vast abundance of applications nowadays. However, in this context the machine analysis shall not and cannot be as profound as in a course focused only on electrical machines and their respective characteristics. Moreover, the important flux-oriented control scheme can be easily and clearly explained on the basis of this motor. Later it will be applied and extended also to the induction machine. Apart from the control principles, the power electronics, the pulse width modulation and the digital control implementation will be discussed, in consequence.

Even though this course is limited to the examples of the permanent magnet synchronous motor and the induction motor, the course participants shall be enabled to transfer the presented principles to other drive systems, such as the separately excited synchronous motor, which cannot be dealt within this course due to the limited amount of time.

# Inhalt

## Table of Content

<b>1</b>	<b>Der elektrische Antrieb The Electrical Drive</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Permanentmagnet-Synchronmotor Permanent Magnet Synchronous Motor</b>	<b>9</b>
2.1	Modellierung eines Motors mit orthogonalen Wicklungen Modeling of a motor with orthogonal windings	9
2.2	Das mitdrehende rotorfeste Koordinatensystem The rotating rotor-fixed coordinate system	17
2.3	Der dreisträngige Motor The Three-Phase Motor	21
2.4	Transformationen von dreisträngigen in orthogonale Komponenten Transformation of three-phase components into orthogonal components	23
2.5	Abbildung des dreisträngigen auf das orthogonale zweisträngige Modell Mapping the Three-Phase Model to the Orthogonal Two-Phase Model	27
2.6	Messtechnische Bestimmung des Ständerwiderstands und der Ständerinduktivität Determining Stator Resistance and Stator Inductance via Measurements	30
2.7	Mehrpole Motoren Multi-Pole Motors	30
2.8	Wicklungsaufbau Winding Configuration	34
2.9	Zusammenhang zwischen Motorgeometrie und Drehmomentausbeute Relation between motor geometry and torque yield	53
2.10	Stationäres Betriebsverhalten Steady-State Operational Behavior	57
<b>3</b>	<b>Umrichter Inverter</b>	<b>72</b>
<b>4</b>	<b>Pulsweitenmodulation Pulse Width Modulation</b>	<b>80</b>
4.1	Einsträngige Pulsweitenmodulation Single-Phase Pulse Width Modulation	80
4.2	Dreisträngige Pulsweitenmodulation Three-Phase Pulse Width Modulation	84
4.3	Vektormodulation Space Vector Modulation	92
4.4	Regular Sampling Regular Sampling	103
4.5	Totzeit des digitalen Regelkreises Dead Time in Digital Control Loops	112
4.6	Spannungsfehler aufgrund von Wechselsperrzeiten Voltage Errors Due to Interlocking Times	114
4.7	Dynamische Mittelwertmodellierung des pulsweitenmodulierten Umrichters Dynamic State-Space Averaging of the Pulse-Width Modulated Inverter	121
4.8	Oberschwingungen Harmonics	123
4.8.1	Oberschwingungen bei konstantem Sollwert Harmonics at Constant Reference Values	123
4.8.2	Oberschwingungen bei sinusförmigem Sollwert Harmonics at Sinusoidal Reference Values	127
<b>5</b>	<b>Regelung des Permanentmagnet-Synchronmotors in mitdrehenden Koordinaten Control of Permanent Magnet Synchronous Motor in Rotating Coordinates</b>	<b>131</b>

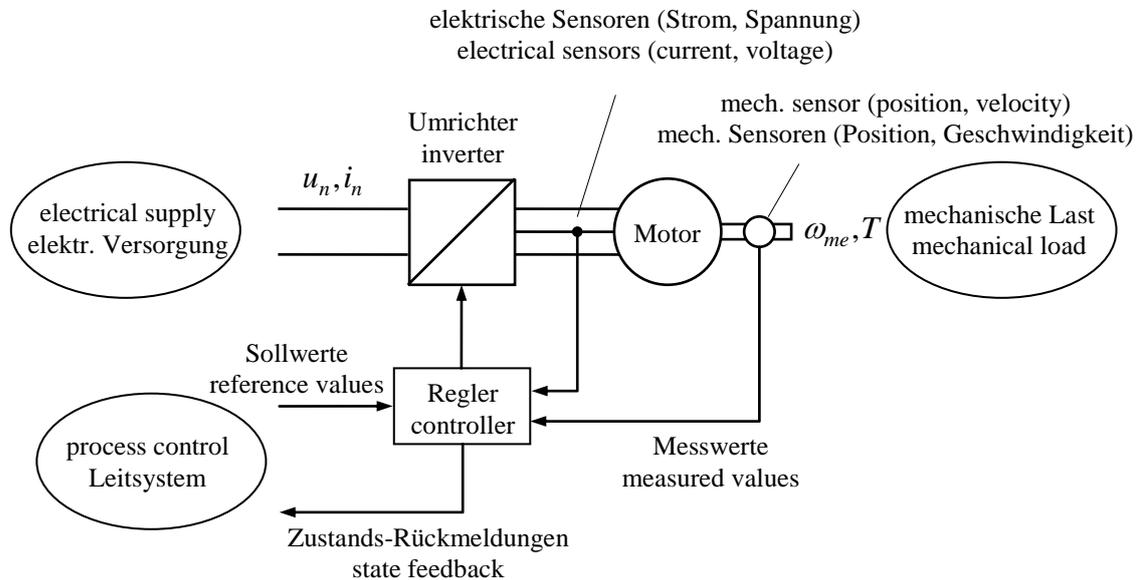
---

5.1	Stromregelung Current Control	131
5.2	Zeitdiskrete Reglerrealisierung Discrete-Time Controller Realization	133
5.3	Gesamtstruktur der Regelung Overall Control Structure	136
<b>6</b>	<b>Direkte Drehmoment-Regelung (DTC) Direct Torque Control (DTC)</b>	<b>137</b>
6.1	Regelungskonzept Control Concept	137
6.2	Fluss- und Drehmomentbeobachter Flux and Torque Observers	144
6.3	Vergleich zwischen DTC und FOC Comparison between DTC and FOC	150
<b>7</b>	<b>Schutzmaßnahmen Protection Measures</b>	<b>151</b>
7.1	Pulssperre oder Motorkurzschluss Pulse Blocking or Motor Short-Circuiting	152
7.2	Stationäre Kurzschlussströme Steady State Short-Circuit Currents	154
7.3	Transiente Kurzschlussströme Transient Short-Circuit Currents	156
<b>8</b>	<b>Asynchronmotor Induction Motor</b>	<b>160</b>
8.1	Modellierung des Asynchronmotors mit orthogonalen Wicklungen Modeling of the Induction Motor with Orthogonal Windings	160
8.2	Drehmomentbildung Torque Generation	169
8.3	Flussorientierte Koordinatensysteme Flux-Oriented Coordinate System	171
8.4	Dynamische Modellierung in rotorflussorientierten Koordinaten Dynamic Modeling in Rotor Flux-Oriented Coordinates	173
8.5	Transformation der Streuinduktivitäten Transformation of Leakage Inductances	179
8.5.1	Modell mit ständerseitig konzentrierter Streuung Model with Leakage Inductance Concentrated on Stator Side	180
8.5.2	Modell mit rotorseitig konzentrierter Streuung Model with Leakage Inductance Concentrated on Rotor Side	182
8.6	Berücksichtigung des realen Magnetisierungsverhaltens Consideration of Real Magnetization Behavior	184
8.7	Stationäres Betriebsverhalten Steady-State Operating Characteristics	186
8.7.1	Spannungsgleichungen und Zeigerdiagramm Voltage Equations and Vector Diagrams	186
8.7.2	Stationäres Ersatzschaltbild Steady-State Equivalent Circuit Diagram	189
8.7.3	Drehmoment bei Speisung mit konstanter Spannung und konstanter Frequenz Torque at Constant Voltage and Frequency Supply	190
8.7.4	Verlustminimaler Betrieb Operation with Minimum Losses	193
8.7.5	Betrieb an der Stromgrenze Operating at Current Limits	197
8.7.6	Betrieb an der Spannungsgrenze, Flussschwächung Operation at the Voltage Limit, Flux Weakening	200
8.8	Regelungsstruktur Control structure	205
<b>9</b>	<b>Zweidimensionale Vektoren vs. komplexe Zeiger Two-Dimensional Vectors vs. and Complex Numbers</b>	<b>206</b>
<b>10</b>	<b>Fourier- und Laplace-Transformation von zweidimensionalen Zeitfunktionen Fourier and Laplace Transforms of Two-Dimensional Time-Domain Functions</b>	<b>207</b>

---

<b>11 Deutsch-englisches Glossar German-English Glossary</b>	<b>210</b>
<b>12 Literatur Bibliography</b>	<b>213</b>

# 1 Der elektrische Antrieb The Electrical Drive



**Fig. 1-1:**

Grundstruktur des elektrischen Antriebs

Basic structure of electrical drive system

Der moderne elektrische Antrieb besteht aus folgenden *Grundkomponenten*:

- Motor als elektromechanischer Energiewandler
- Umrichter (Leistungselektronik) zur Umformung der elektrischen Energie, der Umrichter ist das Stellglied der Steuerung und Regelung
- Antriebs-Steuerung und Regelung
- Messwandler und Sensoren
- ggf. Transformator \*
- ggf. Getriebe \*

\* in Fig. 1-1 nicht dargestellt.

*Systemgrenzen:*

Die genannten Komponenten bilden den Kern des elektrischen Antriebssystems. Je nach Aufgabenstellung und Systemabgrenzung können zum Antriebssystem gerechnet werden:

The modern electric drive consists of the following *basic components*:

- Motor as electromechanical energy converter
- Inverter (power electronics) for converting the electrical energy, the inverter is the actuator of the control loop
- Drive controller
- Transducers and sensors
- if needed, transformer \*
- if needed, gear \*

\* not depicted in Fig. 1-1

*System boundaries:*

The mentioned components represent the core of the electrical drive system. Depending on the assigned task and system boundaries the following items can be allocated to the drive system:

- Komponenten der elektrischen Energieversorgung, z. B. elektrische Filter, Transformatoren, ggf. wird auch das stationäre und dynamische Verhalten der Energieversorgung (dies kann sowohl eine Batterie sein wie auch ein öffentliches Energieversorgungsnetz) einbezogen
- Komponenten des mechanischen Antriebsstrangs und der Last wie z. B. Getriebe, Berücksichtigung der Trägheiten und Steifigkeiten, detailliertes Verhalten der angetriebenen Last
- Komponenten der übergeordneten Leittechnik zur Realisierung komplexer antriebstechnischer Aufgaben
- Electric power supply, e.g. electric filters, transformers, if necessary, stationary or dynamic behavior of the power supply unit (battery, power grid) can also be included.
- Mechanical drive train, such as gear box, consideration of inertia, stiffness, accurate behavior of the driven mechanical load
- High-Level / Process control units for the realization of complex electrical drive tasks

### Äußere Schnittstellen des Antriebs

#### - im Leistungsfluss:

- zur elektrischen Energieversorgung (Gleich-, Wechsel- oder Drehspannung)
- zur mechanischen Last

#### - im Informationsfluss:

- Sollwerte und ggf. weitere Informationen von der übergeordneten Leittechnik oder vom Bediener
- Rückmeldungen über innere Zustände oder Messwerte zur übergeordneten Leittechnik

Der Antrieb ist ein *steuerbarer* elektromechanischer Energiewandler. Die funktionelle Integration von Leistungs- und Informationsfluss charakterisiert den elektrischen Antrieb als mechatronisches System.

#### Leistungsfluss:

Bei vielen antriebstechnischen Aufgabenstellungen wird nur ein unidirektionaler Leistungsfluss (von der Energieversorgung zur Last) benötigt, oft ist der Leistungsfluss aber auch bidirektional, z.B. zur Rekuperation von Bremsleistung, oder die wesentliche Betriebsart ist die Gewinnung elektrischer Energie aus mechanischer.

Die Struktur derartiger moderner elektrischer

### External drive interfaces

#### - Within the power flow:

- to the electrical power supply (DC, AC, 3-phase voltage)
- to the mechanical load

#### - Within the information flow:

- Reference values and, if necessary, information from the superior high-level / process control or from the user.
- Feedback of internal states or measured values to high-level control

The electric drive can be described as a *controllable* electromechanical energy transducer. Moreover, it can be characterized as a mechatronic system by its functional integration of power and information flow.

#### Power flow:

Many drive applications rely only on a unidirectional power flow (from the power supply to the load). However, if for example braking power shall be recuperated (operating mode: conversion of mechanical into electrical energy) a bidirectional power flow needs to be realized.

The structures for such kind of modern ways

Energieerzeugung unterscheidet sich häufig nicht von der antriebstechnischen Grundstruktur. Im Gegensatz dazu werden Generatoren zur elektrischen Energieerzeugung z. B. in konventionellen Wasser- und Wärmekraftwerken ohne die Zwischenstufe der elektrischen Umformung direkt am Netz betrieben. Die notwendige Steuerung und Regelung des Systems wird nicht elektrisch, sondern durch die Regulierung der zugeführten mechanischen Leistung (Schaufelstellung der Turbine, Drosselung durch Ventile usw.) bewerkstelligt.

#### Beispiele:

- unidirektional elektrisch → mechanisch:  
Pumpen, Lüfter
- unidirektional mechanisch → elektrisch:  
Generatoren (Windkraft, Wasserkraft, Dampfturbinen)
- bidirektional elektrisch ↔ mechanisch:  
Traktionsantriebe für Bahnen, Antriebe in Walzstraßen, Papiermaschinen

#### Antriebstechnische Grundaufgaben:

- Einstellung eines Drehmoments
- Einstellung einer Drehzahl
- Einstellung einer Position

Meistens werden solche Aufgaben durch kaskadierte Strukturen gelöst: Die Einstellung einer Position bedient sich einer unterlagerten Drehzahlregelung, diese wiederum einer unterlagerten Drehmomentregelung.

Neben diesen drei Grundaufgaben gibt es zahlreiche komplexe antriebstechnische Aufgabenstellungen, die sich nicht eindeutig einer der Grundaufgaben zuordnen lassen, sondern Mischformen darstellen wie beim Aufzug: Positionsregelung beim Halten, Geschwindigkeitsregelung während der Fahrt.

of electrical energy generation often do not vary from the basic structure of an electrical drive system. In contrast, generators for electrical energy supply purposes, as e.g. employed in conventional water- and thermal power plants, are connected directly to the grid without an intermediate electrical conversion stage. The necessary system control is not realized in an electrical way, but by controlling the applied mechanical power (impeller position of the turbine, throttle valve, etc.).

#### Examples:

- unidirectional electrical → mechanical:  
pumps, fans
- unidirectional mechanical → electrical:  
generators (wind power, water power, steam turbine)
- bidirectional electrical ↔ mechanical:  
traction drives for railways, drives in rolling lines, paper making machines

#### Fundamental drive tasks:

- Torque control
- Velocity control
- Position control

Mostly, those tasks are realized by using cascaded control structures: The position control relies on a subordinate velocity control, which in turn relies on a subordinate torque control.

Apart from these three fundamental tasks, there are numerous complex drive related tasks, which cannot be exactly allocated to one of the fundamental tasks, but rather represent combinations of these tasks, as for example in an elevator: positions control when stopping, velocity control during normal operation.

## 2 Permanentmagnet-Synchronmotor Permanent Magnet Synchronous Motor

Der permanent erregte Synchronmotor oder Permanentmagnet-Synchronmotor (PMSM) ist neben dem Asynchronmotor ein sehr häufig anzutreffender elektrischer Motor. Gegenüber diesem ist der PMSM bei gleicher Bemessungsleistung von deutlich kleiner Baugröße und Masse und weist in den meisten Betriebspunkten einen höheren Wirkungsgrad auf. Wegen des Permanentmagnetmaterial liegen die Kosten allerdings höher als beim Asynchronmotor.

Der PMSM findet sich in vielen Industrieantrieben, z.B. als Achsantrieb für Bearbeitungsmaschinen, auch als Antrieb für Pumpen und Lüfter. Er ist außerdem der favorisierte Motor für elektrische und hybridelektrischen Fahrzeugantriebe.

Unter den Drehstrommotoren sind das Konstruktions- und das Wirkprinzip des PMSM relativ einfach. Daher soll mit diesem Motor begonnen werden.

The permanent magnet synchronous motor (PMSM) is besides the induction motor a very common motor type. In comparison with the induction motor, the PMSM shows at the same power rating a considerably smaller volume and weight and comes with a higher efficiency, at least in most of the operation point. Because of the permanent magnet material, however, the costs are higher than with an induction motor.

The PMSM is applied in many industrial drives, e.g. as axle drive in processing machines, also as a drive for pumps and fans. It is also the preferred motor for electric and hybrid-electric vehicle drives.

Among other three-phase motors, the construction and action principles are relatively simple. That is why we start with this motor type.

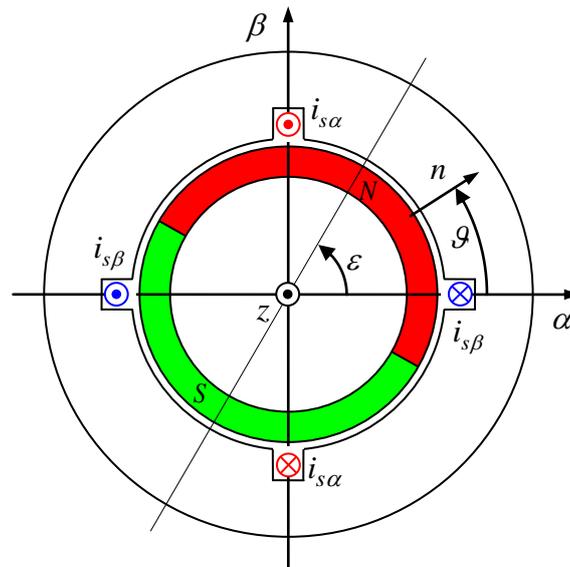
### 2.1 Modellierung eines Motors mit orthogonalen Wicklungen Modeling of a motor with orthogonal windings

Obwohl das Ziel der Drehstrom-PMSM ist, starten wir hier mit einem Zwei-Wicklungs-Motor mit den Wicklungen  $\alpha$  und  $\beta$ , wobei wir annehmen, dass diese senkrecht zueinander angeordnet sind.

Der Grund, mit dieser in der Praxis sehr selten anzutreffenden Wicklungsanordnung zu beginnen, ist, dass sich später zeigen wird, dass der dreisträngige Motor ohne große Schwierigkeiten mit diesem orthogonalen Modell beschrieben werden kann. Es wird also die Arbeitsgrundlage auch für den Drehstrom-PMSM sein.

Though the goal is the three-phase PMSM, we start here with a two-phase motor with the two windings  $\alpha$  and  $\beta$  which are assumed to be perpendicular to each other.

The reason to begin with this winding scheme which can be met in practise only very seldom is that we will learn later that even the three-phase motor can be represented by this orthogonal model. Thus, it will be the working basis also for the three-phase motor.

**Fig. 2-1:**

Querschnitt eines Permanentmagnet-Motor mit zwei orthogonalen Wicklungen

Cross section of a permanent magnet motor with two orthogonal windings

- $\epsilon$ : Drehwinkel des Rotors gegenüber dem Stator  
rotation angle of rotor against stator
- $\vartheta$ : statorfeste Umfangskoordinate  
stator-fixed circumferential angle coordinate

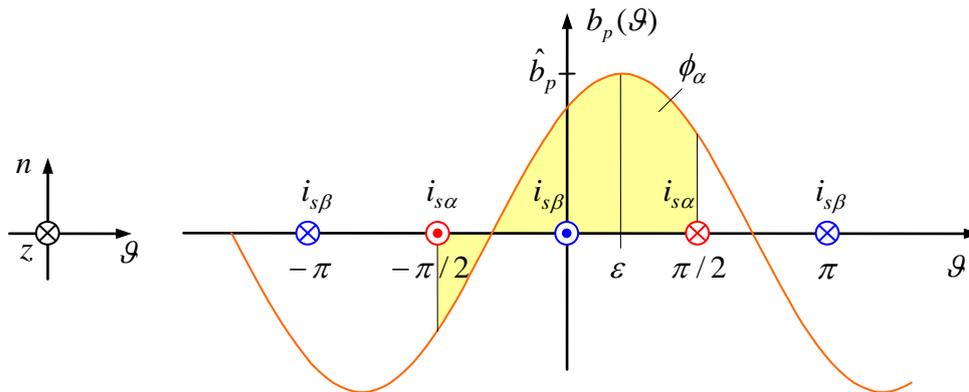
Bei der in Fig. 2-1 skizzierten Bauform ist der Rotor mit Permanent-Magneten bedeckt. Man bezeichnet dies als Oberflächen-Magnete. Daneben gibt es auch Bauformen mit in den Rotor eingelassenen Magneten, die sich im Wesentlichen ähnlich verhalten wie die mit Oberflächenmagneten.

With the construction shown in Fig. 2-1 the rotor is covered with permanent magnets which is called surface-mounted magnets. Besides, there exist constructions with magnets embedded in the rotor structure which behaves substantially similar as the surface-mounted construction.

Wir nehmen nun an, dass die vom Permanentmagneten verursachte Normalkomponente  $b_p$  der magnetischen Flussdichte abhängig vom Umfangswinkel  $\vartheta$  eine sinusförmige Verteilung besitzt. Hierbei muss die aktuelle Rotorstellung  $\epsilon$  als Verschiebung berücksichtigt werden:

Now, the normal component  $b_p$  of the magnetic flux density generated by the permanent magnet is assumed to be sinusoidally distributed depending on the circumferential angle  $\vartheta$ . The rotor position angle  $\epsilon$ , however, has to be considered as offset:

$$b_p(\vartheta) = \hat{b}_p \cos(\vartheta - \epsilon) \quad (2.1)$$



**Fig. 2-2:**

Verteilung der magnetischen Flussdichte über der Statorumfangskoordinate  $\vartheta$  sowie in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\varepsilon$

Distribution of magnetic flux density vs. stator circumferential angle  $\vartheta$  and depending on the rotor angle  $\varepsilon$

Vielfach ist es einfacher, statt der rotationssymmetrischen Anordnung eine Abwicklung wie in Fig. 2-2 zu skizzieren. In dieser Abwicklung soll aber die Händigkeit des Rechtssystem des ursprünglichen Schnittbildes Fig. 2-1 nicht verändert werden. Wird die  $\vartheta$ -Achse nach rechts, die Normalenrichtung  $n$  nach oben orientiert, muss die  $z$ -Achse, also die Motorlängsachse, in der Darstellungsebene der Abwicklung in die Papierebene hinein positiv gezählt werden. Daraus resultieren auch die Zählrichtungen der dargestellten Ströme. Geometrisch entspricht dieses Vorgehen einem Blick von hinten auf die Schnittskizze. Daher erscheinen die Zählrichtungen der Ströme gespiegelt.

Often it is convenient to use unwound representations as it is shown in Fig. 2-2. However, the chirality of the original right-handed system of Fig. 2-1 should not be changed in the unwound representation. If the  $\vartheta$ -axis is oriented to the right and the normal axis  $n$  is oriented upwards, then the  $z$ -axis, representing the longitudinal axis of the motor, has to be counted positively when going into the paper plane. As a result, the counting directions of the depicted currents are obtained. Geometrically speaking, this procedure corresponds to a view from the back onto the figure's sectional plane. In consequence, the counting directions of the currents appear to be mirrored.

Bestimmen wir nun den gesamten Fluss des Permanentmagneten, der durch die Leiter-schleife  $\alpha$  tritt (wir sprechen vom verketteten Fluss):

Let us determine now the total flux of the permanent magnet which penetrates the stator winding  $\alpha$  (we speak of the *flux linkage*):

$$\phi_{p\alpha} = rl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b_p(\vartheta) d\vartheta \quad (2.2)$$

Die beteiligten Parameter sind:

The included parameters are:

- $r$  effektiver Radius / effective radius
- $l$  magnetisch wirksame Länge des Motors / magnetically effective motor length

Es ergibt sich

It follows

$$\phi_{p\alpha} = rl\hat{b}_p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\mathcal{G} - \varepsilon) d\mathcal{G} = 2rl\hat{b}_p \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 2rl\hat{b}_p \cos \varepsilon = \phi_p \cos \varepsilon \quad (2.3)$$

mit

whereas

$$\phi_p = 2rl\hat{b}_p \quad (2.4)$$

Ähnliches ergibt sich für den Fluss durch die Wicklung  $\beta$

Similarly, the flux through the stator winding  $\beta$  will result as

$$\phi_{p\beta} = rl\hat{b}_p \int_0^{\pi} \cos(\mathcal{G} - \varepsilon) d\mathcal{G} = 2rl\hat{b}_p \sin \varepsilon = \phi_p \sin \varepsilon \quad (2.5)$$

Berücksichtigt man außerdem die Windungszahl  $N$  der Statorwicklungen, ergeben sich die mehrfach verketteten Flüsse

Taking into account also the number of turns  $N$  for each stator winding, the multiply linked fluxes result as

$$\psi_{p\alpha} = N\phi_{p\alpha} = \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.6)$$

$$\psi_{p\beta} = N\phi_{p\beta} = \psi_p \sin \varepsilon \quad (2.7)$$

mit

whereas

$$\psi_p = N\phi_p = 2Nrl\hat{b}_p \quad (2.8)$$

Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz werden folgende Spannungen in den Wicklungen induziert:

According to Faraday's law of induction, the induced voltages of the windings are:

$$e_\alpha = \dot{\psi}_{s\alpha} \quad (2.9)$$

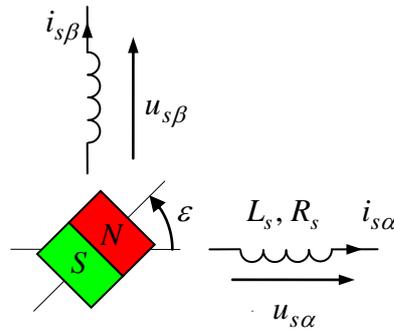
$$e_\beta = \dot{\psi}_{s\beta} \quad (2.10)$$

Die Flüsse  $\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta}$ , die die Leiterscheiben durchsetzen, setzen sich jeweils aus zwei Anteilen zusammen. Zum einen ist dies die bereits oben bestimmte vom Flussverkettung  $\psi_{p\alpha}$  bzw.  $\psi_{p\beta}$  mit den Permanentmagneten. Zum anderen ist das der über die Selbstinduktivität  $L_s$  der Wicklung vom Spulenstrom selbst hervorgerufenen Flussanteil:

Each of the fluxes  $\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta}$  which penetrate the conductor turns are composed of two portions. One is the flux linkage with the permanent magnets as already calculated above,  $\psi_{p\alpha}$  and  $\psi_{p\beta}$ , respectively. The other portion is generated by the winding current via the self-inductance  $L_s$ :

$$\psi_{s\alpha} = L_s i_{s\alpha} + \psi_{p\alpha} = L_s i_{s\alpha} + \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.11)$$

$$\psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + \psi_{p\beta} = L_s i_{s\beta} + \psi_p \sin \varepsilon \quad (2.12)$$



**Fig. 2-3:**

Vereinfachte Darstellung des  
Permanentmagnet-  
Synchronmotors

Simplified representation of the  
permanent magnet synchronous  
motor

Weiterhin ist noch der Innenwiderstand der Wicklungen zu berücksichtigen. Dies führt auf die Spannungsgleichungen

Furthermore, we shall as well consider the internal resistance of the windings, which leads to the following voltage equations

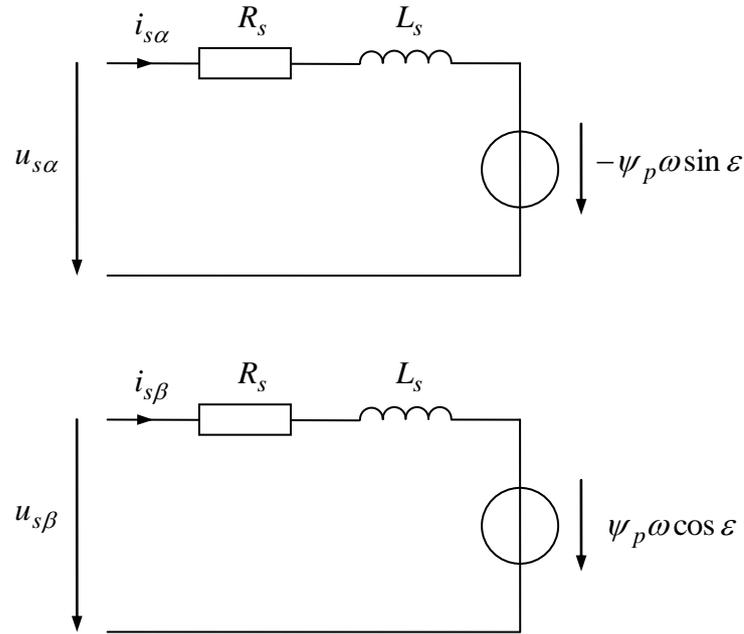
$$u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + e_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + \dot{\psi}_{s\alpha} \quad (2.13)$$

$$u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + e_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + \dot{\psi}_{s\beta} \quad (2.14)$$

$$u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + L_s \dot{i}_{s\alpha} + u_{i\alpha} = R_s i_{s\alpha} + L_s \dot{i}_{s\alpha} - \psi_p \omega \sin \varepsilon \quad (2.15)$$

$$u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + L_s \dot{i}_{s\beta} + u_{i\beta} = R_s i_{s\beta} + L_s \dot{i}_{s\beta} + \psi_p \omega \cos \varepsilon \quad (2.16)$$

$$\omega = \dot{\varepsilon} \quad (2.17)$$

**Fig. 2-4:**

Ersatzschaltbild des Permanentmagnet-Synchronmotors

Equivalent circuit diagram of a permanent magnet synchronous motor

Das *Drehmoment* des Motors kann mit Hilfe der Lorentzkraft-Formel bestimmt werden. Hier gehen wir einen alternativen Weg über die *Leistungsbilanz*. dazu multiplizieren wir die obigen Spannungsgleichungen mit den Strömen

The *torque* of the motor could be determined with the help of the Lorentz's force formula. However, we will go an alternative road using the *power balance*. To do so, the above voltage equations are multiplied with the currents:

$$u_{s\alpha} i_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha}^2 + L_s \dot{i}_{s\alpha} i_{s\alpha} - i_{s\alpha} \psi_p \omega \sin \varepsilon \quad (2.18)$$

$$u_{s\beta} i_{s\beta} = R_s i_{s\beta}^2 + L_s \dot{i}_{s\beta} i_{s\beta} + i_{s\beta} \psi_p \omega \cos \varepsilon \quad (2.19)$$

Addition und Identifikation der Terme

The electrical power is given by

$$P_{el} = P_V + \dot{E}_{mag} + P_{me} \quad (2.20)$$

mit

whereas

$$P_{el} = u_{s\alpha} i_{s\alpha} + u_{s\beta} i_{s\beta} \quad (2.21)$$

$$P_V = R_s i_{s\alpha}^2 + R_s i_{s\beta}^2 \quad (2.22)$$

$$P_{me} = \omega T = -i_{s\alpha} \psi_p \omega \sin \varepsilon + i_{s\beta} \psi_p \omega \cos \varepsilon \quad (2.23)$$

Im Ersatzschaltbild lässt sich die mechanische Leistung als die an den Ersatzspannungsquellen umgesetzte Leistung interpretieren.

In the equivalent circuit diagram, we can interpret the mechanical power as the power transmitted to or from the equivalent voltage sources.

Drehmoment:

The output torque can now be derived from the mechanical power as

$$T = -i_{s\alpha}\psi_p \sin \varepsilon + i_{s\beta}\psi_p \cos \varepsilon \quad (2.24)$$

Einführung der Vektorschreibweise:

Introduction of vector notation:

$$\mathbf{i}_s = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_p = \begin{bmatrix} \psi_{p\alpha} \\ \psi_{p\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_p \cos \varepsilon \\ \psi_p \sin \varepsilon \end{bmatrix} = \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

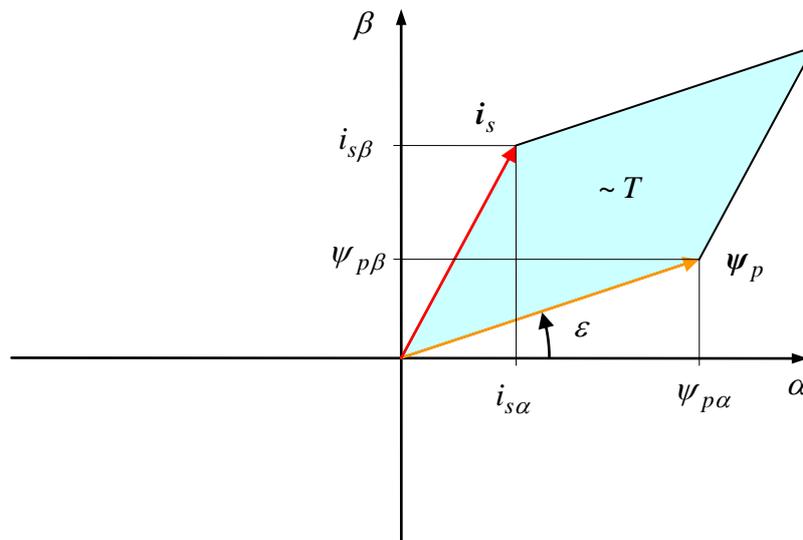
Damit folgt das Drehmoment zu:

Thus, the torque follows as

$$T = \psi_{p\alpha}i_{s\beta} - \psi_{p\beta}i_{s\alpha} = [\boldsymbol{\psi}_p, \mathbf{i}_s] = \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s \quad (2.25)$$

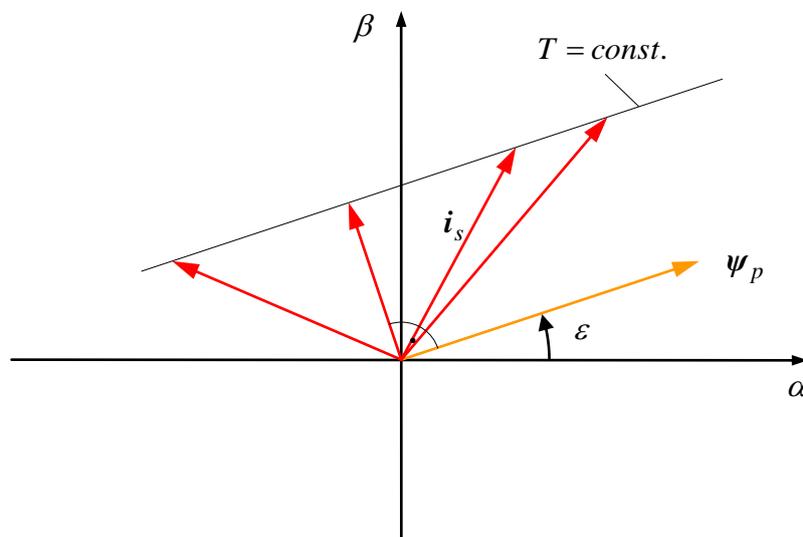
Die Klammer  $[ , ]$  oder das Kreuz  $\times$  bezeichnet das sogenannte äußere Produkt zweier ebener Vektoren. Das äußere Produkt ist geometrisch als Flächeninhalt des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms interpretierbar.

The bracket  $[ , ]$  or cross  $\times$  in the above equation represents the outer or vector/cross product of two vectors in a plane. The cross product now corresponds to the area covered by the parallelogram spanned by the two vectors, as shown in the figure below.

**Fig. 2-5:**

Interpretation des Drehmoments als die vom Permanentflussvektor und dem Stromvektor aufgespannte Parallelogrammfläche

Interpretation of the torque as the parallelogram area spanned by the vectors of the permanent flux and the current

**Fig. 2-6:**

Menge der Stromvektoren, die gleiches Drehmoment erzeugen

Set of current vectors generating the same torque

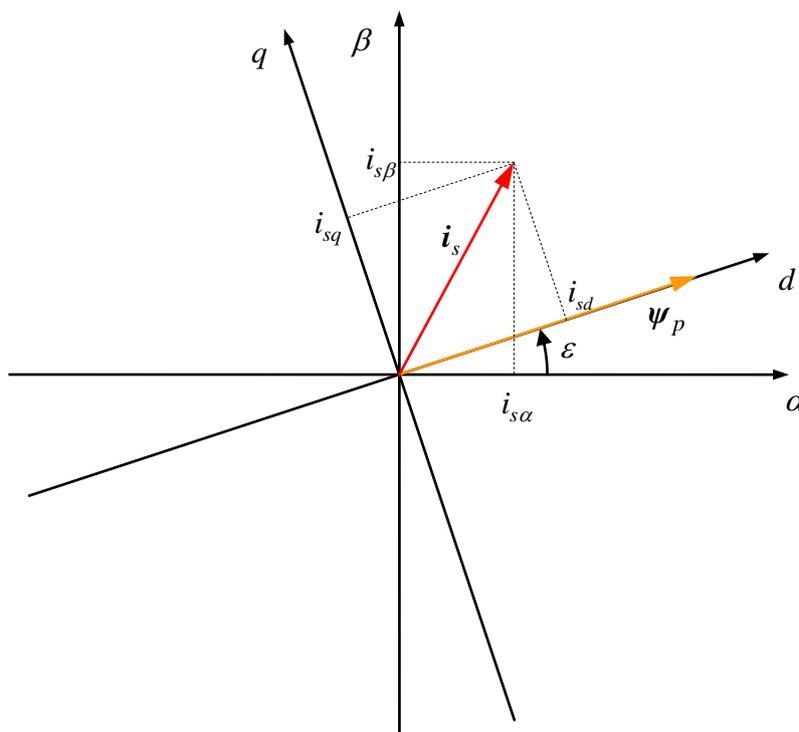
Bei gegebenem Vektor des Permanentmagnet-Flusses erzeugen alle auf der Scherungsgeraden des Parallelogramms liegenden Stromvektoren das gleiche Drehmoment.

For a given vector of the permanent magnet flux, all current vectors lying on the shear line ( $T=const.$ ) of the parallelogram generate the same output torque. However, only the

Unter diesen erzeugt der Stromvektor, der im rechten Winkel zum Fluss steht, das Drehmoment mit kleinstem Strombetrag, folglich mit kleinsten ohmschen Verlusten.

current vector which is perpendicular to the magnetic flux produces torque with a minimum current magnitude and thus with minimum heat/ohmic losses.

## 2.2 Das mitdrehende rotorfixe Koordinatensystem The rotating rotor-fixed coordinate system



**Fig. 2-7:**  
Das rotorfixe, in Richtung des Permanentflusses ausgerichtete  $d/q$ -Koordinatensystem

The rotor-fixed  $d/q$ -coordinate system aligned in the direction of the permanent magnet flux

In den mitdrehenden  $d/q$ -Koordinaten kann das Drehmoment besonders einfach ausgedrückt werden:

In the  $d/q$ -rotating frame, the equation for the torque can be simply expressed by

$$T = \psi_p i_{sq} \quad (2.26)$$

Die Komponente  $i_{sd}$  beeinflusst das Drehmoment nicht. Wird das Drehmoment  $T$  vorgegeben, muss hierfür also der Strom

The  $i_{sd}$  component does not affect the torque, as it is aligned to the  $d$ -axis. Given a desired torque  $T$ , the necessary current component  $i_{sq}$  can be calculated by

$$i_{sq} = \frac{T}{\psi_p} \quad (2.27)$$

eingestellt werden. Soll das Drehmoment mit einem Stromvektor kleinsten Betrags eingestellt werden, ist für  $i_{sd}$  zu wählen:

$$i_{sd} = 0 \quad (2.28)$$

Die Benennung der Koordinaten des mitdrehenden Systems rührt von englisch *direct axis*, also jene nach dem magnetischen Fluss orientierte Achse, und *quadrature axis*, die zu der  $d$ -Achse rechtwinklige Achse, her.

In order to set a torque with minimum current magnitude, the current component  $i_{sd}$  should be chosen as

The  $d/q$ -coordinate system is named after its two axes, the *direct* and *quadrature* axis. The *direct* axis is hereby aligned with the permanent magnet flux vector, while the *quadrature* axis is perpendicular to the  $d$ -axis.

Transformation eines allgemeinen Vektors  $\mathbf{x}$  zwischen dem statorfesten  $\alpha/\beta$ -Koordinatensystem und dem mitdrehenden rotorfesten  $d/q$ -System:

The transformation of a general vector  $\mathbf{x}$  between stator-fixed coordinates  $\alpha/\beta$  and rotor-fixed coordinates  $d/q$  is given the expression

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix}$$

Mit der Drehtransformationsmatrix

where  $\mathbf{Q}$  represents the rotational transformation matrix, given by

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

Im Bereich elektrischer Maschinen wird diese ebene Drehung als *Park-Transformation* bezeichnet. Für die Umkehrtransformation gilt

In the field of electrical machines this transformation is also commonly known as the *Park-Transformation*. For an inverse transformation can thus be written as

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}$$

Später wird noch die Zeitableitung der Drehmatrix benötigt. Es gilt

Later, we also need the time derivative of the rotation matrix, which can be expressed as

$$\dot{\mathbf{Q}}(\varepsilon) = \dot{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{Q}(\varepsilon) = \omega \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon & -\cos \varepsilon \\ \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \end{bmatrix} = \omega \mathbf{J} \mathbf{Q}(\varepsilon) = \omega \mathbf{Q}(\varepsilon) \mathbf{J}$$

mit

whereas

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformation der Spannungsgleichungen

Transforming the voltage equations results in

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} &= R_s \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \frac{d}{dt} \left( \mathbf{Q}(\varepsilon) \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \right) \\
 &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \mathbf{Q}(\varepsilon) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \dot{\mathbf{Q}}(\varepsilon) \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \\
 &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \omega \mathbf{J} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \\
 &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\psi_{sq} \\ \psi_{sd} \end{bmatrix} \\
 &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \omega L_s \begin{bmatrix} -i_{sq} \\ i_{sd} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_p \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

In Komponenten-Schreibweise:

Representing the voltages in component notation leads to

$$u_{sd} = R_s i_{sd} + \dot{\psi}_{sd} - \omega \psi_{sq} \tag{2.30}$$

$$u_{sq} = R_s i_{sq} + \dot{\psi}_{sq} + \omega \psi_{sd} \tag{2.31}$$

Transformation der Flussgleichungen

Now, transforming the flux equations results in

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} &= L_s \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \psi_p \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} &= L_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

also in Komponenten

Applying component notation again leads to

$$\psi_{sd} = L_s i_{sd} + \psi_p \tag{2.33}$$

$$\psi_{sq} = L_s i_{sq} \tag{2.34}$$

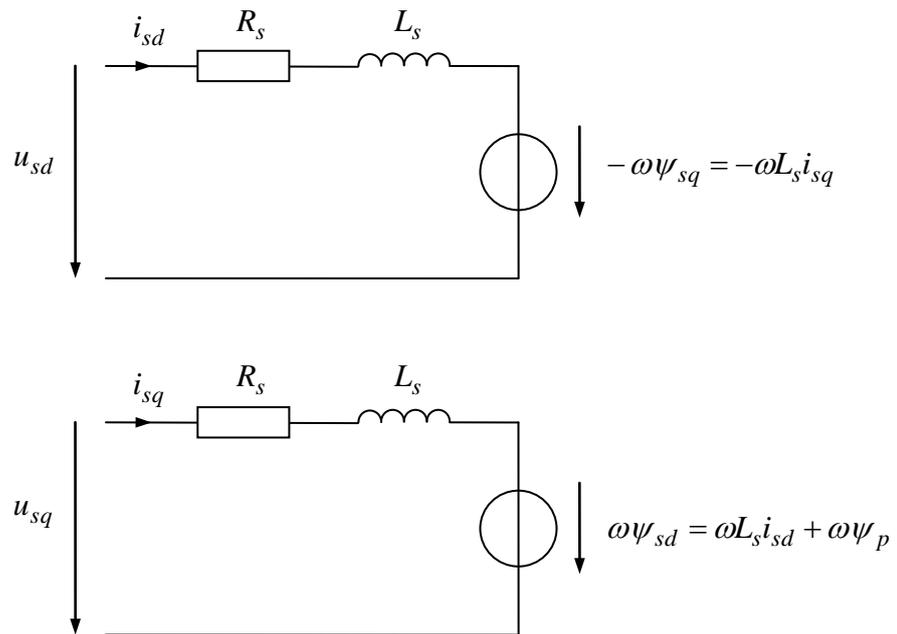
Ersetzt man in obigen Spannungsgleichungen When substituting the flux derivatives by the

die Fluss- durch die Stromableitungen, erhält man

current derivatives in the above voltage equations, it follows

$$u_{sd} = R_s i_{sd} + L_s \dot{i}_{sd} - \omega L_s i_{sq} \quad (2.35)$$

$$u_{sq} = R_s i_{sq} + L_s \dot{i}_{sq} + \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p \quad (2.36)$$

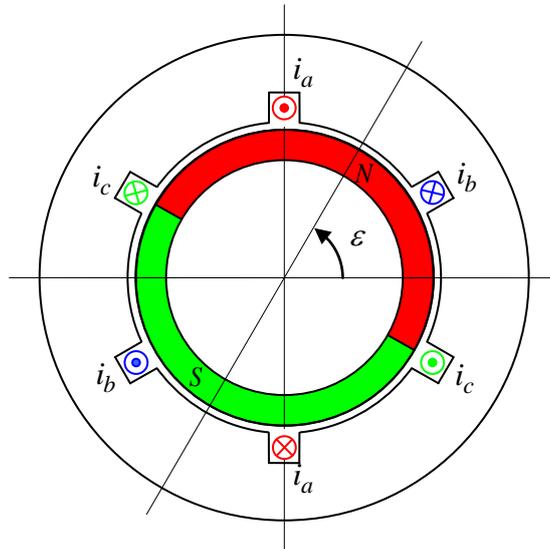


**Fig. 2-8:**

Ersatzschaltbild des Permanentmagnet-Synchronmotors in  $d/q$ -Koordinaten

Equivalent circuit diagram of the permanent magnet synchronous motor in  $d/q$ -coordinates

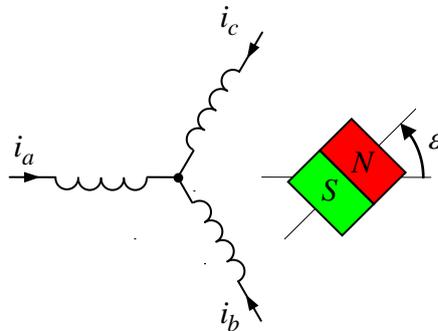
### 2.3 Der dreisträngige Motor The Three-Phase Motor



**Fig. 2-9:**

Dreisträngiger Motor mit jeweils um 120° räumlich versetzten Wicklungen

Three-phase motor with windings spatially shifted by 120° to each other



**Fig. 2-10:**

Schaltbild des dreisträngigen Motors

Schematic diagram of the three-phase motor

Für die von einer sinusförmigen Flussdichteverteilung des Permanentmagnet-Motors herrührenden Flussanteile in den Wicklungen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ergeben sich ganz ähnlich wie beim zweisträngigen, orthogonalen Motor

The sinusoidal flux density produced by the permanent magnets is distributed among the  $a$ ,  $b$ ,  $c$  stator windings similar as in the two-phase orthogonal motor case.

$$\psi_{pa} = \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.37)$$

$$\psi_{pb} = \psi_p \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.38)$$

$$\psi_{pc} = \psi_p \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.39)$$

Für die Spannungen gilt

The voltage equations are given by

$$u_a = R^w i_a + \dot{\psi}_a \quad (2.40)$$

$$u_b = R^w i_b + \dot{\psi}_b \quad (2.41)$$

$$u_c = R^w i_c + \dot{\psi}_c \quad (2.42)$$

Beim Motor mit orthogonalen Wicklungen kann es aus Symmetriegründen keine Kopplung der beiden Wicklungen geben. Die Hauptinduktivität zwischen diesen Wicklungen ist dann Null. Beim dreisträngigen Motor mit jeweils um  $120^\circ$  versetzten Wicklungen hat jede der Wicklungen eine Selbstinduktivität  $L^w$ , aber jeweils zwei der Wicklungen sind untereinander zusätzlich durch einen Fluss verkettet, was durch die Hauptinduktivität  $L_h^w$  ausgedrückt wird. Aufgrund der Symmetrie des Motors müssen alle diese paarweisen Verkopplungen von gleicher Größe sein. Wegen der eingeführten Zählpfeilrichtungen hat diese Kopplung negatives Vorzeichen. Dies wird durch das negative Vorzeichen vor der als positiv angenommenen Hauptinduktivität ausgedrückt.

Due to symmetry reasons, there is no coupling between the orthogonal windings in the two-phase motor case. The mutual inductance between these two windings is zero in consequence. In the three-phase motor case, each of the  $120^\circ$  shifted windings has a self-inductance  $L^w$ . Moreover, always two of these windings, respectively, are linked with each other through a flux. These couplings are expressed by the mutual inductance  $L_h^w$ . Due to motor symmetry, all pair wise couplings have to be of the same magnitude. Due to the introduced directions for the currents the couplings have a negative sign, indicated by prefixing the positive mutual inductance with a negative sign, as well.

$$\psi_a = L^w i_a - L_h^w (i_b + i_c) + \psi_{pa} \quad (2.43)$$

$$\psi_b = L^w i_b - L_h^w (i_c + i_a) + \psi_{pb} \quad (2.44)$$

$$\psi_c = L^w i_c - L_h^w (i_a + i_b) + \psi_{pc} \quad (2.45)$$

Für den Fall, dass die Motor so konstruiert ist, dass der Fluss  $\psi_a$  jeweils hälftig über Wege durch die Spulen  $b$  und  $c$  zurück geführt wird, ergibt sich zwischen Selbst- und Hauptinduktivität der Zusammenhang

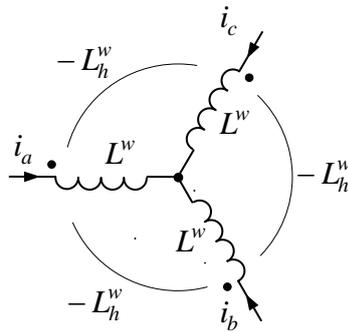
If the motor is constructed in that way that that the return path of the flux  $\psi_a$  is split half by half through the windings  $b$  and  $c$ , the relation between self and mutual inductance results directly as

$$L_h^w = \frac{1}{2} L^w \quad (2.46)$$

Im Allgemeinen wird sich Fluss aber nicht vollständig über die benachbarten Spulen  $b$  und  $c$  schließen, sondern wird auch Rückwege finden, die nicht mit diesen Spulen verkettet sind, so dass die Hauptinduktivität kleiner ausfällt. In diesem Fall ergibt sich immerhin die obere Abschätzung

In the general case, there will exist usually also return paths which are not linked with the neighbored coils  $b$  and  $c$  so that a smaller mutual results. However, at least an upper bound can be concluded like

$$L_h^w \leq \frac{1}{2} L^w \quad (2.47)$$



**Fig. 2-11:**  
Selbst- und Hauptinduktivitäten der drei Stränge  
Self and mutual inductances of a 3-phase motor

## 2.4 Transformationen von dreisträngigen in orthogonale Komponenten Transformation of three-phase components into orthogonal components

Die drei Komponenten  $x_a, x_b, x_c$ , die als Vektor zusammengefasst werden, werden durch die Transformation

The transformation of the three vector components  $x_a, x_b, x_c$  to orthogonal components is given by

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

in die beiden orthogonalen Komponenten  $x_\alpha, x_\beta$  und die Nullkomponente  $x_0$  überführt. Für die Nullkomponente ist auch die alternative Definition

The transformation results in two orthogonal components  $x_\alpha, x_\beta$  and a zero component  $x_0$ . A commonly known alternative definition of the zero component is

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_a + x_b + x_c) \quad (2.49)$$

gebräuchlich. In diesem Fall wäre die Nullkomponente der arithmetische Mittelwert der Strangkomponenten. Die hier gewählte Definition für  $x_0$ , die sich vom Mittelwert lediglich um den Faktor  $\sqrt{2}$  unterscheidet, besitzt jedoch Vorteile bei der Darstellung von Leistungstermen (s. u.).

In this case, the zero component represents the arithmetic mean value of the three phase components  $x_a, x_b, x_c$  and differs from the above expression in the transformation matrix only by the factor  $\sqrt{2}$ . However, as far as the representation of power terms is concerned, the first definition of the zero component has turned to be advantageous (see below).

Die Umkehrung der Transformation ergibt

The inverse transformation can be performed as shown below

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Skalarprodukte, wie sie bei Leistungstermen auftreten, werden folgendermaßen abgebildet:

Scalar/inner products, as they commonly occur in power terms, can be written as follows

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}^T \mathbf{T}^{-T} \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} y_\alpha \\ y_\beta \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c = \frac{3}{2} (x_\alpha y_\alpha + x_\beta y_\beta + x_0 y_0)$$

$\mathbf{T}^{-T}$  bezeichne die transponierte inverse Matrix. Es gilt im Übrigen

$\mathbf{T}^{-T}$  represents the transposed inverse matrix. Aside from this,

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{3}{2} \mathbf{T}^T, \quad \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \frac{2}{3} \mathbf{I}_3 \quad (2.52)$$

Anmerkung: Statt der hier definierten Transformation könnte man auch

Note: The transformation could also be defined as

$$\tilde{\mathbf{T}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{T} \quad (2.53)$$

verwenden. Diese Matrix ist im Gegensatz zu  $\mathbf{T}$  orthogonal, besitzt also die Eigenschaft

As compared to  $\mathbf{T}$ ,  $\tilde{\mathbf{T}}$  is orthogonal, and therefore has the property

$$\tilde{\mathbf{T}}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^T \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{T}}^T = \mathbf{I}_3 \quad (2.54)$$

Diese modifizierte Transformation  $\tilde{\mathbf{T}}$  nennt man auch *leistungsinvariant*, da bei der Transformation der inneren Produkte der Skalierungsfaktor  $3/2$  nicht mehr auftritt. Nachteil dieser Transformation ist aber, dass sich die Projektionen der Zeiger auf die entsprechenden Achsen nicht mehr direkt als Strangkomponenten interpretieren lassen (s. u.). Daher hat sich die hier vorgestellte Transformation  $\mathbf{T}$  allgemein durchgesetzt.

The modified Transformation  $\tilde{\mathbf{T}}$  is called *power-invariant*, due to the fact that the  $3/2$  scaling factor disappears during the transformation of the inner products. The major drawback of this transformation is, however, that the projections of the vectors onto the corresponding axes can no longer be directly interpreted as phase components (see below). Therefore, the transformation  $\mathbf{T}$  here presented has been generally accepted.

Falls vorausgesetzt werden kann, dass keine Nullkomponente auftritt, vereinfachen sich die Gleichungen zu

If the absence of a zero component can be assumed, the above equations can be simplified as follows.

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

und

and

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{32} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \mathbf{T}_{23}^T \quad (2.57)$$

Für die reduzierten Transformationsmatrizen gilt

For the reduced transformation matrices the following properties apply.

$$\mathbf{T}_{23} \mathbf{T}_{32} = \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

aber

but

$$\mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

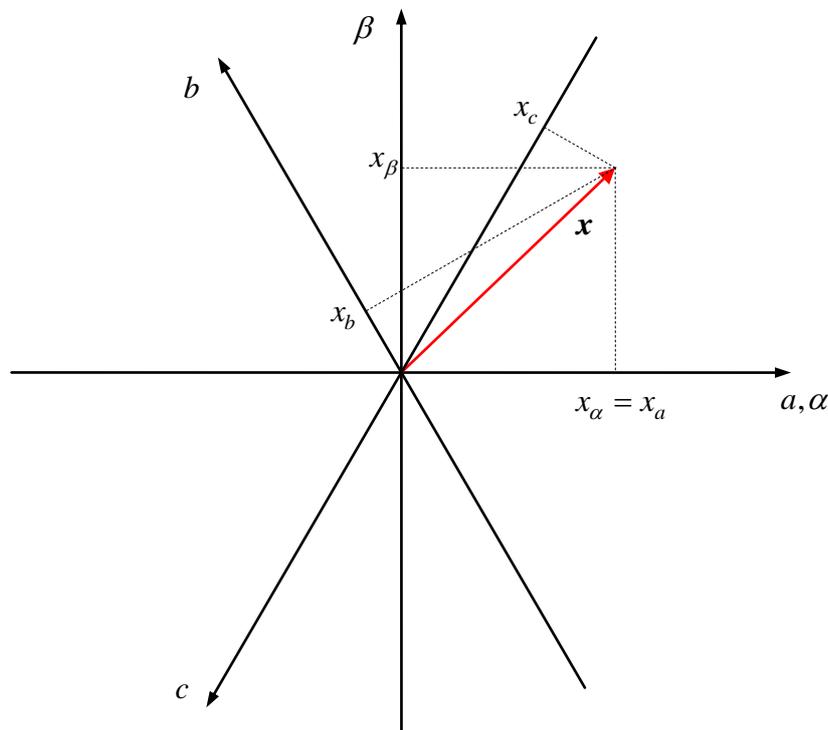
Nützlich sind auch die Beziehungen zwischen den Differenzen der Strangkomponenten (so genannte verkettete Größen oder Außenleitergrößen) The relationships between the differences of the phase components (also known as linked or phase-to-phase components)

$$\begin{aligned} x_{ab} &= x_a - x_b \\ x_{bc} &= x_b - x_c \end{aligned} \quad (2.60)$$

und den orthogonalen Komponenten:

and the orthogonal components are also useful.

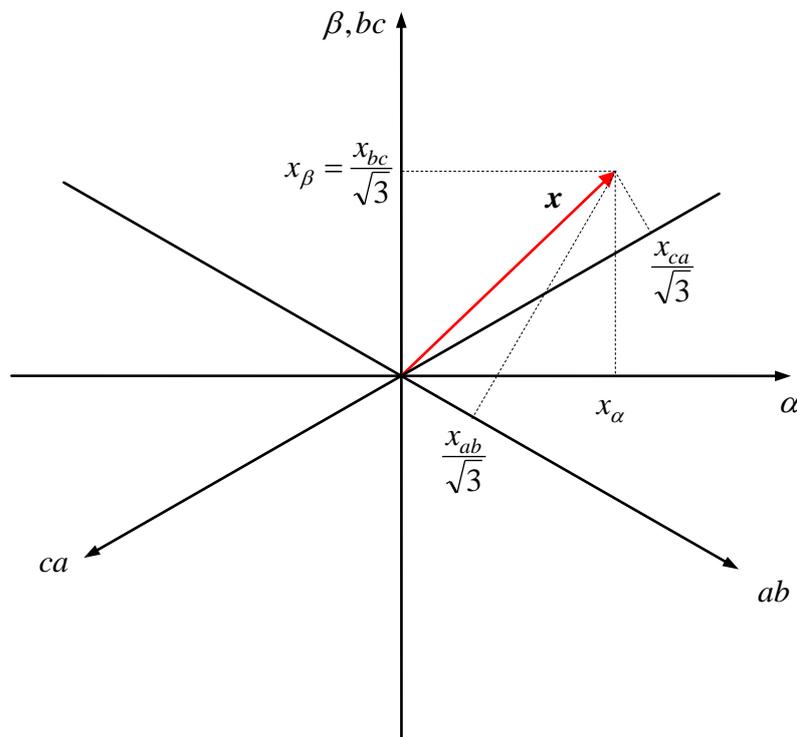
$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ab} \\ x_{bc} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_{ab} \\ x_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (2.61)$$



**Fig. 2-12:**

Geometrische Interpretation der Transformation für nullkomponentenfreie Größen

Geometrical interpretation of the transformation with no zero components



**Fig. 2-13:**  
Geometrische Interpretation für die verketteten Komponenten      Geometrical interpretation of the linked components

## 2.5 Abbildung des dreisträngigen auf das orthogonale zweisträngige Modell Mapping the Three-Phase Model to the Orthogonal Two-Phase Model

Gleichungen des dreisträngigen Motors in vektorieller Form, Induktionsgesetz:

With the law of induction, the equations of the three-phase motor in vector notation are given:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Flussgleichungen:

Flux linkage equations:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} &= \mathbf{L}^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{L}^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \cos(\varepsilon - 2\pi/3) \\ \cos(\varepsilon + 2\pi/3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

mit der Induktivitätsmatrix

with the inductance matrix

$$\mathbf{L}^w = \begin{bmatrix} L^w & -L_h^w & -L_h^w \\ -L_h^w & L^w & -L_h^w \\ -L_h^w & -L_h^w & L^w \end{bmatrix} = \left( L^w + L_h^w \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - L_h^w \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Annahme: Sternschaltung der Motorwicklungen:

Assumption: Motor windings are connected in star configuration

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (2.65)$$

D.h. die Stromkomponenten sind frei von einer Nullkomponente

i.e. current components are free from a zero component:

$$i_0 = 0$$

Schnell übersieht man, dass dann auch gilt

We quickly see that also the following equations apply:

$$u_0 = 0$$

$$\psi_0 = 0$$

gilt. Man beachte, dass unter Berücksichtigung entweder von Sättigung oder von konstruktiven Asymmetrien im Motor die Nullkomponente des Flusses und dann auch der Spannung nicht mehr verschwindet und berücksichtigt werden müsste. Im Folgenden wird jedoch von nullkomponentenfreien Größen ausgegangen, so dass die Darstellung jeweils mit zweidimensionalen Vektoren möglich ist.

Note, that when taking saturation or structural asymmetries of the motor into account, the zero component of the flux and thus the voltage cannot be neglected anymore. In the following, however, all quantities shall be considered as free of zero components, allowing a two-dimensional vector representation, respectively.

*Übung: Unter welchen Voraussetzungen verschwinden auch bei Dreieckschaltung die Nullkomponenten?*

*Exercise: Under which conditions do the zero components disappear when the motor windings are connected in delta configuration?*

Anwendung der Transformation  $T_{23}$  auf die Spannungsgleichungen:

Applying the transformation matrix  $T_{23}$  to the voltage equations leads to

$$\mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R^w \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{23} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} = R^w \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Das bedeutet, der Widerstand des orthogonalen Modells ist gleich dem Wicklungswiderstand des dreisträngigen Modells:

That means that the winding resistance value of the orthogonal motor corresponds to the one of the three-phase motor model:

$$R_s = R^w$$

Flussgleichungen:

Flux linkage equations:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \psi_p \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \cos(\varepsilon - 2\pi/3) \\ \cos(\varepsilon + 2\pi/3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \mathbf{T}_{32} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \mathbf{T}_{32} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Auswertung der Transformation der Induktivitätsmatrix:

Now evaluating the transformation of the inductance matrix results in

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \mathbf{T}_{32} &= (\mathbf{L}^w + \mathbf{L}_h^w) \mathbf{T}_{23} \mathbf{I}_3 \mathbf{T}_{32} - \mathbf{L}_h^w \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{L}^w + \mathbf{L}_h^w) \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Hieraus wird die Ersatzinduktivität des orthogonalen Modells zu

Based on this equation, the equivalent inductance of the orthogonal model

$$L_s = L^w + L_h^w \quad (2.69)$$

bestimmt.

is determined.

Beim dreisträngigen Modell wurde bislang nicht das Drehmoment identifiziert. Mit dem

So far, the torque of the three-phase motor model has not been identified. However,

Formalismus der Transformationsmatrizen gelingt dies nun sehr schnell wieder über Betrachtung von Leistungen. Nach Abschnitt 2.4 muss der Faktor  $3/2$  berücksichtigt werden, wenn eine Leistung eines dreisträngigen Systems durch Produkte der orthogonalen Komponenten ausgedrückt wird. Für das Drehmoment des dreisträngigen Motors folgt also

$$T = \frac{3}{2} (\psi_{p\alpha} i_{s\beta} - \psi_{p\beta} i_{s\alpha}) = \frac{3}{2} \psi_p i_{sq} \quad (2.70)$$

Merkregel: Die Leistung bzw. das Drehmoment des zweisträngigen Modells muss auf drei Stränge umgerechnet werden, also mit Faktor  $3/2$ .

based on the introduced transformation matrix notation, the torque can again be easily derived through a consideration of the power terms. According to section 2.4, when expressing the power of a three-phase system through the product of the corresponding orthogonal components, the scaling factor  $3/2$  has to be taken into account. The torque of the three-phase motor can now be written

Memorizing rule: The factor  $3/2$  can be understood from scaling up the power and the torque of a two-phase motor model to three phases.

## 2.6 Messtechnische Bestimmung des Ständerwiderstands und der Ständerinduktivität Determining Stator Resistance and Stator Inductance via Measurements

Die Parameter  $R_s$  und  $L_s$  können durch Vermessung einer einzelnen Wicklung zwischen einem Anschluss und dem Sternpunkt bestimmt werden, wie im vorangehenden Absatz dargestellt. Oft ist der Sternpunkt nicht zugänglich, so dass nur zwischen zwei Außenleitern gemessen werden kann. Unter der Annahme, dass der dritte Anschluss offen bleibt, ergibt sich für den Widerstand zwischen den Anschlüssen  $a$  und  $b$

The parameters  $R_s$  and  $L_s$  can be determined by measuring a single winding between a terminal and the star/neutral point, as shown in the previous paragraph. As the neutral point is often not accessible, measurements have to be made between two phases. Assuming that the third terminal remains open, the resistance between the two terminals  $a$  and  $b$  results to

$$R_{ab} = 2R^w = 2R_s$$

und wegen  $i_a = -i_b$  für die Induktivität

Moreover, while regarding  $i_a = -i_b$ , the phase-to-phase inductance results to

$$L_{ab} = 2L^w + 2L_h^w = 2L_s.$$

## 2.7 Mehrpolige Motoren Multi-Pole Motors

Wiederholt sich die Anordnung von wechselseitig magnetisierten Magneten mehrfach

In case the arrangement of mutually magnetized magnets repeats over the rotor

über den Rotorumfang, handelt es sich um *mehrpelige* Motoren. Dementsprechend werden auch die Statorwicklungen ausgeführt. Statt der Polzahl wird die Polpaarzahl  $p$  als charakterisierende Größe verwendet, da es keine Monopole des magnetischen Feldes gibt.

circumference, we speak of multi-pole motors. As no monopoles of magnetic fields exist, the *pole pair* number  $p$  is used as the characteristic quantity in this context, instead of the pole number. Note, that the stator windings in multi-pole motors need to be rearranged, as well.

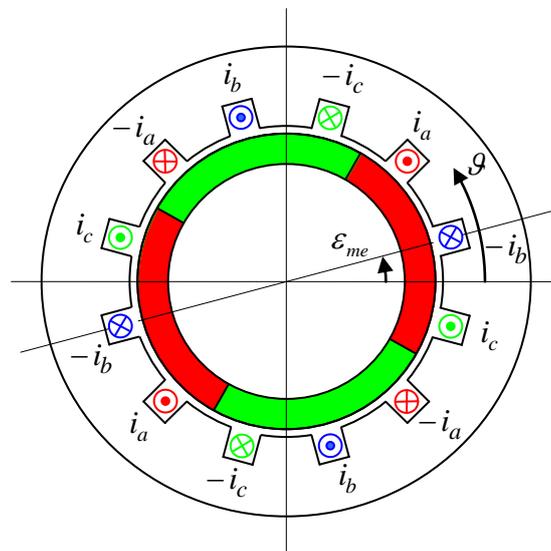
Entlang des Umfangs hat dann das magnetische Feld wie auch die Wicklungsanordnung eine Periodizität in dem Winkel  $2\pi/p$ . Wir definieren nun die Winkelvariable

Along the motor circumference, the magnetic field as well as the winding arrangement have an angular periodicity of  $2\pi/p$ . In order to continue to be able to work with quantities with a periodicity of  $2\pi$ , the angle variable

$$\varepsilon = p\varepsilon_{me} \tag{2.71}$$

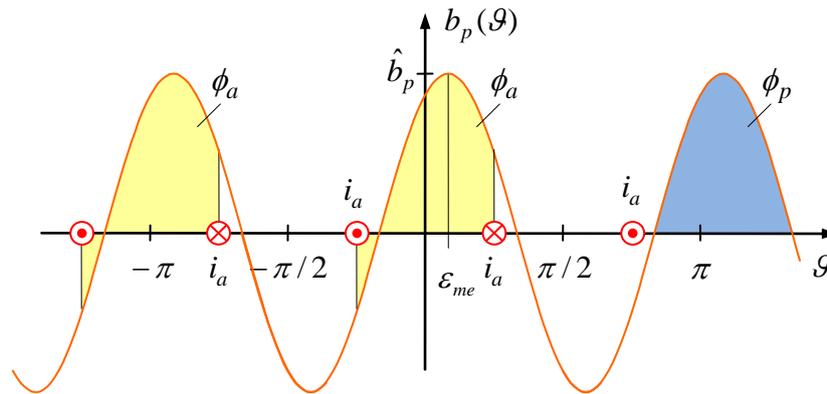
so dass bei Verwendung dieser Winkelvariable weiterhin mit Größen gearbeitet werden kann, die in  $2\pi$  periodisch sind. Wir nennen  $\varepsilon$  den auf das elektrische System bezogenen Drehwinkel.

is introduced. The variable  $\varepsilon$  refers to the electrical system and is therefore denoted as *electrical* (rotation) angle.



**Fig. 2-14:**  
 Ein Motor mit Polpaarzahl  
 $p = 2$

Motor with pole pair  
 number  $p = 2$

**Fig. 2-15:**

Flussverteilung eines Motors mit zwei Polpaaren und Fluss durch eine Leiterschleife

Flux distribution in a motor with two pole pairs and flux through a conductor loop

Die Beziehungen zwischen den geometrischen, Feldgrößen und elektromagnetischen Ersatzgrößen verändern sich etwas: Der Fluss durch eine Leiterschleife eines Stranges ist nun

The relationships between the geometrical field quantities and the equivalent electromagnetic quantities slightly change: The permanent magnetic flux through a single conductor loop is now expressed by

$$\phi = \phi_p \cos p(\varepsilon_{me} - \vartheta_0) = \phi_p \cos(\varepsilon - p\vartheta_0) \quad (2.72)$$

wobei  $\vartheta_0$  die geometrische Winkellage der betrachteten Leiterschleife angibt. Für die beiden im Bild betrachtete zum Strang  $a$  zugehörigen Leiterschleifen ist beispielsweise  $\vartheta_0 = 0$  bzw.  $\vartheta_0 = \pi$ . Der Scheitelwert des Flusses durch *eine* dieser Leiterschleifen ergibt sich zu

whereas  $\vartheta_0$  indicates the geometrical angular location of the considered loop. For example, as for the two loops (phase  $a$ ) presented in the above figure,  $\vartheta_0 = 0$  and  $\vartheta_0 = \pi$ , respectively. The peak or crest value of the flux through *one* of these loops reduces to

$$\phi_p = \frac{2rl}{p} \hat{b}_p \quad (2.73)$$

da sich eine Leiterschleife beim mehrpoligen Motor statt über  $\pi$  nur über den mechanischen Winkel  $\pi/p$  spannt. Die Größe  $\phi_p$  kann auch als Fluss eines Magnetpols verstanden werden, siehe Fig. 2-15.

due to the fact, that in multi-pole motors a single winding only spans over the mechanical angle  $\pi/p$  instead of  $\pi$ . This quantity  $\phi_p$  can also be understood as the flux of one magnetic pole, see Fig. 2-15.

Summiert man über alle Leiterschleifen einer Wicklung, so ist mit der Gesamtzahl der Windungen zu multiplizieren, da alle Schleifen einer Wicklung, unabhängig davon, über welchem der magnetischen Pole sie positioniert sind, stets den gleichen

Adding up all conductor loops of one stator winding corresponds to a multiplication of the flux with the number of turns  $N$ . In this context, it should be noted, that all conductor loops of a winding, no matter over which magnetic pole the corresponding winding is

Flussbeitrag liefern. Die gesamte Flussverkettung der Wicklungen ist demnach located, always provide the same flux contribution. The flux linkage of the windings can now be written as follows:

$$\psi_{pa} = \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.74)$$

$$\psi_{pb} = \psi_p \cos \left( \varepsilon - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.75)$$

$$\psi_{pc} = \psi_p \cos \left( \varepsilon + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.76)$$

mit

with

$$\psi_p = N\phi_p = \frac{2Nrl\hat{b}_p}{p} \quad (2.77)$$

Hierbei ist  $N$  die gesamte Zahl der Windungen pro Strang. Auf ein Polpaar fallen also  $N/p$  Windungen. Verwendet man den oben eingeführten auf das elektrische System bezogenen Drehwinkel  $\varepsilon$ , bekommen die Beziehungen das gleiche Aussehen wie beim Motor mit Polpaarzahl  $p = 1$ .

As  $N$  represents the total number of turns per winding,  $N/p$  turns can thus be allocated to a single pole pair. When using the electrical angle  $\varepsilon$ , the relationships get the same appearance as in the case of the motor with pole pair number  $p = 1$ .

Die weitere Vorgehensweise bezüglich des Übergangs von drei Strängen auf zwei orthogonale Koordinaten und Transformation in das mitdrehende  $d/q$ -System ändert sich nicht mit Ausnahme des Drehmoments. Dieses erhält man wieder aus der Leistungsbilanz, wobei nun zwischen mechanischer Kreisfrequenz  $\omega_{me}$  und elektrischer Kreisfrequenz  $\omega$  zu unterscheiden ist:

As far as the transition from three phases to orthogonal coordinates and transformation into the rotating  $d/q$ -system is concerned, the general procedure does not change, except for the torque. The torque can be derived from the power balance again, whereas now it has to be distinguished between the mechanical angular frequency  $\omega_{me}$  and the electrical angular frequency  $\omega$ :

$$P_{me} = \omega_{me}T = \frac{\omega}{p}T = \frac{3}{2}\omega\psi_p i_{sq} \quad (2.78)$$

Also

Thus

$$T = \frac{3}{2}p\psi_p i_{sq} \quad (2.79)$$

## 2.8 Wicklungsaufbau Winding Configuration

Bislang wurde idealisiert davon ausgegangen, dass die Leiter einer Wicklung an der geometrisch idealen Position im Stator positioniert ist. Tatsächlich sind die Leiter einer Wicklung üblicherweise über den Statorumfang verteilt. Die Leiter werden in *Nuten* eingebettet. Wird Runddraht in die *Nuten* gewickelt, spricht man von *Einzugs-* bzw. *Träufelwicklung*. Entweder wird die vorbereitete Spule mit all ihren Windungen beginnend von einer Seite durch die *Nut* eingezogen oder der Draht wird Windung für Windung mit einer Wickelmaschine in die *Nuten* gewickelt.

Bei Maschinen großer Leistung bzw. hoher Ausnutzung werden Draht bzw. Kupferstäbe rechteckförmigen Querschnitts als Leiter verwendet, die von ihrer Form genau an die *Nuten* angepasst werden, sogenannte *Formspulen*.

Bei Träufelwicklungen sind *Füllfaktoren* von 0,3-0,5 erreichbar, bei Formspulenwicklungen 0,8-0,9.

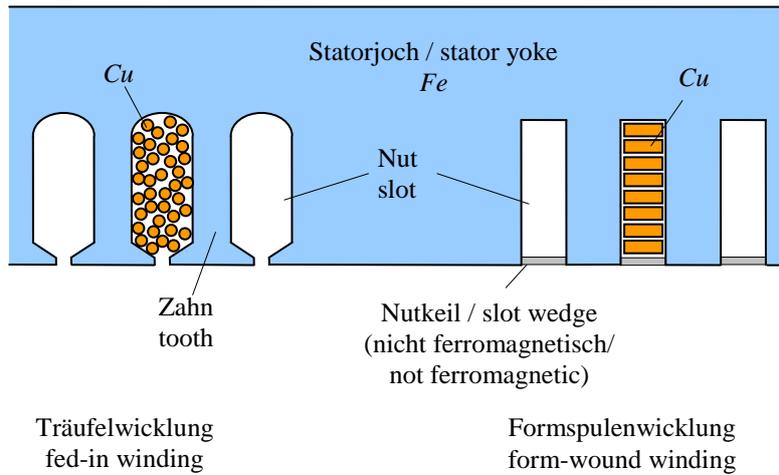
Um die mechanische Stabilität und die elektrische Isolation zu erhöhen, können Wicklungen in Harz getränkt werden, welches dann aushärtet.

So far, the conductors of a winding have been assumed to be located at the geometrically ideal positions of the stator. In fact, the conductors of a winding are usually distributed along the circumference of the stator. The wires are embedded inside *slots*, as shown below. In case round wire is wound inside the slots, we commonly speak of *fed-in* or *random-wound windings*. Either, the prefabricated coil is fed into the slot with all its turns beginning from one side, or the wire is wound into the slots turn by turn with a winding machine.

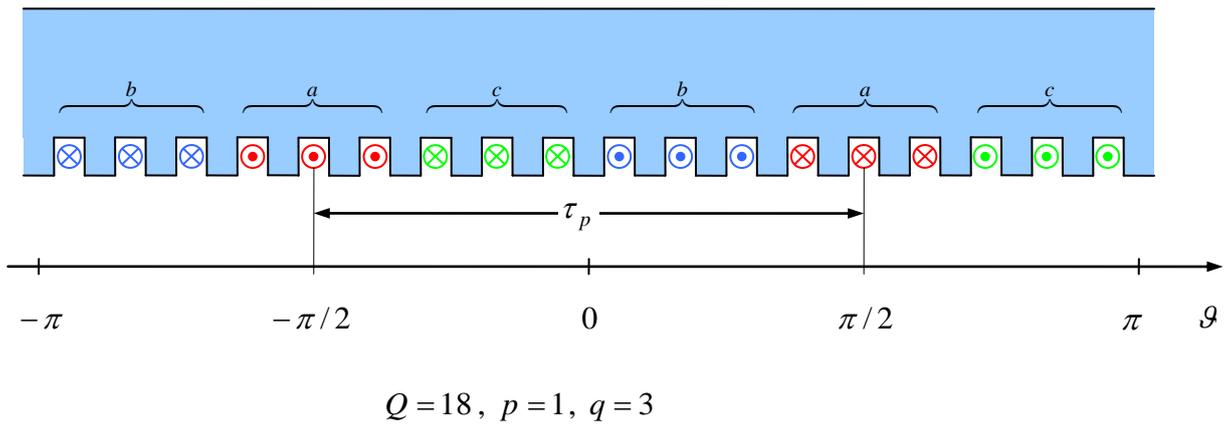
For machines of high power ratings and high degrees of utilization, however, usually *shaped wires* or *shaped bars* are used, which fit perfectly inside the stator slots. In this case, we speak of *form-wound winding*.

With fed-in windings, *fill factors* between 0.3-0.5 can be achieved, with form-wound windings 0.8-0.9 are even possible.

In order to improve the mechanical stability and the electrical isolation, windings can be immersed in resin which is hardening afterwards.



**Fig. 2-16:**  
Aufbau des Ständers (abgewickelte Darstellung)      Stator structure (unwound representation)



**Fig. 2-17:**  
Schema einer verteilten Wicklung (die schuhförmige Verbreiterung der Zähne ist nicht dargestellt)      Scheme of a distributed winding (the shoe-shaped widening of the teeth is omitted in this sketch)

**Begriffe / Definitions:**

- $Q$  Nutenzahl / number of slots
- $m$  Strangzahl / number of phases  
(für Drehstrommaschinen ist  $m = 3$ ,  
for three-phase machines it is  $m = 3$ )
- $p$  Polpaarzahl / number of pole pairs

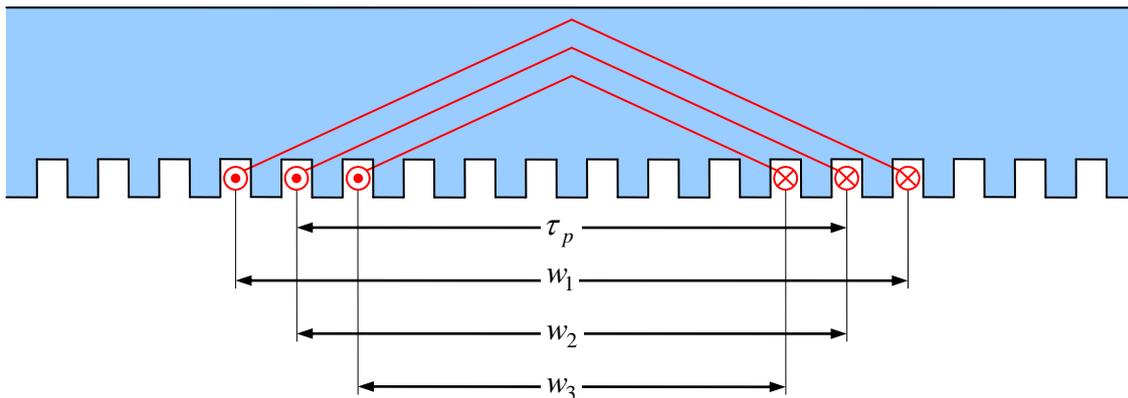
$$\tau_p = \frac{2\pi}{2p} \quad \text{Polteilung / pole pitch}$$

$$q = \frac{Q}{2pm} \quad \text{Lochzahl (Zahl der Nuten je Pol und Strang) /}$$

Number of notches (number of slots per phase and pole)

Ist  $q$  ganzzahlig, spricht man von *Ganzlochwicklung*, andernfalls von *Bruchlochwicklung*.

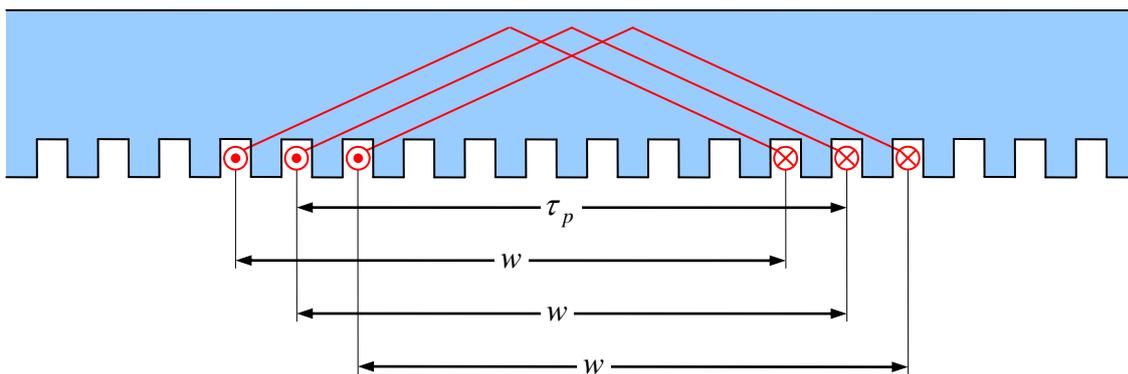
If  $q$  is an integer, we speak of an *integral-slot winding*, otherwise of a *fractional-slot winding*.



**Fig. 2-18:**

Ausführung einer verteilten  
Wicklung durch Spulen  
unterschiedlicher Spulenbreiten

Realization of a distributed  
winding through windings of  
varying widths



**Fig. 2-19:**

Ausführung einer verteilten  
Wicklung durch Spulen gleicher  
Spulenbreite  $w = \tau_p$

Realization of a distributed  
winding through coils of the  
same width  $w = \tau_p$

Flussverkettung von verteilten Wicklungen:  
Die Wicklungen können bei gleicher Ver-

Flux linkage of distributed windings: The  
windings can be configured differently for

teilung auf die Nuten unterschiedlich ausgeführt werden, die Unterschiede betreffen aber nur die Wickelköpfe, weshalb von Leiterschleifen gleicher Breite  $w$  ausgegangen werden kann. Der Fluss einer einzelnen Leiterschleife ist (vgl. oben):

$$\phi = \phi_p \cos(\varepsilon - p\theta_0) \quad (2.80)$$

Nun sind die Leiter nicht mehr an einer Position konzentriert, sondern über die Zonenbreite  $\zeta$  verteilt, wobei bei einer gleichmäßigen Aufteilung auf  $m$  Stränge (auf den elektrischen Winkel bezogen) gilt

$$\zeta = \frac{2\pi}{2m} \quad (2.81)$$

Der Verkettungsfluss ergibt sich nun nicht mehr einfach aus dem Fluss einer Windung durch Multiplikation mit der Windungszahl, sondern über die Summation der Flüsse der einzelnen Windungen, die unterschiedliche Winkelausrichtungen besitzen. Vereinfachend kann von der konkreten Nutzahl abstrahiert werden und die Summation durch eine Mittelwertbildung über die Zonenbreite genähert werden. Beispielsweise für Wicklung  $a$  folgt:

$$\begin{aligned} \psi_{pa} &= N\phi_p \frac{1}{\zeta/p} \int_{-\zeta/2p}^{\zeta/2p} \cos p(\varepsilon_{me} - \vartheta_0) d\vartheta_0 \\ &= N\phi_p \frac{1}{\zeta} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \cos(\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon_0 \quad \text{mit } \varepsilon_0 = p\theta_0, \varepsilon = p\varepsilon_{me} \\ &= N\phi_p \frac{1}{\zeta} [-\sin(\varepsilon - \varepsilon_0)]_{\varepsilon_0=-\zeta/2}^{\zeta/2} \\ &= N\phi_p \frac{1}{\zeta} [-\sin(\varepsilon - \zeta/2) + \sin(\varepsilon + \zeta/2)] \\ &= N\phi_p \frac{2}{\zeta} \sin \frac{\zeta}{2} \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (2.82)$$

Der Term

the same distribution onto the slots. As these different configurations concern only the end windings, however, conductor loops of the same width  $w$  can be assumed. The flux of a single conductor loop (see above) can be expressed by

Now the conductors are no longer concentrated in one location, but distributed over the zone width  $\zeta$ . In case the conductors are uniformly distributed on  $m$  phases (relative to the electrical angle)

can be applied. The flux linkage, however, cannot be calculated as the flux of a single conductor loop multiplied by the number of turns, anymore. Instead, it is given by the sum of fluxes of the all windings with their different corresponding angular orientations. For simplicity, it can be abstracted from the concrete number of slots by approximating the sum of fluxes via averaging over the zone width. As an example, the following calculation holds for winding  $a$ :

The term

$$\xi_z = \frac{2}{\zeta} \sin \frac{\zeta}{2} \quad (2.83)$$

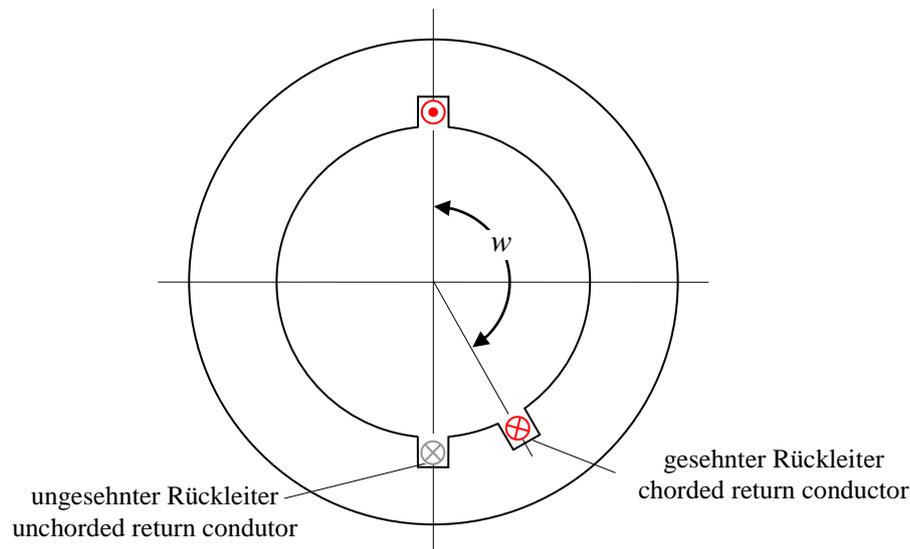
heißt *Wicklungsfaktor*. Er gibt an, welcher Anteil des Polflusses  $\phi_p$  mit der betreffenden Wicklung verkettet ist. Da bei drei Phasen die Breite der Zone  $\zeta = 60^\circ = \pi/6$  ist, ergibt sich für den Wicklungsfaktor folglich der Wert

$$\xi_z = \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{6}{\pi} \frac{1}{2} = \frac{3}{\pi} = 0.955 \quad (2.84)$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Zahl der Nuten so groß ist, dass von einer kontinuierlichen Stromverteilung in der Zone ausgegangen werden kann. Die Berechnung von Wicklungsfaktoren mit diskreten Nuten wird weiter unten erläutert.

is called *winding factor*. It indicates which portion of the flux of one pole  $\phi_p$  is linked with the particular winding. With three phases, the zone width is  $\zeta = 60^\circ = \pi/6$  so that the value of the winding factor results as

This calculation is based on the assumption that the number of slots is large enough so that a continuous current distribution in the zone can be assumed. The calculation of winding factors with discrete slots is discussed below.



**Fig. 2-20:**  
Zum Begriff der Sehnung, hier dargestellt für  $p = 1$

The concept of chording, shown here for  $p = 1$

Unter *Sehnung* oder *Schrittverkürzung* versteht man den Fall, dass die Spulenbreite kleiner als die Polteilung ist. Wir definieren den Sehnungsfaktor

In case the coil width is smaller than the pole pitch we speak of *chording* or *fractional pitch winding*. The chording or pitch factor can be defined as follows:

$$s = \frac{w}{\tau_p} \quad (2.85)$$

Zur Berechnung des Wicklungsfaktors bedienen wir uns zweckmäßigerweise wegen der kompakteren Schreibweise der komplexen Rechnung. Die tatsächliche Flussver-

To calculate the winding factor, it is useful to use the more compact complex notation. The actual flux distribution is then represented by the real part of the complex value. The

teilung sei dann der Realteil des komplexen geometrical angular positions of the con-  
Werts. Hin- und Rückleiter seien an den ductors are given by  
geometrischen Winkelpositionen

$$\vartheta_{1,2} = \mp \frac{\pi}{p} \frac{w}{2\tau_p} \quad (2.86)$$

platziert, wobei auch die Polpaarzahl  $p$  berücksichtigt wird. Die resultierende Fluss-  
verkettung mit einer solchen Spule ist

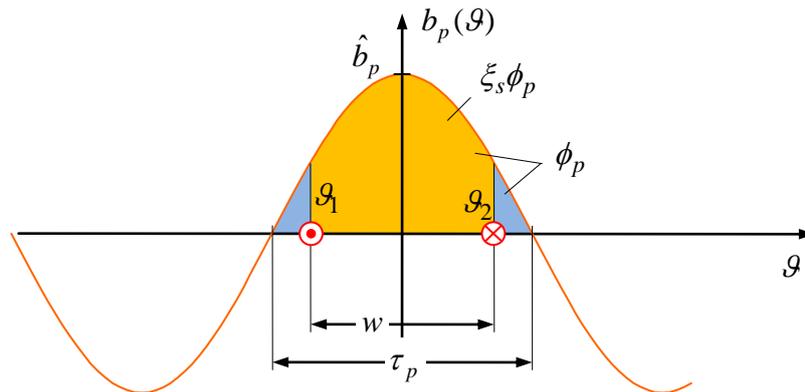
whereas the number of pole pairs  $p$  is also considered. The resulting flux linkage with  
such a coil is given by

$$\begin{aligned} \varphi_a &= r\hat{b}_p \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos(p(\varepsilon_{me} - \vartheta)) d\vartheta = r\hat{b}_p \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \operatorname{Re} e^{jp(\varepsilon_{me} - \vartheta)} d\vartheta = r\hat{b}_p \operatorname{Re} \left[ e^{jp\varepsilon_{me}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{-jp\vartheta} d\vartheta \right] \\ &= \frac{r\hat{b}_p}{p} \operatorname{Re} \left[ e^{jp\varepsilon} \frac{e^{-jp\vartheta_2} - e^{-jp\vartheta_1}}{-j} \right] = \frac{r\hat{b}_p}{p} \operatorname{Re} e^{jp\varepsilon_{me}} \cdot 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{w}{\tau_p} \right) \\ &= \varphi_p \xi_s \cos(p\varepsilon_{me}) = \varphi_p \xi_s \cos \varepsilon \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\phi_p$  der volle Fluss eines Pols nach (2.73) und  $\xi_s$  der aus der Sehnung resul-  
tierende Wicklungsfaktor

Here,  $\phi_p$  is the full flux of a pole according to (2.73) and  $\xi_s$  is the winding factor resulting  
from the chording,

$$\xi_s = \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{w}{\tau_p} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} s \right) \quad (2.87)$$



**Fig. 2-21:**

Flussverkettung einer gesehn-  
ten Wicklung, durch die Sehnung  
geht ein Teil des Polflusses  $\phi_p$   
verloren,  
hier für  $\varepsilon = 0$

Flux linkage of a chording  
winding, due to the chording, a  
part of the pole flux  $\phi_p$  will be  
lost  
here with  $\varepsilon = 0$

Die Sehnung kommt u.a. in Mehrlagenwicklungen zum Einsatz, was üblicherweise Zweilagewicklungen sind. Das bedeutet, dass in einer Nut Leiter zweier verschiedener Wicklungsstränge liegen können. Der Nutzen eines solchen aufwändigen Wicklungsschemas liegt darin, die Wicklungsverteilung einer Sinusform anzunähern. Dadurch können sich Oberwellen der Feldverteilung weniger stark ausprägen (weiter unten werden die Oberwellen-Wicklungsfaktoren eingeführt; man vergleiche deren Werte in der Tabelle am Schluss des Abschnitts).

Weiterhin wird der Wicklungsfaktor durch die *Schrägung* beeinflusst. Unter diesem Begriff versteht man eine schraubenförmige Verdrehung entweder der Stator- oder aber der Rotorstruktur meist um eine Nutteilung mit dem Ziel, Einflüsse der Nutung wie Nutharmonische oder Rastdrehmomente zu verringern. Allerdings wird dadurch auch der Wicklungsfaktor ähnlich wie bei einer verteilten Wicklung reduziert. Bei einem Verdrehungswinkel  $\chi$  ergibt sich also ein entsprechender Wicklungsfaktor von

$$\xi_{\chi} = \frac{2}{\chi} \sin \frac{\chi}{2} \quad (2.88)$$

Beim PMSM wird in der Regel der Rotor geschränkt, indem mehrere Magnetsegmente versetzt aufgebracht werden.

Fasst man alle drei besprochenen Einflüsse zusammen, führt dies also auf den Gesamt-Wicklungsfaktor

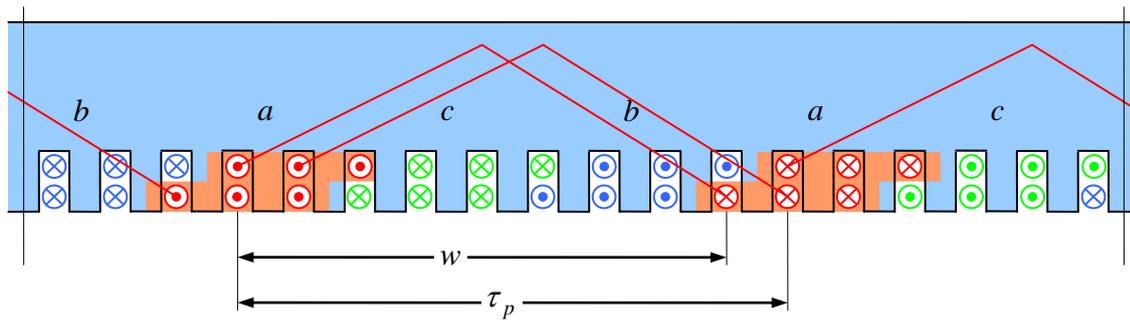
Chording is e.g. employed in multi-layer windings which are usually two-layer windings. In other words, one slot can comprise conductors from two different phases. One benefit of such an elaborate winding scheme is to approximate a sinusoidally shaped winding distribution. That way, harmonics in the field distribution can be minimised (below, harmonic wave winding factors are introduced; compare their values in the table at the end of this section).

Additionally, the winding factor is influenced by the *skewing*. With this word, we understand a skew-like torsion either of the stator or of the rotor structure, mostly in the range of a slot pitch, in order to reduce the influence of the slots as slot harmonics or cogging torque. However, the skewing is at the cost of a reduced winding factor which is quite similar to the effect of a zone winding. With a torsional angle  $\chi$  we will get the winding factor of

With PMSM, skewing is mostly applied to the rotor by mounting several magnet segments with an offset.

Summarising all three effects, we will get the total winding factor

$$\xi = \xi_z \xi_s \xi_{\chi} \quad (2.89)$$



**Fig. 2-22:**  
Beispiel einer Zweilagewicklung mit Sehnung  $s = 8/9$

Example of a two-layer winding with chording factor  $s = 8/9$

Die Zähne werden (anders als in den vereinfachten Darstellung der bisherigen Bilder) in der Regel zum Rotor hin schuhförmig verbreitert, wodurch eine möglichst gleichmäßige Feldverteilung entlang des Umfangs erreicht wird. Zwischen zwei benachbarten Polschuhen wird aber stets ein Nutspalt belassen, um entlang der Statorinnenoberfläche in *tangentialer* Richtung einen möglichst großen magnetischen Widerstand zu erhalten, der das magnetische Feld hindert, sich unter Vermeidung der erwünschten Flussverketzung zwischen Rotor und Statorwicklung bereits entlang der Statorinnenseite zu schließen.

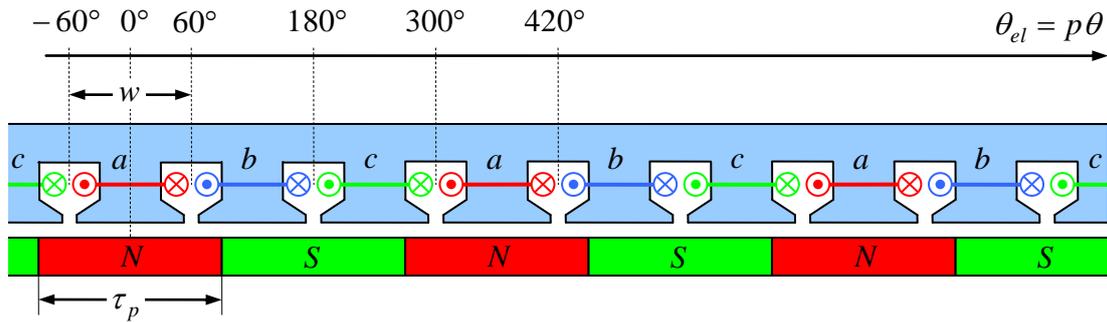
Getting closer to the rotor, the teeth usually widen in a shoe-like shape (unlike the simplified representation of the previous pictures suggest). That way, a preferably uniform field distribution along the circumference shall be achieved. However, just in between two adjacent pole shoes a slot gap always remains. That way, a preferably large magnetic resistance along the tangential direction of the inner stator surface shall be maintained, preventing the magnetic field from short-circuiting along the inner stator surface instead of generating the desired flux linkage between rotor and stator.

Eine Wicklungsanordnung, die vielfach bei Maschinen mit großer Polzahl zum Einsatz kommt, sind sogenannte konzentrierte Wicklungen, die jeweils nur um einen Zahn gewickelt werden (*Zahnwicklungen*<sup>1</sup>), d. h. Hin- und Rückleiter einer Wicklung liegen in direkt benachbarten Nuten.

Another winding type which is often employed in machines with large pole numbers are the so-called *concentrated windings*, each wound around only one tooth (*tooth windings*<sup>2</sup>), i.e. incoming wire and return wire are allocated in neighbouring slots.

<sup>1</sup> Fälschlicherweise wird hierbei gelegentlich von Polwicklungen gesprochen. Zwar liegt bei diesen Wicklungsschemata mit kleinen Lochzahlen die Zahl der Zähne in der gleichen Größenordnung wie die Zahl der Pole, dennoch wird ein Pol nicht durch einen einzelnen Zahn repräsentiert.

<sup>2</sup> Sometimes the term “pole winding” is incorrectly applied when speaking of tooth windings. Although the numbers of poles and teeth are of similar dimensions in this winding scheme, however, one pole is not represented by one tooth.



$$Q/2p = 3/2, \quad q = 1/2, \quad s = 2/3, \quad \xi = 0.866$$

**Fig. 2-23:**

Wicklungsschema mit konzentrierten Wicklungen

Winding scheme with concentrated windings

Bei dieser Art der Wicklung werden je Polpaarteilung nur drei Nuten vorgesehen. Vom Prinzip handelt es sich um eine zweilagige Wicklung, da in jeder Nut Leiter zweier verschiedener Stränge liegen, wenn auch diese hier nicht über-, sondern nebeneinander angeordnet sind. Die Zahl der Nuten je Strang und Pol, die *Lochzahl*  $q$ , ist demnach

In this winding scheme, only three slots are allocated to one pole pair pitch. In principle, we are dealing with a two-layer winding since each slot comprises conductors of two different phases. However, the conductors are here arranged side by side instead of on top of each other. The number of notches  $q$ , i.e. the number of slots per phase and pole, therefore results to

$$q = \frac{Q}{2pm} = \frac{1}{2} \quad (2.90)$$

Es handelt sich also um eine *Bruchlochwicklung*. Die Sehnung der Spule ist

Consequently, we speak of a *fractional-slot winding* in this context. The chording factor of the winding equals to

$$s = \frac{2}{3} \quad (2.91)$$

Die Spule ist also um  $1/3$  verkürzt. Es handelt sich nicht um eine Zonenwicklung, so dass sich der Gesamtwicklungsfaktor ergibt zu

The coil is thus shortened by  $1/3$ . As it is not a zone winding, the total winding factor results as

$$\xi = \sin \frac{s\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

Die Sehnung verursacht hier also eine nicht zu vernachlässigende Reduktion der theoretisch möglichen Flussverkettung. Die Vorteile wiegen diesen Nachteil auf: Die Spulen können auf Spulenkörpern gewickelt und fertig über die Zähne geschoben werden. Ein

Thus, the chording causes here a significant reduction of the theoretically achievable flux linkage. Nevertheless, the advantages compensate for this disadvantage: The coils can be wound on bobbins and simply pushed over the teeth. Another important advantage

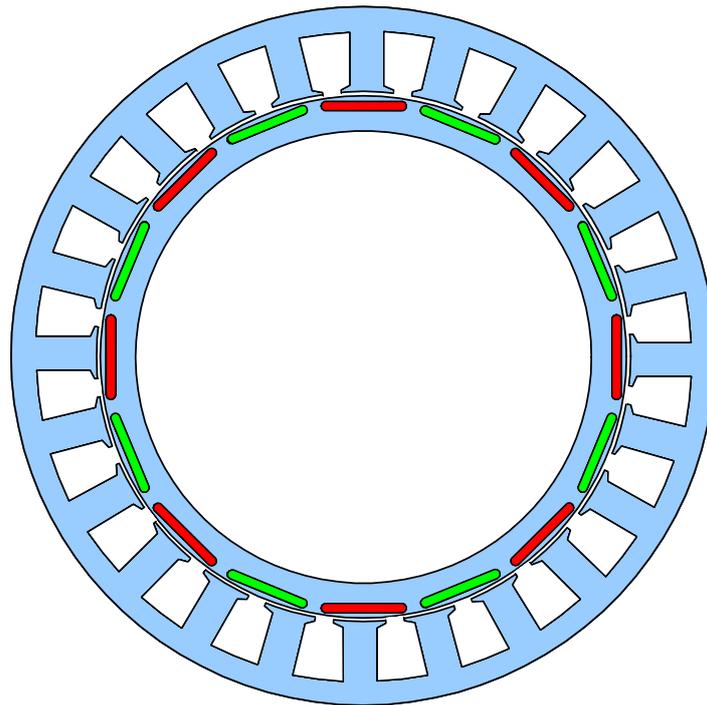
---

weiterer Vorteil der konzentrierten Zahnwicklungen ist, dass der *Wickelkopf* auf ein Minimum reduziert wird:

Als *Wickelkopf* bezeichnet man den Teil der Wicklung, der notwendig ist, um Hin- und Rückleiter in den verschiedenen Nuten miteinander zu verbinden. Dieser Teil trägt nicht zur Bildung des Drehmoments bei, aber er erhöht nennenswert den Innenwiderstand und die Streuinduktivität der Wicklung und beansprucht einen erheblichen Teil des Bauraums im Motor.

of concentrated windings lies in the minimisation of the *end winding*:

The part of the wires that connects the incoming and return conductors of the different slots is called *end winding*. This part does not contribute to the generation of torque. End windings, however, increase considerably the stator resistance and the inductance of the winding and require considerable construction space within the motor.



$$p = 8, Q = 24, q = 1/2, s = 2/3, \xi = 0.866$$

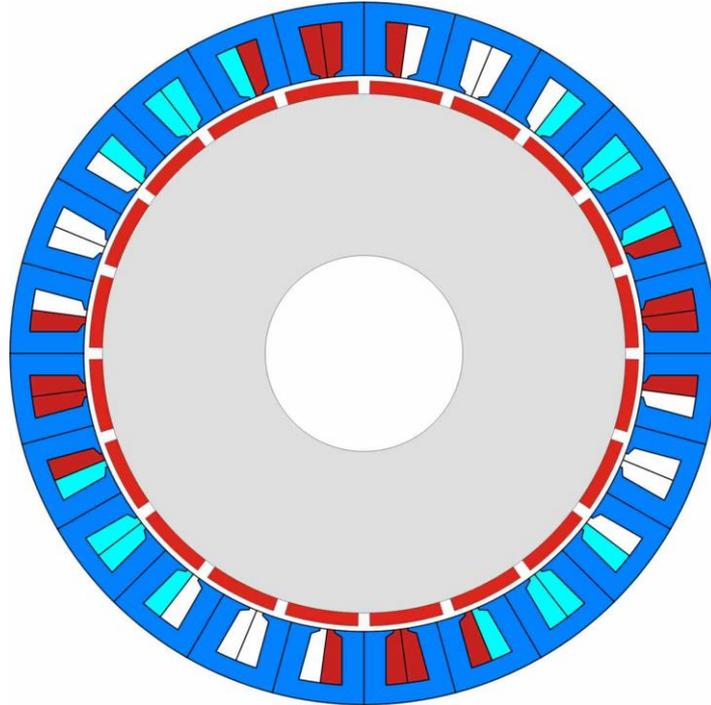
**Fig. 2-24:**

Schnittskizze eines PMSM mit in den Rotor eingebetteten Magneten und konzentrierte Wicklungen (im Bild nicht dargestellt)

Cross-section of a PMSM with magnets embedded in the rotor and concentrated windings (not shown in this figure)

Bei den bislang betrachteten Wicklungsschemata wiederholt sich typischerweise die Wicklungsanordnung über die Länge eines Polpaars periodisch. Dies ist jedoch nicht zwingend notwendig. Fig. 2-25 zeigt aber ein Schema, bei dem sich die Wicklungsanordnung erst nach 5 Polpaaren wiederholt. Dasselbe Schema, aber in abgewickelter Darstellung ist in Fig. 2-27 noch einmal dargestellt.

In the previously considered schemes, the winding arrangement is typically periodically repeated over one the pitch of one pole pair. However, this is not strictly mandatory. Fig. 2-25 shows a winding scheme in which the winding arrangement is repeated only after 5 pole pairs. The same scheme, but in an unwound representation is shown also in Fig. 2-27.



$$p = 10, Q = 24, q = 0.4, \xi = 0.933$$

**Fig. 2-25:**

Wicklungsschema, welches sich erst über 5 Polpaarteilungen periodisch wiederholt (die drei Phasen sind durch unterschiedliche Farben dargestellt, der Wicklungssinn geht aus diesem Bild nicht hervor, siehe dazu die folgende lineare Darstellung)

Winding scheme which is only repeated periodically after five pole pair pitches (the three phases are represented by different colors, the winding direction cannot be seen in this figure, refer to the following linear representation in this context)

Zur Bestimmung des Wicklungsfaktors solcher Anordnungen ist die Flussverknüpfung mit allen Leitern einer Wicklung zu bestimmen. Wir benutzen dabei wie schon bei der Bestimmung des Sehnungs-Wicklungsfaktors die kompakte komplexe Darstellung. Als Verallgemeinerung des dortigen Ergebnisses erhält man für den Strang  $a$  den Wicklungsfaktor

To determine the winding factor of such arrangements the flux linkage with all the conductors of a winding needs be determined first. Just as we determined the chording factor earlier, we again resort to the compact complex notation. As a generalization of the earlier result the expression

$$\underline{\xi}_a = \frac{1}{2jN} \sum_{i=1}^Q N_{ai} e^{-jp\theta_i} \quad (2.92)$$

Hierbei wird über alle Nuten  $i$  summiert, wobei der Winkel  $\theta_i$  die geometrische Position der Nut im Stator angibt. Die Nuten

can be obtained. Here, it is added up over all slots  $i$ , whereas the angle  $\theta_i$  indicates the geometric position of the slot in the stator.

sind zwar typischerweise längs des Umfangs äquidistant verteilt, d.h.  $\theta_i = 2\pi i/Q$ . Die Anwendung der Formel (2.92) ist aber auch für Konstruktionen mit nicht-äquidistanten Nuten möglich.  $N_{ai}$  ist die Zahl der Leiter des Stranges  $a$  in der jeweiligen Nut, wobei die Orientierung des Leiters durch das Vorzeichen von  $N_{ai}$  ausgedrückt wird. Sind keine Leiter des Strangs  $a$  in der  $i$ -ten Nut vorhanden, ist  $N_{ai} = 0$ .

Die Gesamtzahl der Leiter führt auf die Gesamt-Windungszahl  $N$  der Wicklung  $a$ , wobei berücksichtigt werden muss, dass sich eine Windung typischerweise aus je einem Hin- und einem Rückleiter zusammensetzt, also

$$N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Q |N_{ai}| \quad (2.93)$$

Der Wicklungsfaktor wird abweichend vom bisherigen Vorgehen hier als komplexe Zahl verstanden, wobei der Winkel des komplexen Wicklungsfaktors Auskunft über die Phasendrehung gibt.

Auf gleiche Weise bestimmt man die Wicklungsfaktoren  $\underline{\xi}_b$ ,  $\underline{\xi}_c$  für die anderen Stränge. Diese müssen vom Betrage gleich und eine definierte Phasenverschiebung von  $120^\circ$  aufweisen, damit sich ein symmetrisches Drehstromsystem ergibt:

$$\xi = \left| \underline{\xi}_a \right| = \left| \underline{\xi}_b \right| = \left| \underline{\xi}_c \right|, \quad \underline{\xi}_a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \underline{\xi}_b = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \underline{\xi}_c.$$

### Oberwellen und Oberschwingungen<sup>3</sup>

Bislang wurde die Flussdichte entlang des Umfangs als sinusförmig verteilt, also als Grundwelle, angenommen, doch wird es in der Praxis mehr oder minder starke

Although the slots are typically distributed equidistantly along the circumference, i.e.  $\theta_i = 2\pi i/Q$ , the formula (2.92) is even applicable for constructions with non-equidistant slots.  $N_{ai}$  is the number of conductors of phase  $a$  in the respective slot, whereas the orientation of the conductor is taken into account by the sign of  $N_{ai}$ . In case no conductors of phase  $a$  are existing in the  $i$ -th slot, this is expressed through  $N_{ai} = 0$ .

The total number of conductors leads to the total number of turns  $N_a$  of phase  $a$ . Hereby, one has to be aware that one turn is composed of exactly one outgoing and one incoming conductor, thus

Contrary to the previous procedure, here the winding factor is regarded as a complex number, whereas the angle of the complex winding factor gives information about the phase shift.

In the same way, the winding factors  $\underline{\xi}_b$ ,  $\underline{\xi}_c$  of the other phases can be determined. These factors must be equal in magnitude and have a defined phase shift of  $120^\circ$  to each other, ensuring a symmetrical three-phase system:

### Harmonic waves and harmonic oscillations<sup>4</sup>

So far, the flux density was assumed sinusoidally distributed along the circumference, i.e. as fundamental wave. In practise, however, there will exist more or less

<sup>3</sup> Unter *Wellen* versteht man periodische Wiederholungen in einer *Ortsvariablen*, während *Schwingungen* periodische Vorgänge in der *Zeit* sind. Dementsprechend ist zwischen den Begriffen *Oberschwingungen* und *Oberwellen* zu unterscheiden.

<sup>4</sup> *Waves* represent *periodics in space*, while *oscillations* are *periodic in time*. Therefore, it has to be distinguished between harmonic waves and harmonic oscillations.

Abweichungen von dieser Idealform geben. Gehen wir von einer Darstellung der Luftspalt-Flussdichte des Permanentmagneten als Fourierreihe aus:

$$b_p(\theta) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{B}_k e^{jkp(\varepsilon_{me} - \theta)} \quad (2.94)$$

Bei diesem Ansatz wurde angenommen, dass sich die Flussdichte in einer Polpaarteilung periodisch wiederholt. Abweichungen davon könnten beispielsweise durch kleine Magnetisierungsunterschiede der einzelnen Magnete verursacht werden.

Aus dieser Flussdichte entsteht durch Integration über  $\theta$  und Einsetzen der Integralgrenzen für jede der Leiterschleifen, also der Nutpositionen  $\theta_i$ , der Verkettungsfluss für die Wicklung  $a$  wie folgt:

$$\psi_{pa} = rl \sum_{i=1}^Q N_{ai} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{jkp} \underline{B}_k e^{jkp(\varepsilon_{me} - \theta)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{rl}{jkp} \underline{B}_k e^{jk\varepsilon} \sum_{i=1}^Q N_{ai} e^{-jkp\theta_i} \quad (2.95)$$

Nach Vertauschen der Summationsreihenfolge lässt sich die zweite Summe als Wicklungsfaktor der Oberwelle der Ordnung  $k$  definieren,

$$\underline{\xi}_{ak} = \frac{1}{2jN} \sum_{i=1}^Q N_{ai} e^{-jkp\theta_i} \quad (2.96)$$

sowie der maßgebliche Oberwellenfluss zu

$$\underline{\phi}_k = \frac{2rl}{kp} \underline{B}_k \quad (2.97)$$

Man beachte, dass der Fall der Grundwelle mit  $k = 1$  hier mit enthalten ist. Es gilt:

$$\underline{B}_1 = \hat{b}_p, \quad \underline{\phi}_1 = \phi_p, \quad \underline{\xi}_{a1} = \underline{\xi}_a \quad (2.98)$$

Nun erhalten wir mit der Darstellung

deviations from this ideal form. Assume now a Fourier series representation of the airgap flux density of the permanent magnet as follows:

In this ansatz, the flux density is assumed as periodic within a pole pair pitch. Deviations from this presumption may occur due to differences of the magnetisation of the single magnets.

Integrating the flux density over  $\theta$  and inserting of the integral limits for each turn, i.e. the slot positions  $\theta_i$ , will result in the flux linkage, e.g. for the phase winding  $a$  as follows:

After exchanging the sequence of summation, the second sum can be defined as winding factor of the harmonic wave of order  $k$ :

and the relevant flux of the harmonic wave,

Please note that the case of the fundamental wave is included here with  $k = 1$ . It holds:

Now, with the representation

$$\psi_{pa} = N \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{-k} \xi_{ak} e^{jk\varepsilon} \quad (2.99)$$

für die induzierte Spannung

we get the induced voltage

$$e_a = \dot{\psi}_{pa} = N \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} jk\omega \phi_{-k} \xi_{ak} e^{jk\varepsilon} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{E}_{ak} e^{jk\varepsilon} \quad (2.100)$$

$$\underline{E}_{ak} = j\omega k N \phi_{-k} \xi_{ak}$$

Man erkennt, dass eine Oberwelle der Ordnung  $k$  eine Spannungserschwingung  $\underline{E}_{ak}$  der gleichen Ordnung verursacht, diese aber über den zugehörige Oberwellen-Wicklungsfaktor  $\xi_{ak}$  bewertet wird. Über ein geschicktes Wicklungsschema lassen sich folglich die Spannungserschwingungen reduzieren oder sogar eliminieren, selbst wenn die Flussdichte nicht ideal sinusförmig ist.

We learn from that formula that a harmonic wave of order  $k$  causes also a harmonic voltage oscillation  $\underline{E}_{ak}$  of the same order number, but it is weighted by the winding factor of the harmonic wave  $\xi_{ak}$ . Consequently, with a clever winding scheme, the voltage harmonics can be reduced or even eliminated, even if the flux density is not ideally sinusoidally.

Insbesondere zeigt sich, dass mit Hilfe einer Sehnung mit Faktor

In particular, if applying chording with a factor of

$$s = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \quad (2.101)$$

was einer Spulenweite von

which is equivalent to a coil width of

$$w = \theta_2 - \theta_1 = s\tau_p = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{2\pi}{2p} \quad (2.102)$$

entspricht, der betreffende Wicklungsfaktor Null wird, wie man mit Hilfe von (2.96) überprüfen kann oder in Fig. 2-26 veranschaulicht wird. In der Praxis kann man eine Spule aber nicht beliebig um den Anteil  $1/k$ , sondern nur um Vielfache einer Nutteilung kürzen. Damit dies möglich ist, müssen je Polteilung  $\tau_p$  Nuten der Anzahl  $k$  oder ein Vielfaches davon zur Verfügung stehen. Die gesamte Nutzahl  $Q$  muss demnach ein Vielfaches von  $2pk$  sein, sofern vom Normalfall äquidistanter Nuten ausgegangen wird. Da  $Q$  außerdem in der Regel ein Vielfaches von 3 sein soll, käme als minimale Nutzahl nur  $Q = 6pk$  in Betracht.

it turns out that the respective winding factor becomes zero as it can be checked with the help of (2.96) or with the illustration of Fig. 2-26. In practise, however, a coil cannot be shortened by any arbitrary portion of  $1/k$ , but only by multiples of the slot pitch. In order to allow such a shortening, each pole pitch  $\tau_p$  must include  $k$  slots or a multiple of this number. The total slot number  $Q$  must then be a multiple of  $2pk$  if equidistant slots are assumed which is the standard case. Because  $Q$  should normally be also a multiple of 3, the minimum possible slot number would be  $Q = 6pk$ .

Beispielsweise wären zur Elimination der 5. Harmonischen (s. Fig. 2-26) bei einem Motor mit Polpaarzahl  $p=2$  also  $Q=60$  Nuten

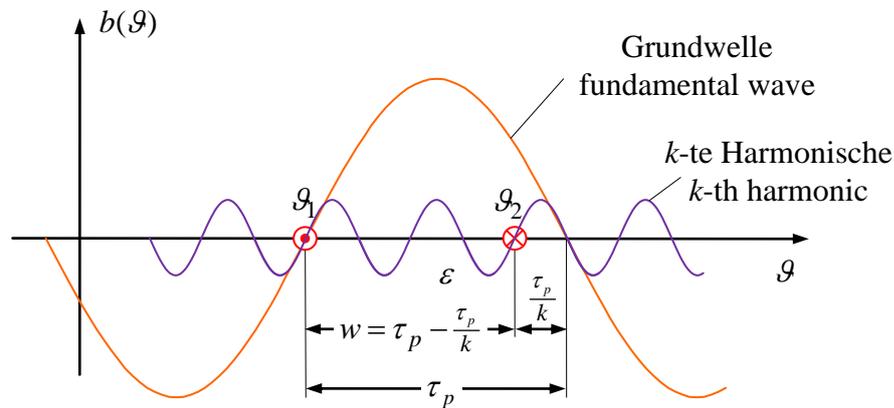
For example, in order to eliminate the 5th harmonic (s. Fig. 2-26) with a motor of pole pair number  $p=2$ , a slot number of  $Q=60$

notwendig, um eine passende Schrittverkürzung zu realisieren. Das gesehnte Wicklungsschema nach Fig. 2-22 eliminiert demnach gerade die 9. Harmonische (s. dazu aber die Bemerkung unten zu Harmonischen der Ordnungszahlen  $3k$ ).

were necessary to realise a suitable coil shortening. The chorded winding scheme of Fig. 2-22 eliminates then the 9th harmonic (however, please note the comment below on the harmonics of order numbers  $3k$ ).

Alternativ könnte man die Nuten nicht-äquidistant platzieren, doch ist dies in der Praxis recht unüblich.

Alternatively, the slots could be placed in a non-equidistant manner which is, in practise, not very common.



**Fig. 2-26:**

Elimination der Flussharmonischen der Ordnung  $k$  durch Sehnung mit einer Schrittverkürzung um  $1/k$ . Hier dargestellt für die Ordnung  $k = 5$

Elimination of flux harmonics of order  $k$  by chording with a coil shortening of  $1/k$ . Depicted here for order number  $k = 5$

Selbst wenn es nicht möglich ist, einzelne Harmonische vollständig zu eliminieren, ist die Minimierung unerwünschter Harmonischer ein wichtiges Ziel beim Entwurf des Wicklungsschemas (s. Tabelle am Ende dieses Abschnitts).

Even if certain harmonics could not be completely eliminated, it is one objective of the winding scheme design to minimize undesired harmonics (see table at the end of this section).

Bei einer solchen Optimierung brauchen Harmonische der Ordnungszahlen 2 und 3 und deren Vielfache aus folgenden Gründen nicht betrachtet zu werden:

Within such an optimization, harmonics of order numbers 2 and 3 and multiples are not needed to be considered due to the following reasons:

Gewöhnlich dürfen wir davon ausgehen, dass die räumliche Flussdichteverteilung bezüglich ihrer Halbperioden symmetrische Gestalt besitzt, dass also die Oberwellenkoeffizienten  $\phi_{2k}$  verschwinden (ggf. sind diese ggf. wegen fertigungsbedingter Unterschiede

Usually, the spatial flux distribution can be considered symmetrical with respect to the half-waves, i.e. the harmonic wave coefficients  $\phi_{2k}$  are zero (possibly there are small deviations from zero due manufacturing deviations of the magnets). Thus, flux and

der einzelnen Magnete nicht exakt Null). Geradzahlige Fluss- und EMK-Oberschwingungen treten also nicht auf, auch wenn die betreffenden Wicklungsfaktoren nicht Null sein sollten.

Als Basis zur Erörterung der Oberschwingungen der Ordnung 3 und Vielfachen davon sollen zunächst die Strangspannungen der Phasen  $b$  und  $c$  ergänzt werden, wobei wir von einer Symmetrie der drei Phasen ausgehen. Ähnlich zu (2.100) ergibt sich

$$\begin{aligned} e_b &= N \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} jk\omega\phi_{\underline{k}} \xi_{\underline{bk}} e^{jk\varepsilon} = N \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} jk\omega\phi_{\underline{k}} \xi_{\underline{ak}} e^{jk(\varepsilon-2\pi/3)} \\ e_c &= N \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} jk\omega\phi_{\underline{k}} \xi_{\underline{ck}} e^{jk\varepsilon} = N \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} jk\omega\phi_{\underline{k}} \xi_{\underline{ak}} e^{jk(\varepsilon+2\pi/3)} \end{aligned} \quad (2.103)$$

mit

$$\xi_{\underline{ak}} = e^{j\frac{2k\pi}{3}} \xi_{\underline{bk}} = e^{-j\frac{2k\pi}{3}} \xi_{\underline{ck}}, \quad \xi_k = \left| \xi_{\underline{ak}} \right| = \left| \xi_{\underline{bk}} \right| = \left| \xi_{\underline{ck}} \right| \quad (2.104)$$

Aus (2.100) und (2.103) zeigt sich, dass Oberschwingungen der Ordnungszahlen  $k=3k'$  in den drei Wicklungssträngen gegeneinander *nicht* phasenverschoben sind, sondern als Gleichtaktanteil auftreten, der sich in Leiter-Leiter-Spannungen einer Sternschaltung aufhebt.

Insofern sind also nur die Ordnungszahlen 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw., also die Ordnungszahlen  $k=6k' \pm 1$ , von Interesse.

### Spezielle Wicklungsschemata

Fig. 2-27 zeigt in abgewickelter Darstellung das schon oben vorgestellte Wicklungsschema aus Fig. 2-25, welches sich nicht über ein Polpaar, sondern erst nach 5 Polpaarteilungen wiederholt (im Bild ist nur etwas mehr als die Hälfte dieser Periode dargestellt). Das Verhältnis von Nuten und Polen ist hier 12 zu 10, so dass eine Lochzahl von  $q=0,4$  resultiert. Auch bei diesem Schema kommen konzentrierte Wicklungen (Zahnspulen) mit den schon diskutierten Vorteilen zum Einsatz. Der Wicklungsfaktor

EMF harmonic oscillations of even orders, however, will not occur, even if the respective winding factors are not zero.

Before starting the discussion of harmonic oscillations of order 3 and multiples of this, the phase voltages of phases  $b$  and  $c$  should be supplemented. However, the three phases are assumed symmetrical. Similar to (2.100) it yields

with

From (2.100) und (2.103) we learn that the harmonic oscillations of order numbers  $k=3k'$  are *not* phase-shifted in the three phases, but appear as common-mode voltage which is cancelled out in the phase-to-phase voltages of a star connection.

As a result, only the order numbers 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 etc., i.e. the order numbers  $k=6k' \pm 1$  are of interest.

### Special winding schemes

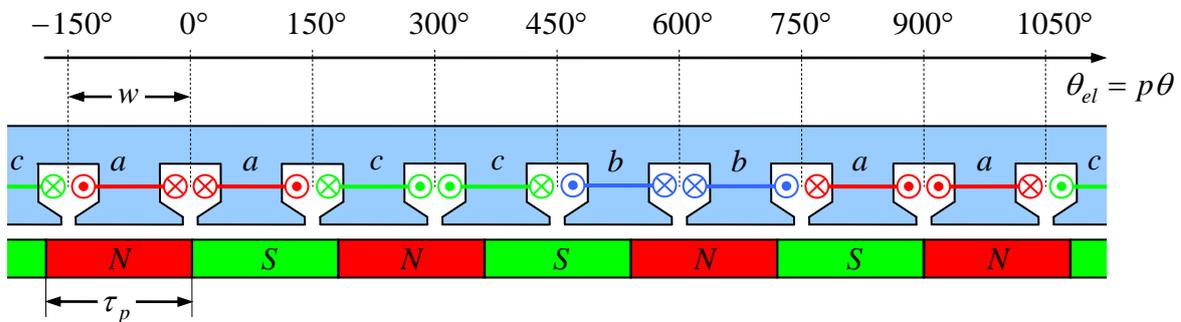
Fig. 2-27 shows the unwound representation of the already introduced winding scheme of Fig. 2-25, whose winding arrangement is not repeated after one, but only after 5 pole pair pitches (in the figure, only slightly more than half of this period is shown). The ratio of slots to poles is 12 to 10, resulting in a notch number of  $q=0.4$ . In this scheme, as well, concentrated windings (tooth windings) are employed. The corresponding advantages of this winding type were discussed earlier. The winding factor can be calculated using (2.92)

bestimmt sich nach (2.92) bzw. (2.96) zu or (2.96) as:

$$\xi_1 = \left| \underline{\xi}_{a1} \right| = \frac{1}{8} \left| -e^{-j150^\circ} + 2e^{j0^\circ} - e^{j150^\circ} + e^{j750^\circ} - 2e^{j900^\circ} + e^{j1050^\circ} \right| = 0.933.$$

Der Wicklungsfaktor dieses Schemas ist sogar noch etwas günstiger als derjenige des einfachen Wicklungsschemas mit konzentrierte Wicklungen von 0,866. Außerdem werden sogar die Oberwellen 5. und 7. Ordnung besser unterdrückt (s. Tabelle weiter unten).

The resulting winding factor of this scheme is even slightly better than the one of the simple winding scheme with concentrated windings of 0.866. Moreover, the 5th and 7th harmonic waves are suppressed more effectively (see table below).



$$Q/(2p) = 12/10, q = 0.4, \xi_1 = 0.933$$

**Fig. 2-27:**

Wicklungsschema mit konzentrierte Wicklungen

Winding scheme with concentrated windings

Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse für verschiedene Wicklungsschemata zusammen und zeigt darüber hinaus auch die Wicklungsfaktoren für die Oberwellen. Hierbei wurden auch die Daten für die Zonenwicklungen nicht wie oben durch Näherung eines kontinuierlichen Strombelages nach (2.89), sondern unter Berücksichtigung der einzelnen Nuten über (2.92) bestimmt.

The following table summarizes the results for different winding schemes and also shows the winding factors for the harmonic waves. Here, also the data for the zone windings were not determined by approximation of a continuous current coverage as with (2.89), but by taking into account the individual slot numbers using (2.92).



## 2.9 Zusammenhang zwischen Motorgeometrie und Drehmomentausbeute Relation between motor geometry and torque yield

Die Drehmomentgleichung

The equation for the torque is given as

$$T = \frac{3}{2} p \psi_p i_{sq} \quad (2.105)$$

suggeriert, dass Motoren mit großer Polpaarzahl  $p$  für die Erzeugung großer Drehmomente günstig seien. Das soll einer genaueren Betrachtung unterzogen werden. Nach dem vorangegangenen Kapitel gilt

This equation suggests that motors with high pole pair numbers are more suitable for the generation of high torques. This shall be examined more carefully in the following. According to the previous chapter

$$\psi_p = N \xi \phi_p = \frac{2 N \xi r l \hat{b}_p}{p} \quad (2.106)$$

also

and thus holds

$$T = 3 \xi r l \hat{b}_p N i_{sq} \quad (2.107)$$

In dieser Darstellung erkennen wir, dass das Drehmoment von Material- und Konstruktionsdaten wie der magnetischen Flussdichte und Windungszahl abhängt. Die Zahl der Polpaare tritt in dieser Darstellung aber nicht mehr auf.

We see from this equation that the torque depends on material and construction data as the flux density and the number of turns. The number of pole pairs, however, does no longer appear in this representation.

Unter der Annahme, dass  $i_{sd} = 0$  ist, gibt allein  $i_{sq}$  den Scheitelwert der Strangströme  $i_a, i_b, i_c$  an.

Under the assumption of  $i_{sd} = 0$ , only  $i_{sq}$  determines the amplitude of the phase currents  $i_a, i_b, i_c$ .

$$\hat{i}_a = \hat{i}_b = \hat{i}_c = i_{sq} \quad (2.108)$$

Für die Effektivwerte aller drei Stränge ergibt sich also

The root mean square (RMS) values for the three phases result to

$$I_a = I_b = I_c = \frac{1}{\sqrt{2}} i_{sq} \quad (2.109)$$

Nehmen wir an, dass jeder Wicklung a, b, c für Hin- bzw. Rückleiter jeweils  $1/6$  der Umfangslänge  $2\pi r$  zur Verfügung steht, was bei der Zonenwicklung geometrisch genau zutrifft, bezüglich des Problems der Wärmeableitung aber auch für alle anderen Wicklungsarten angesetzt werden darf. Dann ergibt sich eine effektive Stromdichte von

Let us assume that for each phase a, b, c, the incoming and outgoing conductors, respectively, cover  $1/6$  of the circumference length of  $2\pi r$ . With respect to zone windings, this applies exactly. As far as the problem of heat dissipation is concerned, this assumption may, however, also be applied to other types of windings schemes. Thus, the effective current density results to

$$A = \frac{NI_a}{2\pi r/6} = \frac{6N}{\sqrt{2}2\pi r} i_{\text{sq}} = \frac{3N}{\sqrt{2}\pi r} i_{\text{sq}} \quad (2.110)$$

Die maximal mögliche effektive Stromdichte ist eine von der Bauart des Motors, insbesondere durch die Kühlungsart bestimmte charakteristische Größe und kann für Motoren unterschiedlicher Größe, aber gleicher Bauart überschlägig als Konstante betrachtet werden. Typische Werte liegen in der Größenordnung von

The maximum effective current density depends on the design of the motor and the method of cooling, in particular. This characteristic quantity can be regarded as approximately constant for motors of different ratings, but same design. Typical values lie in the range of

$$A_{\text{max}} \approx 40 \dots 80 \frac{\text{kA}}{\text{m}} \quad (2.111)$$

Mit dieser Größe erhält die maximale mögliche Drehmomentausbeute nun folgende Gestalt:

With this quantity, the maximum possible torque yield can be calculated as follows:

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= \frac{3}{2} p \psi_p i_{\text{sq max}} = \frac{3}{2} p \frac{2N\xi r l \hat{b}_p}{p} \frac{\sqrt{2}\pi r}{3N} A_{\text{max}} \\ &= \sqrt{2} \xi \hat{b}_p \pi r^2 l A_{\text{max}} = \sqrt{2} \xi \hat{b}_p A_{\text{max}} V_{\text{rotor}} \end{aligned} \quad (2.112)$$

wobei

whereas

$$V_{\text{rotor}} = \pi r^2 l \quad (2.113)$$

das Volumen des magnetischen aktiven Teils des Rotors ist.

represents the volume of the magnetic active portion of the rotor.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man unter Betrachtung der mittleren Schubspannung  $\bar{\sigma}$ , auch *Drehschub* genannt, die ein Flächenelement des Stators aufgrund der Lorentzkraft erfährt. Die mittlere Schubspannung kann direkt durch das Produkt der Effektivwerte der Strom- und Flussdichten gebildet werden, wobei der Wicklungsfaktor  $\xi$  die Abweichung von geometrisch nicht idealen Anordnungen berücksichtigt:

The same result can be reached by considering the average shear stress  $\bar{\sigma}$ , also called *rotary shear*, experienced by a stator surface element due to the Lorentz force. The average shear stress can be calculated directly as the product of the RMS values of current and flux densities, whereas the winding factor  $\xi$  accounts for geometrically non-ideal arrangements:

$$\bar{\sigma}_{\text{max}} = \xi \frac{\hat{b}_p}{\sqrt{2}} A_{\text{max}} \approx 25 \dots 50 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 25 \dots 50 \text{kP} \quad (2.114)$$

Mit  $\hat{b}_p \approx 1\text{T}$ ,  $\xi \approx 0,9$  und den Strombelagswerten nach (2.114) erhalten wir für

With  $\hat{b}_p \approx 1\text{T}$ ,  $\xi \approx 0.9$ , and current loading values from (2.114) typical shear stress values

die Subspannung Werte von

result as

$$\bar{\sigma}_{\max} \approx 25...50 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 25...50 \text{ kP} \quad (2.115)$$

Zum Vergleich: Der Luftdruck auf Meereshöhe liegt bei rund 1000 hP = 100 kP. Die maximalen elektromagnetischen Spannungen erreichen also nur ein Bruchteil dieses Werts. Drücke in hydraulischen Systemen sind sogar um einige Hundert Male größer.

For comparison: The air pressure on sea level is about 1000 hP = 100 kP. The maximum electromagnetic stress reaches only a fraction of this value. Hydraulic pressures, however, are by factors of some hundreds much larger.

Die Integration der Schubspannung über die Rotormantelfläche  $2\pi r l$  und Multiplikation mit dem Hebelarm  $r$  führt dann zur bereits bekannten Formel für die maximale Drehmomentausbeute

The integration of the shear stress over the rotor surface  $2\pi r l$  and multiplication by the lever arm  $r$  leads to the already introduced formula for the maximum achievable torque output

$$T_{\max} = \sqrt{2} \pi r l r \xi \hat{b}_p A = \sqrt{2} \xi \hat{b}_p V_{\text{rotor}} A_{\max} \quad (2.116)$$

Die Drehmomentausbeute eines Motors hängt also neben den von Bauart und Material bestimmten Konstanten  $A_{\max}$ ,  $\hat{b}_p$ ,  $\xi$  im Wesentlichen vom Rotorvolumen  $V_{\text{rotor}}$  ab. Es folgen also typische Drehmomentdichten von

One can see that apart from the motor design and material specific constants  $A_{\max}$ ,  $\hat{b}_p$ ,  $\xi$  the torque yield of a motor depends mainly on the rotor volume  $V_{\text{rotor}}$ . Typical torque densities result to

$$\frac{T_{\max}}{V_{\text{rotor}}} = \sqrt{2} \xi \hat{b}_p A_{\max} = 2\bar{\sigma}_{\max} \approx 50...100 \frac{\text{kNm}}{\text{m}^3} \quad (2.117)$$

Von der Polpaarzahl hängt dieses Ergebnis also *nicht* ab.

It becomes obvious, that this result does *not* depend on the number of pole pairs.

Die Polpaarzahl nimmt jedoch über einen anderen Weg Einfluss auf die resultierende Motorgröße: Je Pol dringt in den Stator nach (2.73) – unabhängig vom konkreten Wicklungsschema – der Fluss

However, the number of pole pairs has an impact on the resulting motor size: According to (2.73), the stator is penetrated per pole – independent of the particular winding scheme – by the flux

$$\phi_p = \frac{2r\hat{b}_p}{p} \quad (2.118)$$

ein. Dieser Fluss muss über das Statorjoch von einem magnetischen Pol zu den benachbarten mit entgegengesetzter Magnetisierung zurückgeleitet werden, siehe Fig. 2-28. Ist  $b_{\max}$  die Flussdichte, die im Statorjoch nicht überschritten werden soll, ergibt sich die notwendige Dicke wie folgt:

This flux must be conducted back via the stator yoke from one magnetic pole to the neighbored poles of opposite magnetization, see Fig. 2-28. If  $b_{\max}$  is the flux density which should not exceeded in the stator yoke, we find the required thickness as follows:

$$\frac{\phi_p}{2} = \frac{r\hat{b}_p}{p} = dl b_{\max}$$

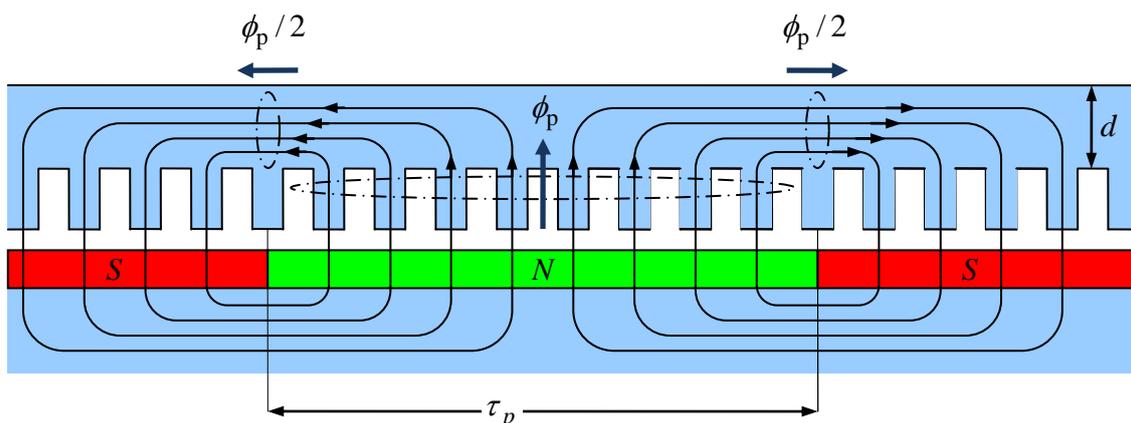
$$d = \frac{r\hat{b}_p}{pb_{\max}} \quad (2.119)$$

Diese Gleichung ist als erste Abschätzung zu verstehen, da das vom Statorstrom verursachte Feld noch nicht berücksichtigt wurde. Es wird jedoch klar, dass die Jochdicke mit zunehmender Polpaarzahl abnimmt.

This equation should be understood as first guess as the field which is contributed by the stator current has not yet been considered. However, it makes clear that the yoke thickness decreases with higher pole pair numbers.

Durch geringere Jochdicke wird darüber hinaus die Wärmeableitung verbessert, so dass dadurch ggf. sogar eine größere Stromdichte möglich wird.

Additionally, a thinner yoke improves the heat conduction of the motor, potentially allowing higher current densities in return.



**Fig. 2-28:**

Wege des magnetischen Flusses. Statorwicklungen sind nicht dargestellt.

Paths of the magnetic flux. Stator windings are not depicted.

Ein weiterer Einfluss der Polpaarzahl ergibt sich über die *Wickelköpfe*: Je höher die Polpaarzahl, desto kürzer sind die Leitungswege, um Hin- und Rückleiter einer Windung an den Motorenden zu einer geschlossenen Windung zu verbinden. Bei hoher Polpaarzahl können die Wickelköpfe klein ausgeführt werden und verkürzen auf diese Weise die *Baulänge* des Motors.

Moreover, the pole-pair number has an influence on the *end windings*: The higher the number of poles pairs, the shorter the connection paths between outgoing and incoming conductors of a winding. With a high number of pole pairs, the end windings can be made small and thus reduce the overall length of motor.

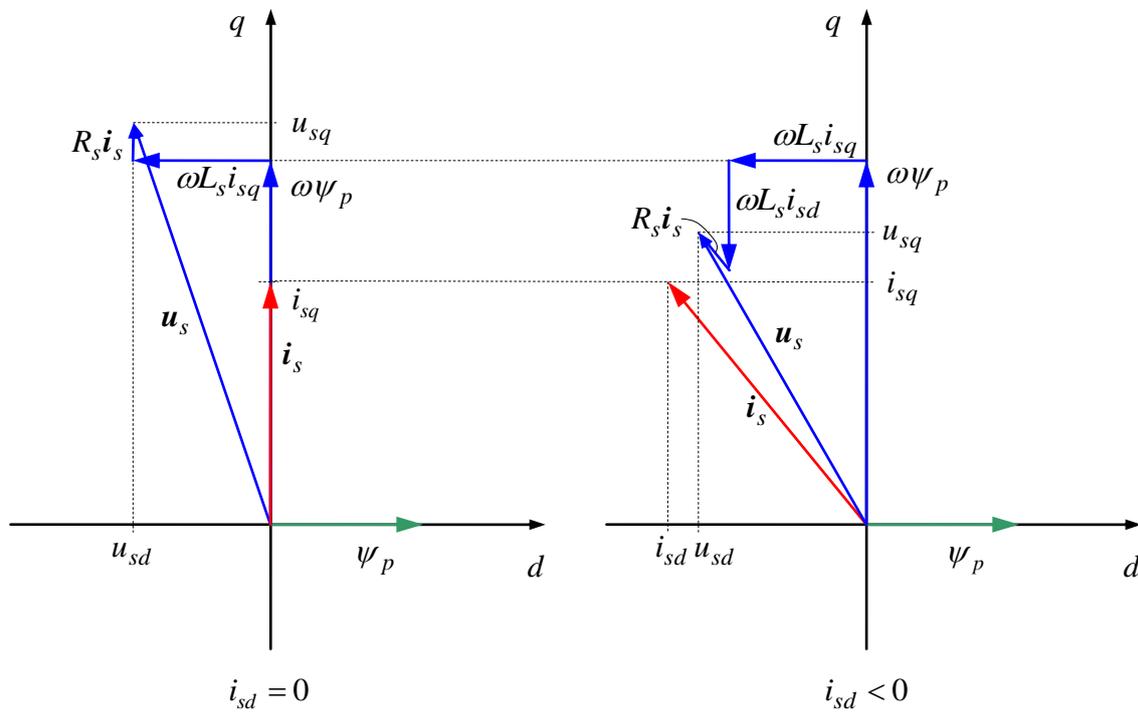
## 2.10 Stationäres Betriebsverhalten Steady-State Operational Behavior

Stationäre Spannungsgleichungen:

Steady state voltage equations are:

$$u_{sd} = R_s i_{sd} - \omega \psi_{sq} = R_s i_{sd} - \omega L_s i_{sq} \quad (2.120)$$

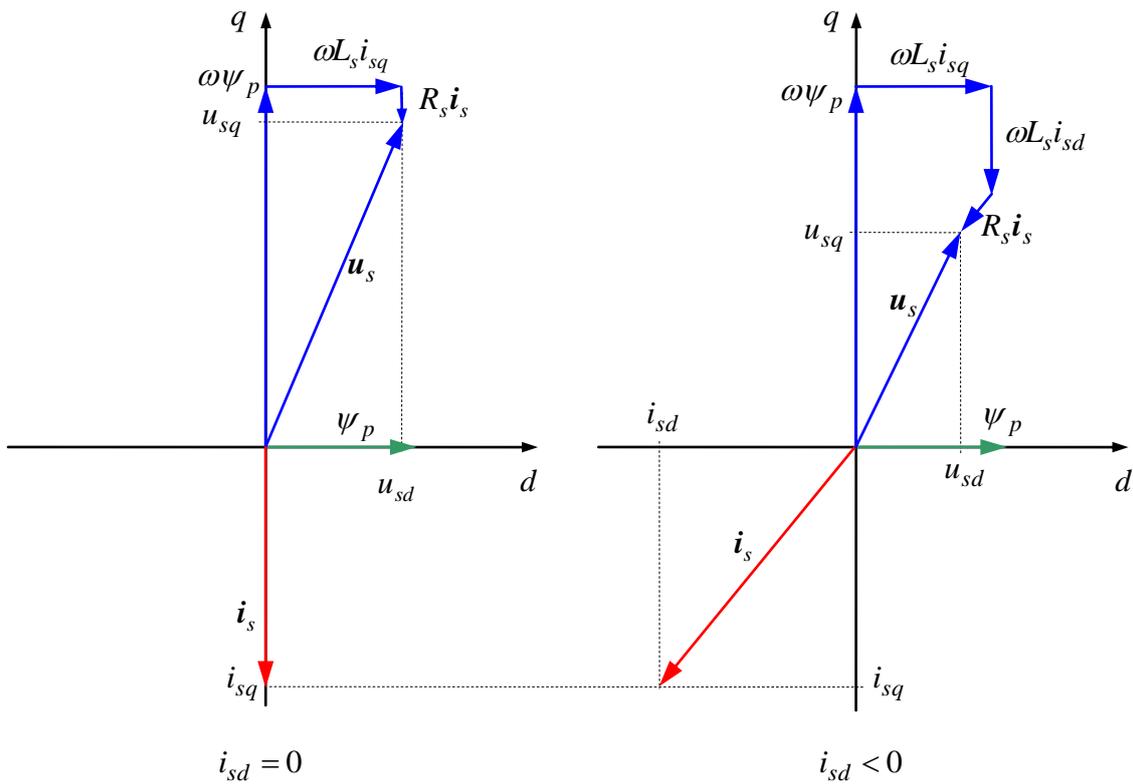
$$u_{sq} = R_s i_{sq} + \omega \psi_{sd} = R_s i_{sq} + \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p$$



**Fig. 2-29:**

Stationäre Zeigerdiagramme für jeweils gleiche Drehzahl und gleiches motorisches Drehmoment, links ohne und rechts mit negativem  $d$ -Strom

Steady-state phasor diagrams for same motor torque and speed, respectively, left without negative  $d$ -axis current, right with negative  $d$ -axis current.

**Fig. 2-30:**

Stationäre Zeigerdiagramme für jeweils gleiche Drehzahl und gleiches generatorisches Drehmoment, links ohne und rechts mit negativem  $d$ -Strom

Steady-state phasor diagrams for same generator torque and speed, respectively, left without negative  $d$ -axis current, right with negative  $d$ -axis current.

Bestehen keine Einschränkungen in der Wahl der beiden Stromkomponenten  $i_{sd}, i_{sq}$ , wird für ein gegebenes Drehmoment  $T^*$  der Betrieb mit minimalen Verlusten (also minimalem Gesamtstrom) bei

$$i_{sq} = \frac{2}{3p\psi_p} T^*, \quad i_{sd} = 0 \quad (2.121)$$

erreicht. Insbesondere mit einem negativen  $i_{sd}$  kann aber bei gleichem Drehmoment die resultierende Ständerspannung reduziert werden. Dies geht natürlich auf Kosten der Verluste, ist aber für den Betrieb an der Spannungsgrenze bedeutsam. Da sich der Fluss in der  $d$ -Richtung über

In case of no constraints in selecting the two current components  $i_{sd}, i_{sq}$ , the desired torque  $T^*$  can be set with minimal losses (i.e. with minimum current phasor amplitude) according to

The same torque output can also be achieved by applying a negative  $i_{sd}$  current leading to a reduction of the resulting stator voltage. Although, this is of course at the expense of the losses this operation mode is of great significance when operating the motor at voltage limits. Since the flux in  $d$ -direction can be expressed by

$$\psi_{sd} = L_s i_{sd} + \psi_p \quad (2.122)$$

bestimmt, schwächt ein negativer Strom  $i_{sd}$  also den Anteil des Magneten. Daher wird diese Stromkomponente auch als *flussschwächend* bezeichnet. Im Übrigen erkennt man aus obigem Bild, dass der Permanentmagnet-Synchronmotor sowohl induktives Verhalten (Spannungszeiger eilt dem Stromzeiger voraus) als auch kapazitives Verhalten (Stromzeiger eilt voraus) aufweisen kann. Durch passende Wahl von  $i_{sd}$  ist auch der Betrieb mit Leistungsfaktor 1 möglich.

a negative  $d$ -component current weakens the flux portion provided by the permanent magnets. In consequence, this operation mode is also called *flux-weakening mode*. Moreover, you can see from the above figure that the permanent magnet synchronous motor exhibits both inductive behavior (voltage phasor leads the current phasor) and capacitive behavior (current phasor leads the voltage phasor). By suitable choice of  $i_{sd}$  operation with power factor 1 is also possible.

### Betrieb an der Strom- und Spannungsgrenze

### Operation at current and voltage limits

Der den Motor speisende Umrichter, jedoch auch der Motor selbst, ist in seiner Stromtragfähigkeit und Spannung begrenzt:

The inverter supplying the power to the motor, but also the motor itself, are exposed to current handling capacity limits as well as voltage limits:

$$i_s^2 = i_{sd}^2 + i_{sq}^2 \leq i_{\max}^2 \quad (2.123)$$

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 \leq u_{\max}^2 \quad (2.124)$$

Bei kleinen Drehzahlen ist die Spannung entsprechend klein; dort spielt die Spannungsbegrenzung keine Rolle. Dieser Betriebsbereich wird als *Spannungsstellbereich* oder in Anlehnung an die Begriffe des Gleichstrommotors als *Ankerstellbereich* bezeichnet. Wenn der Motor also mit  $i_{sd} = 0$  betrieben wird, schränkt die Stromgrenze das verfügbare Drehmoment auf

Accordingly, the voltage is small at low speeds; here, the voltage limits do not play any role. The corresponding region of operation is known as *voltage control range* or in terms of the DC-Motor *armature control range*. If the motor is operated with  $i_{sd} = 0$  then the current limit restricts the available torque to

$$|T| \leq T_{\max} = \frac{3}{2} p \psi_p i_{\max} = T_0 \quad (2.125)$$

ein. Das maximal erreichbare Drehmoment ist im Spannungsstellbereich unabhängig von der Drehzahl. Es soll also im Folgenden als Referenzwert  $T_0$  dienen.

In the armature control range, the maximum achievable torque is independent of the speed. It should serve as reference quantity  $T_0$  to be used below.

Mit zunehmender Drehzahl wächst die Spannung und kann die Spannungsgrenze erreichen. Das Einsetzen der stationären Spannungsgleichungen in die Spannungsbe-

Increasing the motor speed leads to higher voltages that will eventually reach the voltage limit. Substituting the steady-state voltage equations into the voltage limits expressions

schränkung liefert, sofern man für diese Betrachtung die ohmschen Spannungsabfälle vernachlässigt:

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 = \omega^2 \left( (L_s i_{sd} + \psi_p)^2 + L_s^2 i_{sq}^2 \right) \leq u_{\max}^2 \quad (2.126)$$

Die Vernachlässigung der ohmschen Anteile ist für Maschinen ab einer gewissen Leistungsklasse von einigen 10 kW zu rechtfertigen. Bei kleinen Motoren von einigen Watt Leistung sind die ohmschen Abfälle auch bei hoher Drehzahl ggf. in der gleichen Größenordnung wie EMK und Ankerrückwirkung. In diesem Fall kann die nachfolgende Rechnung nur als grobe Näherung betrachtet werden.

Die Spannungsbegrenzung kann also in eine Bedingung an die zulässigen Ströme umgeformt werden:

$$\left( L_s i_{sd} + \psi_p \right)^2 + L_s^2 i_{sq}^2 \leq \frac{u_{\max}^2}{\omega^2} \quad (2.127)$$

Geometrisch lässt sich dies als ein Kreis in der  $i_d, i_q$ -Ebene mit Mittelpunkt bei

$$i_{d0} = -\frac{\psi_p}{L_s}, \quad i_{q0} = 0 \quad (2.128)$$

und einem Radius von

$$i_U = \frac{u_{\max}}{L_s |\omega|} \quad (2.129)$$

interpretieren. Die Größe

$$i_0 = -i_{d0} = \frac{\psi_p}{L_s} \quad (2.130)$$

ist im Übrigen gerade der flussschwächende Strom, der den Permanentfluss  $\psi_p$  vollständig *abbaut*. Unter Vernachlässigung des ohmschen Widerstands ist die Größe  $i_0$  auch gleich dem Kurzschlussstrom des Motors; wie im Abschnitt 7.2 ausgeführt wird.

Für das Folgende wird der Auslegungs-

while neglecting ohmic voltage drops leads to

The assumption of neglecting the ohmic voltage portions is only reasonable for machines with high power ratings, i.e. several 10 kW or higher. As for small motors which operate at only a few Watts, the ohmic voltage drops can be of similar order as the back-EMF and armature reaction even at high speeds. Also, would have EMF and armature reaction of same magnitude. In this case, the following calculations may only be considered as rough approximations.

The voltage limit can be transformed into a condition for acceptable currents:

Geometrically, this can be interpreted as a circle in the  $i_d, i_q$ -plane with center point at

and a radius of

By the way, the magnitude

represents the flux weakening current which completely cancels the permanent magnet flux  $\psi_p$ . Furthermore, when neglecting the ohmic resistance the current  $i_0$  is equal to the short-circuit current of motor, as discussed in Section 7.2.

For the following, the design parameter

---

parameter

$$k = \frac{i_0}{i_{\max}} = \frac{\psi_p}{L_s i_{\max}} \quad (2.131)$$

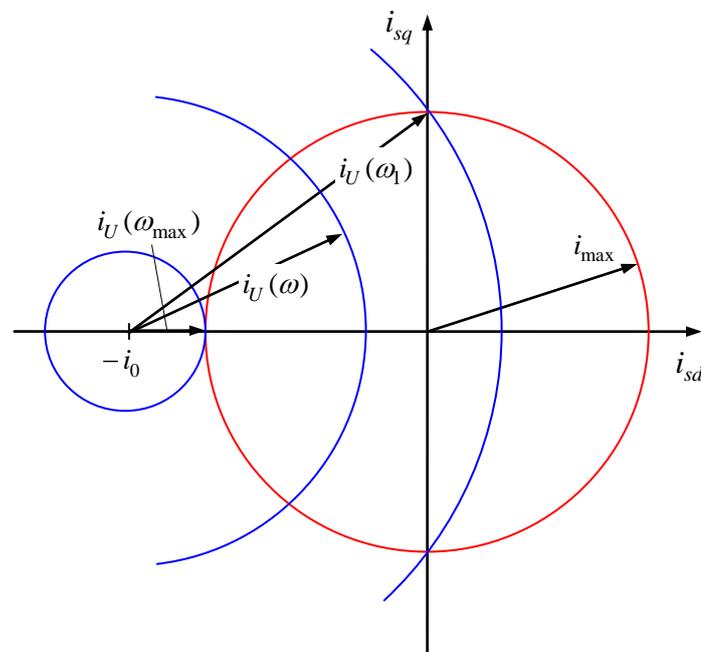
und die Bezugsdrehfrequenz

and the reference rotation frequency

$$\omega_0 = \frac{u_{\max}}{\psi_p} \quad (2.132)$$

eingeführt. Die Frequenz  $\omega_0$  charakterisiert die Drehzahl, bei der im Leerlauf gerade die Spannungsgrenze erreicht wird. Oberhalb dieser Frequenz wird unabhängig vom Drehmoment, also auch im Leerlauf, immer flussschwächender Strom benötigt.

are introduced. The frequency  $\omega_0$  refers to the no-load operation speed at which the voltage limit is reached. Above this frequency, flux-weakening current is always required independent of the desired torque output, i.e. also at no-load operation.

**Fig. 2-31:**

Begrenzungen von Strom und Spannung für den Fall  $i_0 > i_{\max}$

Current and voltage limits for  $i_0 > i_{\max}$

Das Bild zeigt in der  $i_d, i_q$ -Ebene sowohl die Strombegrenzung als auch die aus der Spannungsbegrenzung resultierenden Begrenzungskreise. Für kleine Drehzahlen ist der Radius  $i_U$  groß, so dass er nicht zum Tragen kommt und der Strom nur die Stromgrenze  $i_{\max}$  einhalten muss. Für steigende Drehzahl reduziert sich jedoch der Radius

The above figure depicts in the  $i_d, i_q$ -plane the limiting circles resulting from the corresponding current- and voltage limits. At low speeds, the radius  $i_U$  is large and does not play a role. Therefore, the current only needs to be kept below the maximum current limit  $i_{\max}$ . As the rotational speed increases the radius  $i_U = u_{\max} / \omega$  so that the set of

$i_U = u_{\max} / \omega$ , so dass sich die Menge der möglichen Betriebspunkte verringert. Mit der Strategie  $i_d = 0$ , bestimmt sich das damit noch erreichbar Drehmoment wie folgt:

possible operations points will be reduced. Staying on the strategy  $i_d = 0$ , the torque which can be still achieved is determined as follows:

$$i_q^2 + i_0^2 = i_U^2 = \left( \frac{u_{\max}}{L_s \omega} \right)^2 = \left( \frac{u_{\max}}{\psi_p} \frac{\psi_p}{L_s \omega} \right)^2 = \left( \frac{\omega_0}{\omega} i_0 \right)^2$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{i_q}{i_{\max}} = \frac{i_0}{i_{\max}} \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - 1} = k \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - 1} \quad (2.133)$$

mit

with

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.134)$$

Das Drehmoment kann jedoch gegenüber diesem Wert weiter erhöht werden, indem ein negativer Strom  $i_d$  zugelassen und der Gesamtstrom bis zur Stromgrenze  $i_{\max}$  ausgenutzt wird. Wir sprechen dann von *Flussschwächung*. Mit dieser Strategie wird nun der Motor an der Strom- als auch an der Spannungsgrenze betrieben. Es ergibt sich aus der Spannungsbegrenzung:

The torque can be increased above this value, however, if a negative current  $i_d$  is permitted and the total current is utilised up to the current limit  $i_{\max}$ . We speak of *flux weakening*. With this strategy, the motor is operated at the current as well as at the voltage limits. From the voltage limit, it follows

$$\begin{aligned} \frac{u_{\max}^2}{L_s^2 \omega^2} &= (i_{sd} + i_0)^2 + i_{sq}^2 \\ i_0^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} &= i_d^2 + 2i_{sd}i_0 + i_0^2 + i_{sq}^2 = i_{\max}^2 + i_0^2 + 2i_{sd}i_0 \\ 0 &= i_{\max}^2 + i_0^2 \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) + 2i_{sd}i_0 \end{aligned}$$

Dies lässt sich nach dem benötigten fluss-schwächenden Strom auflösen:

Solving this equation for the flux-weakening current leads to:

$$i_d = -\frac{i_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) - \frac{i_{\max}^2}{2i_0} = -\frac{1}{2} i_{\max} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right) \quad (2.135)$$

Der Einsatzpunkt der Flussschwächung (bei dem bei maximalem Strom bzw. Drehmoment erstmalig ein flussschwächender Strom benötigt wird) bestimmt sich zu

The starting point at which flux-weakening comes into effect, i.e. the point of maximum current or torque at which a flux-weakening current is required for the first time, can be determined by

$$\omega_1 = \frac{u_{\max}}{L_s \sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}}, \quad \Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (2.136)$$

Mit dem obigen flussschwächenden Strom ergibt sich nun für den drehmomentbildenden Strom

Using the above flux-weakening current, we now find the *torque-generating* current to be

$$i_{sq} = \sqrt{i_{\max}^2 - i_d^2} = i_{\max} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.137)$$

In diesem Bereich ist also das größtmögliche Drehmoment

In this area, the maximal torque results to

$$T_{\max} = \frac{3}{2} p \psi_p i_{\max} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.138)$$

bzw. in bezogener Form

or normalized to

$$\frac{T_{\max}}{T_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.139)$$

Für die weitere Betrachtung des Flussschwächbereichs sollen die beiden Fälle unterschieden werden, die dadurch charakterisiert werden, ob der Kurzschlussstrom  $i_0$  kleiner als der Maximalstrom  $i_{\max}$  ist oder nicht, ob also der Fall  $k < 1$  oder  $k > 1$  vorliegt.

For the following considerations of the flux-weakening range two cases shall be distinguished. They are characterized by the short-circuit current  $i_0$  being either smaller or larger than the maximum current  $i_{\max}$ , i.e. whether  $k < 1$  or  $k > 1$  applies.

**Fall beschränkter Drehzahl,**  
 $i_0 > i_{\max}$ , bzw.  $k > 1$

**Case of limited speed,**  
 $i_0 > i_{\max}$  or  $k > 1$

In diesem Fall liegt der Mittelpunkt des Kreises  $i_U$  außerhalb des Strombegrenzungskreises. Oberhalb einer gewissen Drehzahl findet sich keine Schnittmenge der beiden Kreise mehr. Das bedeutet, dass allein aus den elektrischen Beschränkungen eine maximale Drehzahl resultiert. Diese ist erreicht, wenn der Kreis  $i_U$  den Strombegrenzungskreis  $i_{\max}$  gerade noch berührt. Dann gilt

In this case, the center point of the circle  $i_U$  lies outside the current limiting circle. Above a certain speed the intersection of the two circles is empty. The maximum speed results directly from electrical limitations and is reached when the circle  $i_U$  barely touches the current limiting circle  $i_{\max}$ . Then, the following equations hold:

$$i_0 = i_U + i_{\max} = \frac{u_{\max}}{\omega_{\max} L_s} + i_{\max} \quad (2.140)$$

$$\omega_{\max} = \frac{u_{\max}}{L_s} \frac{1}{i_0 - i_{\max}}, \quad \Omega_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{i_0}{i_0 - i_{\max}} = \frac{k}{k-1} \quad (2.141)$$

Die oben hergeleitete Formel für das maximal verfügbare Drehmoment      The above formula derived for the maximum available torque

$$\frac{T_{\max}}{T_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.142)$$

gilt also für den Drehzahlbereich      can thus also be applied for the speed range

$$\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_{\max} .$$

Welche maximale Leistung ist nun in Abhängigkeit der Drehzahl verfügbar? Im Spannungsbereich  $\Omega < \Omega_1$  ist die bei einer Drehfrequenz  $\omega_{me}$  abrufbare maximale Leistung      Now, what is the maximum power available at a certain speed? In the voltage control range  $\Omega < \Omega_1$ , the maximum power at a certain rotational speed  $\omega_{me}$  is

$$P_{\max} = \omega_{me} T_0 = \frac{1}{p} \omega T_0 \quad (2.143)$$

Sie steigt also linear mit der Drehzahl. Da von Verlusten abgesehen wurde, ist diese mechanische Leistung auch gleich der elektrischen Wirkleistung.      Thus, the power increases linearly with the speed. As losses have not been considered, this mechanical power is equal to the electric active power.

Im Folgenden machen wir von der maximalen Scheinleistung des Stromrichters, der sogenannten installierten Scheinleistung Gebrauch,      In the following, we will make use of the maximum apparent power of the converter, the so-called installed apparent power,

$$S_{\text{inst}} = \frac{3}{2} u_{\max} i_{\max} \quad (2.144)$$

Mit dieser Größe definieren wir die wir die normierte Leistung      We use this quantity to define the normalized maximum power

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\text{inst}}} \quad (2.145)$$

Diese Größe  $\lambda$  ist im Allgemeinen nicht der Leistungsfaktor, denn die *momentane* Wirkleistung wird hier nicht auf die *momentane* Scheinleistung, sondern auf die *installierte*      Generally speaking, this value  $\lambda$  does not represent the power factor, as the *momentary* active power is not referred to the *momentary* apparent power, but to the *installed* apparent

Scheinleistung des Umrichters bezogen. Nur beim Betrieb an Strom- *und* Spannungsgrenze wird die installierte Scheinleistung auch voll ausgenutzt, so dass in diesem Fall  $\lambda$  gleich dem Leistungsfaktor ist. Allgemein kann die Größe  $\lambda$  als Maß für die Ausnutzung der installierten Stromrichterleistung angesehen werden. Sie wird als *Stromrichternutzungsgrad* bezeichnet.

power of the inverter. The installed apparent power is utilized to its full extent only when operating at the current *and* voltage limits. In this case,  $\lambda$  is equal to the power factor. In general, the value  $\lambda$  can be considered as a measure for the utilization of the installed inverter power, also known as *inverter utilization degree*.

Für den Spannungsstellbereich  $\Omega < \Omega_1$  folgt als normierte maximale Leistung bzw. Stromrichternutzungsgrad also

For the voltage control range  $\Omega < \Omega_1$ , the normalized maximum power or inverter utilization degree follows to

$$\lambda = \frac{\omega \psi_p}{u_{\max}} = \Omega \quad (2.146)$$

Im Flussschwächbereich  $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$  folgt dagegen:

On the other hand, for the flux-weakening range  $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$ , it holds

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\text{inst}}} = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.147)$$

Die Drehzahl, bei der die größtmögliche Leistung abgegeben wird, lässt sich über einige Rechenschritte zu

The speed at which maximum possible power is provided can be derived through a several calculation steps and results to

$$\Omega_{p_{\max}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \quad (2.148)$$

bestimmen. An dieser Stelle ist  $\lambda = 1$  bzw.  $P_{\max} = S_{\text{inst}}$ . Der Motor wird also mit Leistungsfaktor 1 betrieben.

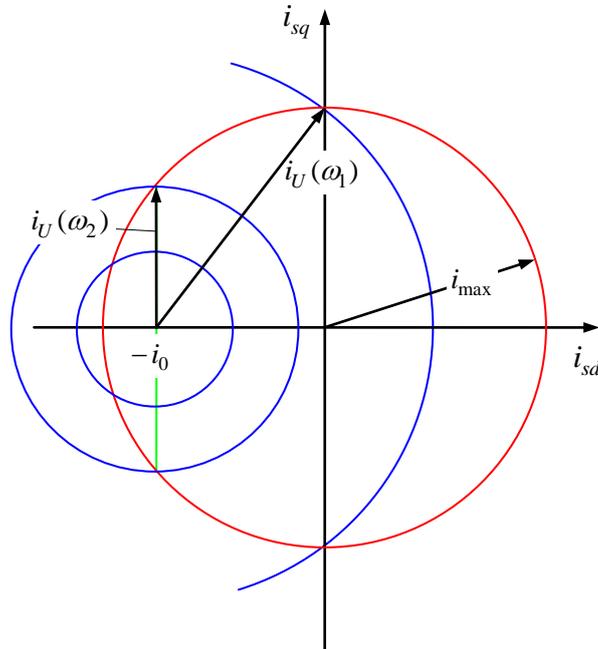
At this point, it holds  $\lambda = 1$  and  $P_{\max} = S_{\text{inst}}$ . Thus, the motor runs at power factor 1.

Antriebe mit  $k > 1$  besitzen keinen Konstant-Leistungsbereich. Für Pumpen oder Lüfter, deren Leistungsbedarf ohnehin mit wachsender Drehzahl immer weiter steigt, ist ein Konstant-Leistungsbereich auch nicht erforderlich. Soll der Antrieb aber einen Konstant-Leistungsbereich aufweisen, ist  $k < 1$  zu wählen:

Drives with  $k > 1$  do not have a constant power range. For pump sets and fans, whose performance increases with increasing speed, anyways, a constant power range is not necessary. However, if the drive shall exhibit a constant power range  $k < 1$  has to be selected.

**Fall unbeschränkter Drehzahl,**  
 $i_0 < i_{\max}$ , bzw.  $k < 1$

**Case of unlimited speed,**  
 $i_0 < i_{\max}$  or  $k < 1$



**Fig. 2-32:**

Begrenzungen von Strom und Spannung für den Fall  $i_0 < i_{\max}$

Current and voltage limitations for  $i_0 < i_{\max}$

Im Spannungsstellbereich  $\Omega < \Omega_1$  gibt es keinen prinzipiellen Unterschied zum Fall. Auch das Verhalten beim Eintritt in die Flussschwächung ist zunächst noch ähnlich, doch ändert sich dies zunehmend für wachsende Drehzahlen: Anders als im zuerst besprochenen Fall gibt es bei  $i_0 < i_{\max}$ , also  $k < 1$ , für jede beliebige Drehzahl eine Schnittmenge der beiden Begrenzungskreise; für jede Drehzahl finden sich also mögliche Betriebspunkte. Die Drehzahl wird durch das elektrische Verhalten *nicht* beschränkt.

In the voltage control range  $\Omega < \Omega_1$  there is no fundamental difference to the case of  $k > 1$ . Also, the behavior when entering the flux-weakening region is similar, however, with increasing speed the differences getting more and more apparent: Unlike the case of  $i_0 < i_{\max}$ ,  $k < 1$ , here, for *any* given speed, there is a non-empty intersections of the two limiting circles. Consequently, there exist valid operating points for any speed. The speed is *not* limited by the electrical behavior.

Der Flussschwächbereich  $\Omega > \Omega_1$  kann nun in zwei Bereiche eingeteilt werden. Im unteren Flussschwächbereich wird für ein maximales Drehmoment der Motor an Strom- und Spannungsgrenze betrieben. Das Drehmoment ist wie schon oben berechnet

The flux-weakening region  $\Omega > \Omega_1$  can now be divided into two ranges. In the lower flux weakening region, the motor is operated at current *and* voltage limits to achieve maximum torque. The torque is calculated just as before:

$$\frac{T_{\max}}{T_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.149)$$

Die maximale Leistung in Abhängigkeit der Drehfrequenz ist

The maximum power as a function of the speed is given by

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\text{inst}}} = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.150)$$

Dieser Betrieb ist jedoch nur bis zu einer Grenze  $\Omega < \Omega_2$  sinnvoll. Die Grenze  $\Omega_2$  wird erreicht, wenn der flussschwächende Strom  $i_d$  den Wert  $-i_0$  annimmt. Diese Grenze bestimmt sich zu

This operation is, however, only reasonable until  $\Omega < \Omega_2$ . The limit  $\Omega_2$  is reached when the flux-weakening current  $i_d$  approaches the value  $-i_0$ . This limit is determined by

$$\omega_2 = \frac{u_{\max}}{L_s \sqrt{i_{\max}^2 - i_0^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}} \quad (2.151)$$

Es ist nicht sinnvoll, bei weiter steigender Drehzahl den Strom  $i_{sd}$  unter den Wert  $-i_0$  zu senken, da dann die maximale Drehmomentausbeute verringert werden würde. Für Drehzahlen  $\Omega > \Omega_2$  wird das maximale Drehmoment stets bei einem flussschwächendem Strom

It does not make sense to decrease the current  $i_{sd}$  below the value of  $-i_0$  while speed is further increasing, as the maximum torque yield would be reduced. For speeds  $\Omega > \Omega_2$  the maximum torque is always achieved with the following flux-weakening current

$$i_{sd} = -i_0 = -k i_{\max} \quad (2.152)$$

und einem aus der Spannungsbegrenzung resultierenden drehmomentbildenden Strom von

and torque-generating current, resulting from voltage limits:

$$i_{sq} = \frac{u_{\max}}{L_s \omega_{rs}} = \frac{1}{\Omega} i_0 = \frac{k}{\Omega} i_{\max} \quad (2.153)$$

erreicht. Das Drehmoment und die Leistung resultieren in diesem Bereich dann zu

In this area, the torque and power result then to

$$T_{\max} = \frac{3}{2} p \psi_p \frac{k}{\Omega} i_{\max}, \quad \frac{T_{\max}}{T_0} = \frac{k}{\Omega} \quad (2.154)$$

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\text{inst}}} = k \quad (2.155)$$

Dieser Bereich, in dem die maximal verfügbare Leistung konstant ist, wird als

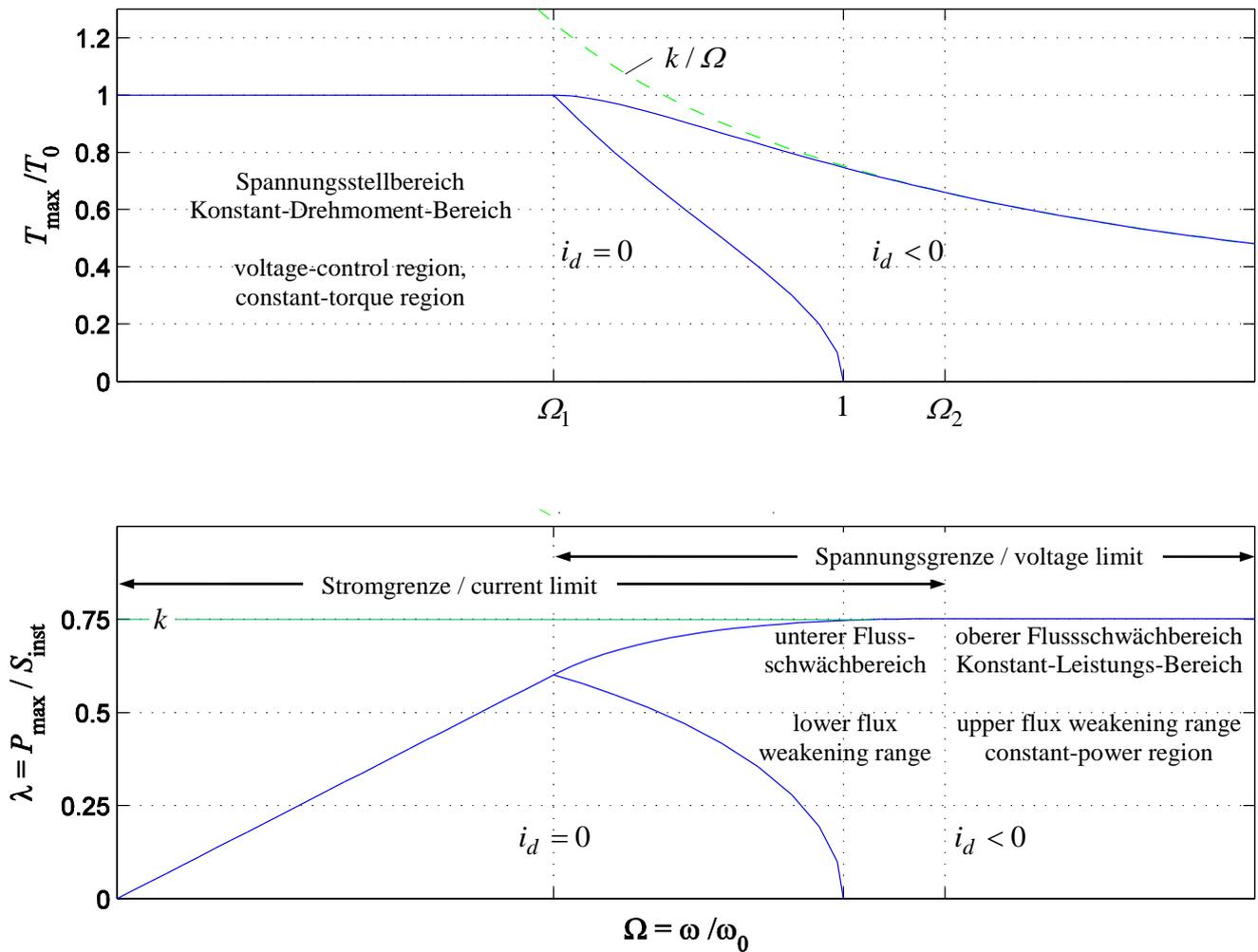
The region, where the available maximum power is constant is called the upper *flux*

*oberer Flussschwächbereich* bezeichnet. Die letzte Gleichung zeigt, dass der Stromrichter-nutzungsgrad höchstens gleich dem Auslegungparameter  $k$  sein kann. Die Stromrichterausnutzung ist mit einem kleinen  $k$  folglich schlecht. Für eine technisch-wirtschaftlich optimierte Auslegung eines Antriebs mit einem Konstant-Leistungsbereich - zum Beispiel für automobiler Anwendungen - wird man folglich ein  $k$  unter, aber nahe 1 anstreben. Häufig findet man  $k = 0,8...0,9$ .

Im Fall  $k > 1$  gibt es dagegen immer eine passende Drehfrequenz, bei der die installierte Stromrichterleistung vollständig als Wirkleistung bzw. mechanische Leistung genutzt werden kann.

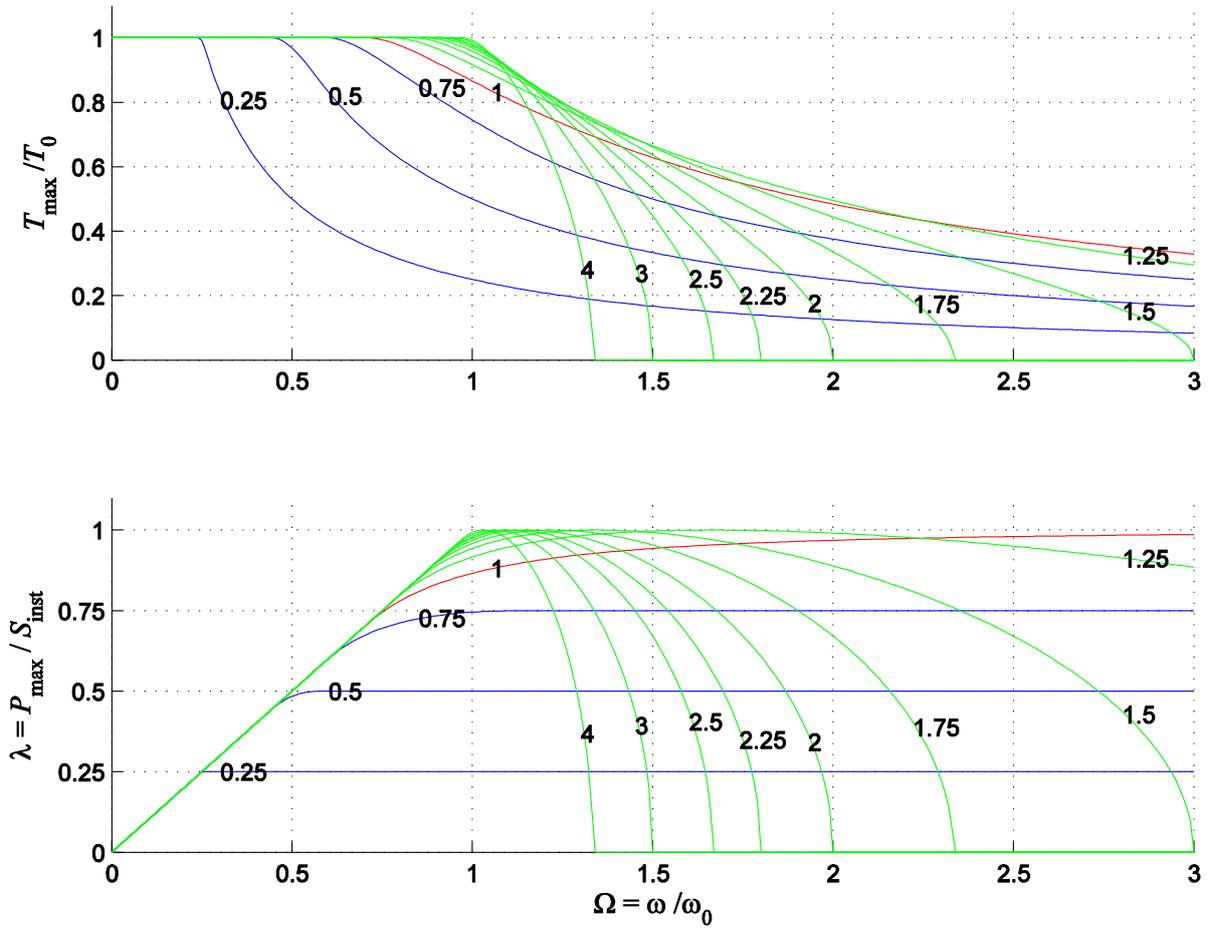
*weakening region*. The last equation shows that the inverter utilization degree can be at most equal to the design parameter  $k$ . Accordingly, the inverter utilization is poor for small values of  $k$ . For a technically and economically optimized design of a drive with a constant-power range, as it is common in automotive applications,  $k$  values below but close to 1 are thus preferred. Quite often, values in the range of  $k = 0.8...0.9$  can be found in this context.

In case of  $k > 1$ , however, there exists always a suitable rotation frequency where the installed inverter power can be completely be utilized as active power or mechanical power, respectively.

**Fig. 2-33:**

Maximales Drehmoment und maximale Leistung (Stromrichternutzungsgrad  $\lambda$ ) über der Drehzahl für das Beispiel  $k = 0,75$

Maximum torque and maximum power (inverter utilization degree  $\lambda$ ) vs. motor speed for the example  $k = 0.75$



**Fig. 2-34:**

Maximales Drehmoment und maximale Leistung über der Drehzahl in normierter Darstellung. Parameter der Kurvenscharen ist der Auslegungsparameter  $k = i_0 / i_{\max}$

Maximum torque and maximum power vs. speed in a normalized representation.

Parameter of the array of curves is the design parameter

$$k = i_0 / i_{\max}$$

### 3 Umrichter Inverter

Stand der Technik ist heute die Speisung von Drehstrommotoren über Umrichter aus einer Gleichspannungsquelle, dem *Spannungszwischenkreis* (*U-Umrichter*).

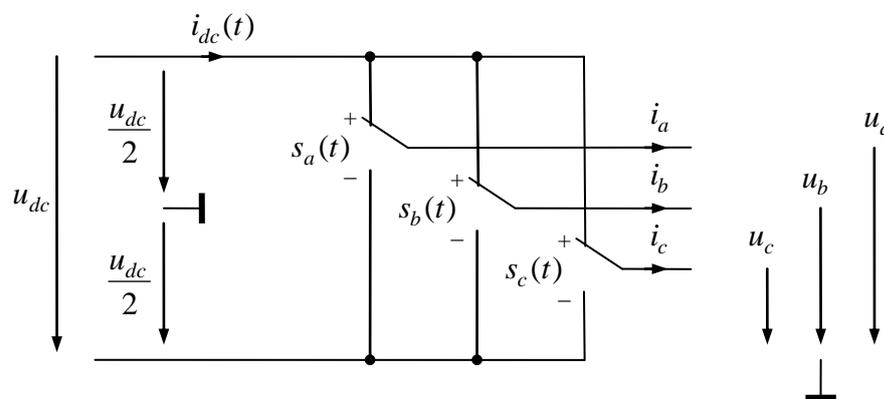
Bei Drehstrommotoren sehr großer Leistung von rund 10 MW oder darüber kommen auch Umrichter mit *Stromzwischenkreis* (*I-Umrichter*) sowie Direktumrichter oder Matrixumrichter in Betracht. In diesem Rahmen konzentrieren wir uns ausschließlich auf den gleichspannungsgespeisten Umrichter, der auch als *Pulswechselrichter* bezeichnet wird.

Der Umrichter mit Spannungszwischenkreis ist eine dreisträngige Brückenschaltung (B6). Das Funktionsprinzip kann mit idealen Schaltern wie im Bild dargestellt werden.

Today's state-of-the-art technology relies on feeding AC- or three-phase-motors from a DC voltage source, also known as *voltage-source inverter* (VSI).

For AC motors with very high power ratings up to 10 MW or above, inverters with current source DC-link (*current-source inverter*, CSI) or cyclo-converters or matrix inverters are also employed. In this lecture, we will focus only on voltage-source inverters.

The inverter with DC-link is a three-phase bridge circuit (B6). The operating principle can be illustrated with ideal switches, as shown in the figure below.



**Fig. 3-1:**  
Idealisierter Umrichter mit  
Gleichspannungsspeisung

Idealized inverter with DC  
power supply



**Fig. 3-2:**  
Gebräuchliche Schaltsymbole  
für den Umrichter mit Gleich-  
spannungsspeisung

Common circuit symbols for  
inverter with DC power supply

Die Schalterstellungen werden durch die *Schaltfunktionen*  $s_a(t)$ ,  $s_b(t)$ ,  $s_c(t)$  beschrieben. Hierbei stehe  $s_{a,b,c} = +1$  für die obere,  $s_{a,b,c} = -1$  für die untere Schalterposition. Am Eingang (Gleichspannungsseite) des Umrichters kann eine Gleichspannung eingeprägt werden, am Ausgang (Wechselspannungsseite, Motorseite) werden durch die induktive Last Ströme eingeprägt. Abhängig von den Schalterstellungen bestimmen sich die Ausgangsspannungen sowie der eingangsseitige Strom über die Schaltfunktionen nach

The switch positions are described by the *switching functions*  $s_a(t)$ ,  $s_b(t)$ ,  $s_c(t)$ . Whereas switching state  $s_{a,b,c} = +1$  is assigned to the upper switch position,  $s_{a,b,c} = -1$  represents the lower position. At the input (DC side) of the inverter a DC voltage is applied and at the output (AC side, motor) currents are fed into a connected inductive load. Depending on the switch positions, the output voltages as well as the input current can be determined with the help of the switching functions as follows:

$$u_{a,b,c}(t) = \frac{1}{2} s_{a,b,c}(t) u_{dc}(t) \quad (3.1)$$

$$i_{dc}(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} s_k(t) i_k(t) \quad (3.2)$$

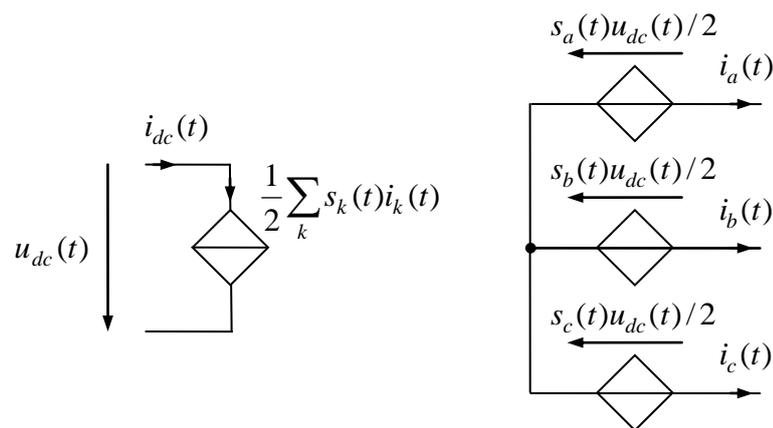
Das Bezugspotential für die Ausgangsspannungen wird der Einfachheit halber gedanklich auf den Mittelpunkt der Eingangsgleichspannung festgelegt. Schaltungstechnisch existiert dieser Punkt üblicherweise nicht. Insbesondere findet auch kein Stromausgleich über dieses Potential statt. Der angeschlossene Motor sei stets im Stern oder Dreieck geschaltet, so dass

For simplification, the reference potential for the output voltages is set to the midpoint of the DC input voltage, as shown in the figure. In terms of actual circuitry this point does not exist, however. Moreover, there is no current balancing via this potential. The motor is connected in star or delta configuration, so that the following condition for the currents,

$$\sum_{a,b,c} i_k(t) = 0$$

gilt.

holds,

**Fig. 3-3:**

Ersatzschaltbild des Umrichters mit gesteuerten Strom und Spannungsquellen

Equivalent circuit diagram of the inverter with controlled current- and voltage sources

Die tatsächliche Ausführung des Umrichters mit Hilfe von Transistoren zeigt das folgende Bild. Je nach Leistungs- und Spannungsbereich kommen im Wesentlichen drei leistungselektronische Bauelemente als Schalter in Betracht:

The actual design of the inverter using transistors is shown in the figure below. Depending on the power and voltage requirements the following power electronics devices are commonly employed as switches.

- MOSFET (*Metal Oxide Field Effect Transistor*)
- IGBT (*Isolated Gate Bipolar Transistor*)
- Abschaltbare Thyristoren wie der GTO-Thyristor (*Gate Turn Off*) oder der IGCT (*Integrated Gate-Commutated Thyristor*)
- MOSFET (Metal Oxide Field Effect Transistor)
- IGBT (Isolated Gate Bipolar Transistor)
- GTO-Thyristor (Gate Turn Off)
- IGCT (Integrated Gate-Commutated Thyristor)

Jedes dieser drei Bauelemente wird durch eine antiparallele Diode ergänzt, so dass ein Schaltelement entsteht, welches den Strom bidirektional führen kann. (Eine Ausnahme bildet der MOSFET, der aufgrund seines Aufbaus eine sogenannte Body-Diode beinhaltet, so dass im Prinzip auf eine separate Diode verzichtet werden kann.) Spannung kann dieses Element aber nur in einer Richtung aufnehmen, was aber ausreichend ist, weil sich die Polarität der speisenden Gleichspannung üblicherweise nicht ändert. Auf der Gleichspannungsseite muss örtlich dicht an den Leistungshalbleitern ein Kondensator vorgesehen werden, da sich der

Each of these three components is connected with an anti-parallel diode, thus forming a switching element which can carry current in both the directions (except for the MOSFET, which due to its body structure already includes a so-called body-diode making the usage of a separate diode redundant). However, the switching element only allows unidirectional voltages, which is sufficient, as the polarity of the supplying DC-link voltage usually does not change. On the DC-side close to the power semiconductors a capacitor is installed, preventing the abruptly changing current  $i_{dc}$  during switching instants to be fed to the input voltage source via a potentially

Strom  $i_{dc}$  bei einer Umschaltung sprungförmig ändert und nicht über eine lange, mit Induktivitäten behaftete Leitung zu der speisenden Spannungsquelle geführt werden darf.

long inductive cable.

Der Anwendungsbereich dieser drei Typen kann durch folgende Daten charakterisiert werden:

The target applications of the following power semiconductor devices is characterized in the table below:

	MOSFET	IGBT	GTO/IGCT
Voltages <sup>3</sup>	600 V <sup>1</sup> 1600 V <sup>2</sup>	600 V/1200 V <sup>1</sup> 6500 V <sup>2</sup>	6000 V
Currents	1 - 50 A <sup>1</sup> 690 A <sup>2</sup>	50 - 400 A <sup>1</sup> 2400 A <sup>2</sup>	4000 A
typical switching frequencies	10 - 1000 kHz	2 - 20 kHz	0.2 - 1 kHz

<sup>1</sup> Typische Standardelemente

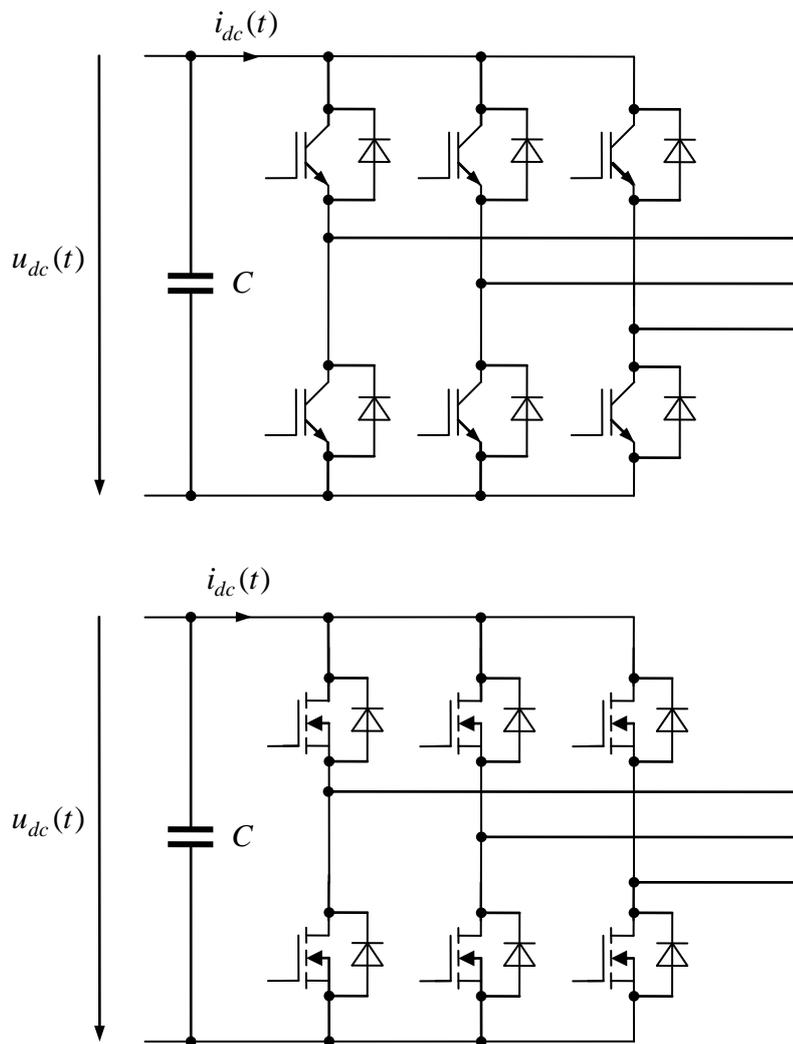
<sup>2</sup> Grenzdaten der Technologie (Stand ca. 2008)

<sup>3</sup> Hier sind die maximalen Sperrspannungen angegeben. Es muss berücksichtigt werden, dass die Betriebsspannung eines Umrichters die maximale Sperrspannung der Bauelemente typischerweise nur zu etwa 65-80% ausnutzt, da eine Spannungsreserve zur Beherrschung transienter Spannungsspitzen während der Kommutierung benötigt wird.

<sup>1</sup> Typical standard elements

<sup>2</sup> technological limits (2008)

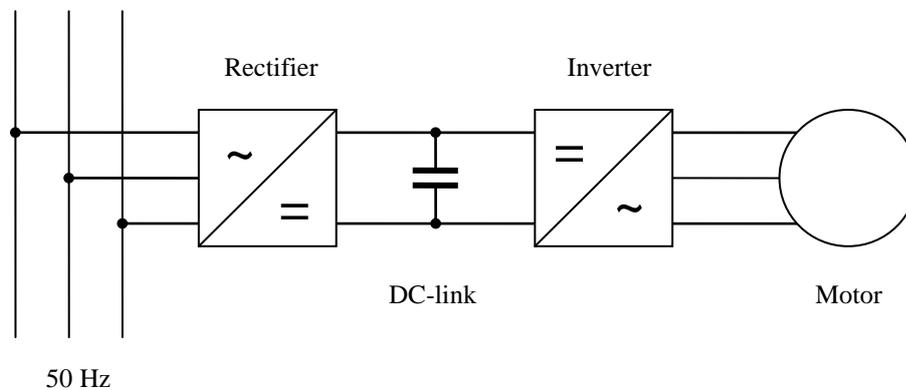
<sup>3</sup> Here, the maximum blocking voltages are given. One should be aware, that the nominal operating voltage of an inverter utilizes only 65-80% of the blocking voltage of the power transistors. This is due to safety margins that need to be kept, enabling the device to handle transient voltage peaks which occur during commutations.



**Fig. 3-4:**  
Dreisträngiger Umrichter mit IGBT (oben) oder MOSFET (unten)  
Three-Phase inverter with IGBT (above) or MOSFET (below)

Den Gleichspannungskreis bezeichnet man als *Zwischenkreis*, wenn die Gleichspannung selbst durch Umformung, beispielsweise durch Gleichrichtung eines Wechsel- oder Drehspannungsnetzes bereitgestellt wird (s. Bild). Der Gleichrichter kann aus einer einfachen Diodenbrücke bestehen. Bei aufwändigeren Systemen, insbesondere dann, wenn eine Rückspeisung elektrischer Leistung in das Versorgungsnetz möglich sein soll, kann für den Gleichrichter dieselbe (gespiegelte) Schaltung wie für den motorseitigen Umrichter verwendet werden.

The DC supply feeding the inverter is referred to as intermediate circuit or DC-link, in case the DC voltage itself results from a conversion procedure, such as rectification of an AC- or three-phase voltage grid (see figure below). The rectifier can be composed of a simple bridge diode circuit. In case of more complex systems, especially when a regenerative feedback of electrical power into the grid is requested, the same inverter circuit as on the motor side (mirrored) can be used as rectifier between the grid and the DC-link.



**Fig. 3-5:**  
Anordnung mit Spannungs-  
zwischenkreis

Configuration with DC-link

Ein dreisträngiger Umrichter kann lediglich  $2^3 = 8$  Schaltzustände annehmen. Die resultierenden Ausgangsspannungen  $u_a, u_b, u_c$  können unter Anwendung der Transformation  $T$  auf zwei orthogonale Komponenten  $u_\alpha, u_\beta$  und die Nullkomponenten  $u_0$  abgebildet werden. Die Nullkomponente beschreibt das Gleichtaktverhalten der Umrichter-Ausgangsspannungen. Üblicherweise sind die Motorwicklungen, die an den Umrichter angeschlossen werden, isoliert. Die Nullkomponente, die alle drei Motorpotentiale im Gleichtakt verschiebt, hat somit keine Auswirkung und braucht also nicht betrachtet zu werden.

Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass der Nullkomponente sehr wohl eine Bedeutung zukommt. Diese ist nämlich für Verschiebungsströme über parasitäre Kapazitäten zwischen den Motorleitungen bzw. -wicklungen und dem Gehäuse, der Schirmung bzw. der Masse verantwortlich. Im Rahmen dieser elementaren Modellierung wird die Nullkomponente aber nicht berücksichtigt.

Die durch die acht Schaltzustände erzeugten elementaren Spannungsvektoren in orthogonalen  $\alpha/\beta$ -Komponenten werden mit  $v_i$  bezeichnet. Über die Transformation

The three-phase inverter can only adopt  $2^3 = 8$  switching states. The resulting output voltages  $u_a, u_b, u_c$  can be mapped to two orthogonal components  $u_\alpha, u_\beta$  and a zero component  $u_0$  via the transformation matrix  $T$ . The zero component describes the common mode behavior of the inverter output voltages. Usually the motor windings, which are connected to the inverter are isolated. The zero component which shifts all three motor phase potentials in common mode, thus, has no impact and does not need to be considered in consequence.

When having a closer look, however, one realizes that the zero component is still of importance, as it is responsible for displacement currents through parasitic capacitances between the motor windings and the housing or shielding or GND. Nevertheless, the zero component will not be considered in this basic modeling approach.

The eight fundamental voltage vectors in orthogonal  $\alpha/\beta$  coordinates generated by the eight switching states are denoted by  $v_i$ . With the help of the transformation

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \\ u_{ci} \end{bmatrix} = \frac{u_{dc}}{2} \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} s_{ai} \\ s_{bi} \\ s_{ci} \end{bmatrix}$$

werden sie aus den Schaltzuständen  $s_{a,b,c} = -1, +1$  berechnet. Der Einfachheit halber sei im Folgenden die normierten elementaren Vektoren

they can be calculated from the switching states  $s_{a,b,c} = -1, +1$ . For simplification, the normalized fundamental voltage vectors

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{u_{dc}/2} = \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} s_{ai} \\ s_{bi} \\ s_{ci} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

übergangen. Mit der Transformationsmatrix

shall be used in the following. With the help of the transformation matrix

$$\mathbf{T}_{23} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

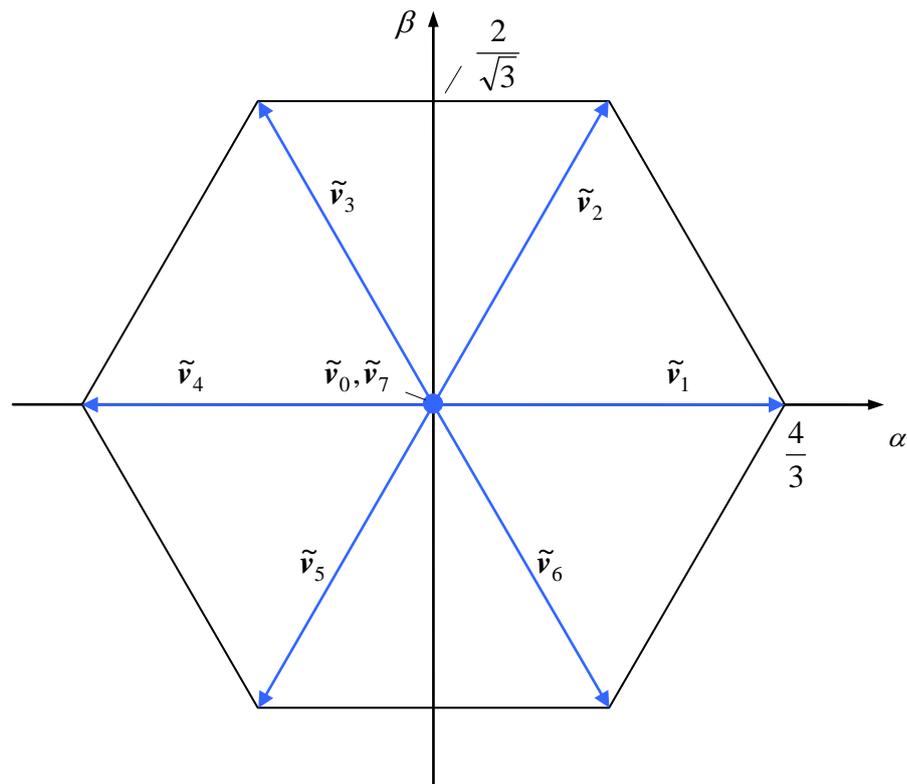
erhalten wir die nachfolgende Tabelle

the following table can be obtained.

	$s_a$	$s_b$	$s_c$	$\tilde{v}_{i\alpha}$	$\tilde{v}_{i\beta}$
$\tilde{\mathbf{v}}_0$	-1	-1	-1	0	0
$\tilde{\mathbf{v}}_1$	+1	-1	-1	+4/3	0
$\tilde{\mathbf{v}}_2$	+1	+1	-1	+2/3	+2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_3$	-1	+1	-1	-2/3	+2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_4$	-1	+1	+1	-4/3	0
$\tilde{\mathbf{v}}_5$	-1	-1	+1	-2/3	-2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_6$	+1	-1	+1	+2/3	-2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_7$	+1	+1	+1	0	0

Der Nullspannungsvektor ist durch zwei verschiedene Schalterstellungen realisierbar,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_7 = 0$ . Stellt man die elementaren Vektoren geometrisch in der  $\alpha/\beta$ -Ebene dar, spannen sie ein reguläres Sechseck auf.

The zero voltage vectors can be realized by two different switching states i.e.  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_7 = 0$ . We can depict the fundamental vectors geometrically in the  $\alpha/\beta$  plane, where they span a regular hexagon.



**Fig. 3-6:**  
Elementare Vektoren in der  
orthogonalen Ebene

Fundamental vectors in the  
orthogonal plane

## 4 Pulsweitenmodulation Pulse Width Modulation

Da ein Umrichter nur diskrete Schaltzustände annimmt und damit nur 7 verschiedene Ausgangsspannungen erzeugen kann, bedient man sich zur Realisierung von Spannungswerten der Pulsweitenmodulation. Das Prinzip wird zunächst am einsträngigen Beispiel eingeführt und dann auf drei Stränge erweitert.

Since an inverter accepts only discrete switching states and thus can generate only 7 different output voltage levels, we therefore realize intermediated voltage values with the help of a Pulse Width Modulation (PWM). The principle will first be introduced through a single phase example which will later be extended to three phases.

### 4.1 Einsträngige Pulsweitenmodulation Single-Phase Pulse Width Modulation

Der normierte Spannungssollwert

The normalized reference voltage

$$\tilde{u}^* = \frac{u^*}{u_{dc}/2} \quad (4.1)$$

ist die Eingangsgröße, der Sollwert der Schaltfunktion für die Pulsweitenmodulation,

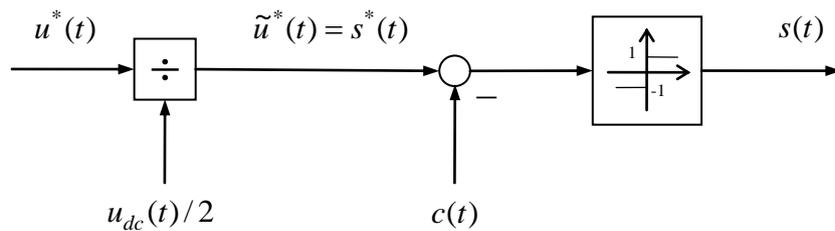
is the input variable, the reference switching function for the PWM is given by

$$s^* = \tilde{u}^* \quad (4.2)$$

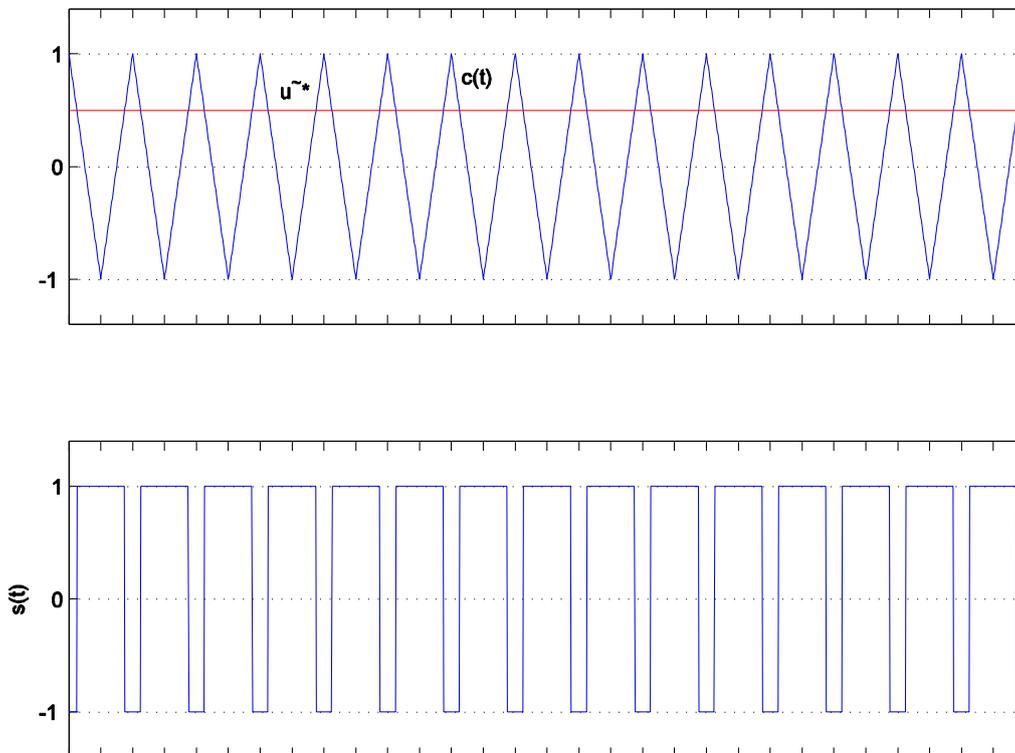
Die Schaltfunktion  $s(t)$  wird erzeugt, indem der normierte Spannungssollwert mit einem dreiecksförmigen Modulationsträger verglichen wird. Der Ausgang des Komparators ist unmittelbar die Schaltfunktion. Durch unmittelbare geometrische Interpretation dieses Verfahrens wird klar, dass der zeitliche Mittelwert der Schaltfunktion gleich dem Sollwert ist, zumindest, wenn dieser als konstant bzw. langsam veränderlich vorausgesetzt werden kann (zur genaueren Untersuchung dieses zeitlichen Verhaltens siehe auch Abschnitt 4.8, insbesondere 4.8.2):

The switching function  $s(t)$  is generated by comparing the normalized voltage value with a triangular modulation carrier. The output of the comparator can be directly referred to as the switching function. Through geometric interpretation of this procedure it becomes clear that the time average of the switching function corresponds to the reference, as long as the reference can be assumed constant or only slowly varying. (For a more detailed investigation of the temporal behavior, see also section 4.8, especially 4.8.2):

$$\overline{s(t)} = s^*$$



**Fig. 4-1:** Realisierung der Pulsweitenmodulation durch Dreiecksmodulationsträger und Komparator  
Implementation of pulse width modulation through triangular carrier modulator and comparator



**Fig. 4-2:** Modulation eines konstanten Sollwerts  
Modulation of a constant reference value

Das Verfahren wird aufgrund der Form seines Modulationsträgers als *Dreiecksmodulation* bezeichnet. Ebenfalls gebräuchlich, insbesondere im Hinblick auf die unten folgende Betrachtung sinusförmige Sollwerte, sind die Begriffe *Unterschwingungsverfahren* oder *Sinus-Dreieck-Modulation*. Gerade der letzte Begriff unterstellt aber implizit, dass dieses Verfahren nur zur

The above procedure is called *Triangular Modulation* due of the shape of its carrier signal. Especially with regard to sinusoidal reference values (see below), the term *Sine-Triangular-Modulation* is also common. Unfortunately, the last term is a bit misleading as it implies that this method can only be used for the modulation of sinusoidal reference values. Although sinusoidal reference values

Modulation sinusförmiger Sollwerte geeignet sei. Diese werden im Folgenden zwar auch hier als Beispiel betrachtet, doch soll deutlich gemacht werden, dass nicht nur konstante oder sinusförmige Signale, sondern selbstverständlich jeder beliebige transiente Verlauf möglich ist.

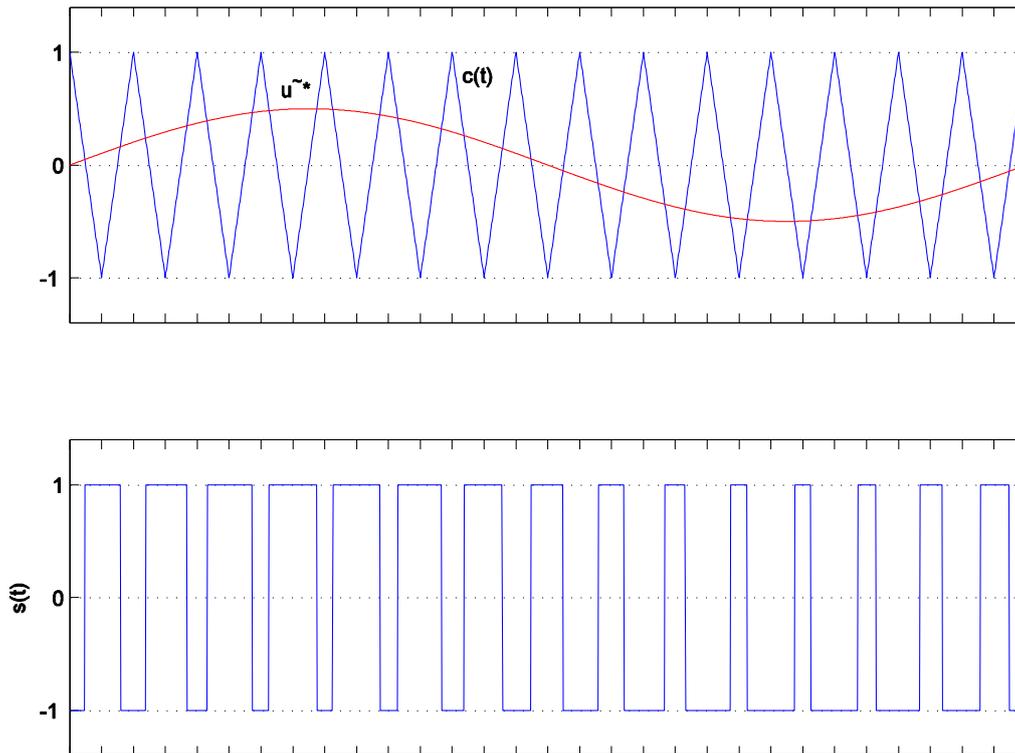
Hier werden stets symmetrische Dreiecksfunktionen als Modulationsträger verwendet. Ebenfalls ist es möglich, steigende oder fallende Sägezahnfunktionen zu verwenden.

Die resultierende Schaltfrequenz  $f_s$  der Pulsweitenmodulation wird direkt durch die Frequenz des dreiecksförmigen Modulationsträgers  $c(t)$  bestimmt. Für viele industrielle Standardgeräte hat sich ein Standard von  $f_s = 8 \dots 16$  kHz herausgebildet, doch gibt es sehr wohl Anwendungen im Bereich sehr großer Leistungen, bei denen die Schaltfrequenz nur wenige hundert Hertz beträgt. Bei Spezialanwendungen im Bereich kleiner Leistungen trifft man dagegen Schaltfrequenzen bis zu einigen 10 kHz.

are also considered in the below example, it should be noted that the PWM method can be used for any arbitrary transient reference signal.

Here, we always assume symmetrical triangular functions as modulation carrier. It is, however, also possible to use rising or falling saw-tooth functions instead.

The resulting switching frequency  $f_s$  of the PWM is directly determined through the frequency of triangular-shaped modulation carrier  $c(t)$ . For many industrial devices a switching frequency standard of  $f_s = 8 \dots 16$  kHz has evolved. Nevertheless, especially in certain high power industrial applications, switching frequencies of just few hundreds of hertz are usual. On the other hand, switching frequencies of several 10 kHz can be found in some special low power applications.



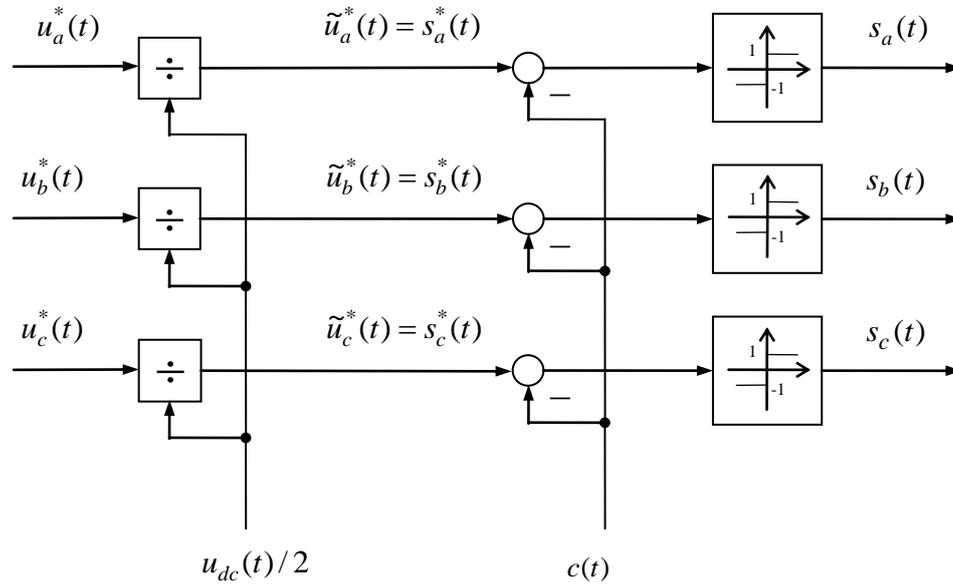
**Fig. 4-3:**  
Modulation eines sinusförmigen Sollwerts      Modulation of a sinusoidal reference value

Als *Aussteuerung* wird der Scheitelwert der normierten Spannung bezeichnet:

The *modulation index* is given as the normalized peak voltage

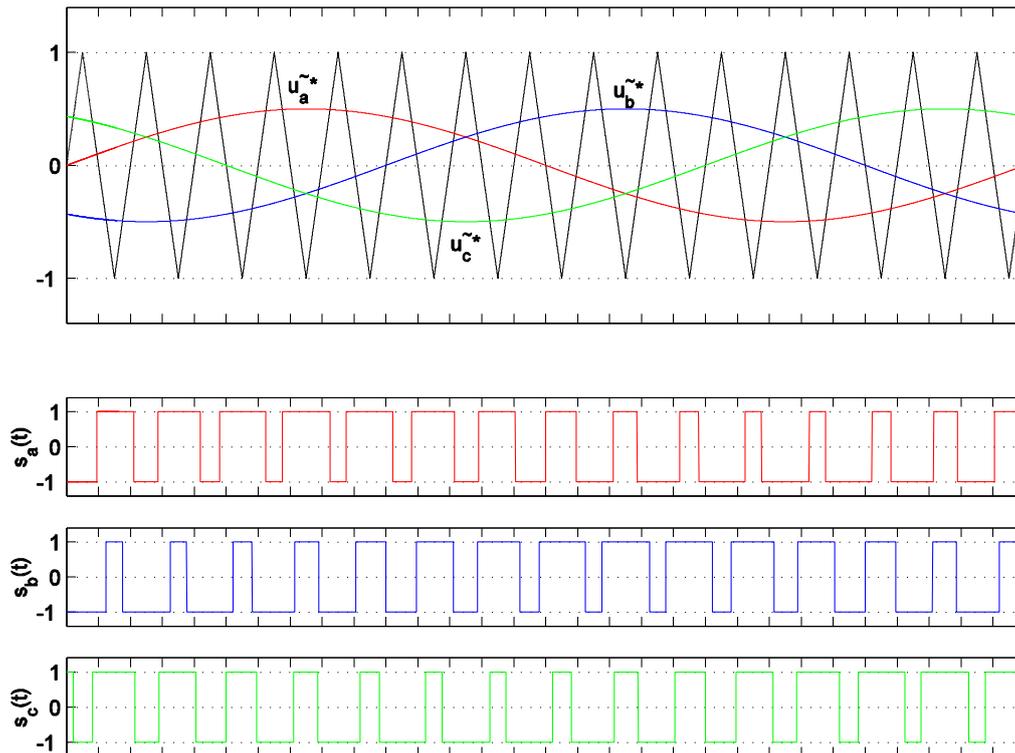
$$A = \max \left| \frac{u^*(t)}{u_{dc}/2} \right| = \max |\tilde{u}^*(t)| \quad (4.3)$$

## 4.2 Dreisträngige Pulsweitenmodulation Three-Phase Pulse Width Modulation



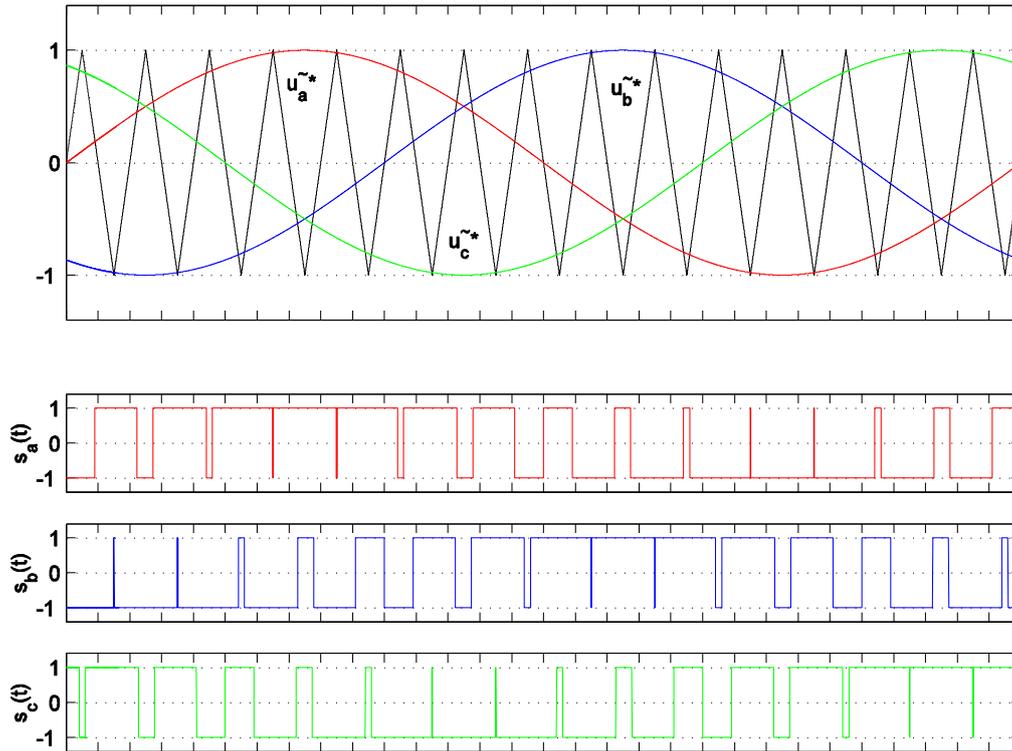
**Fig. 4-4:**  
Pulsweitenmodulation mit  
dreiecksförmigem Modulationsträger für drei Stränge

Pulse width modulation with  
triangular carrier signal for three  
phase system



**Fig. 4-5:**  
Dreiecksmodulation für sinus-  
förmiges Drehspannungssystem  
mit Aussteuerung  $A = 0,5$

Triangular PWM for sinusoidal  
three-phase system with  
modulation index  $A = 0.5$

**Fig. 4-6:**

Dreiecksmodulation für sinusförmiges Drehspannungssystem mit Aussteuerung  $A = 1,0$

Triangular PWM for sinusoidal three phase system with modulation index  $A = 1.0$

Der Aussteuerungsbereich ergibt sich zu

The modulation index range is given by

$$|\tilde{u}_{a,b,c}(t)| \leq 1$$

In der Darstellung in der orthogonalen  $\alpha / \beta$ -Ebene führt diese Bedingung jeweils zu einem Streifen um die  $a$ ,  $b$  oder  $c$ -Achse, deren Schnitt das skizzierte innere Sechseck ergibt. Jeder Spannungsvektor  $\tilde{u}^*$  dieses Sechsecks ist durch diese Modulation realisierbar. Betrachtet man einfach die Länge des Spannungsvektors unabhängig von seiner Richtung, so ist in jedem Fall ein Vektor mit

In the figure below, this condition leads in the orthogonal  $\alpha / \beta$  plane to stripes around the  $a$ ,  $b$  or  $c$  axis, whose intersection forms the depicted inner hexagon. Each voltage vector  $\tilde{u}^*$  of this hexagon can be realized through PWM. Considering only the magnitude of the voltage vector independent of its direction in the plane, in any case a vector following

$$A = |\tilde{u}^*| \leq A_{\max} = 1$$

durch diese Art der Modulation umsetzbar.

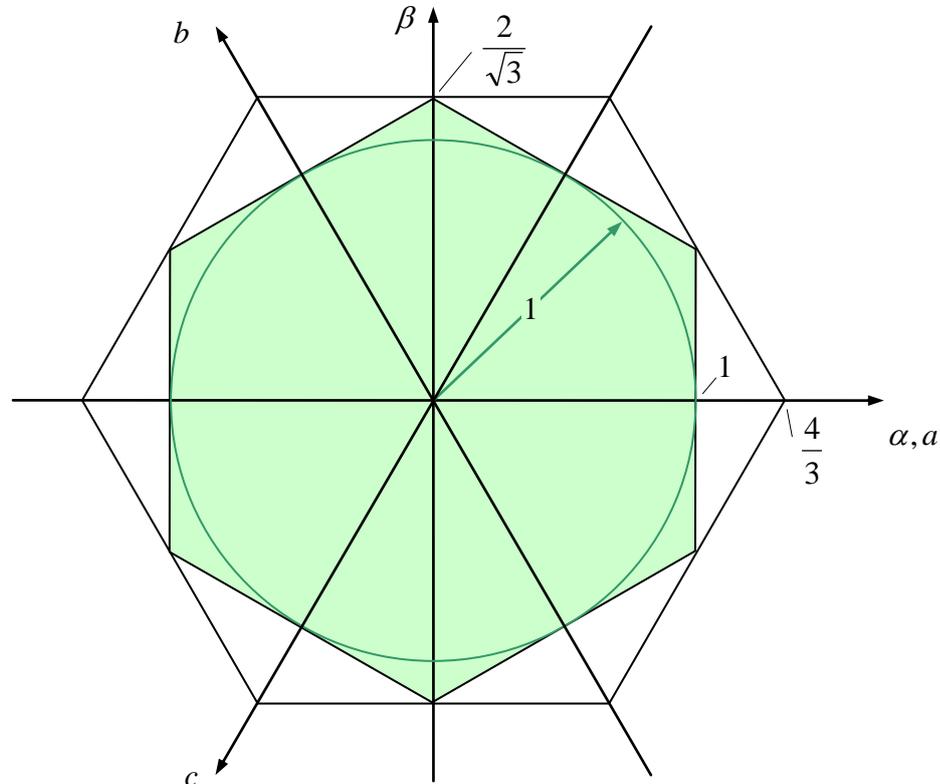
can be implemented through this type of modulation.

Die maximale verkettete Spannung zwischen zwei Strängen, die der Umrichter auf den

The maximum line-to-line voltage, the inverter can apply to the motor, is represented

Motor schalten kann, ist die Eingangsgleichspannung  $u_{dc}$ . Dieses Potenzial wird aber von dem Modulationsverfahren in der jetzigen Form nicht ausgenutzt.

by the input DC voltage  $u_{dc}$ . However, this potential is not being utilized by the current modulation method.



**Fig. 4-7:**  
Mit der Dreiecksmodulation realisierbare Spannungsvektoren

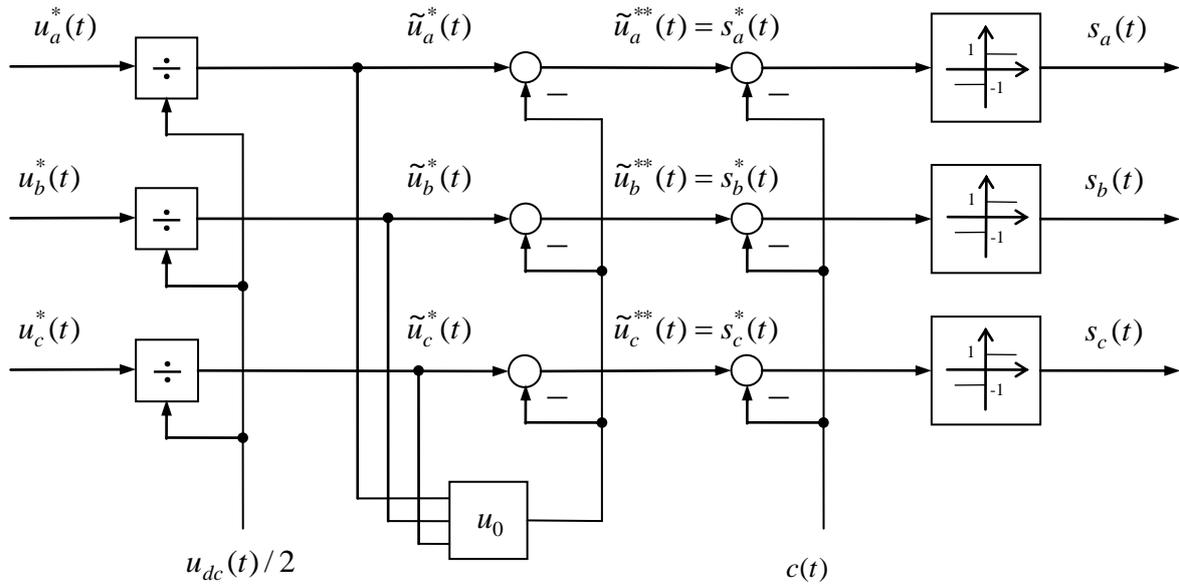
Realization of voltage vectors through triangular modulation (PWM)

Eine Verschiebung des Bezugspotenzials (Addition einer Null- oder Gleichtaktkomponente) verändert die verketteten Spannungen nicht, aber erhöht den Aussteuerungsbereich:

Shifting the reference potential (i.e. adding a zero- or common-mode component to the phase voltages) does not change the line-to-line voltages, but increases the dynamic modulation range.

$$u_0(t) = \frac{1}{2} \left[ \max \{ u_a^*(t), u_b^*(t), u_c^*(t) \} + \min \{ u_a^*(t), u_b^*(t), u_c^*(t) \} \right] \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} u_a^{**}(t) &= u_a^*(t) - u_0(t) \\ u_b^{**}(t) &= u_b^*(t) - u_0(t) \\ u_c^{**}(t) &= u_c^*(t) - u_0(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$



Dreiecksmodulation mit Nullpunktsverschiebung      Triangular modulation (PWM) with zero point shift

Mit dieser Verschiebung wird der maximal mögliche Aussteuerungsbereich für die verketteten Spannungen ausgenutzt (s. Bild):

With this zero point shift, the maximum possible dynamic modulation range of the line-to-line voltages is utilized as shown in the figure.

$$\frac{|u_{ab,bc,ca}(t)|}{u_{dc}} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad |\tilde{u}_{ab,bc,ca}(t)| \leq 2$$

Unabhängig von der Richtung des Sollspannungsvektors in orthogonalen Koordinaten ist jeder Vektor

Regardless of the direction of the desired voltage vector in the orthogonal coordinates, each vector in the orthogonal system is realizable.

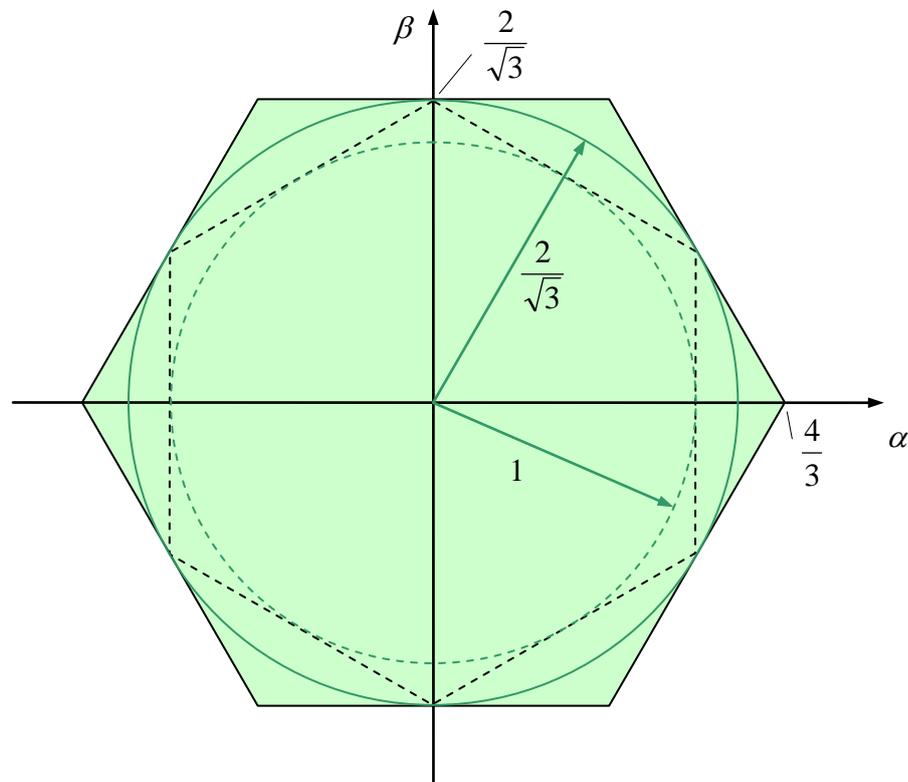
$$\tilde{u}^* = \frac{u^*}{u_{dc}/2}$$

$$A = |\tilde{u}^*| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15 \tag{4.6}$$

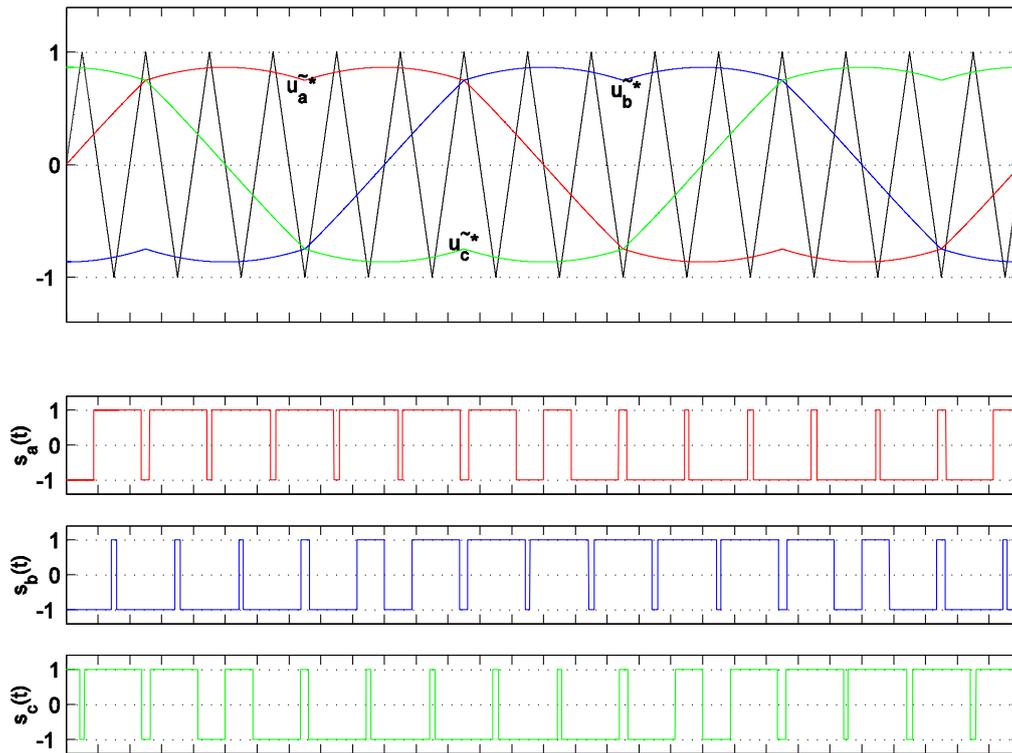
realisierbar. Durch die Nullpunktsverschiebung wird die Spannungsausnutzung also um 15% gesteigert. Die Strangsollwerte verlieren zwar dadurch ihre gewohnte Sinusform, die verketteten Spannungen bleiben

Due to the zero point shift, the voltage utilization is thus increased by 15%. Although, the reference phase voltages lose their sinusoidal shape, the line-to-line voltages remain sinusoidal.

aber unverändert sinusförmig.

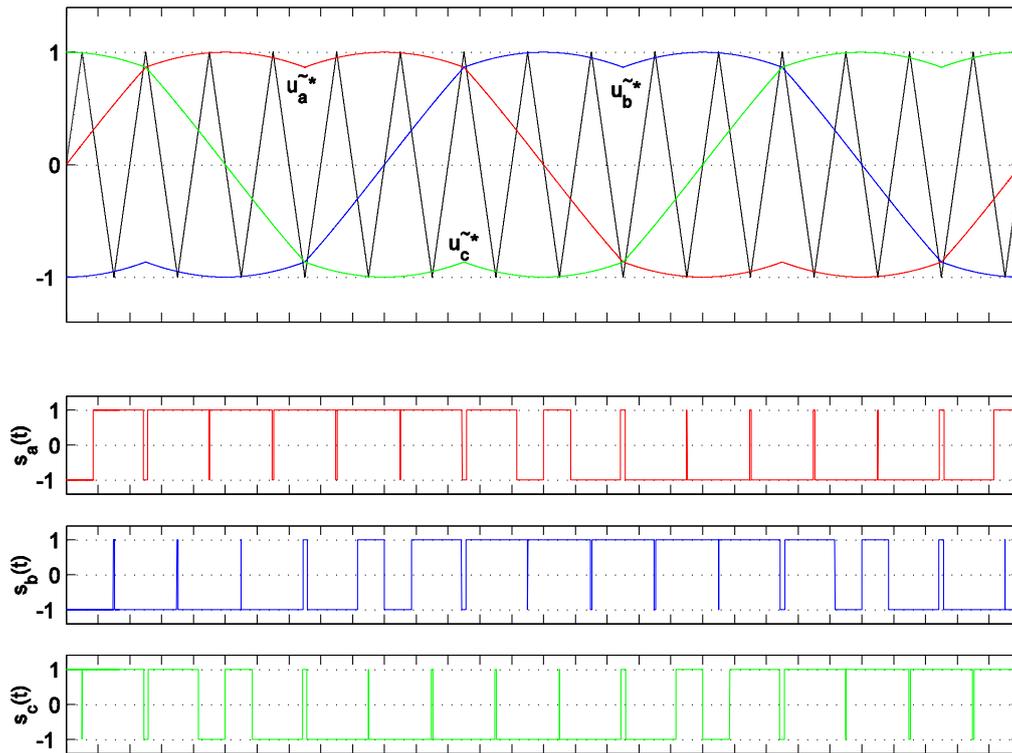


**Fig. 4-8:**  
Mit der Dreiecksmodulation und Nullpunktverschiebung realisierbare Spannungsvektoren      Realizable voltage vectors with triangular modulation and zero point shift



**Fig. 4-9:**  
Dreisträngige Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung,  $A = 1,0$

Three phase triangular modulation with zero point shift,  $A = 1.0$



**Fig. 4-10:**  
Dreisträngige Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung,  $A = 2/\sqrt{3} = 1,15$

Three phase triangular modulation with zero point shift,  $A = 2/\sqrt{3} = 1.15$

### 4.3 Vektormodulation Space Vector Modulation

Bei der *Vektormodulation* (auch als *Raumzeigermodulation* bezeichnet) geht man anders als bei der Dreiecksmodulation, bei der jeder drei Stränge separat moduliert wird, vom *Vektor* des Spannungssollwerts  $\mathbf{u}^*$  in orthogonalen Komponenten aus: In einem vorgegebenen Zeitintervall der Länge  $T_a$ , dem Abtastintervall, soll der Mittelwert des Umrichterausgangsspannungsvektors  $\mathbf{u}(t)$ , welcher aus einer geeigneten Abfolge der elementaren Spannungsvektoren  $\mathbf{v}_k$  besteht, gleich dem gewünschten Spannungssollwert  $\mathbf{u}^*(k)$  für dieses Zeitintervall sein:

In contrast to PWM in which each of the three phases are modulated separately, *space vector modulation* is based on a reference vector  $\mathbf{u}^*$  in orthogonal coordinates: Given a time interval of length  $T_a$ , also known as the sampling interval, the mean value of the inverter output voltage vector  $\mathbf{u}(t)$ , which can be realized via an appropriate sequence of fundamental voltage vectors  $\mathbf{v}_k$ , shall be equal to the desired voltage reference  $\mathbf{u}^*(k)$  for this time interval:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^*(k) &= \frac{1}{T_a} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{T_a} (t_0 \mathbf{v}_0 + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + t_3 \mathbf{v}_3 + t_4 \mathbf{v}_4 + t_5 \mathbf{v}_5 + t_6 \mathbf{v}_6 + t_7 \mathbf{v}_7) \\ &= \tau_0 \mathbf{v}_0 + \tau_1 \mathbf{v}_1 + \tau_2 \mathbf{v}_2 + \tau_3 \mathbf{v}_3 + \tau_4 \mathbf{v}_4 + \tau_5 \mathbf{v}_5 + \tau_6 \mathbf{v}_6 + \tau_7 \mathbf{e}_7\end{aligned}\quad (4.7)$$

mit den normierten Zeiten

whereas

$$\tau_i = \frac{t_i}{T_a} \quad (4.8)$$

wobei die Nebenbedingungen

and considering the constraints

$$\sum_i \tau_i = 1 \quad \text{und} \quad \tau_i \geq 0$$

zu beachten sind. Das heißt, die Summe aller Zeiten muss das zur Verfügung stehende Zeitintervall genau füllen. Man kann obige Gleichung auch mit den bezogenen Vektoren

In other words, the sum of all normalized times  $\tau_i$  has to exactly correspond to the available sampling interval. The above equation can be also written with the normalized vectors

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(k) = \frac{\mathbf{u}^*(k)}{u_{dc}/2}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{u_{dc}/2},$$

darstellen,

leading to

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(k) = \frac{1}{T_a} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \tilde{\mathbf{u}}(t) dt = \tau_0 \tilde{\mathbf{v}}_0 + \tau_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tau_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 + \tau_3 \tilde{\mathbf{v}}_3 + \tau_4 \tilde{\mathbf{v}}_4 + \tau_5 \tilde{\mathbf{v}}_5 + \tau_6 \tilde{\mathbf{v}}_6 + \tau_7 \tilde{\mathbf{v}}_7 .$$

(4.9)

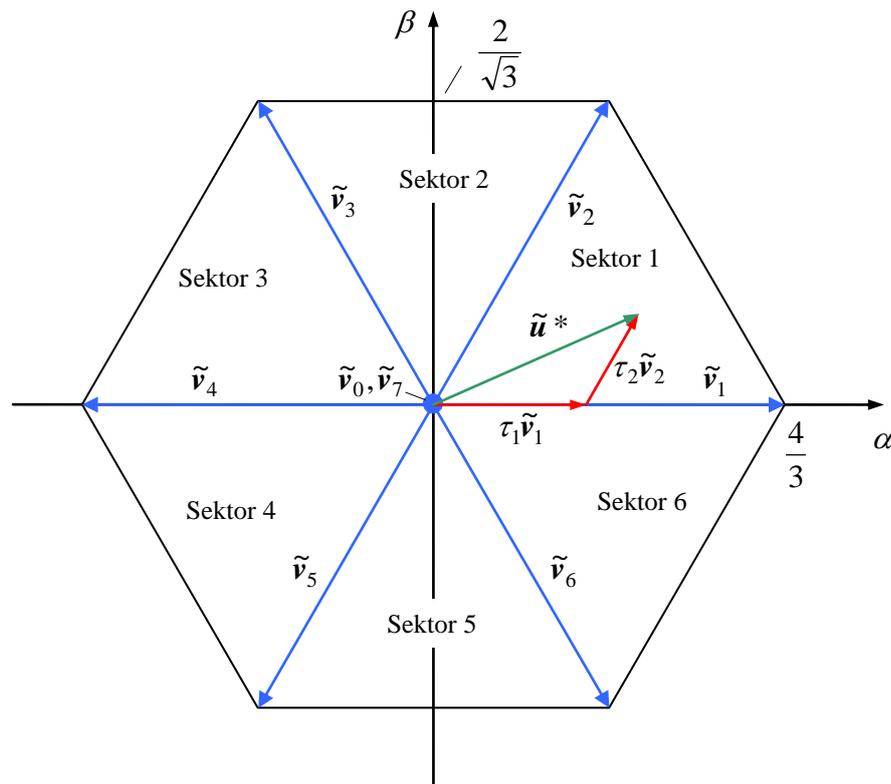
Dazu wird der Faktor  $u_{dc}/2$  vor das Integral gezogen, was aber voraussetzt, dass die Spannung  $u_{dc}(t)$  zeitlich konstant ist, sich zumindest aber in Bezug auf das Abtastintervall  $T_a$  nur langsam ändert. Diese Voraussetzung ist zwar bei vielen Anwendungen, jedoch keineswegs immer gegeben. Die speisende Gleichspannung wird meist mit Hilfe eines Kondensators stabilisiert. Wenn dieser Kondensator sehr klein bemessen ist, kann  $u_{dc}(t)$  sich durchaus sehr schnell verändern und die Voraussetzung einer näherungsweise konstanten Spannung ist dann nicht mehr gegeben. Dies führt zu Fehlern in der gewünschten Motorspannung (s. Abschnitt 4.5).

Je nach Lage des Sollspannungsvektors  $\mathbf{u}^*(k)$  reichen maximal drei der acht Vektoren für die Vektormodulation aus. In dem im Bild dargestellten Fall, wenn der Sollvektor im Sektor 1 des Hexagons liegt, reichen beispielsweise die beiden Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  zusammen mit dem Nullspannungsvektor  $\mathbf{v}_0$  aus:

$$\mathbf{u}^*(k) = \frac{1}{T_a} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{T_a} (t_0 \mathbf{v}_0 + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2) = \tau_0 \mathbf{v}_0 + \tau_1 \mathbf{v}_1 + \tau_2 \mathbf{v}_2 \quad (4.10)$$

In order to do so, the factor  $u_{dc}/2$  is taken outside of the integral under the assumption that the voltage  $u_{dc}(t)$  is constant in time or at least varies slowly with respect to the sampling interval  $T_a$ . This assumption is true in many applications, but not always given. The DC voltage supply is usually stabilized by a capacitor. If the capacitor is dimensioned very small then  $u_{dc}(t)$  would vary quite rapidly, thus violating the prerequisite of an approximately constant voltage. This leads to errors in the desired motor voltage (see Section 4.5).

Depending on the location of the desired voltage vector  $\mathbf{u}^*(k)$  maximum three out of the eight vectors are sufficient for vector modulation. In the case shown in the below figure, the reference vector lies in sector 1 of the hexagon. Therefore, vectors  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  together with zero voltage vector  $\mathbf{v}_0$  are sufficient for vector modulation.



**Fig. 4-11:**  
Prinzip der Vektormodulation      Principles of space vector modulation

Für einen gegebenen Vektor  $\mathbf{u}^*(k)$  kann dieses Gleichungssystem nach den Zeiten  $\tau_i$  algebraisch aufgelöst werden. Geometrisch lässt sich dies durch Interpretation der Zeiten  $\tau_i$  als *duale Koordinaten* deuten, die an Achsen abzulesen sind, welche auf den elementaren Vektoren senkrecht stehen. Für das im Bild dargestellte Beispiel des Sektors 1 folgt unmittelbar durch diese geometrische Betrachtung für die Projektionen des Sollvektors auf die dualen  $\tau_1$ -,  $\tau_2$ -Achsen

For a given vector  $\mathbf{u}^*(k)$ , this system of equations can be resolved algebraically for the times  $\tau_i$ . From a geometric point of view, the times  $\tau_i$  can be interpreted as *dual coordinates*, which can be read off axes, which are perpendicular to the fundamental vectors. By considering the projections of the reference vector on the dual  $\tau_1$ - and  $\tau_2$ -axes in the below figure, it directly follows:

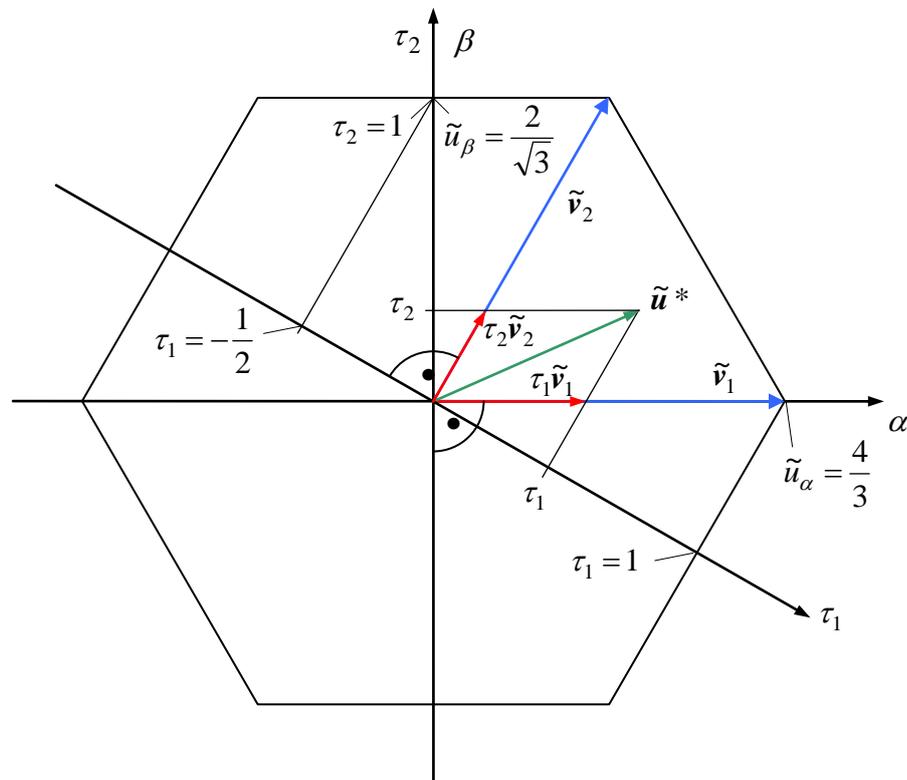
$$\tau_1 = \frac{\tilde{u}_\alpha^*}{4/3} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_\beta^*}{2/\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4} \tilde{u}_\beta^* \quad (4.11)$$

$$\tau_2 = \frac{\tilde{u}_\beta^*}{2/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{u}_\beta^* \quad (4.12)$$

Entsprechend findet man die Zusammenhänge für die anderen Sektoren, die in einer

Similarly, we find the corresponding relations for the other sectors, which are summed up in

Tabelle weiter unten zusammengestellt sind. the table below.



**Fig. 4-12:**  
Geometrische Konstruktion der  
Zeiten  $\tau_k$  mit dualen Koor-  
dinaten

Geometrical construction of  
times  $\tau_k$  in dual coordinates

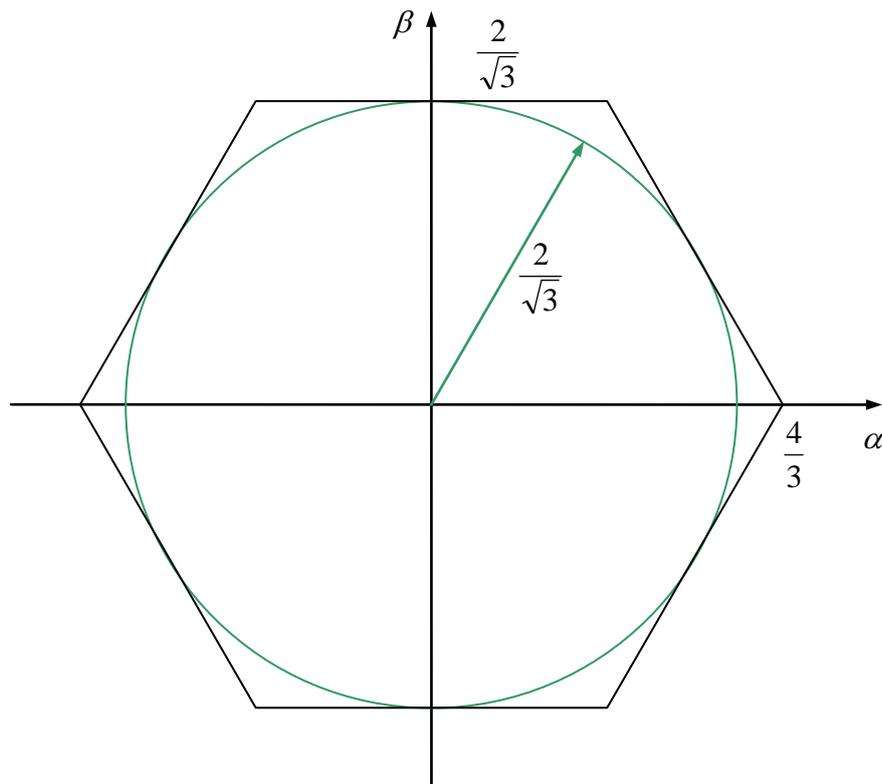
Durch geeignete Wahl der elementaren Vektoren lassen sich alle Sollvektoren, die in dem durch die elementaren Vektoren aufgespannten Hexagon liegen, realisieren. Der Aussteuerungsbereich der Vektormodulation ist also das gesamte von den elementaren Vektoren aufgespannte Hexagon. Er ist mit dem der dreisträngigen Dreiecksmodulation identisch, wenn bei letzterer die Nullpunktverschiebung angewendet wird. Unabhängig von der Richtung ist jeder Sollvektor der Länge

By suitable choice of the fundamental vectors, all reference vectors within the hexagon can be realized. Therefore, the dynamic modulation range of the space vector modulation covers the entire hexagon spanned by the fundamental vectors. It is identical to the three phase pulse width modulation, if zero point shift has been applied. Regardless of the direction each reference vector of the magnitude

$$|\tilde{u}^*| < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4.13)$$

realisierbar (s. Bild unten).

can be realized (see figure below).

**Fig. 4-13:**

Zum Aussteuerungsbereich der Vektormodulation

Dynamic modulation range of space vector modulation

Abhängig davon, in welchem Sektor der Sollvektor liegt, ergeben sich die Pulszeiten nach folgender Tabelle. Angegeben sind jeweils die beiden Zeiten für die aktiven Vektoren in Abhängigkeit von den Komponenten des Sollvektors. Die Zeiten für den Nullspannungsvektor, also  $\tau_0$  oder  $\tau_7$ , müssen die ersten beiden Zeiten zum vollständigen Intervall ergänzen.

Depending on the sector the voltage reference vector is located in, the following pulse times follow (s. below table). The two pulse times refer to the active fundamental vectors, respectively, and are expressed as functions of the orthogonal components of the voltage reference. The times for the zero voltage vectors, i.e.  $\tau_0$  or  $\tau_7$ , must complement the first two periods to a full (sampling) interval  $T_a$ .

Sector	Times for active vectors		Zero voltage vector
1	$\tau_1 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_2 = +\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_1 - \tau_2$
2	$\tau_2 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_3 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_2 - \tau_3$
3	$\tau_4 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_3 - \tau_4$
4	$\tau_4 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_4 - \tau_5$
5	$\tau_6 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_5 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_5 - \tau_6$
6	$\tau_1 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_6 - \tau_1$

Der Sektor, in dem ein Sollvektor liegt, kann schnell durch die Prüfung einiger Vorzeichen bestimmt werden:

The sector, in which the reference vector is located, can quickly be determined by checking some signs:

Sector	$\tilde{u}_\beta^*$	$\sqrt{3}\tilde{u}_\alpha^* + \tilde{u}_\beta^*$	$\sqrt{3}\tilde{u}_\alpha^* - \tilde{u}_\beta^*$
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	-	-
4	-	-	-
5	-	-	+
6	-	+	+

Obwohl die Zeiten für die aktiven Vektoren eindeutig aus dem vorgegebenen Sollwert bestimmt werden, gibt es einige Freiheitsgrade bei der konkreten Realisierung der Vektormodulation:

Although the respective times for the active vectors can be uniquely determined from the desired voltage reference, there are some degrees of freedom as far the practical realization of vector modulation is concerned:

- Die Wahl des Nullspannungsvektors  $v_0$  oder  $v_7$
- The choice of the zero voltage vector,  $v_0$  or  $v_7$

- Die Wahl der Reihenfolge der beteiligten elementaren Vektoren innerhalb des Abtastintervalls. Darüber hinaus wird die Zeit für den Nullspannungsvektor gern auf Anfang und das Ende des Intervalls jeweils hälftig aufgeteilt.
- The sequence (order) of the participating fundamental vectors within the sample interval. Moreover, the time of the zero vector is often split up in equal halves which are allocated to the beginning and end of an interval, respectively.

Beispielsweise sind die in der folgenden Tabelle angegebenen Varianten denkbar. Die Reihenfolgen der Vektoren sind nur exemplarisch für die Sektoren 1 und 2 angegeben. Die Vektorfolgen für die anderen Sektoren können leicht aus den Symmetrien abgeleitet werden. Angegeben sind jeweils die Indizes  $k$  der elementaren Vektoren  $v_k$ .

The below table provides some potential variants, in this context. The sequences of the vectors are only stated for sectors 1 and 2, exemplarily. The vector sequences for the other sectors can easily be deduced from the symmetries. Note, that in the table all listed vector sequences are depicted with the help of the indices  $k$  of the relevant fundamental vectors  $v_k$ .

typ	Sector 1 $i =$	Sector 2 $i =$
1	0, 1, 2, 7 7, 2, 1, 0 <sup>1</sup>	0, 3, 2, 7 7, 2, 3, 0 <sup>1</sup>
2	7 (bzw. 0 <sup>2</sup> ), 1, 2, 7	0 (bzw. 7 <sup>2</sup> ), 2, 3, 0
3	7 (bzw. 0 <sup>2</sup> ), 2, 1, 7	0 (bzw. 7 <sup>2</sup> ), 3, 2, 0

<sup>1</sup> jeweils alternierend

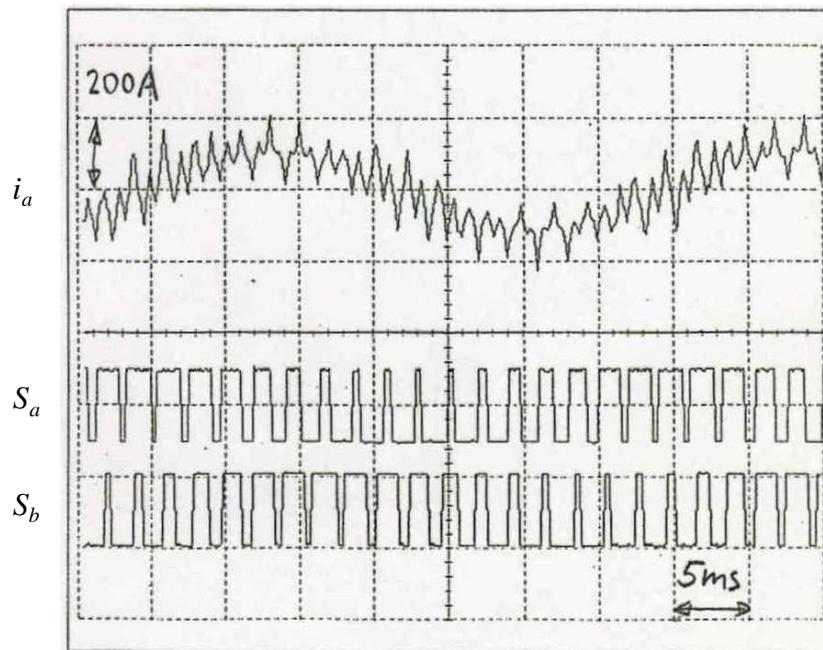
<sup>1</sup> alternating

<sup>2</sup> Bei einem Sektorwechsel würde der zuletzt anstehende Nullspannungsvektor durch den neu vorgegebenen ersetzt, ohne dass das eine Auswirkung auf die Motorspannung hätte. Diese überflüssige Umschaltung kann vermieden werden, wenn der zuletzt anstehende Nullspannungsvektor auch bei einem Sektorwechsel unverändert gelassen wird, bis der nächste aktive Vektor geschaltet wird. Erst danach wird in den Vektorfolgen der neue Nullspannungsvektor verwendet.

<sup>2</sup> During a sector change the last forth-coming zero voltage vector would be replaced with the newly given vector, without having any impact on the motor voltage. This redundant switching procedure can be avoided when the last forth-coming voltage vector is left unchanged during a sector change until the next active vector is applied. Only afterwards, the new zero voltage vector is used in the vector sequences.

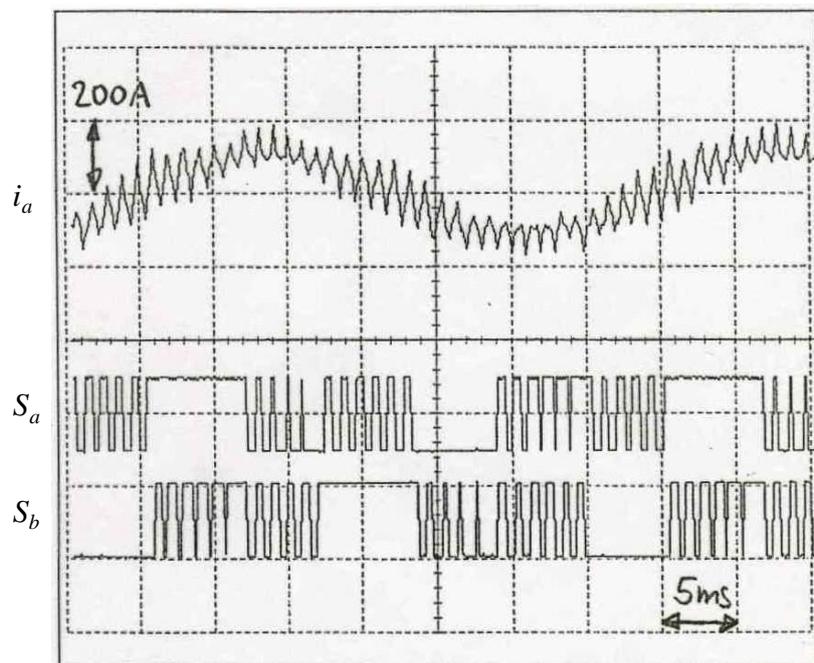
Der Typ 1 mit hälftig verteilten und alternierenden Nullvektoren entspricht im Ergebnis genau der Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung und Anwendung des Regular-Sampling-Prinzips (s. folgendes Bild).

Type 1 in the above table with split (in equal halves) and alternating zero voltage vectors in the result exactly corresponds to the pulse width modulation with zero point shift and application of the regular-sampling principle (refer to the figure below).



**Fig. 4-14:**  
Pulsmuster der Vektormodulation nach Typ 1;  
Alternierendes Pulsmuster, entspricht der Dreiecksmodulation (von den drei Schaltbefehlen sind nur zwei dargestellt)

Type 1: Pulse pattern of the vector modulation  
Alternating pulse pattern; corresponds to pulse width modulation (Two out of three switching commands are represented)



**Fig. 4-15:**  
Pulsmuster der Vektormodulation nach Typ 2 (von den drei Schaltbefehlen sind nur zwei dargestellt)

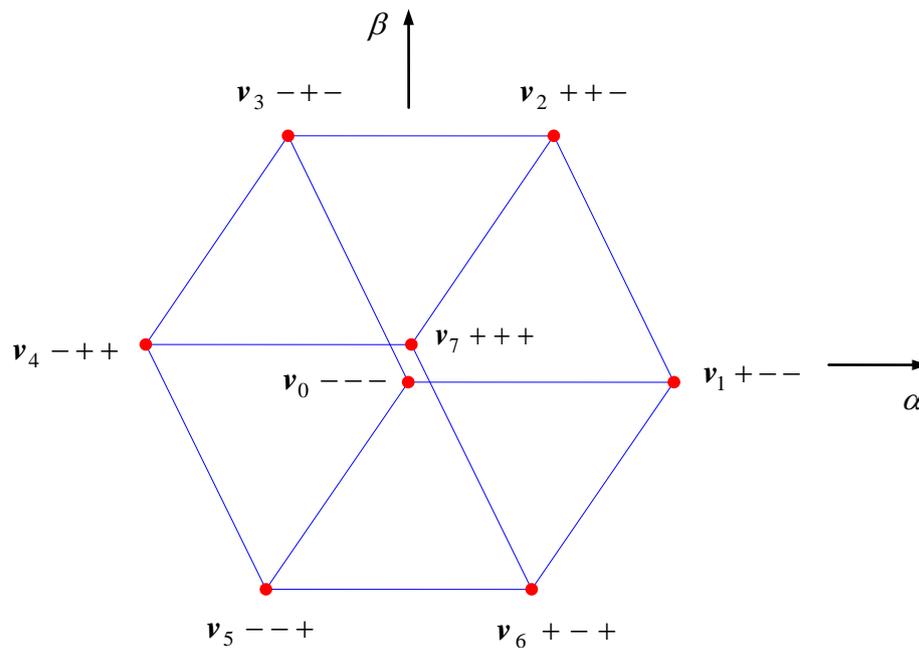
Type 2: Pulse pattern of the vector modulation (two out of three switching commands are represented)

Bei der Umschaltung von einem elementaren Vektor zu einem anderen sind Umschaltungen von ein, zwei, ggf. auch von drei Strängen notwendig. Die resultierende Schaltfrequenz eines Stranges ist daher nicht unmittelbar die Frequenz, mit der die Vektoren umgeschaltet werden.

When switching from one fundamental vector to another, switching procedures in one, two, if necessary also in three inverter legs (phases) can become necessary. The resulting switching frequency of an inverter leg is therefore not directly related to the frequency with which the fundamental vectors are switched.

Das folgende Diagramm zeigt die Transitionen zwischen Zuständen der elementaren Vektoren. Zwei Zustände sind genau dann durch eine Linie verbunden, wenn die Transition durch die Umschaltung nur eines Stranges möglich ist. Die beiden möglichen Schaltzustände des Nullvektors wurden nicht genau aufeinander liegend dargestellt.

The following diagram shows the transitions between states of the fundamental vectors. Two states are connected by a line, only if the transition is possible by switching only one leg. For better illustration, the two possible switching states of the zero vectors were not directly put on top of each other.



**Fig. 4-16:**  
Transitionsdiagramm für die  
elementaren Schaltzustände

Transition diagram for the  
fundamental switching states

Mit Hilfe dieses Transitionsdiagramms ist es einfach, die Zahl der tatsächlichen Umschaltungen der Umrichterstränge zu ermitteln. Der oben skizzierte Typ 1 schaltet beispielsweise in jedem Abtastintervall jeden Strang genau einmal, es gibt also insgesamt 3 Umschaltungen. Bei den Typen 2 und 3 treten hingegen insgesamt 4 Umschaltungen je Intervall auf. Allerdings fallen hierbei einzelne Umschaltungen weg, wenn der Sollvektor von einem Intervall zum nächsten den Sektor wechselt. Sei

With the help of this transition diagram, it is easy to determine the number of actual switching events of the inverter legs. For example, the Type 1 sequence switches each leg exactly once within one sampling interval leading to a total of three switching instants. As for Types 2 and 3 a total of four switching events takes place in each interval. However, in these cases switching events during sector transitions, i.e. when the voltage reference vector changes from one sector to another, are eliminated. Shall the sampling frequency be denoted by

$$f_a = \frac{1}{T_a}$$

die Abtastfrequenz und  $f_1$  die Grundfrequenz des zu modulierenden Signals, ergeben je nach Typ folgende Schaltfrequenzen der Umrichterstränge:

while  $f_1$  represents the fundamental frequency of the signal to be modulated. Then, the switching frequencies of the inverter legs can be calculated according to the below table.

---

type of space vector modulation	inverter leg switching frequency
1	$f_s = \frac{1}{2} f_a$
2	$f_s = \frac{2}{3} f_a - f_1$
3	$f_s = \frac{2}{3} f_a - f_1$

## 4.4 Regular Sampling Regular Sampling

Unter *Regular Sampling* versteht man zwei Aspekte im Zusammenspiel zwischen Regelung und Pulsweitenmodulation bzw. Vektormodulation:

- die Synchronisation des Modulationsträgers mit einer *zeitdiskreten Vorgabe* der Sollspannungen (dies ist bei der Vektormodulation automatisch gegeben)
- die Synchronisation *zeitdiskreter Messwertabtastungen* mit dem Modulationsträger

**Zum ersten Aspekt:** Antriebsregelungen werden heute bis auf wenige Ausnahmen nicht mehr in analoger Schaltungstechnik aufgebaut, welche *zeitkontinuierlich* arbeitet, sondern mit Hilfe von Mikrocontrollern oder Signalprozessoren. Die Regelung arbeitet in Form von rekursiven Regelgesetzen *abtastend* oder *zeitdiskret*, neue Sollwerte werden nur in einem bestimmten Zeittakt bereitgestellt. Da die Regelung nur über den schaltenden Umrichter Einfluss auf den Motor nehmen kann, ist es im Übrigen nicht sinnvoll bzw. nicht ökonomisch, den Regelungszyklus öfter zu durchlaufen, als der Umrichter schalten kann oder soll. Die Abtastzeit  $T_a$  wird daher mit der Schaltperiode  $T_s$  synchronisiert, wobei je nach Ausführung die beiden Varianten

When speaking of *regular sampling* we refer to two aspects affecting the interaction of control and pulse width modulation or space vector modulation.

- The synchronization of the modulation carrier with a *discrete-time setting* of the reference voltages (in vector modulation this is automatically given).
- The synchronization of *discrete-time measurement samples* with the modulation carrier.

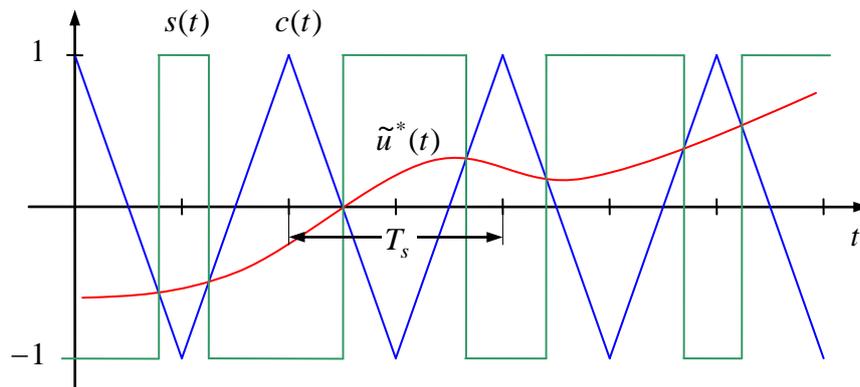
**First Aspect:** Nowadays, drive controls are no longer realized with analog circuit designs, which works in a continuous-time manner, but with the help of microcontrollers or DSP technologies. These controls rely on recursive control rules which are executed in a discrete-time manner (sampling), i.e. new reference values are provided only at a certain clock cycle. Since the controller can influence the motor currents only via the switching inverter elements, it is not reasonable from an economic point of view to execute the control cycle more often than the inverter's maximum switching frequency. Therefore, the sampling time  $T_a$  is synchronized with the switching period  $T_s$ , whereas two variants (see figures below) can be applied:

(4.14)

$$T_a = T_s \quad \text{oder} \quad T_a = \frac{1}{2}T_s$$

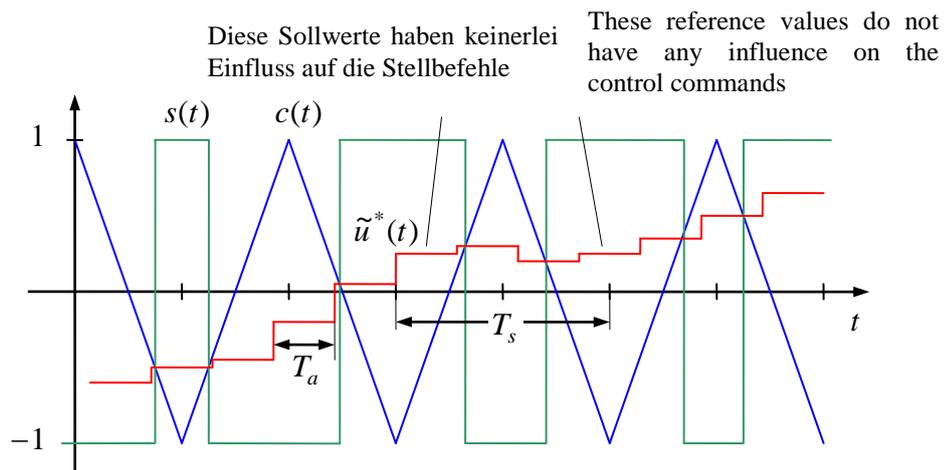
zur Anwendung gelangen können. (s. nachfolgende Bilder). Die Gedanken werden im Folgenden vereinfacht für eine Pulsweitenmodulation an einem Strang entwickelt. Für drei Stränge gelten die Ergebnisse entsprechend.

For simplification, the functional principles shall be developed and explained based on a single phase PWM (one inverter leg). The results are directly applicable to three phases case, as well.

**Fig. 4-17:**

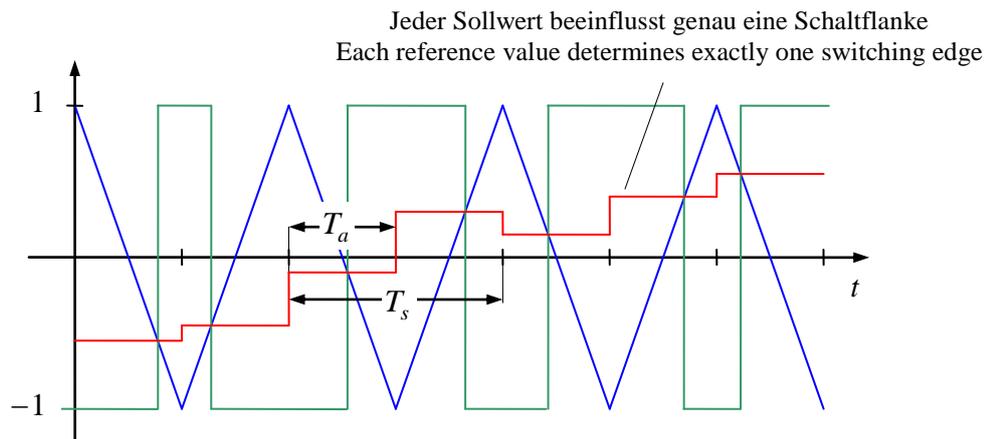
Pulsweitenmodulation mit zeitkontinuierlichem Sollwert (bewusst ist kein sinusförmiger, sondern ein beliebiger transienter Vorgang dargestellt)

Pulse width modulation with continuous-time reference values (deliberately, not a sinusoidal, but an arbitrary transient is shown)

**Fig. 4-18:**

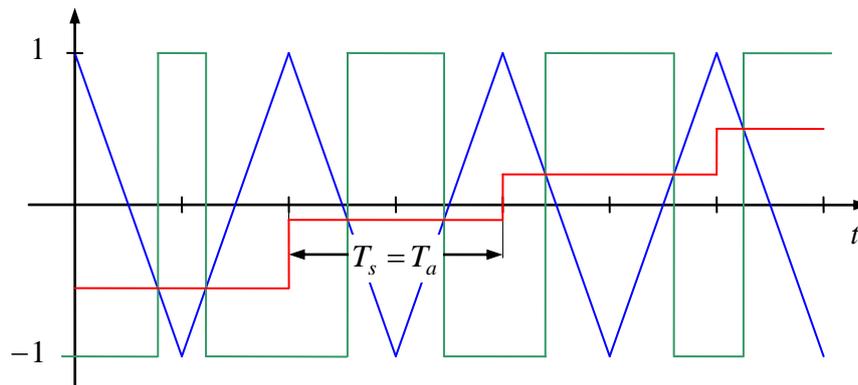
Pulsweitenmodulation mit zeitdiskreten, nicht synchronisierten Sollwerten

Pulse width modulation with discrete-time, non-synchronized reference values



**Fig. 4-19:**  
Pulsweitenmodulation mit  
synchronisierten Sollwerten  
(Regular Sampling) mit  
 $T_a = T_s / 2$

Pulse width modulation with  
synchronized reference values  
(Regular Sampling) with  
 $T_a = T_s / 2$

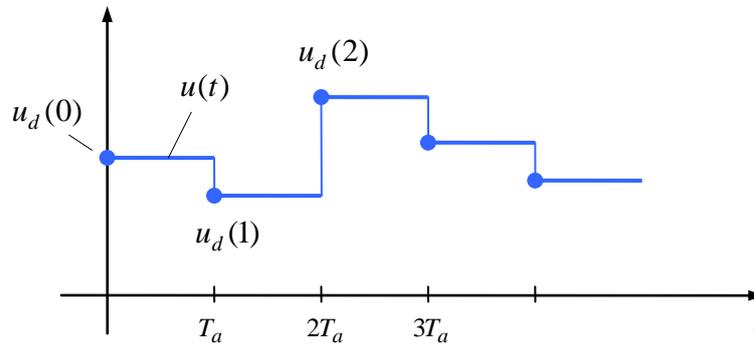


**Fig. 4-20:**  
Pulsweitenmodulation mit  
synchronisierten Sollwerten  
(Regular Sampling) mit  $T_a = T_s$

Pulse width modulation with  
synchronized reference values  
(Regular Sampling) with  
 $T_a = T_s$

Die zeitdiskrete Sollwertvorgabe führt aber zu einer Verzögerung im System, was nun untersucht werden soll:

The discrete-time application of reference values leads to a delay in the system, which shall be further examined in the following:



**Fig. 4-21:**  
Zeitdiskrete Sollwertvorgabe      Discrete-time demands

Die zeitdiskreten Sollwerte seien  $u_d(k)$ , der zeitkontinuierliche Verlauf  $u(t)$  wird durch Summen zeitverschobener Sprungfunktionen  $\sigma(t-t_0)$  gebildet:

The discrete-time reference values shall be  $u_d(k)$ , the continuous-time function  $u(t)$  is represented by the sum of time-shifted step functions  $\sigma(t-t_0)$ :

$$u(t) = \sum_k u_d(k) [\sigma(t-kT_a) - \sigma(t-(k+1)T_a)] \quad (4.15)$$

Übergang in den Laplace-Bereich:

Transition to the Laplace domain:

$$U(s) = L(u)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{st} dt$$

$$U(s) = \sum_k u_d(k) \frac{1}{s} [e^{-skT_a} - e^{-s(k+1)T_a}] = \sum_k u_d(k) e^{-skT_a} \frac{1}{s} [1 - e^{-sT_a}] \quad (4.16)$$

Die Reihe

The series

$$\sum_k u_d(k) e^{-skT_a} \quad (4.17)$$

ist die  $z$ -Transformierte (oder *Laurent-Transformierte*) der Folge  $u_d(k)$  an der Stelle  $z = e^{sT_a}$ :

represents the  $z$ -transform (or *Laurent-transform*) of the sequence  $u_d(k)$  at the point  $z = e^{sT_a}$ :

$$U_d(z) = \sum_k u_d(k) z^{-k} \quad (4.18)$$

Der Term

The term

$$H(s) = \frac{1}{sT_a} [1 - e^{-sT_a}] \quad (4.19)$$

kann gedanklich als Übertragungsfunktion eines Abtast-Halte-Vorganges aufgefasst werden (obwohl kein zeitkontinuierlicher Sollwert existiert, der abgetastet werden könnte, da der zeitdiskrete Sollwert unmittelbar von einem zeitdiskreten Regler bestimmt wird).

can be considered as the transfer function of a sample and hold process (despite the fact that no continuous-time reference value exists that could be sampled, since the discrete-time reference value is determined directly from a discrete-time controller).

Also:

Therefore, it follows:

$$U(s) = T_a H(s) U_d(e^{sT_a}) \quad (4.20)$$

Um den Einfluss auf Amplitude und Phase besser erkennen zu können, kann  $H(j\omega)$  in der Form

In order to see the influence of amplitude and phase more clearly,  $H(j\omega)$  can be written in the following form, as well:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T_a} [1 - e^{-j\omega T_a}] = \frac{1}{j\omega T_a} [e^{j\omega T_a/2} - e^{-j\omega T_a/2}] e^{-j\omega T_a/2} \\ &= \frac{2}{j\omega T_a} \sin\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) e^{-j\omega T_a/2} = \text{Si}\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) e^{-j\omega T_a/2} \end{aligned}$$

bzw.

Alternatively,

$$H(j\omega) = \text{Si}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_a}\right) e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_a}} \quad (4.21)$$

mit

whereas

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \quad (4.22)$$

Häufig verwendet man Approximationen von  $H(s)$ :

Quite frequently, approximations of  $H(s)$  are used:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{sT_a} [1 - e^{-sT_a}] = e^{-sT_a/2} \frac{1}{sT_a} [e^{sT_a/2} - e^{-sT_a/2}] \\ &= e^{-sT_a/2} \frac{1}{sT_a} \left[ 1 + \frac{sT_a}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{sT_a}{2}\right)^2 - 1 + \frac{sT_a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{sT_a}{2}\right)^2 + O_3(s) \right] \\ &= e^{-sT_a/2} (1 + O_2(s)) \approx e^{-sT_a/2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$O_n(s)$  bezeichne die Restterme von  $n$ -ter und höherer Ordnung in  $s$ . Das Ergebnis bedeutet, dass  $H(s)$  durch ein Totzeitglied ( $T_t$ -Glieder) mit der Totzeit  $T_a/2$  genähert werden kann, wobei Terme 2. und höherer Ordnung in  $s$  vernachlässigt werden.

$O_n(s)$  denotes the residual terms of the  $n$ -th and higher order in  $s$ . Through this result, we can conclude that  $H(s)$  can be approximated by a dead-time element ( $T_t$ -element) with dead time  $T_a/2$ , whereas terms of second and higher order of  $s$  are neglected.

Die Padé-Approximation 1. Ordnung der Exponentialfunktion

The 1st-order Padé approximation of the exponential function

$$e^{-sT_a} \approx \frac{1 - sT_a/2}{1 + sT_a/2} \quad (4.24)$$

liefert als alternative Näherung für  $H(s)$

provides an alternative approximation for  $H(s)$

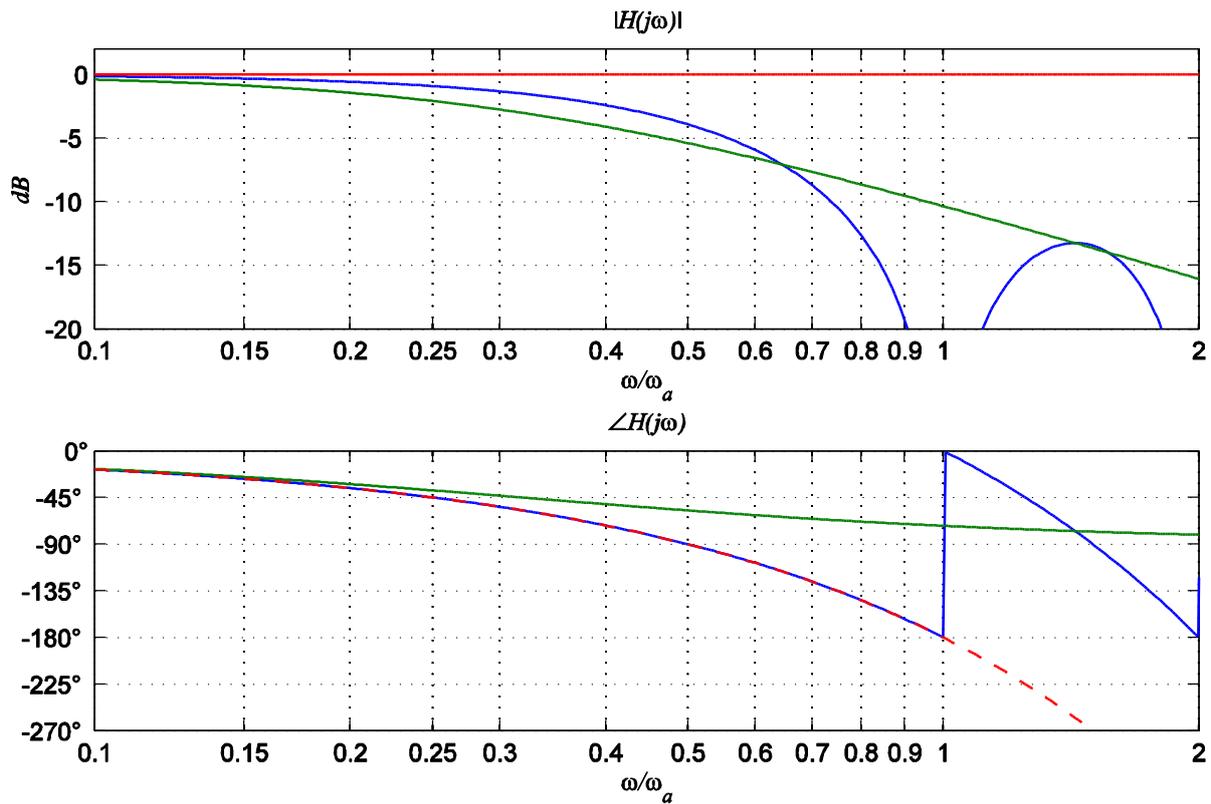
$$H(s) \approx \frac{1}{sT_a} \left[ 1 - \frac{1 - sT_a/2}{1 + sT_a/2} \right] = \frac{1}{sT_a} \left[ \frac{1 + sT_a/2 - 1 + sT_a/2}{1 + sT_a/2} \right] = \frac{1}{1 + sT_a/2}$$

Hierbei wird  $H(s)$  demnach durch ein  $T_1$ -Glieder (Verzögerungsglieder 1. Ordnung) mit der Zeitkonstante  $T_a/2$  angenähert.

Here,  $H(s)$  is approximated through a  $T_1$ -element (1st-order delay element) with the time constant  $T_a/2$ .

Die zeitdiskrete Sollwertvorgabe kann also näherungsweise entweder durch ein Totzeitglied oder mit einem Verzögerungsglieder angenähert werden, wobei in beiden Fällen als maßgebliche Konstante  $T_a/2$  auftritt.

Hence, the discrete-time reference value can be approximated either by a dead time element or a delay element, whereas in both cases the significant time constant  $T_a/2$  occurs.



**Fig. 4-22:**

Frequenzkennlinien des Abtast-Halte-Vorgangs und seiner Näherungen

Frequency characteristics of the sample and hold process und its approximations

- blau:  $H(j\omega)$  ohne Näherung
- blue:  $H(j\omega)$  without approximation
- grün: Näherung durch  $T_1$ -Glied mit  $T_a/2$  als Zeitkonstante
- green: approximation through  $T_1$ -element with  $T_a/2$  as time constant
- rot: Näherung durch  $T_t$ -Glied mit  $T_a/2$  als Totzeit
- red: approximation through  $T_t$ -element with  $T_a/2$  as dead time

Wie man aus den Frequenzkennlinien erkennt, bilden beide Näherungen das tatsächliche Verhalten des Abtast-Halte-Vorganges unterschiedlich nach.

As it becomes evident from the frequency characteristics, both approximations reproduce the actual behavior of the sample and hold process in a different way.

Die Näherung durch ein Totzeitglied gibt immerhin das Verhalten der Phase (zumindest für Frequenzen unterhalb der zweifachen Nyquistfrequenz  $\omega/\omega_a < 1$ ) exakt wieder. Im Bereich  $\omega/\omega_a < 0,44$  bleibt der Amplitudenfehler kleiner als +3dB.

The dead time approximation at least exactly reproduces the behavior of the phase (for frequencies below twice the Nyquist frequency  $\omega/\omega_a < 1$ ). In the range of  $\omega/\omega_a < 0.44$ , the amplitude error is less than +3 dB.

Der brauchbare Bereich der  $T_1$ -Näherung

The useful range of the  $T_1$ - approximation is

wird eher durch den Phasenfehler bestimmt, der bis  $\omega/\omega_a < 0,29$  kleiner als  $10^\circ$  ist. In diesem Bereich ist der Amplitudenfehler kleiner als 1,4 dB.

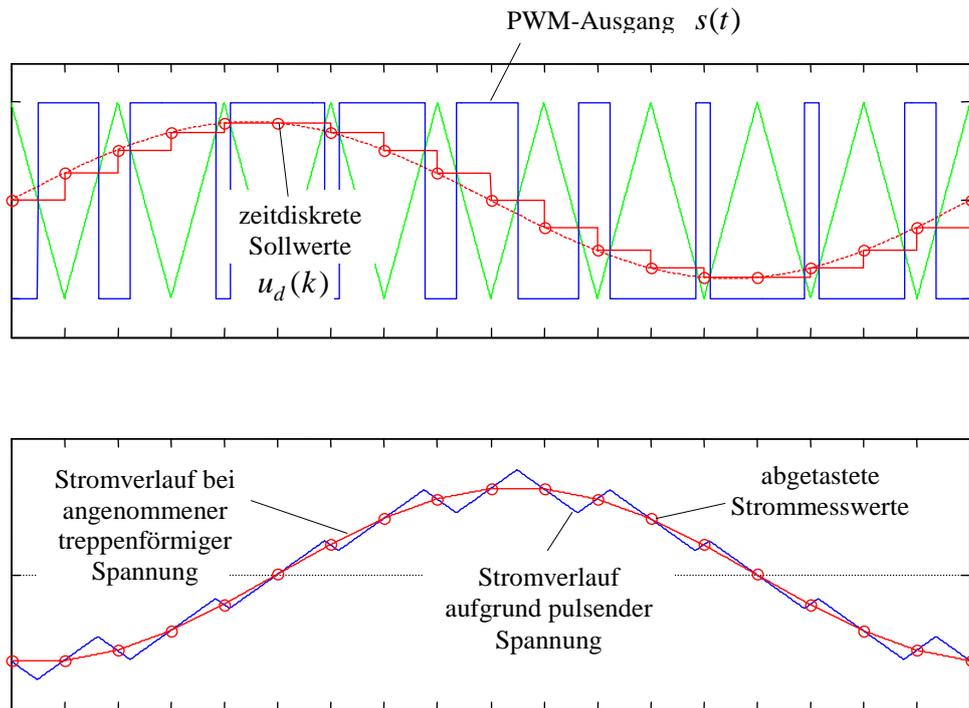
### **Zum zweiten Aspekt des Regular-Sampling-Verfahrens, der Messwert-abtastung:**

Nimmt man vereinfachend eine rein induktive Last mit konstanter Gegenspannung an, so führt eine mit dem PWM-Träger synchronisierte Stromabtastung dazu, dass die abgetasteten Stromwerte gerade die zeitlich lokalen Strommittelwerte repräsentieren. Die durch die Pulsung verursachte Stromschwankung (engl. *ripple*) wird geschickt durch die Abtastung ausgeblendet, ohne dass eine analoge Filterung notwendig wäre. Ein analoges Vorfilter würde in Gegenteil dazu führen, dass diese Stromabtastmethode nicht mehr wie beabsichtigt funktioniert. Zwar würden die pulsfrequenten Anteile geglättet, doch wird durch ein Vorfilter auch ein der Phasenverzug der Grundschwingung verursacht, was zu Fehlern im Regelkreis führt.

rather determined by the phase error, which is less than  $10^\circ$  if  $\omega/\omega_a < 0.29$ . In this area the amplitude error is as smaller than 1.4 dB.

### **Second aspect of the regular sampling process: the measurement sampling:**

For simplification, we assume a purely inductive load with a constant reverse voltage. In this case, a synchronization of the current sampling with the PWM carrier causes the sampled current values to exactly represent the time-local average current values. The current ripple caused by the inverter pulsation is masked by this subtly sampling process making analog filtering redundant. On the contrary, the application of an analog pre-filter would cause the current sampling method to no longer work as originally intended. Although the harmonic pulsation components would be smoothed, the pre-filter would cause a phase shift in the fundamental component, leading to errors in the control loop.

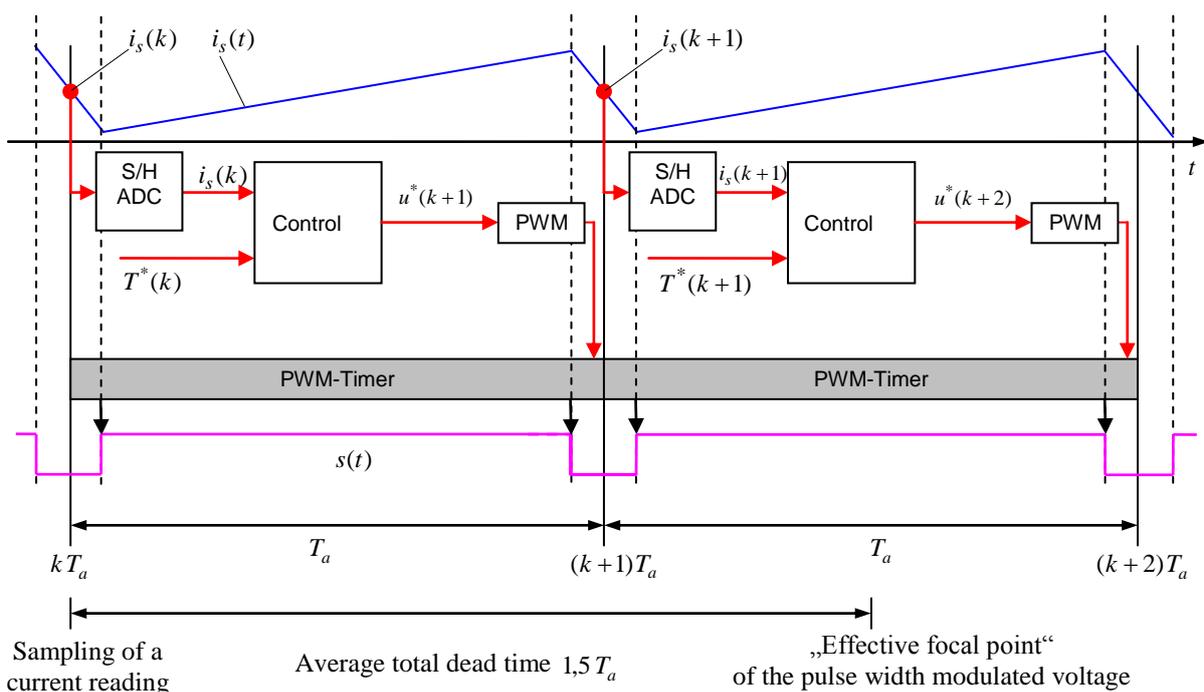


**Fig. 4-23:**  
Zur Stromabtastung mit dem Regular-Sampling-Verfahren      Current sampling with regular-sampling technique

#### 4.5 Totzeit des digitalen Regelkreises Dead Time in Digital Control Loops

Wird die Regelung auf einem Mikrocontroller oder Mikroprozessor realisiert, benötigt dieser zur Bearbeitung des Regelungsalgorithmus eine gewisse Zeit. Ein Messwert kann sich daher erst nach dieser Zeit auf den neuen Spannungssollwert auswirken. Zweckmäßigerweise synchronisiert man alle diese Abläufe mit dem durch die Pulsweitenmodulation oder Vektormodulation vorgegebenen Takt. Auf diese Weise entsteht durch die digitale Regelung eine Totzeit von einem Abtastschritt. Zusammen mit der zeitdiskreten Sollwertvorgabe für die PWM (Abschnitt 4.4) resultiert dies in einer Gesamt-totzeit von 1,5 Abtastschritten des Regelkreises.

If the control scheme is implemented on a microcontroller or microprocessor, then a certain time is required to process the control algorithm. Therefore, a measured value can affect the voltage reference only after this time period has passed. In an appropriate manner, all these processes are synchronized with the clock cycle given by the pulse width modulation or vector modulation. This way, the digital control introduces a dead time of one sampling step. Together with the discrete-time application of the reference voltage for the PWM (s. Section 4.4) a total dead time of 1.5 sampling steps of the control loop results.



**Fig. 4-24:**

Ablaufdiagramm von Messwert-abtastung, Regelungsalgorithmus und PWM

Flow chart of measurements sampling, control algorithm and PWM

Bei schwankender Eingangsgleichspannung verursacht die Totzeit der zeitdiskreten

At varying DC input voltages the dead time related to the discrete-time processing causes

Arbeitsweise ein weiteres Problem. Sowohl für die Vektormodulation als auch für die Dreiecksmodulation muss der Spannungssollwert  $\mathbf{u}^*$  zunächst auf die Eingangsspannung  $u_{dc}$  bezogen werden. Dazu wird der Wert der Gleichspannung verwendet, der zum Zeitpunkt der Bereitstellung des Spannungssollwerts bekannt ist. Wenn die Eingangsspannung synchron zusammen mit den Strommesswerten abgetastet wurde, ist das also der Spannungswert des zurückliegenden Abtastzeitpunktes:

$$\tilde{\mathbf{u}}_d^*(k) = \frac{\mathbf{u}_d^*(k)}{u_{dc}(k-1)/2} \quad (4.25)$$

Dieser normierte Spannungssollwert wird aber erst im folgenden Abtastintervall in eine entsprechende Pulsfolge umgesetzt. Ändert sich die Eingangsspannung bis dahin nicht oder nur langsam, stellt dies kein Problem dar. Bei einer stark schwankenden Eingangsspannung hingegen wird ein entsprechender Spannungsfehler bei der Pulsweitenmodulation verursacht.

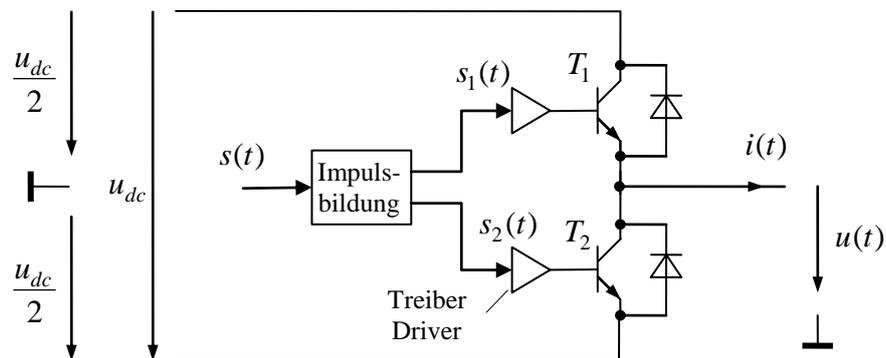
a further problem. Both, for the vector- and pulse width modulation, the voltage reference  $\mathbf{u}^*$  initially needs to be referred to the input voltage  $u_{dc}$ . Therefore, the DC voltage value, which is known by the time when the reference voltage is applied, is used. If the input voltage has been sampled synchronously together with the current measurements, then the voltage value at the previous sampling instant is given as:

However, this normalized voltage reference is converted into a corresponding pulse sequence not before the next sampling interval. If the input voltage does not change or only slowly changes until that point, no problem occurs. When dealing with highly fluctuating input voltages, however, a voltage error is caused during the pulse width modulation, accordingly.

#### 4.6 Spannungsfehler aufgrund von Wechselsperrzeiten Voltage Errors Due to Interlocking Times

Die beiden Transistoren eines Umrichterstranges werden zur Realisierung des schaltenden Verhaltens im Prinzip komplementär angesteuert. Zur Vermeidung von Kurzschlüssen aufgrund von Totzeiten in der Ansteuerung, den Treibern sowie zur Sicherstellung eines geordneten Kommutierungsvorganges wird zunächst der bislang leitende Transistor gesperrt und der komplementäre Transistor erst nach Ablauf einer *Wechselsperrzeit* oder *Schutzzeit* (*interlocking time*)  $t_0$  angesteuert. Der Zeitpunkt der tatsächlichen Stromkommutierung hängt davon ab, ob der Strom von einem Transistor in eine Diode kommutiert oder umgekehrt. Die Vorgänge sind in den folgenden Bildern dargestellt.

The switching behavior of an inverter can be realized by giving complimentary gate pulses to the two transistors of an inverter, as shown in the below figure. To avoid short circuits due to dead times in the control and the drivers and to ensure an orderly commutation, the previously conducting transistor is opened/blocked and the complementary transistor changes its state only after an *interlocking time*  $t_0$ . The timing of the actual commutation depends on whether the current flows from a transistor to a diode, or vice versa. The stages of operation are illustrated in the following pictures.



**Fig. 4-25:**  
Impulsbildung und Treiber

Pulse generator and driver

Ausgangsspannung in Abhängigkeit der  
Transistorzustände

Pulse generator and driver  
Output voltage as a function of transistor  
states

$T_1$	$T_2$	$u$	
1	0	$+u_{dc}/2$	Normalbetrieb normal operation
0	1	$-u_{dc}/2$	Normalbetrieb normal operation
0	0	$-u_{dc}/2 \operatorname{sgn}(i)$ <sup>1</sup>	gesperrter Zustand off state <sup>2</sup>
1	1		Zweig-Kurzschluss branch short circuit <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Solange der Strom fließt, bestimmt er über die dann leitende Diode die Ausgangsspannung. Erlischt der Strom, sperren also beide Dioden, wird die Ausgangsspannung nicht mehr vom Umrichter, sondern allein von der Gegenspannung der angeschlossenen Last bestimmt.

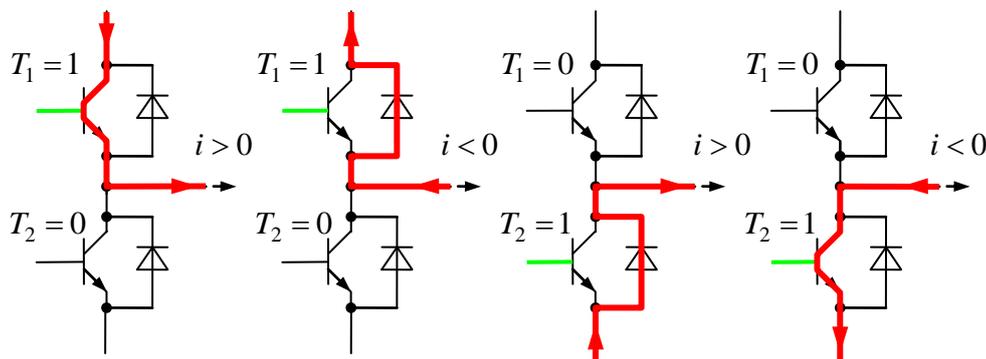
<sup>1</sup> As long as the current is flowing, it determines the output voltage via the conducting diode. Once the current stops flowing, i.e. the two diodes are blocking, the output voltage is no longer determined by the inverter but by the reverse voltage of the connected load.

<sup>2</sup> Der gesperrte Zustand ist im Allgemeinen auch derjenige, aus dem heraus der Aufrüstvorgang beginnt, und auf den beim Stillsetzen bzw. im Störfall zurück geschaltet wird.

<sup>2</sup> The state is the idle or off-mode. In case of operation error, the converter is switched to that state.

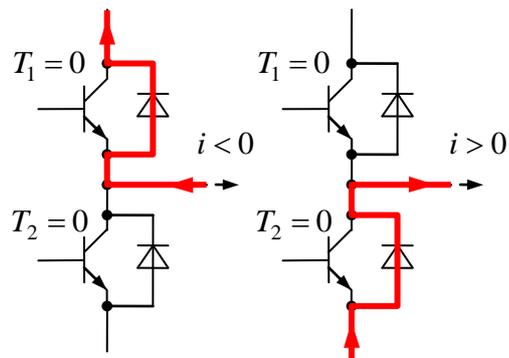
<sup>3</sup> Der Kurzschluss führt in aller Regel zur Zerstörung der Transistoren, wenn nicht in Folge sogar des gesamten Geräts. Dieser muss unter allen Umständen vermieden werden.

<sup>3</sup> The short circuit usually leads to the destruction of the transistors, or in consequence even to the destruction of the entire equipment. This must be avoided at all costs.



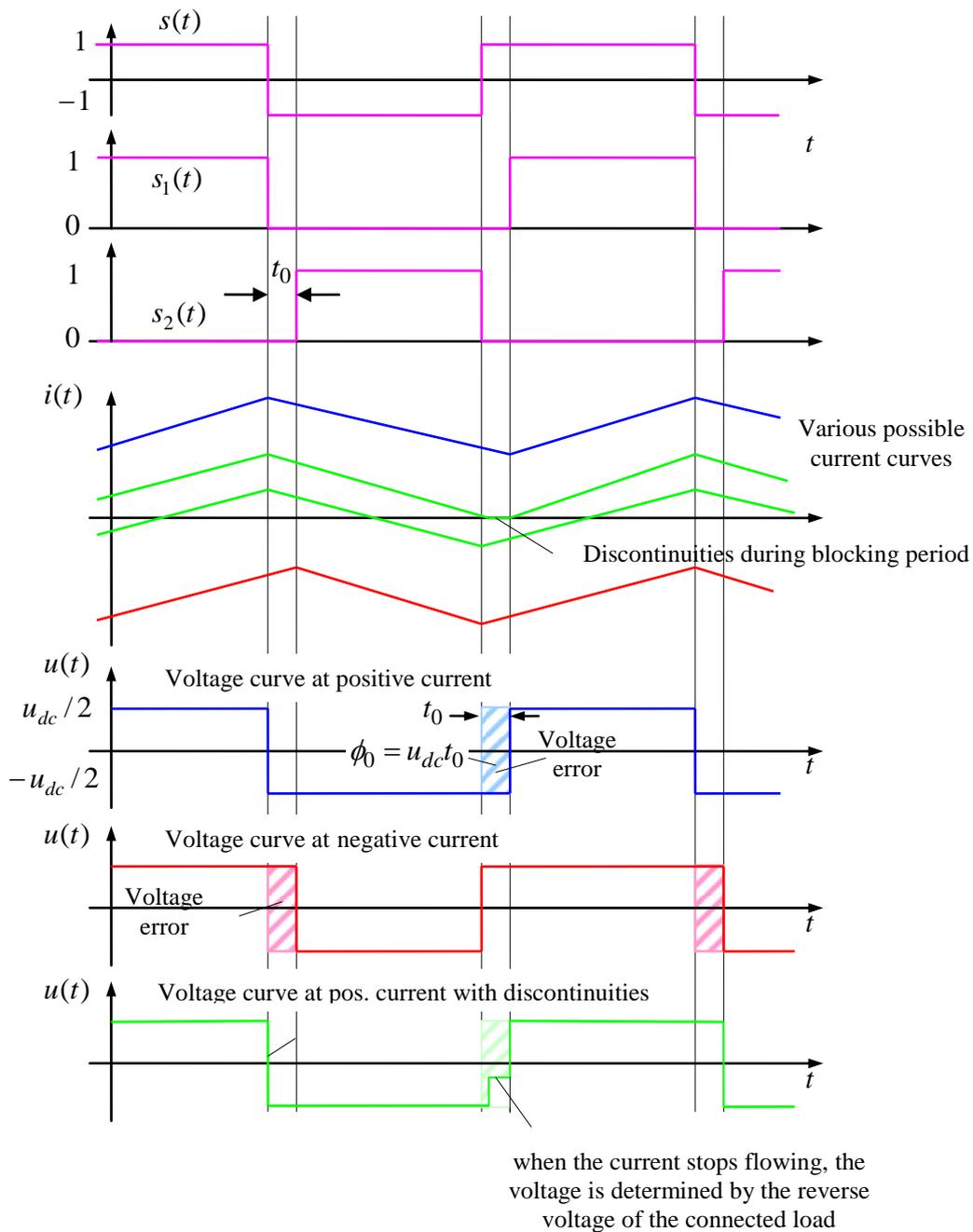
**Fig. 4-26:**  
Strompfade in Abhängigkeit des Schaltzustands und der Stromrichtung bei angesteuerten Transistoren

Current paths depending on the switching state and current flow direction

**Fig. 4-27:**

Strompfade in Abhängigkeit der  
Stromrichtung bei gesperrten  
Transistoren

Current paths depending on the  
current flow direction in case of  
blocked transistors



**Fig. 4-28:**  
Abläufe aufgrund der Wechselsperzeit  
Voltage curves due to interlocking times

Durch die Wechselsperzeit wird ein Fehler im Mittelwert der Ausgangsspannung verursacht. Der Fehler wirkt dem fließenden Strom stets entgegen (wie eine zusätzliche Last). Sofern das Vorzeichen des Stroms während der Pulsperiode nicht wechselt, gilt

The interlocking time introduces an error in the average value of the output voltage. The error affects by always opposing the current flow (just like an additional load). As long as the sign of the current does not change during the pulse period, the following equation holds

in der Mittelwertbetrachtung – bei ansonsten ideal angenommener Kommutierung: (in average) under the assumption of an ideal commutation:

$$\Delta u = \bar{u} - s^* u_{dc} = -\text{sign}(i) \frac{t_0}{T_s} u_{dc} = -\text{sign}(i) t_0 f_s u_{dc} \quad (4.26)$$

Hierbei wird angenommen, dass sich die Gleichspannung  $\Delta u_{dc}$  während einer Pulsperiode nicht wesentlich verändert. Wechselt der Strom innerhalb einer Schaltperiode das Vorzeichen, ist die Fehlergleichung nicht mehr gültig. Ist der Strom nahe Null, kann der Strom während der Wechselsperrezeit sogar lücken. Es sei darauf hingewiesen, dass auch diese Betrachtung nur eine Näherung darstellt, da die Kommutierungen in den einzelnen Transistoren und Dioden weiterhin idealisiert angenommen wurden.

Hereby, it shall be assumed that the DC voltage  $\Delta u_{dc}$  does not change significantly during a pulse period. In case the current changes sign within a switching period, then the above error equation is no longer valid. If the current is close to zero then the current curve might even exhibit discontinuities during interlocking periods. Please note that this consideration, as well, can only be regarded as an approximation, as the commutation procedures in the individual transistors and diodes are still assumed to be ideal.

Typische Werte:

Typical values:

Ventil	$f_s$	$t_0$
GTO-Thyristor	200-500 Hz	15 – 30 $\mu\text{s}$
IGBT	5-15 kHz	2 – 5 $\mu\text{s}$
MOSFET	20-1000 kHz	$\leq 1 \mu\text{s}$

Daraus resultierende typische Werte des Spannungsfehlers liegen in der Größenordnung von rund 10% oder mehr! Eine Kompensation dieses Fehlers scheint auf den ersten Blick einfach, ist jedoch gerade im Bereich kleiner Ströme, wenn sich also der Strommittelwert in der Größe seiner Schwankungsbreite bewegt, schwierig, da die Vorhersage des Stromnulldurchgangs bzw. des Stromlückens nur mit mäßiger Genauigkeit gelingt.

The typical values of the resulting voltage errors can be in the range of 10% or even more! Compensating these errors seems to be simple at a first glance, but turns out to be quite challenging when dealing with small currents, i.e. if the average value of the current lies within the fluctuation range. In this case, the prediction of zero-crossings / discontinuities of the current can only be performed with moderate accuracy.

Die Spannungsfehler wirken in jedem der drei beteiligten Stränge:

The voltage errors appear in each of the three phases:

$$\Delta u_{a,b,c} = -\text{sgn}(i_{a,b,c}) t_0 f_s u_{dc} \quad (4.27)$$

Aufgrund der Sternpunktschaltung haben stets zwei Ströme unterschiedliches Vorzeichen. Die Transformation der Spannungsfehler der einzelnen drei Stränge in die orthogonale Zeigerdarstellung ergibt einen Fehlspannungsvektor  $\Delta \mathbf{u}$ , dessen Betrag sich

Due to the star connected circuit, always two currents have different signs. The transformation of the individual phase voltage errors into the orthogonal vector representation results in a voltage vector  $\Delta \mathbf{u}$ , whose magnitude results from

über die Transformation  $T_{23}$  zu

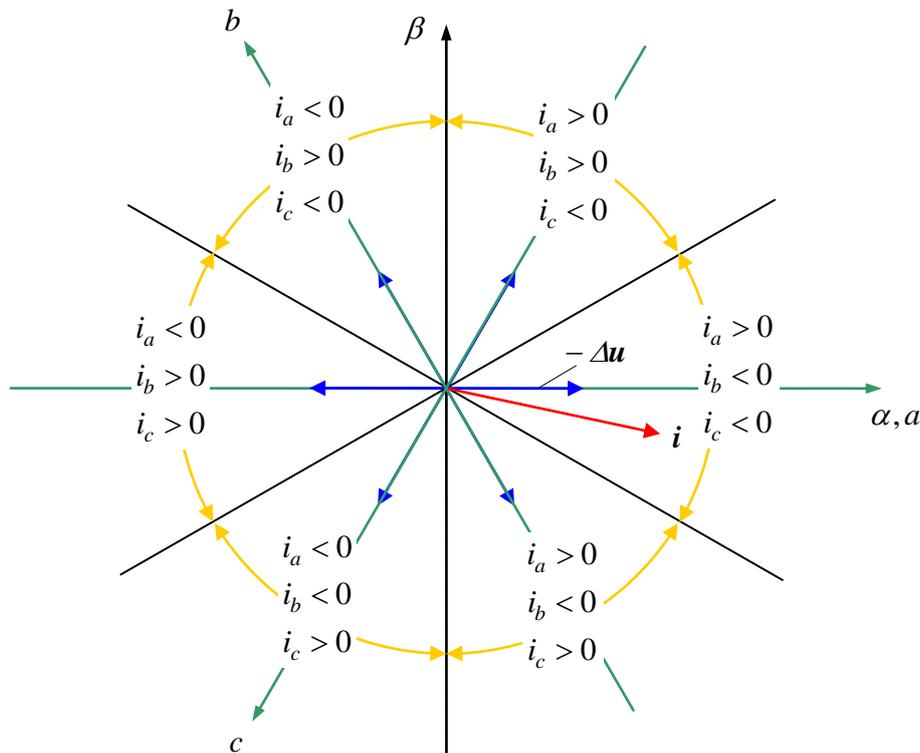
the transformation  $T_{23}$ :

$$|\Delta u| = \frac{4}{3} \Delta u = \frac{4}{3} t_0 f_s u_{dc} \quad (4.28)$$

ergibt. Die Richtung des Spannungsfehlers bestimmt sich aus den Stromvorzeichen bzw. dem Sektor, in welchem der Stromvektor liegt (s. Bild). Näherungsweise lässt sich der Spannungsfehler in der Gegenrichtung zum Stromvektor ansetzen:

The direction of the error voltage is determined by the sign of the current or by the sector in which the current vector is located (see below figure). The voltage error, oriented in the opposite direction of the current vector, can now be approximated, as follows:

$$\Delta u = -\frac{i}{|i|} \frac{4}{3} t_0 f_s u_{dc} \quad (4.29)$$



**Fig. 4-29:**  
Spannungsfehler aufgrund der Wechselsperzeit in Abhängigkeit der Richtung des Stromvektors

Voltage error due to interlocking time depending on the direction of the current vector

Der Spannungsfehler kann durch eine Aufschaltung auf den Sollwert der PWM kompensiert werden,

The voltage error can be compensated by adding it to the reference value of the PWM,

---

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{i}|} \frac{4}{3} t_0 f_s u_{dc} \quad (4.30)$$

Es empfiehlt sich jedoch bei kleinen Strömen, bei denen aufgrund der Stromschwankungsbreite die Richtung der Fehlerauswirkung unsicher ist, diese Kompensation in Abhängigkeit der Stromamplitude langsam auszublenden.

It is, however, recommended for small currents, for which the impact direction of the voltage error is uncertain due the current fluctuation range, to slowly fade out this compensation depending on the current amplitude.

## 4.7 Dynamische Mittelwertmodellierung des pulsweitenmodulierten Umrichters Dynamic State-Space Averaging of the Pulse-Width Modulated Inverter

Für die Momentanwerte gilt:

For instantaneous values, the following equations hold:

$$u_{a,b,c}(t) = \frac{1}{2} s_{a,b,c}(t) u_{dc}(t) \quad (4.31)$$

$$i_{dc}(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} s_k(t) i_k(t) \quad (4.32)$$

Mittelwertbildung über jeweils eine Pulsperiode: Averaging over one pulse period:

$$\bar{u}_{a,b,c}(t) = \frac{1}{2} \bar{s}_{a,b,c}(t) u_{dc}(t) = \frac{1}{2} s_{a,b,c}^*(t) u_{dc}(t) \quad (4.33)$$

$$\bar{i}_{dc}(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} \bar{s}_k(t) i_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} s_k^*(t) i_k(t) \quad (4.34)$$

Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass sich die Gleichspannung  $u_{dc}(t)$  bzw. die Motorströme  $i_{a,b,c}(t)$  während einer Pulsperiode nicht oder nur vernachlässigbar langsam ändern.

Hereby, it must be assumed that the DC voltage  $u_{dc}(t)$  and the corresponding motor currents  $i_{a,b,c}(t)$ , respectively, do not or at least only change negligibly slow during a pulse period.

Mittelwertmodell in  $\alpha/\beta$ -Koordinaten:

State-Space Average (SSA) model in  $\alpha/\beta$ -coordinates:

$$\bar{u}_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2} s_{\alpha,\beta}^*(t) u_{dc}(t) \quad (4.35)$$

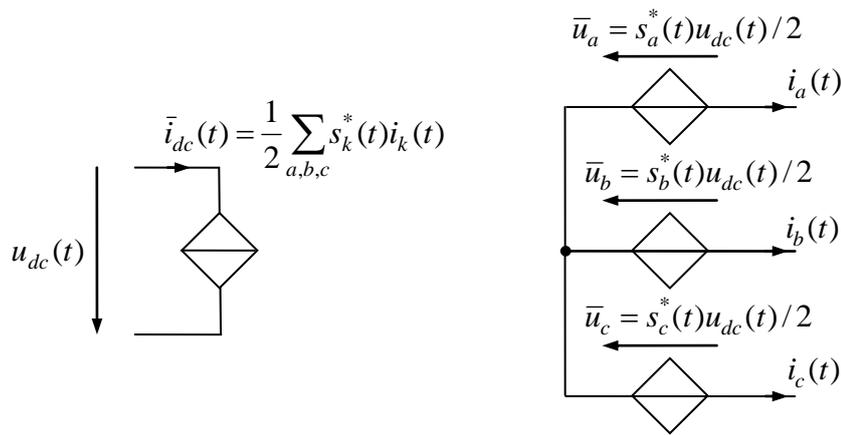
$$\bar{i}_{dc}(t) = \frac{3}{4} (s_{\alpha}^*(t) i_{\alpha}(t) + s_{\beta}^*(t) i_{\beta}(t)) \quad (4.36)$$

Mittelwertmodell in  $d/q$ -Koordinaten:

State-Space Average model in  $d/q$ -coordinates:

$$\bar{u}_{d,q}(t) = \frac{1}{2} s_{d,q}^*(t) u_{dc}(t) \quad (4.37)$$

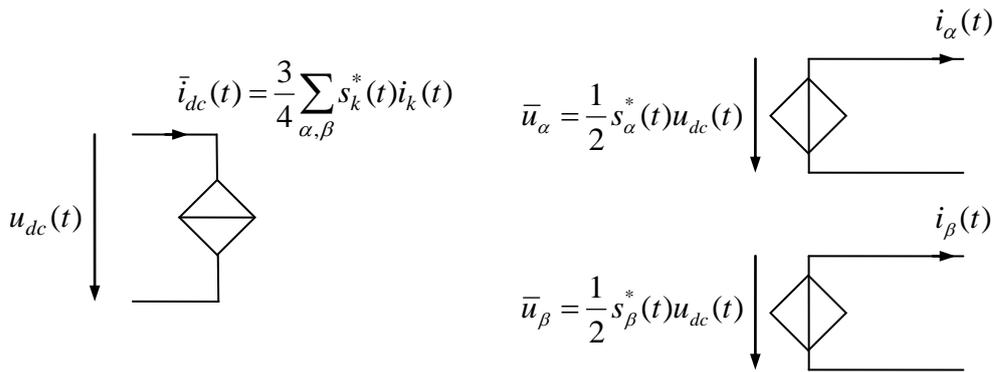
$$\bar{i}_{dc}(t) = \frac{3}{4} (s_d^*(t) i_d(t) + s_q^*(t) i_q(t)) \quad (4.38)$$



**Fig. 4-30:**

Ersatzschaltbild für Mittelwertmodellierung

Equivalent circuit diagram for State-Space Average modeling



**Fig. 4-31:**

Ersatzschaltbild für Mittelwertmodellierung in orthogonalen Koordinaten

Equivalent circuit diagram for State-Space Average modeling in orthogonal coordinates

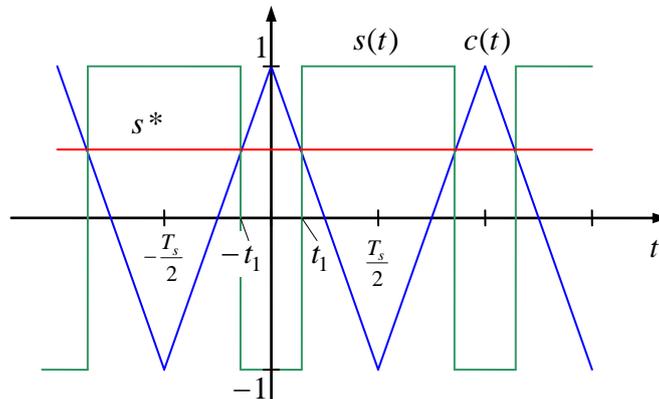
## 4.8 Oberschwingungen Harmonics

### 4.8.1 Oberschwingungen bei konstantem Sollwert Harmonics at Constant Reference Values

Harmonische der Schaltfunktion  $s(t)$  bei konstantem Sollwert: Aufgrund des Funktionsprinzips der Pulsweitenmodulation ist implizit sichergestellt, dass der Sollwert gleich dem Mittelwert der generierten Schaltfunktion ist:

Harmonics of the switching function  $s(t)$  at constant reference values: Due to the operating principle of the pulse width modulation, it is implicitly guaranteed that the reference value is equal to the mean value of the generated switching function:

$$\bar{s} = s^*$$



**Fig. 4-32:**

Pulsweitenmodulation mit zeitkontinuierlichem Sollwert

Pulse width modulation with continuous-time reference

Daneben verursacht die schaltende Arbeitsweise aber Harmonische. Es treten die Pulsfrequenz  $f_s$  bzw.  $\omega_s = 2\pi f_s$  und deren Vielfache auf. Die komplexen Fourierkoeffizienten der Harmonischen  $k\omega_s$  sind für  $k \neq 0$ :

In addition to that, the PWM also causes harmonics due to its switching characteristics. The pulse frequency  $f_s$  and  $\omega_s = 2\pi f_s$ , respectively, as well as their multiples occur. The complex Fourier coefficients of the harmonics  $k\omega_s$ , while  $k \neq 0$ , result to:

$$\begin{aligned}
S(k\omega_s) &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} e^{-jk\omega_s t} s(t) dt \\
&= \frac{1}{T_s} \left( \int_{-T_s/2}^{-t_1} e^{-jk\omega_s t} dt - \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jk\omega_s t} dt + \int_{t_1}^{T_s/2} e^{-jk\omega_s t} dt \right) \\
&= \frac{1}{T_s} \left( \int_{-T_s/2}^{T_s/2} e^{-jk\omega_s t} dt - 2 \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jk\omega_s t} dt \right) \tag{4.39} \\
&= -\frac{2}{T_s} \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{2}{T_s jk\omega_s} (e^{-jk\omega_s t_1} - e^{+jk\omega_s t_1}) \\
&= -\frac{2}{\pi k} \sin k\omega_s t_1 = -\frac{2}{\pi k} \sin 2\pi k f_s t_1
\end{aligned}$$

Mit

With,

$$t_1 = \frac{T_s}{4} (1 - s^*) \tag{4.40}$$

folgt weiter

it further follows

$$S(k\omega_s) = -\frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2} (1 - s^*)\right) \tag{4.41}$$

Der Fourierkoeffizient für die Frequenz Null  
ist der schon bekannte Mittelwert:The Fourier coefficient for the zero frequency  
is the already known mean value:

$$S(0) = \bar{s} = s^*$$

Die Zeitfunktion ergibt sich über die Fourier-  
ReiheThe time function is obtained via the Fourier  
series

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\omega_s) e^{jk\omega_s t} = -\frac{2}{\pi k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2} (1 - s^*)\right) e^{jk\omega_s t} \tag{4.42}$$

Da

Since

$$S(k\omega_s) = S(-k\omega_s) \tag{4.43}$$

kann man auch schreiben

we can also write,

$$s(t) = S(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} S(k\omega_s) \cos k\omega_s t = s^* - \frac{4}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2} (1 - s^*)\right) \cos k\omega_s t \tag{4.44}$$

Weitere mögliche Darstellung:

Alternatively,

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s^* - \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k(1-s^*)) \cos(2k\omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\pi \frac{2k+1}{2}(1-s^*)\right) \cos((2k+1)k\omega_s t) \\
 &= s^* + \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\pi k s^*) \cos(2k\omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)s^*\right) \cos((2k+1)k\omega_s t)
 \end{aligned}$$

Näherung für kleine  $s^*$

Approximation for small  $s^*$

$$s(t) \approx s^* + 2s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(2k\omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)k\omega_s t) \quad (4.45)$$

Das heißt, die ungradzahligen Vielfachen der Schaltfrequenz hängen in 1. Näherung nicht von dem Sollwert  $s^*$  ab; sie sind näherungsweise konstant, während die gradzahligen Vielfachen proportional mit dem Sollwert wachsen.

This means, that in a first approximation the odd multiples of the switching frequency do not depend on the desired value  $s^*$ . They are approximately constant, while the even multiples grow proportionately with the desired value.

Die Harmonischen der Spannung ergeben sich aus denen der Schaltfunktion über

The voltage harmonics result from the switching function via

$$U(k\omega_s) = \frac{U_{dc}}{2} S(k\omega_s) \quad (4.46)$$

wobei aber die Eingangsgleichspannung als konstant angenommen werden muss. Besitzt die  $u_{dc}(t)$  jedoch selbst harmonische Anteile, ergibt sich die Ausgangsspannung über die Faltungsoperation

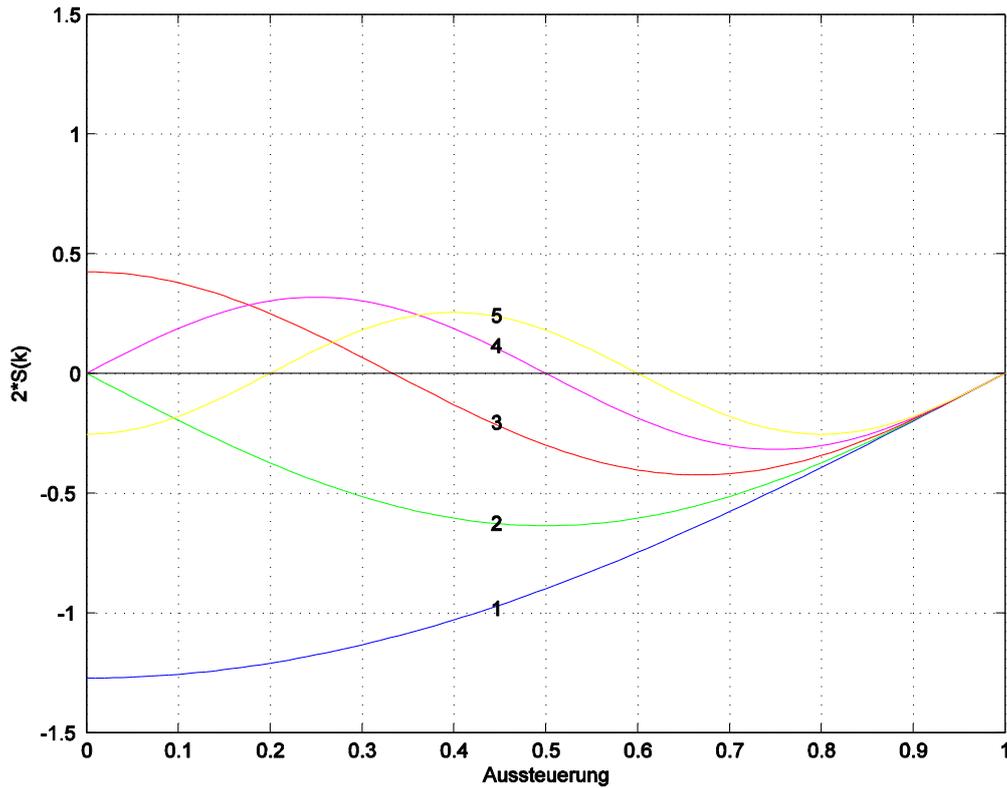
whereas the input DC voltage is assumed to be constant. However, in case harmonics of  $u_{dc}(t)$  itself exist, the output voltage results through the convolution operation

$$U(k\omega_s) = \frac{1}{2} (U_{dc} * S)(k\omega_s) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U(k\omega_s - l\omega_s) S(l\omega_s) \quad (4.47)$$

Oftmals interessieren nicht unmittelbar die Harmonischen der Spannung, sondern die des Stroms. An einer induktiven Last  $L$  bestimmen sich diese (bei konstanter Eingangsgleichspannung) nach

We are often not directly interested in the harmonics of the voltage, but rather of the currents. For an inductive load  $L$  (with constant input DC voltage), they can be obtained through

$$I(k\omega_s) = \frac{U(k\omega_s)}{jk\omega_s L} = \frac{U_{dc}}{2L} \frac{j}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-s^*)\right) \quad (4.48)$$

**Fig. 4-33:**

Harmonische bei der Dreiecks- Harmonics due to pulse width  
modulation modulation

Die Harmonischen des Eingangsgleichstroms The harmonics of the input DC current

$$i_{dc}(t) = s(t)i(t)$$

werden exakt über die Faltung bestimmt:

can be exactly determined via convolution:

$$\begin{aligned} I_{dc}(k\omega_s) &= (I * S)(k\omega_s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S(k\omega_s - l\omega_s) I(l\omega_s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S(k\omega_s - l\omega_s) \frac{U(l\omega_s)}{jl\omega_s L} \\ &= \frac{U_{dc}}{2jL} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l\omega_s} S(k\omega_s - l\omega_s) S(l\omega_s) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Als Abschätzung mag es ausreichen, den Ausgangsstrom

As an estimate, it may be sufficient to assume the output current

$$i(t) \approx I_0 \quad (4.50)$$

als näherungsweise konstant anzunehmen. Dann ergibt sich als Spektrum des Eingangs-

to be nearly constant. Then, the spectrum of the input current, as well as the output voltage

stroms ebenso wie die Ausgangsspannung directly results from the spectrum of the unmittelbar aus dem Spektrum der Schalt- switching function funktion

$$I_{dc}(k\omega_s) = I_0 S(k\omega_s) \quad (4.51)$$

### 4.8.2 Oberschwingungen bei sinusförmigem Sollwert Harmonics at Sinusoidal Reference Values

Annahme eines stationären Zustands, Mo- Assuming a steady state condition, dulation mit Amplitude  $A$  und Grund- modulation with amplitude  $A$  and frequenz  $f_1$ : fundamental frequency  $f_1$ :

$$s^*(t) = A \cos \omega_1 t = A \cos 2\pi f_1 t = \frac{A}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \quad (4.52)$$

Ist die Zahl der Pulse je Grundschiwungs- If the number of pulses per fundamental periode period,

$$n_p = \frac{\omega_s}{\omega_1} = \frac{f_s}{f_1} = \frac{T_1}{T_s} \quad (4.53)$$

ganzzahlig, spricht man von *synchronisierter Pulsung*. Die Pulsfrequenz ist in diesem Fall ein Vielfaches der Grundfrequenz. Im Spektrum treten demnach nur Vielfache dieser Grundfrequenz auf. is integral, it is referred to as *synchronized pulsing*. In this case, the pulse rate is a multiple of the fundamental frequency. In the spectrum, only multiples of the fundamental frequency would occur, accordingly.

Es sei jedoch zunächst angenommen, dass die Frequenzen in keinem rationalen Verhältnis stehen. Dann ist die Pulsfolge nicht periodisch in einer Periode der Grundschiwung. Die Fourierkoeffizienten werden über eine genügend lange Mittelungsdauer bestimmt: However, it shall initially be assumed that the frequencies are not following any rational pattern. Then, the pulse sequence is not periodic in a fundamental frequency period. The Fourier coefficients are determined over a sufficiently long averaging time:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} s(t) dt \quad (4.54)$$

Fourierkoeffizienten der Vielfachen der Fourier coefficients of fundamental frequency Grundschiwung: multiples:

$$\begin{aligned}
S(k\omega_1) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jk\omega_1 t} s(t) dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_1 t} s(t + mT_1) dt \\
&= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_1 t} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} s(t + mT_1) dt
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Die Mittelung der Schaltfunktion  $s(t)$  über viele Perioden ergibt somit genau den Sollwert der Pulsweitenmodulation:

Consequently, averaging of the switching function  $s(t)$  over many periods precisely leads to the reference value of the pulse width modulation:

$$s^*(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} s(t + mT_1) \tag{4.56}$$

Es folgt also

It therefore follows,

$$S(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_1 t} s^*(t) dt = S^*(k\omega_1) \tag{4.57}$$

Die Fourierkoeffizienten für die Vielfachen der Grundfrequenz sind also unmittelbar die Fourierkoeffizienten des Sollwerts der Pulsweitenmodulation. Die Pulsweitenmodulation wirkt sich also hierauf gar nicht aus! Ist der Sollwert wie oben angenommen ein rein sinusförmiges Signal, tritt genau dieses in der Schaltfunktion auf; der Sollwert wird nach Amplitude und Phase exakt abgebildet:

The Fourier coefficients of the fundamental frequency multiples, thus, exactly correspond to the Fourier coefficients of the reference value of the pulse width modulation. In other words, the pulse width modulation has no influence, in this context. If the reference is a purely sinusoidal signal, as assumed above, then this very signal is reflected in the switching function; the reference is mapped exactly with respect to amplitude and phase:

$$S(\omega_1) = S(-\omega_1) = \frac{A}{2} \tag{4.58}$$

Dann sind die Koeffizienten für Vielfache der Grundschwingung Null:

Then, the coefficients for multiples of the fundamental frequency are zero:

$$S(k\omega_1) = 0 \text{ für } |k| \neq 1$$

Insbesondere ist keine Zeitverzögerung, wie sie manchmal fälschlicherweise der Pulsweitenmodulation zugeschrieben wird, erkennbar; diese müsste sich in einer Phasenverschiebung bemerkbar machen. Eine zeitliche Verzögerung entsteht allein durch die

In particular, no time delay, as sometimes mistakenly attributed to the pulse width modulation, is recognizable; this would be noticeable in form of a phase shift. A time delay is introduced solely by the discrete-time application of reference values (see Section

Anwendung der zeitdiskrete Sollwertvorgabe, s. Abschnitt 4.4, nicht jedoch durch die Pulsweitenmodulation selbst.

4), but not through the pulse width modulation, itself.

Bei der praktischen Überprüfung dieser Zusammenhänge darf die als im Grenzfall unendlich vorausgesetzte Mittelungsdauer nicht übersehen werden. Bei einer Beschränkung der Messdauer auf eine oder wenige Grundschwingungsperioden werden Vielfache der Grundschwingung zu messen sein.

For the practical verification of these relationships, the assumed infinite averaging time must not be overlooked. When limiting the measurement duration to only one or few fundamental periods, multiples of the fundamental frequency will be measurable.

Zusätzlich zu den Vielfachen der Grundfrequenz treten Intermodulationsprodukte zwischen Schalt- und Grundfrequenz auf. Als Ausgangspunkt diene die Fourierreihe der Schaltfunktion  $s(t)$  für konstantes  $s^*$ :

In addition to the multiples of the fundamental frequency, intermodulation products occur between switching- and fundamental frequency. The Fourier series of the switching function  $s(t)$  for a constant  $s^*$  shall serve as a starting point, in this context:

$$s(t) = s^* + \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\pi k s^*) \cos(2k \omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) s^*\right) \cos((2k+1)k \omega_s t)$$

$$\approx s^* + 2s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(2k \omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)k \omega_s t)$$

(4.59)

Mit

With

$$s^*(t) = A \cos \omega_1 t \tag{4.60}$$

folgt

it follows,

$$s(t) = A \cos \omega_1 t + \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\pi k A \cos \omega_1 t) \cos(2k \omega_s t)$$

$$- \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) A \cos \omega_1 t\right) \cos((2k+1)k \omega_s t)$$

$$\approx A \cos \omega_1 t \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(2k \omega_s t) \right] - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)k \omega_s t)$$

(4.61)

In erster Näherung treten also als Intermodulationsprodukte weiterhin die ungeradzahigen Vielfachen der Schaltfrequenz  $\omega_s$  bzw.  $f_s$  auf, die Geradzahigen werden jedoch um die Grundfrequenz verschoben. Es treten dann jeweils Seitenbänder um diese Frequenzen herum auf. Berücksichtigt man höhere Ordnung in der obigen Näherung,

In a first approximation intermodulation products continue to occur as odd multiples of the switching frequency  $f_s$  and  $\omega_s$ , respectively. However, the even multiples are shifted around the fundamental frequency, causing side band around each of these frequencies, respectively. If we take higher orders in the above approximation into

---

treten weitere Intermodulationsprodukte auf. account, further intermodulation products  
would occur.

## 5 Regelung des Permanentmagnet-Synchronmotors in mitdrehenden Koordinaten

### Control of Permanent Magnet Synchronous Motor in Rotating Coordinates

Bislang wurde das stationäre Verhalten des Motors untersucht. Es wurde aber offen gelassen, wie man dafür sorgt, dass sich ein gewünschter Betriebszustand einstellt. Dies ist Aufgabe der Regelung. Die Regelungsaufgabe kann eine Lage-, Geschwindigkeits-, oder Drehzahlregelung sein. Da sich Lage- und Geschwindigkeitsregelung weitgehend unabhängig vom konkreten Motor in kaskadierter Struktur auf einer Drehmomentregelung aufbauend entwerfen lassen, soll letztere im Blickpunkt stehen.

Das Drehmoment ist der drehmomentbildende Stromkomponente proportional. Ein Drehmoment-Sollwert  $T^*$  kann daher über

$$i_{sq}^* = \frac{2}{3p\psi_p} T^* \quad (5.1)$$

in einen Stromsollwert umgerechnet werden. Die Aufgabe der Drehmoment-Regelung wird daher in die Aufgabe der Regelung des Stroms überführt.

#### 5.1 Stromregelung

##### Current Control

Aufgabe der Stromregelung ist nun, die Komponenten der Motorspannung  $u_{sd}, u_{sq}$  stets so zu regulieren, dass sich die gewünschten Stromkomponenten  $i_{sd}, i_{sq}$  einstellen. Der Sollwert  $i_{sq}^*$  resultiert aus dem angeforderten Drehmoment. Der Sollwert der  $d$ -Komponente wird ggf. nach den Erfordernissen der Flusschwächung eingestellt (vgl. Abschnitt 2.10). Zunächst soll der Spannungsstellbereich vorausgesetzt werden, so dass von

$$i_{sd}^* = 0 \quad (5.2)$$

So far, we have examined the steady-state behavior of the motor. It was, however, not discussed how to ensure that a desired operating state actually appears. This is the task of the control. The control can be a position-, velocity- or speed control. The position and speed control can be set up largely independent of a particular motor in a cascaded structure, where they represent superordinate entities of a torque control. Therefore, latter shall be focused on in the following.

The torque is proportional to the torque-generating current component. Therefore, a torque reference  $T^*$  may be converted into a current reference following

The task of the torque control is thus converted into the task of regulating the current.

ausgegangen werden kann. Der Stromrichter bedient sich für seine Aufgabe des Umrichters und seiner Pulsweitenmodulation als Spannungsstellglied. Die Reglerstellgrößen sind also Spannungssollwerte  $u_{sd}^*, u_{sq}^*$  für die Pulsweitenmodulation. Wir nehmen im Folgenden vereinfachend an, dass diese Sollwerte durch PWM und Umrichter fehlerfrei in Istwerte (im Sinne der dynamischen Mittelwertmodellierung) umgesetzt werden,

can be assumed. In order to perform the current control task, the control or actuating variables of the current controller can be considered as voltage references  $u_{sd}^*, u_{sq}^*$  for the PWM unit. For simplification, we shall assume in the following, that the requested values are converted into actual values correctly by the PWM and the inverter (in terms of the dynamic State-Space Average modeling), i.e.

$$u_{sd} = u_{sd}^*, \quad u_{sq} = u_{sq}^* \quad (5.3)$$

Zunächst muss nun die Regelstrecke modelliert werden. Dazu wird zweckmäßigerweise die Darstellung mit Stromdifferenzialgleichung im mitdrehenden Koordinatensystem verwendet (s. Abschnitt 2.2):

In a first step, the plant model (that is the system to be controlled) needs to be derived. It is advantageous to do so by means of the current differential equations in rotor-fixed/rotating coordinates (see Section 2.2):

$$\begin{aligned} L_s \dot{i}_{sd} &= u_{sd} - R_s i_{sd} + \omega L_s i_{sq} \\ L_s \dot{i}_{sq} &= u_{sq} - R_s i_{sq} - \omega L_s i_{sd} - \omega \psi_p \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bezüglich der Regelungsaufgabe liegt also ein *verkoppeltes* System mit zwei Stellgrößen  $u_{sd}, u_{sq}$  und zwei Regelgrößen  $i_{sd}, i_{sq}$  vor. Die Verkopplung kann aber durch eine einfache Rückführung bzw. Vorsteuerung der Spannungen gemäß

Regarding the control task, we are, thus, dealing with a *coupled system* with two control or actuating variables  $u_{sd}, u_{sq}$  and two controlled variables  $i_{sd}, i_{sq}$ . The coupling effect can, however, be compensated with the help of a simple voltage feedback and feed-forward control, respectively, according to

$$\begin{aligned} u_{sd}^* &= u_{sd}^0 + \Delta u_{sd}^* \\ u_{sq}^* &= u_{sq}^0 + \Delta u_{sq}^* \end{aligned} \quad \text{mit/with} \quad \begin{aligned} u_{sd}^0 &= -\omega L_s i_{sq} \\ u_{sq}^0 &= \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p \end{aligned} \quad (5.5)$$

kompensiert werden, wodurch die zwei entkoppelten Eingrößen-Regelstrecken

In consequence, two decoupled SISO (Single Input Single-Output) plant models are obtained.

$$\begin{aligned} L_s \dot{i}_{sd} &= -R_s i_{sd} + \Delta u_{sd}^* \\ L_s \dot{i}_{sq} &= -R_s i_{sq} + \Delta u_{sq}^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

entstehen. Es handelt sich also um zwei  $P-T_1$ -Glieder mit der Übertragungsfunktion

Both represent  $P-T_1$ -elements with the transfer function

$$G_i(s) = \frac{1}{R_s} \frac{1}{1 + s\tau_s} \quad (5.7)$$

Hierbei ist

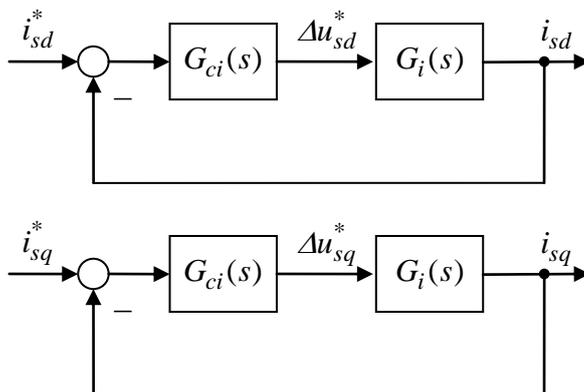
whereas

$$\tau_s = \frac{L_s}{R_s} \quad (5.8)$$

die *Ständerzeitkonstante*. Die nun verbleibende Regelungsaufgabe kann recht einfach beispielsweise durch Ansatz jeweils eines *PI*-Reglers, bewältigt werden.

represents the *stator time constant*. The remaining control task can now be easily solved, by designing a *PI*-controller for each of the plant models.

$$G_{ci}(s) = K_{Pi} \frac{1 + sT_n}{sT_n} \quad (5.9)$$



**Fig. 5-1:**

Vereinfachtes Ersatzmodell für den Entwurf der Stromregelkreise

Simplified current control block diagram

Diese vereinfachte Modellierung dient der *Dimensionierung* der Reglerparameter, also der Reglerverstärkung  $K_{Pi}$  und der Nachstellzeit  $T_n$ . Bei der Realisierung der Regelung ist natürlich zu berücksichtigen, dass u. a. auch die Transformationen der *d/q*-Komponenten in das ständerfeste System und zurück ausgeführt werden müssen.

This simplified model serves the calculation of the controller parameters, i.e. the controller gain  $K_{Pi}$  and controller reset time  $T_n$ . For the realization of the control scheme, the transformation of the *d/q*-components into the stator-fixed coordinate system and vice versa, also needs to be regarded, of course.

## 5.2 Zeitdiskrete Reglerrealisierung Discrete-Time Controller Realization

Häufig abstrahiert man beim Regelungs-

Quite often, the control design is abstracted

entwurf wie bislang auch hier von der zeitdiskreten Realisierung der Regelung mittels eines Prozessors und wendet zeitkontinuierliche Entwurfsmethoden an. Erst nach der Reglerdimensionierung werden beispielsweise die Integratoren in den Reglern durch Summierer angenähert. Wir sprechen dann von einer *quasi-kontinuierlichen* Betrachtungsweise. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, wenn die typischen Zeitkonstanten des Systems im Bereich einer gewissen Zahl von Abtastschritten liegen. Die Grenzen dieser Vorgehensweise werden aber spätestens dann erreicht, wenn Regelvorgänge innerhalb ganz weniger Abtastschritte ausgeführt werden sollen (z. B. Deadbeat-Regelung). Dann muss der Regelungsentwurf mittels zeitdiskreter Verfahren durchgeführt werden, worauf hier aber nicht eingegangen wird.

Auch beim quasikontinuierlichen Entwurf sollten aber zumindest die Auswirkungen der zeitdiskreten Realisierung durch eine summarische Totzeit von eineinhalb Abtastschritten berücksichtigt werden (s. Abschnitte 4.4 und 4.5). Obwohl diese Totzeit aus der Reglerrealisierung herrührt, kann diese gedanklich der Regelstrecke zugeschlagen werden, da diese keinen Freiheitsgrad für die Reglerauslegung darstellt:

$$G_{ci}(s) = K_{Pi} \frac{1 + sT_n}{sT_n} e^{-\frac{3}{2}T_a s} \quad (5.10)$$

Diese Totzeit macht sich aber nicht nur innerhalb jedes einzelnen Regelkreises für die  $d$ - und die  $q$ -Komponente bemerkbar, sondern auch bei der Realisierung der Rotororientierung an sich. Wird die Transformation der Spannungswerte aus dem  $d/q$ -System in das ständerfeste  $\alpha/\beta$ -System mit dem momentanen verfügbaren Drehwinkel  $\varepsilon$  vorgenommen, hat sich der Rotor nach der Totzeit bereits um einen Winkel von  $1,5T_a\omega$  weitergedreht. Es würde dann abhängig von der Drehgeschwindigkeit  $\omega$  eine falsch orientierte Spannung auf den Motor geschaltet. Bei der Rücktransformation der Spannungswerte in das ständerfeste System sollte daher ein Winkel-

from the actual discrete-time control realization on a processor by applying continuous-time design rules and methods (see above). Only after the dimensioning of the control parameters, e.g. integrators are approximated by summing units. In this case, we speak of a *quasi-continuous* design approach. This approach is justified if the typical time constants of the system lie within a certain number of sampling steps. The limitations of this approach are reached at the latest, however, if the control actions are to be executed within only very few sampling steps (such as in deadbeat controls). In such cases, discrete-time design methods must be applied, which shall, not be discussed any further here.

However, even when using a quasi-continuous design approach, the effects of the discrete-time control realization should be taken into account through a total dead-time of one and a half sampling intervals (see Sections 4.4 and 4.5). Although this dead-time results from the controller realization, it can theoretically be added to the plant model as it does not represent a degree of freedom for the controller design:

This dead-time can be recognized not only within each individual control loop for the  $d$ - and  $q$ -component, but also in the realization of the rotor orientation, itself. If the transformation of the voltage references from the  $d/q$ -system into the stator-fixed  $\alpha/\beta$ -system is performed with the currently available rotation angle  $\varepsilon$ , then after the dead time, the rotor has rotated further by an angle of  $1,5T_a\omega$ . Depending on the rotational speed  $\omega$ , an incorrectly oriented voltage would then be applied to the motor. Therefore, during the reverse transformation of the voltage references into the stator-fixed system an angle offset of

---

vorhalt von

$$\Delta\varepsilon = \frac{3}{2}T_a\omega \quad (5.11)$$

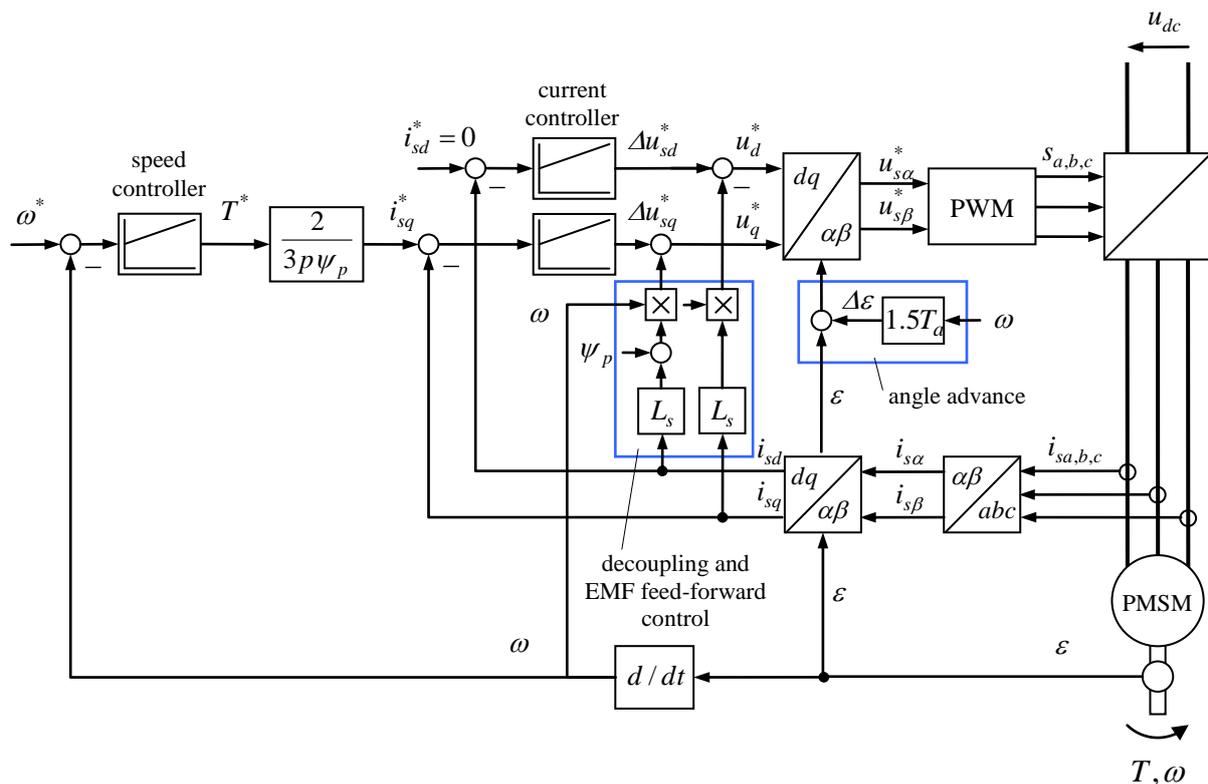
berücksichtigt werden, um eine korrekte Spannungsorientierung zu gewährleisten. Ggf. kann auf diesen Winkelvorhalt verzichtet werden, wenn sich aufgrund des zu beherrschenden Drehzahlbereichs nur kleine Winkelkorrekturen von wenigen Grad ergeben. Die integralen Anteile der Stromregler werden dann die Fehler kompensieren. Bei hohen Drehzahlen kann natürlich abhängig von der Abtastfrequenz dieser Vorhalt aber bis zu zweistelligen Gradzahlen anwachsen. Dann ist anzuraten, diesen Vorhalt tatsächlich vorzusehen.

should be taken into account, to ensure a correct voltage orientation. It may be possible to neglect this angle offset, if depending on the speed range of the motor, angular errors of only few degrees result. The integrators in the current controllers will then compensate for these errors. At high speeds and depending on the sampling frequency, however, the angle offset can increase significantly up to two-digit numbers. In this case, it is advisable to explicitly account for this angle offset in the control design.

### 5.3 Gesamtstruktur der Regelung Overall Control Structure

Das folgende Bild fasst die bisherigen Überlegungen in einem Gesamt-Strukturbild zusammen, wobei auch ein Drehzahlregler ergänzt wurde.

The following figure summarizes the previous considerations in a block diagram, also adding a speed controller.



**Fig. 5-2:**  
Grundstruktur der Regelung in  
mitdrehenden Koordinaten für  
den Spannungsstellbereich  
(ohne Flussschwächbetrieb)

Basic structure of the control  
loop in rotor-fixed coordinates  
for the voltage control range  
(without flux weakening mode)

## 6 Direkte Drehmoment-Regelung (DTC) Direct Torque Control (DTC)

### 6.1 Regelungskonzept Control Concept

Die Direkte Drehmoment-Regelung oder *Direct Torque Control (DTC)* ist ein alternatives Konzept zur Regelung in mitdrehenden Koordinaten mit unterlagerter Stromregelung und PWM.

As an alternative to the above described control concept in rotating coordinates with subordinate current controllers and PWM, the *Direct Torque Control (DTC)* shall be discussed in the following.

Ausgangspunkt ist wiederum die Gleichung für das Drehmoment:

Once again, the torque equation represents the starting point for the following considerations:

$$T = \frac{3}{2} p (\psi_{p\alpha} i_{s\beta} - \psi_{p\beta} i_{s\alpha}) = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s \quad (6.1)$$

Mit

With,

$$\boldsymbol{\psi}_s = L_s \mathbf{i}_s + \boldsymbol{\psi}_p \quad (6.2)$$

erhält man weitere äquivalente Darstellungen für das Drehmoment:

further equivalent representations for the torque are obtained:

$$T = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s = \frac{3}{2} p (\boldsymbol{\psi}_s - L_s \mathbf{i}_s) \times \mathbf{i}_s = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_s \times \mathbf{i}_s \quad (6.3)$$

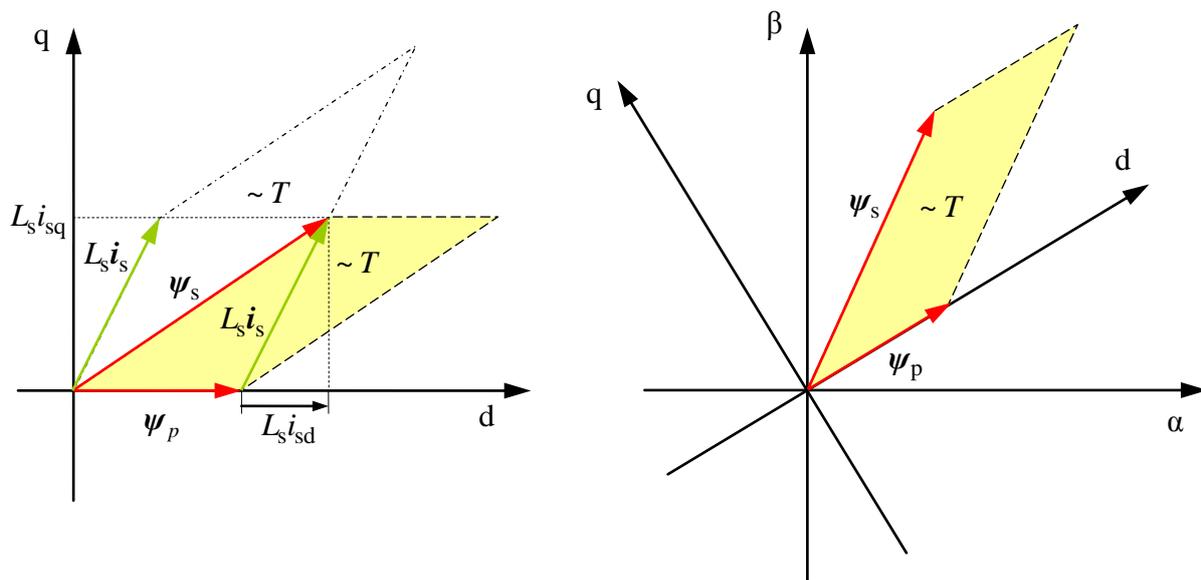
oder

or

$$T = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s = \frac{3p}{2L_s} \boldsymbol{\psi}_p \times (\boldsymbol{\psi}_s - \boldsymbol{\psi}_p) = \frac{3p}{2L_s} \boldsymbol{\psi}_p \times \boldsymbol{\psi}_s \quad (6.4)$$

Die letzte Darstellung ist Ausgangspunkt für das DTC-Verfahren.

This last representation is the starting point for the DTC method.

**Fig. 6-1:**

Zur geometrischen Interpretation des Drehmoments als äußeres Produkt zwischen Fluss und Strom oder zwischen den Flussvektoren

Geometric interpretation of the torque as the cross product between the flux and current or between the flux vectors

Es gilt

The following equation holds:

$$\dot{\psi}_s = u_s - R_s i_s \approx u_s \quad (6.5)$$

Der gewählte Spannungsvektor bestimmt also die Richtung der Änderung des Flusses. Als mögliche Spannungsvektoren werden nur die elementaren Spannungen  $v_k$  betrachtet. Im unten dargestellten Beispiel erhöhen die Vektoren  $v_3, v_4$  das Drehmoment, die Vektoren  $v_1, v_6$  verringern das Drehmoment, da die das Drehmoment bestimmende Parallelogrammfläche in einen Fall größer, im anderen Fall verringert wird.

The chosen voltage vector, thus, determines the direction of the flux change. As possible voltage vectors only the fundamental voltages  $v_k$  are considered. In the example shown below, vectors  $v_3, v_4$  increase the torque while vectors  $v_1, v_6$  decrease it. Geometrically speaking, this is due to the fact that in the first case the plane of the parallelogram increases, while in the second case it decreases.

Wird der Nullspannungsvektor  $v_0$  oder  $v_7$  gewählt, verharrt der Ständerfluss  $\psi_s$  näherungsweise in seiner Position. Wie sich in diesem Fall das Drehmoment verändert, hängt dann davon ab, wie sich der Vektor des Permanentflusses  $\psi_p$  aufgrund der mechanischen Rotordrehung bewegt. Für das in Fig. 6-2 gezeigte Beispiel würde sich das Drehmoment bei fest stehendem Ständerflusszeiger  $\psi_s$  bei einer positiven Drehung

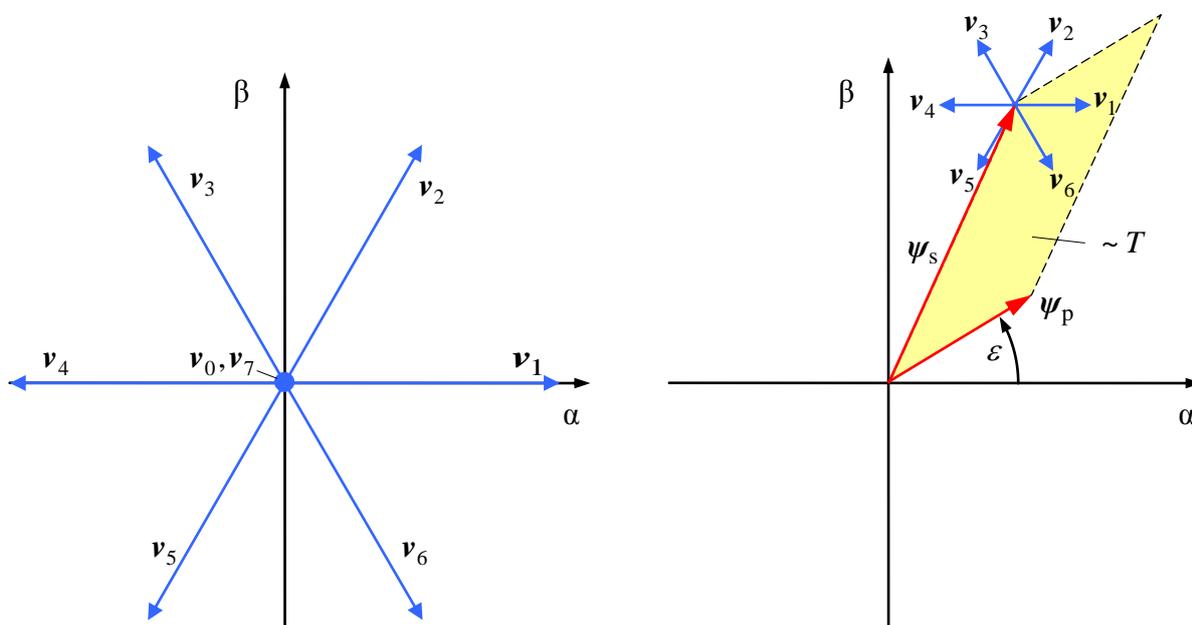
If the zero voltage vector  $v_0$ , or  $v_7$ , resp., is chosen, then the stator flux  $\psi_s$  approximately remains in its position. The change in torque then only depends on the movement of the vector of the permanent magnet flux  $\psi_p$  which is due to the mechanical rotation of the motor. For the example shown in Fig. 6-2 with positive speed  $\dot{\epsilon} = \omega > 0$ , the torque would decrease with a standing still stator flux vector  $\psi_s$ . The torque would increase

$\dot{\varepsilon} = \omega > 0$  verringern, bei negativer Drehrichtung vergrößern. with negative speed.

Neben dem Drehmoment wird auch der Flussbetrag Apart from the torque, the flux magnitude  
Flussbetrag

$$\psi_s = |\psi_s|$$

je nach Wahl des Spannungsvektors vergrößert oder verkleinert. increase or decreases, as well, depending on the choice of the voltage vector.

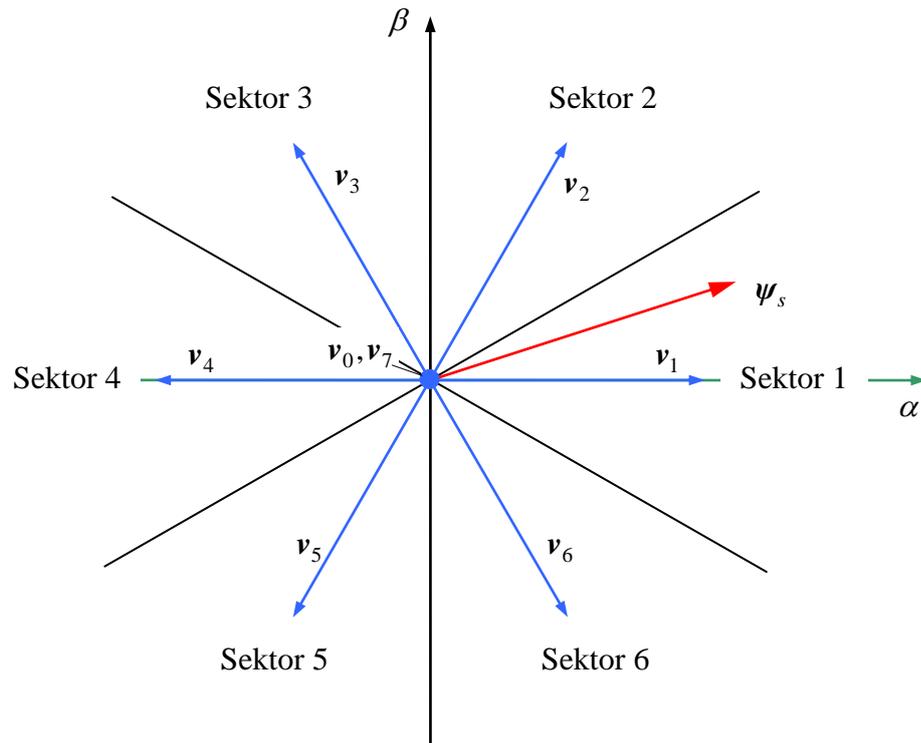


**Fig. 6-2:**  
Zum Regelungskonzept des  
DTC-Verfahrens

Control concept of the DTC  
method

Abhängig vom Sektor (s. Fig. 6-3, die hier verwendete Sektordefinition unterscheidet sich von derjenigen bei der Vektormodulation), in welchem sich der aktuelle Ständerflussvektor befindet, sind die Auswirkungen der verschiedenen Spannungsvektoren auf Drehmoment und Fluss in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Depending on the sector (see Fig. 6-3, the sector definition used here differs from that of the vector modulation), in which the stator flux vector is currently located, the effects of various voltage vectors on torque and flux are summarized in the following table.

**Fig. 6-3:**Definition der Sektoren für das  
DTC-VerfahrenSector definition for the DTC  
method

Sector	$\dot{T} > 0$ $\dot{\psi}_s > 0$	$\dot{T} > 0$ $\dot{\psi}_s < 0$	$\dot{T} < 0$ $\dot{\psi}_s > 0$	$\dot{T} < 0$ $\dot{\psi}_s < 0$	$\dot{T} < 0$ if $\omega > 0$ $\dot{T} > 0$ if $\omega < 0$ $\dot{\psi}_s \approx 0$
1	$v_2$	$v_3$	$v_6$	$v_5$	$v_0, v_7$
2	$v_3$	$v_4$	$v_1$	$v_6$	$v_0, v_7$
3	$v_4$	$v_5$	$v_2$	$v_1$	$v_0, v_7$
4	$v_5$	$v_6$	$v_3$	$v_2$	$v_0, v_7$
5	$v_6$	$v_1$	$v_4$	$v_3$	$v_0, v_7$
6	$v_1$	$v_2$	$v_5$	$v_4$	$v_0, v_7$

Drehmoment und Flussbetrag werden nun durch Hysterese-Regelungen in entsprechenden Toleranzbändern um die Sollwerte gezwungen. Die Schaltstrategie für das Drehmoment ist wie folgt: Unter der Annahme positiver Drehrichtung wird bei zu kleinem Drehmoment ein aktiver Spannungsvektor geschaltet (s. Tabelle), um das

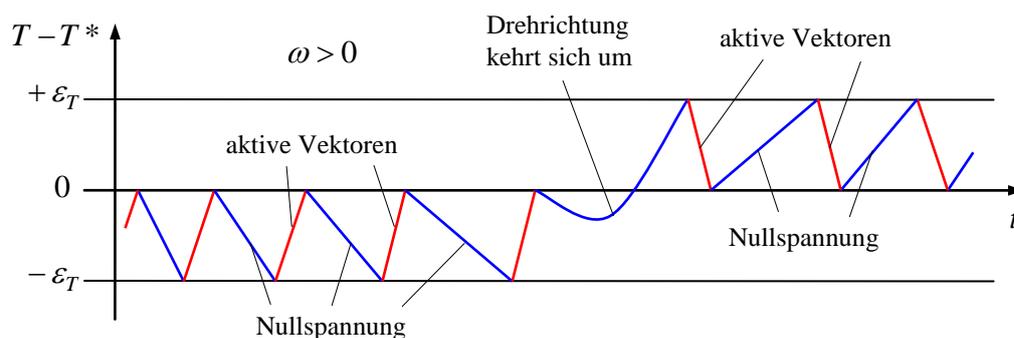
Torque and flux magnitude are now forced to remain within certain tolerance bands around its reference values with the help of Hysteresis controls. The switching strategy for the torque is as follows: Under the assumption of a positive direction of rotation and torque values too far below the desired reference, an active voltage vector is applied

Drehmoment zu erhöhen. Wird die obere Schwelle des Toleranzbandes erreicht, wird der Nullspannungsvektor geschaltet (letzte Spalte der obigen Tabelle), dadurch sinkt das Drehmoment bei positiver Drehrichtung. Der Flussvektor verharrt dann in dem erreichten Punkt. Auf den Flussbetrag kann in diesem Zustand dann kein Einfluss mehr genommen werden, was akzeptabel ist, da dieser bei der nächsten Wahl des aktiven Spannungsvektors berücksichtigt werden kann.

Diese Schaltstrategie erfordert die Kenntnis der Drehrichtung, da sich die Verhältnisse bezüglich der Veränderung des Drehmoments im Nullspannungszustand mit der Drehrichtung gerade umkehren. Andererseits kann vom Verhalten des Drehmoments im Zustand der Nullspannung auf die Drehrichtung geschlossen werden: Nimmt das Drehmoment während des Zustands der Nullspannung ab, muss die Drehrichtung positiv sein; andernfalls dreht sich der Motor im negativen Sinne. Dies kann durch eine Modifikation der Schaltstrategie, die dann mit drei Schwellen wie im nachfolgenden Bild skizziert arbeitet, erreicht werden. Eine explizite Kenntnis der Drehrichtung ist dann nicht mehr erforderlich.

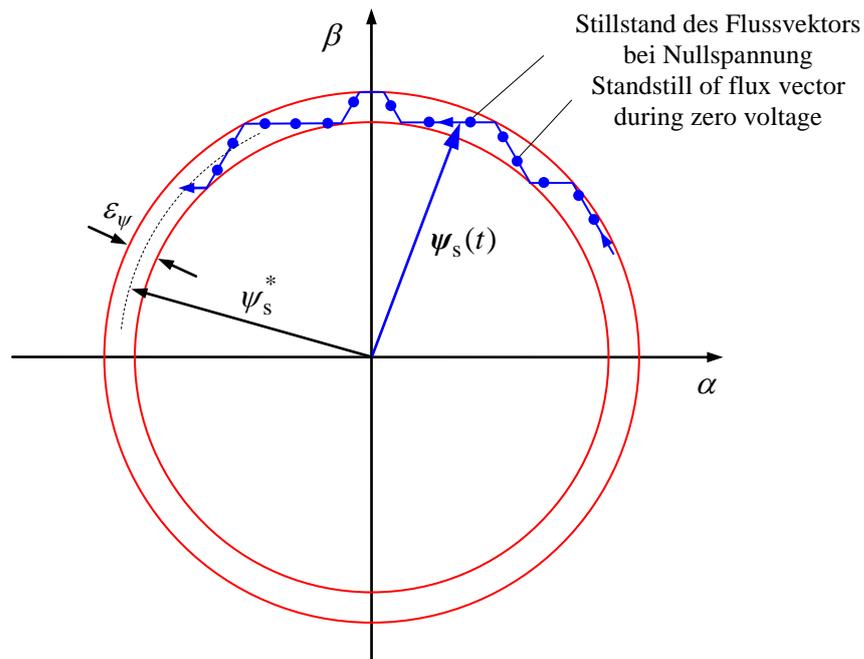
(see table) to increase the torque, in consequence. If the upper threshold of the tolerance band has been reached, the zero voltage vector is applied (last column of the above table), decreasing the torque in positive direction of rotation, accordingly. At the same time, the flux vector remains in its attained position. The flux magnitude cannot be influenced in this state, which is acceptable, as it can be considered during the next choice of the active voltage vector.

This switching strategy requires the permanent knowledge of the direction of rotation, as with respect to the change in torque in the zero voltage state, the relationships exactly invert depending on the direction of rotation. On the other hand, the direction of rotation can be inferred from the behavior of the torque in the zero voltage state: If the torque decreases within the zero voltage state, the direction of rotation must be positive; otherwise, the motor rotates in the negative direction. This can be achieved by modifying the switching strategy, which then relies on three thresholds, as shown in the figure below. An explicit knowledge of the direction of rotation is now no longer necessary.



**Fig. 6-4:**  
Schaltstrategie für das Drehmoment

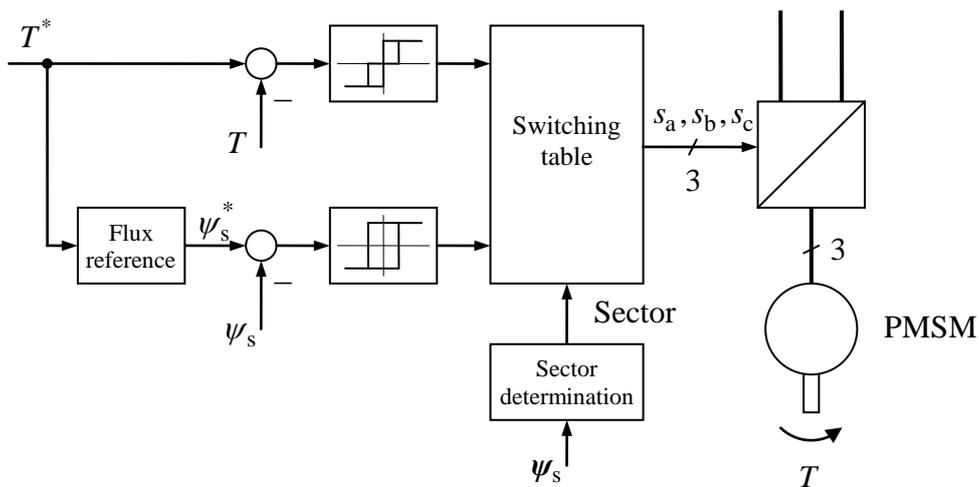
Switching strategy for the torque



**Fig. 6-5:**  
Typische Flusstrajektorie beim DTC-Verfahren  
Typical flux trajectory in DTC methods

Die resultierende Regelungsstruktur zeigt das folgende Bild. In dieser Struktur tritt keine Pulsweitenmodulation auf. Die Schaltstrategie erzeugt direkt die Stellbefehle für den Umrichter.

The resulting control structure is shown in the figure below. Note that no pulse-width modulation applies. The switching strategy produces directly the control commands for the inverter.



**Fig. 6-6:**  
Struktur der direkten Drehmoment-Regelung (DTC)  
Structure of Direct Torque Control (DTC)

Zur verlustoptimalen Regelung sollte der Flussollwert in Abhängigkeit des Drehmoments angepasst werden. Gehen wir von  $i_{sd} = 0$  aus, so folgt für den Fluss

For loss optimal control, the flux reference should be adjusted as a function of the torque. Assuming  $i_{sd} = 0$ , the flux is given as,

$$\psi_s^2 = \psi_p^2 + L_s^2 i_{sq}^2 = \psi_p^2 + \left( \frac{2L_s T}{3p\psi_p} \right)^2$$

Dementsprechend sollte der Flussollwert in Abhängigkeit des Drehmomentsollwerts  $T^*$  verändert werden:

Accordingly, the flux reference should be adjusted depending on the torque reference  $T^*$ , as follows:

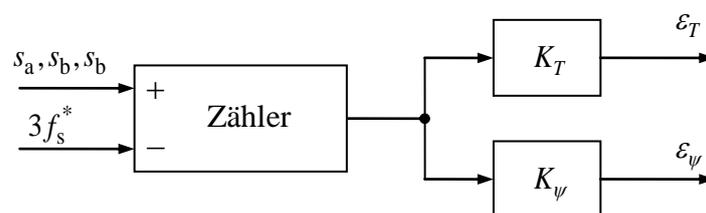
$$\psi_s^* = \sqrt{\psi_p^2 + \left( \frac{2L_s T^*}{3p\psi_p} \right)^2} \quad (6.6)$$

Wird die Spannungsgrenze erreicht, muss der Fluss entsprechend abgesenkt werden (Flusschwächung).

When the voltage limit is reached, the flux needs to be reduced, accordingly (flux weakening).

Die resultierende Schaltfrequenz ist bei dem DTC-Verfahren im Gegensatz zur Pulsweitenmodulation nicht exakt definiert. Um die Schaltverluste zu begrenzen, kann es sinnvoll sein, die Schaltfrequenz zu überwachen und entsprechend die Toleranzbandbreiten der Hystereseregler zu verändern. Dies kann mit einem einfachen Zähler bewerkstelligt werden. Im regelungstechnischen Sinne stellt der Zähler einen  $I$ -Regler dar.

In contrast to PWM, the resulting switching frequency of the DTC method is not exactly defined. In order to limit the switching losses, it may be useful to monitor the switching frequency and adjust the widths of the tolerance bands of the hysteresis controllers, accordingly. This can be accomplished with the help of a simple counter. In terms of control engineering, the counter represents an  $I$ -controller.



**Fig. 6-7:**  
Regelung der Schaltfrequenz

Controlling the switching frequency

## 6.2 Fluss- und Drehmomentbeobachter Flux and Torque Observers

Die in Abschnitt 6.1 entwickelte Regelungsstruktur ist noch nicht komplett, da bislang von der Kenntnis des Ständerflusses  $\psi_s$  und des Drehmoments  $T$  ausgegangen wurde. Diese Größen sind zwar prinzipiell messbar, doch wird man aus Aufwandgründen in aller Regel in realen Anwendungen hierfür keine Sensoren einsetzen. Stattdessen müssen sie aus anderen verfügbaren Größen bestimmt werden. Eine solche Anordnung wird in der Regelungstechnik als *Beobachter* bezeichnet.

Messbare Größen sind die Ständerströme  $i_s$  und die Ständerspannungen  $u_s$ . Zwar wird aus Aufwandgründen auch auf die Messung der Ständerspannung verzichtet, jedoch kann man die Spannung aus der Kenntnis des Umrichter-Schaltzustandes  $s_a, s_b, s_c$  und der Zwischenkreisspannung  $u_{dc}$  rekonstruieren. In diesem Sinne soll die Ständerspannung daher als verfügbare Größe angesehen werden.

Um klar zwischen den tatsächlichen Istgrößen  $x$  des realen Systems und den beobachteten oder angenommenen Größen zu unterscheiden, werden diese mit  $\hat{x}$  gekennzeichnet. Da auch Messwerte fehlerhaft sein können, werden auch diese so benannt, ebenso angenommene Maschinenparameter.

Um nun den für das DTC-Verfahren notwendigen Ständerflussvektor  $\psi_s$  zu bestimmen, bedient man sich der schon bekannten Gleichungen:

The control structure developed in Section 6.1 is not yet complete, because so far we assumed that the stator flux  $\psi_s$  and torque  $T$  values are known. Although, these quantities are measurable in principle, due to cost reasons, one will usually refrain from doing so by means of sensors in real applications. Instead, they have to be calculated from other available variables. Such an arrangement is referred to as *observer* in control theory.

Measurable quantities are the stator currents  $i_s$  and stator voltages  $u_s$ . Due to cost reasons, it is desirable to avoid the measurement of the stator voltage, as well. However, one can compute the voltage value from the knowledge of the inverter switching states  $s_a, s_b, s_c$  and the DC-link voltage  $u_{dc}$ . In this context, the stator voltage shall therefore be regarded as a known variable.

To clearly distinguish between the actual variables  $x$  of the real system and observed or assumed variables, these will be denoted by  $\hat{x}$ . As also measurements can be erroneous, this denotation will also be applied to measured quantities, as well as to assumed machine parameters.

In order to determine the necessary stator flux vector  $\psi_s$  for the DTC, we make use of the equations that are already known:

## Strommodell

Unter dem *Strommodell* versteht man die Bestimmung des Ständerflusses über die Gleichung

$$\boldsymbol{\psi}_s = L_s \boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{\psi}_p \quad (6.7)$$

Dieser Zusammenhang wird nun im Beobachter nachgebildet:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_s = \hat{L}_s \hat{\boldsymbol{i}}_s + \hat{\boldsymbol{\psi}}_p \quad (6.8)$$

In statorfesten Komponenten:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{s\alpha} &= \hat{L}_s \hat{i}_{s\alpha} + \hat{\psi}_{p\alpha} = \hat{L}_s \hat{i}_{s\alpha} + \hat{\psi}_p \cos \varepsilon \\ \hat{\psi}_{s\beta} &= \hat{L}_s \hat{i}_{s\beta} + \hat{\psi}_{p\beta} = \hat{L}_s \hat{i}_{s\beta} + \hat{\psi}_p \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (6.9)$$

Wie man sieht, ist neben dem Strom auch die Messung des Drehwinkels  $\varepsilon$  notwendig. Außerdem müssen der Permanentflusses  $\psi_p$  und die Ständerinduktivität  $L_s$  als Maschinenparameter bekannt sein.

Mit einem Ständerflussschätzwert kann nun auch ein Drehmomentschätzwert über die Drehmomentbeziehung, z.B. in der Form (6.3), bestimmt werden:

$$\hat{T} = \frac{3}{2} p \hat{\boldsymbol{\psi}}_s \times \hat{\boldsymbol{i}}_s = \frac{3}{2} p (\hat{\psi}_{s\beta} \hat{i}_{s\alpha} - \hat{\psi}_{s\alpha} \hat{i}_{s\beta}) \quad (6.10)$$

berechnet werden. Auf diese Weise können die für die Regelungsstruktur Fig. 6-6 notwendigen Größen vom Beobachter bereit gestellt werden.

## Spannungsmodell

Unter dem *Spannungsmodell* versteht man die alternative Bestimmung des Ständerflusses über die Ständerspannungsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_s = \boldsymbol{u}_s - R_s \boldsymbol{i}_s \quad (6.11)$$

Diese Gleichung wird im Beobachter als

## Current Model

By *current model*, we refer to the equation to determine the stator flux,

This relation is reproduced in the observer:

In stator-fixed components,

It becomes obvious, that apart from the current measurement, the acquisition of the rotation angle also becomes necessary. In addition to that, the machine parameters permanent flux  $\psi_p$  and stator inductance  $L_s$  need to be known.

With the stator flux estimate, also a torque estimate can now be calculated using the torque relation, e.g. in the form of (6.3):

In this way, the observer can provide the quantities that are needed for the control structure of Fig. 6-6.

## Voltage Model

By *voltage model*, we refer to the alternative determination of the stator flux via the stator voltage equation

This equation is reproduced in the observer,

$$\dot{\hat{\psi}}_s = \hat{u}_s - \hat{R}_s \hat{i}_s \quad (6.12)$$

nachgebildet. Konkret wird dies als Integrator ausgeführt:

Practically, this is realized as an integrator:

$$\hat{\psi}_s(t) = \int_{t_0}^t (\hat{u}_s(\tau) - \hat{R}_s \hat{i}_s(\tau)) d\tau + \hat{\psi}_{s0} \quad (6.13)$$

Die Vorteile gegenüber dem Strommodell sind: Lediglich der Ständerwiderstand wird als Maschinenparameter benötigt. Der Drehwinkel ist als Messgröße gar nicht notwendig. Auch in der sonstigen DTC-Regelungsstruktur ist kein Drehwinkel notwendig, da keine Transformationen in ein mitdrehendes Koordinatensystem vorgenommen werden. Man kann demnach auf einen Drehgeber komplett verzichten. Man spricht dann von einer drehgeberlosen Regelung. Dies ist nicht nur aus Kostengründen, sondern auch wegen höherer Robustheit (Geberausfälle, Drahtbruch) und konstruktiver Freiheiten willkommen.

The advantages over the current model are: Only the stator resistance is required as machine parameter. The position angle is not a necessary measurement. In the remaining DTC control structure, as well, the rotation angle is not necessary, as no transformation into a rotating coordinate system is performed. We can therefore completely abandon the use of a rotary encoder. This case is referred to as *sensorless control*. Those types of control schemes are highly appreciated not only due to cost but also robustness reasons (encoder failures, wire break) and constructive degrees of freedom.

Diesem Vorteil stehen aber einige zu bewältigende Nachteile gegenüber: Zum einen ist der wahre Flussanfangswert  $\psi_{s0}$  in aller Regel nicht bekannt, so dass man in der Regel mit  $\hat{\psi}_{s0} = 0$  starten wird. Andererseits handelt es sich bei dem Beobachter im Wesentlichen um einen einfachen Integrator, der in der Regelungstechnik als einfach stabiles System charakterisiert wird. Konkret bedeutet das, dass ein eventueller Offsetfehler in der Spannungsermittlung,

The mentioned advantages are countered by a number of disadvantages to be faced: On the one hand, the true initial value of the flux  $\psi_{s0}$  is unknown in most cases so that one would start with  $\hat{\psi}_{s0} = 0$  instead. On the other hand, the observer is mainly represented by a simple integrator, which is characterized as a simple stable system in control theory. Specifically, this means that a potential offset error in the voltage determination,

$$\hat{u}_s = u_s + \Delta u_s \quad (6.14)$$

sei er noch so klein, über genügend lange Zeit zu einem beliebig großen Flussfehler aufintegriert wird. In dieser Form ist diese Strategie also praktisch nicht brauchbar. Aus diesem Grund wird die ursprüngliche Differenzialgleichung um einen stabilisierenden Rückführterm wie folgt modifiziert:

no matter how small it is, lead to an arbitrarily large flux error after a sufficiently long integration time. In this form, the strategy is of no practical use. For this reason, the original differential equation is modified by adding a stabilising feedback term:

$$\dot{\hat{\psi}}_s = \hat{u}_s - \hat{R}_s \hat{i}_s - \frac{1}{\tau_B} \hat{\psi}_s = \hat{e}_s - \frac{1}{\tau_B} \hat{\psi}_s \quad (6.15)$$

Das System mit der Eingangsgröße  $\hat{e}_s = \hat{u}_s - \hat{R}_s \hat{i}_s$  und der Ausgangsgröße  $\hat{\psi}_s$  ist nun stabil, was man am besten im Laplace-Bereich übersieht (obwohl mathematisch nicht einwandfrei, verwenden wir wieder die gleichen Größensymbole auch im Laplace-Bereich; die Frequenzvariable  $s$  stellt klar, dass es sich um Laplace-Transformierte handelt):

The system with the input  $\hat{e}_s = \hat{u}_s - \hat{R}_s \hat{i}_s$  and the output  $\hat{\psi}_s$  is now stable, which can be best seen in the Laplace domain (though mathematically not flawless, the same symbols are used also in the Laplace domain; the frequency variable  $s$  makes clear that the functions are Laplace transforms):

$$s\hat{\psi}_s(s) - \hat{\psi}_{s0} = \hat{u}_s(s) - \hat{R}_s \hat{i}_s(s) - \frac{1}{\tau_B} \hat{\psi}_s(s)$$

$$\hat{\psi}_s(s) = \frac{1}{s + 1/\tau_B} [\hat{u}_s(s) - \hat{R}_s \hat{i}_s(s) + \hat{\psi}_{s0}] = \frac{\tau_B}{s\tau_B + 1} (\hat{e}_s(s) + \hat{\psi}_{s0}) \quad (6.16)$$

Der Pol des Beobachters liegt bei  $s = -1/\tau_B$ ; das System ist somit exponentiell stabil. Durch die Modifikation entspricht es aber leider nicht mehr dem Original. Der dadurch entstehende Beobachtungsfehler soll nun analysiert werden.

The observer pole is now placed at  $s = -1/\tau_B$ ; the system is exponentially stable. However, due to the modification it is no longer conform to the original system. The resulting observation error should now be investigated.

Dazu schreiben wir zunächst die Laplace-Transformierte der Gleichung (6.11) des wahren Systems an:

For that purpose, we start with the Laplace transform of equation (6.11) of the true system:

$$s\psi_s(s) - \psi_{s0} = u_s(s) - R_s i_s(s) = e_s(s) \\ \psi_s(s) = \frac{1}{s} (e_s(s) + \psi_{s0}) \quad (6.17)$$

Aus (6.16) und (6.17) ergibt sich nun der Beobachtungsfehler:

From (6.16) and (6.17) the observation error results as:

$$\Delta\psi_s(s) = \hat{\psi}_s(s) - \psi_s(s) = \frac{\tau_B}{s\tau_B + 1} (\hat{e}_s(s) + \hat{\psi}_{s0}) - \frac{1}{s} (e_s(s) + \psi_{s0}) \quad (6.18)$$

Nehmen wir vereinfachend an, dass der Ständerwiderstand genau bekannt und auch die Strommessung fehlerfrei sei, also  $\hat{R}_s = R_s$ ,  $\hat{i}_s = i_s$ . Dann folgt weiter im Zeit- und Laplace-Bereich:

Assume the stator resistance as exactly known and also the current measurement is assumed to be free of any error, i.e.  $\hat{R}_s = R_s$ ,  $\hat{i}_s = i_s$ . Then, it follows in time and Laplace domains:

$$\hat{e}_s(t) = e_s(t) + \Delta u_s \\ \hat{e}_s(s) = e_s(s) + \frac{1}{s} \Delta u_s \quad (6.19)$$

und weiter:

and further:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_s(s) &= \left[ \frac{\tau_B}{s\tau_B+1} - \frac{1}{s} \right] (e_s(s) + \psi_{s0}) + \frac{\tau_B}{s\tau_B+1} \left( \frac{1}{s} \Delta u_s + \Delta\hat{\psi}_{s0} \right) \\
&= \frac{-1}{s\tau_B+1} \frac{1}{s} (e_s(s) + \psi_{s0}) + \frac{\tau_B}{s\tau_B+1} \left( \frac{1}{s} \Delta u_s + \Delta\hat{\psi}_{s0} \right) \\
&= \frac{-1}{s\tau_B+1} \psi_s(s) + \frac{\tau_B}{s\tau_B+1} \left( \frac{1}{s} \Delta u_s + \Delta\hat{\psi}_{s0} \right)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Der zweite Term in dieser Gleichung ist dem Spannungsoffset und dem Anfangswertfehler geschuldet. Der durch den Spannungsoffset verursachte stationäre Beobachtungsfehler bleibt nun dank der Rückführung beschränkt und beträgt  $\tau_B \Delta u_s$ . Dieser Fehler wird also umso kleiner, je kleiner die Zeitkonstante  $\tau_B$  gewählt wird.

Der erste Term in der Gleichung geht aber auf den Modellfehler durch die zusätzliche stabilisierende Rückführung zurück. Dieser Fehleranteil ist klein, sofern  $|s| \gg \tau_B$  gilt. Mit  $s = j\omega$  führt das auf

$$\omega > \omega_B = 1/\tau_B \tag{6.21}$$

Nur in diesem Frequenzbereich liefert der Beobachter gute Werte. Er ist unbrauchbar im Stillstand und bei Drehfrequenzen unterhalb von  $\omega_B$ , da in diesem Bereich der Beobachtungsfehler beliebig groß sein kann. Ziel muss es also sein, den Frequenzbereich so groß wie möglich, also  $\omega_B$  so klein und daher  $\tau_B$  so groß wie möglich zu wählen. Dies steht leider genau im Widerspruch zur erstgenannten Entwurfsempfehlung für  $\tau_B$ .

Durch diese Erkenntnisse wird nun aber der Entwurfsprozess klar: Primäres Ziel muss sein, die Spannung mit möglichst kleinem Offset  $\Delta u_s$  zu erfassen. Dann wird ein  $\tau_B$  so groß gewählt, dass der durch den Offset verursachte Fehler gerade noch erträglich ist. Dadurch erhält man einen möglichst großen Betriebsbereich  $\omega > \omega_B = 1/\tau_B$ .

Für den Betrieb im Stillstand ist dieses Beobachtungskonzept jedoch nicht tauglich. Für Antriebe, bei denen eine gewisse Minstdrehzahl angenommen werden kann, bietet es aber die Alternative, ohne

The second term of this equation is due to the voltage offset and to the error of the initial value. Thanks to the additional feedback, the steady-state observation error is now bounded and results to  $\tau_B \Delta u_s$ . This error is the smaller, the smaller the time constant  $\tau_B$  is chosen.

The first term in this equation, however, is caused by the modelling error due to the additional stabilising feedback. This error portion is small if it holds  $|s| \gg \tau_B$ . With  $s = j\omega$ , this means

Only in this frequency range the observer provides reasonable values. The observer is useless at standstill and for rotation frequencies below  $\omega_B$  as, in this range, the observation error can exceed any limit. Goal should be to make the frequency range as large as possible, i.e.  $\omega_B$  as small and thus  $\tau_B$  as large as possible. Unfortunately, this is just the opposite design recommendation for  $\tau_B$  as the first one.

As conclusion from these insights, the design process is now clear: The primary goal must be to capture the voltage with smallest possible offset  $\Delta u_s$ . After this,  $\tau_B$  is chosen so large, that the observation error caused by the offset can just be tolerated. Thus, the operations range results as large as possible,  $\omega > \omega_B = 1/\tau_B$ .

However, in any case, this observer concept is not capable of operation at standstill. For drives where a certain minimum speed can be assumed it an appreciated alternative to run the drive without speed sensor.

---

Drehgeber auszukommen.

In der Literatur wird die DTC üblicherweise mit dem Spannungsmodell als Beobachter als inhärenter Bestandteil der DTC dargestellt. Dazu besteht aber kein Anlass. Die DTC lässt sich sehr wohl auch mit dem Strommodell als Beobachter kombinieren. Dieses hat gegenüber dem Spannungsmodell zwar den Nachteil, dass die Position als Messgröße benötigt wird, es kann aber im gesamten Frequenzbereich - auch im Stillstand - eingesetzt werden.

Neben dem Strom- und dem Spannungsmodell gibt verschiedene andere Methoden zur Bestimmung des Statorflusses, z.B. den *Luenberger-Beobachter*, das *Kalman-Filter* und den *Gopinath-Beobachter*, auf die im Rahmen dieses Skriptes nicht weiter eingegangen wird.

In literature, DTC is usually presented together with the voltage model observer as an inherent part of it. There is, however, no reason for that. The DTC can be combined with the current model as an observer, as well. Compared to the voltage model, the drawback lies in the necessity to measure the rotor position. On the other hand, the current model observer can then be used within the entire frequency range – even at standstill.

Apart from the current model and the voltage model, there exist a couple of other methods to determine the stator flux, e.g. the *Luenberger observer*, the *Kalman filter*, and the *Gopinath observer* which are not covered in this lecture.

### 6.3 Vergleich zwischen DTC und FOC Comparison between DTC and FOC

	FOC	DTC
Messgrößen Measurement quantities	$u_s^1, i_s, \varepsilon^2$	$u_s^1, i_s$
Schaltfrequenz Switching frequency	konstant <sup>3</sup> constant <sup>3</sup>	variabel, Mittelwert regelbar varying, average can be controlled
Regelalgorithmus Control algorithms	aufwändig complex	einfach simple
Regler-Abtastzeit Controller sampling time	moderat wegen Regular Sampling moderate due to Regular Sampling	hoch wegen Hysterese- Regelung high due hysteresis control
Drehmoment- Führungsverhalten Torque tracking response	gut, abhängig von den Reglerparametern good, subject to controller parameters	schnellst mögliche Drehmomentantwort, aber nicht veränderbar fastest possible torque response, but behaviour cannot be changed

<sup>1</sup> Die Spannung am Motor wird üblicherweise nicht direkt gemessen, sondern aus Zwischenkreisspannung und den Wechselrichterstellbefehlen rekonstruiert

<sup>2</sup> Drehgeber-loser Betrieb ist mit zusätzlichem Aufwand auch mit FOC möglich (nicht Bestandteil der Vorlesung)

<sup>3</sup> Bei Fragen der Elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV) ist eine konstante Schaltfrequenz u. U. von Vorteil

<sup>1</sup> The motor voltage is usually not measured directly, but reconstructed from the DC link voltage and the inverter switching commands

<sup>2</sup> Position-sensorless operation is also possible with FOC but requires additional effort (not covered in this lecture)

<sup>3</sup> For issues of electromagnetic compatibility (EMC), a constant switching frequency is possibly a pro

## 7 Schutzmaßnahmen Protection Measures

Der Betrieb eines elektrischen Antriebs erfordert in aller Regel Maßnahmen zur Betriebsüberwachung, um unzulässige Betriebszustände zu erkennen und das System in Folge geordnet abzuschalten. Größen, die überwacht werden, sind beispielsweise:

- Motor- bzw. Umrichter Ausgangsströme
- Versorgungsspannung (Eingangs-Gleichspannung)
- Motortemperatur
- Umrichter temperatur
- Drehzahl

Die Schutzmaßnahmen haben das Ziel, das System vor Schäden zu schützen bzw. im Fall eines bereits eingetretenen Schadens einer Komponente (z. B. eines ausgefallenen Kondensators oder Transistors) die Schadensausbreitung auf andere Komponenten zu minimieren bzw. die Gefährdung von Personen zu vermeiden. Als Regel kann gelten, dass diese Schutzmaßnahmen umso aufwändiger werden, je größer ein Antrieb ist. Bei großen Anlagen ist unbedingt bereits beim Entwurf zu berücksichtigen, welche Schutzmaßnahmen erforderlich sind. Bei Kleinstantrieben ist womöglich bereits der ohmsche Widerstand des Motors hinreichend strombegrenzend, so dass auf weitere Maßnahmen verzichtet werden kann.

Schutzmaßnahmen sollten auf einer von der Regelung unabhängigen Steuerungsebene realisiert werden, da der Regelungsprozessor für zeitkritische Vorgänge häufig zu langsam ist bzw. selbst Ursache einer Störung sein könnte. Im Idealfall sind diese Schutzmaßnahmen so konzipiert, dass sie völlig unabhängig von einer funktionierenden Regelung das System eigenständig sicher stillsetzen können (*fail save*).

Insbesondere die Überwachung der Umrichter Ausgangs- bzw. Motorströme stellt die höchsten zeitkritischen Anforderungen.

The operation of an electric drive generally requires measures for monitoring operation, to detect unacceptable operating conditions and to safely shut down the system, in consequence. Variables to be monitored are, for example:

- Motor and inverter output currents
- Supply voltage (DC input voltage)
- Motor temperature
- Converter temperature
- Rotor speed

The protective measures are aiming at protecting the system against damage or in case of a component damage which has already occurred (e.g. a defect capacitor or transistor) to minimize the spread of the damage to other components and to avoid endangering people. As a rule of thumb one can say, that protective measures are becoming more complex as the drive size increases. With larger drives, it is crucial to consider already during the design phase how they can be protected. In micro drives, the ohmic resistance of the motor may already limit the current sufficiently and thus dispense with the need for further measures.

Protective measures should be implemented on a control level independent of the motor control, itself. The reason is that the processor responsible for the motor control is often too slow for time-critical operations and could, thus, even be the cause of a fault, itself. In the ideal case, protective measures are designed in a way that they can autonomously and safely shut down the system, completely independent of a functioning motor control (*fail safe*).

In particular, the monitoring of the inverter output and motor currents represent the most time-critical requirements. Since the thermal

Da die thermischen Zeitkonstanten der Sperrschichten der Leistungshalbleiter äußerst kurz sind, kann eine Überschreitung der zulässigen Grenzwerte um einige Millisekunden bereits zur Zerstörung führen. Außerdem kann der Umrichterstrom durch Aufschalten unerwünschter Spannungen oder im Fall eines Kurzschlusses (aufgrund von Fehlern der Regelung oder durch Schäden anderer Komponenten) derart schnell ansteigen, dass bereits nach wenigen Mikrosekunden Ströme erreicht werden, die nicht mehr abgeschaltet werden können. Da andererseits Leistungsgrenzdaten aus ökonomischen Gründen möglichst weit ausgenutzt werden sollen, ist der Abstand zwischen betriebsmäßig zulässigem Maximalstrom und nicht mehr sicherem Überstrom häufig sehr gering. Daher muss eine Schutzabschaltung in diesem Bereich sehr schnell reagieren. Im Übrigen treten Überströme gelegentlich auch als zufällige Fluktuationen der nie ganz zu vermeidenden Unruhe in den Regelkreisen auf.

Im Folgenden sollen die bei Überstrom in Betracht kommenden Maßnahmen diskutiert werden.

time constants of the junctions of the power semiconductors are extremely short, an overstepping of the permissible limits by only a few milliseconds can already lead to the destruction of the device. Moreover, in case of a short-circuit (due to control errors or damage of other components) the application of unwanted voltages can lead to rapidly increasing inverter currents in a way that within only a few microseconds the current flow cannot be interrupted anymore. On the other hand, since operational limits are to be exploited as far as possible due to economic reasons, the distance between operationally permissible maximum currents and unsafe over- or excess currents is often quite small. Therefore, a safety shutdown in this field must respond very quickly. By the way, excess currents occasionally also occur as random fluctuations as a result of never completely avoidable disturbances in the control loop.

In the following, possible measures for responding to excess currents are being discussed.

### 7.1 Pulssperre oder Motorkurzschluss Pulse Blocking or Motor Short-Circuiting

Die übliche Schutzmaßnahme bei Überstrom ist die Sperre aller Transistoren der Brücke (*Pulssperre*). Aufgrund des induktiven Verhaltens der Last fließt der Motorstrom zunächst über die Dioden der Brücke weiter. Ist aber die Eingangsgleichspannung größer als die induzierte Motorspannung, wirkt diese Spannungsdifferenz dem Stromfluss entgegen und der Motorstrom wird in kurzer Zeit (meist in wenigen Millisekunden) erlöschen. Dies ist die übliche Schutzmaßnahme beispielsweise bei Asynchronmotoren, vgl. Abschnitt 4.6.

The commonly used protective measure when dealing with excess currents is to block all the transistors of the bridge (*pulse blocking*). Due to the inductive behavior of the load, the motor current initially flows through the diodes in a bridge. But if the input DC voltage is greater than the induced motor voltage then this voltage difference counteracts the current flow forcing the motor current to quickly extinct (usually within a few milliseconds). This is the commonly applied protective measure, for example, in induction motors, see Section 4.6.

Wird ein Permanentmagnet-Synchronmotor in einem Drehzahlbereich betrieben, so dass die Hauptspannung kleiner als die Eingangs-

If a permanent magnet synchronous motor is operated at a speed range where the main voltage is smaller than the input DC voltage,

gleichspannung bleibt,  $\omega\psi_p < u_{dc}/\sqrt{3}$  wird der Strom ebenfalls erlöschen. Wird der Motor dagegen im Flussschwäcbereich mit  $\omega\psi_p > u_{dc}/\sqrt{3}$  betrieben, wird die induzierte Spannung über die Dioden der Brücke Strom zur Gleichspannungsseite zurückspeisen. Die gesamte Motorspannung (bestehend aus Hauptspannung und Ankerrückwirkungen) wird weiterhin durch den Zwischenkreiskondensator bestimmt, der sich aber, falls auf der Gleichspannungsseite die Leistung nicht anderweitig abgeführt werden kann (also in die Energieversorgung zurückgespeist oder in einem Bremssteller dissipiert wird), mehr oder minder schnell auflädt. In Fällen, bei denen durch die dabei entstehende Bremswirkung der Antrieb abgebremst und in Folge die induzierte Spannung unter den kritischen Wert fällt, kann dieser begrenzte Spannungsanstieg eventuell toleriert werden. Eine Abschätzung ist über die zu beherrschende kinetische Energie im Vergleich zum Speichervermögen des Kondensators schnell zu bewerkstelligen.

Bei Antrieben, bei denen die Last auch nach dem Störfall den Antrieb weiter dreht und dieser nicht stillgesetzt werden kann oder soll, ist dieses Maßnahme nicht akzeptabel. Denkbar wäre, den Motor durch einen Schalter vom Umrichter zu trennen, doch ist dies mit verhältnismäßig hohen Kosten verbunden.

Eine Alternative ist, den Motor gezielt *kurz-zuschließen*, indem jeweils alle drei unteren oder alle drei oberen Transistoren der Brücke angesteuert werden. Der Kurzschluss als Schutzmaßnahme fordert seitens des Umrichters volle Funktionsfähigkeit. Wenn diese nicht gewährleistet ist, ergeben sich Probleme: Falls die Störung durch einen Ausfall eines Umrichterventils zu Stande kam, kann durch einen gezielten geschalteten Motorkurzschluss unter Umständen auch ein Brückenkurzschluss zu Stande kommen, der den Umrichter nachhaltig zerstören könnte. Ein Motorkurzschluss kommt auch dann nicht in Betracht, wenn die Energieversorgung der Umrichtersteuerung und damit seine Betriebsfähigkeit nicht sichergestellt werden kann.

$\omega\psi_p < u_{dc}/\sqrt{3}$ , the current will also extinct. In contrast, if the motor is operated in the flux weakening range,  $\omega\psi_p > u_{dc}/\sqrt{3}$ , the induced voltage will feed current across the diode bridge back to the DC side. The entire motor voltage (consisting of main voltage and armature reactions) is still determined by the DC link capacitor, which more or less quickly charges, as long as the power on the DC side is not discharged by other means (i.e. feed back into the power supply or dissipation in a braking unit). In cases, where the occurring braking effect slows down the drive and the induced voltage drops below the critical value, in consequence, a limited increase in voltage may be tolerated. An estimation can be accomplished in this context by comparing the dominant kinetic energy of the drive to the storage capacity of the capacitor.

For drives where the load keeps on rotating the drive even after the fault case occurs and the drive cannot or should not be stopped, this measure is not acceptable. It is then conceivable to separate the motor from the inverter through a switch. However, this measure is associated with relatively high costs.

An alternative is to short circuit the motor by applying voltages to either all three bottom or upper transistors of the bridge. The short-circuit as a protective measure requests the inverter to be fully functional. If this is not guaranteed, problems occur: If the malfunction was caused by the failure of an inverter valve, a forced motor short-circuit could as well result in a bridge short-circuit which might destroy the inverter, irreversibly. A motor short-circuit can also not be considered, if the energy supply of the inverter control and therefore its operational functionality cannot be guaranteed.

Im Folgenden soll daher das Verhalten von Permanentmagnet-Synchronmotoren beim Kurzschluss untersucht werden.

Therefore, the behavior of permanent magnet synchronous motors in case of short-circuits shall be investigated, in the following.

## 7.2 Stationäre Kurzschlussströme Steady State Short-Circuit Currents

Wird der Motor symmetrisch kurzgeschlossen (also mit allen drei Klemmen gleichzeitig), ergeben sich nach Abklingen von Ausgleichsvorgängen durch Nullsetzen der stationären Spannungsgleichungen

If the motor is shorted symmetrically (i.e. with all three terminals at the same time) and after the decay of transients, the steady-state voltage equations

$$0 = R_s i_{sd} - \omega L_s i_{sq} \quad (7.1)$$

$$0 = R_s i_{sq} + \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p$$

die stationären Kurzschlussströme in Abhängigkeit von der Drehfrequenz

and the steady-state short-circuit currents as a function of the rotational frequency

$$i_{sdk} = -\frac{\omega^2 L_s \psi_p}{\omega^2 L_s^2 + R_s^2} = -i_0 \frac{\omega^2 \tau_s^2}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \quad (7.2)$$

$$i_{sqk} = -\frac{\omega R_s \psi_p}{\omega^2 L_s^2 + R_s^2} = -i_0 \frac{\omega \tau_s}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \quad (7.3)$$

$$i_{sk} = \sqrt{i_{dk}^2 + i_{qk}^2} = i_0 \frac{\omega \tau_s}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_s^2}} \quad (7.4)$$

mit

with

(7.5)

$$i_0 = \frac{\psi_p}{L_s}, \quad \tau_s = \frac{L_s}{R_s}$$

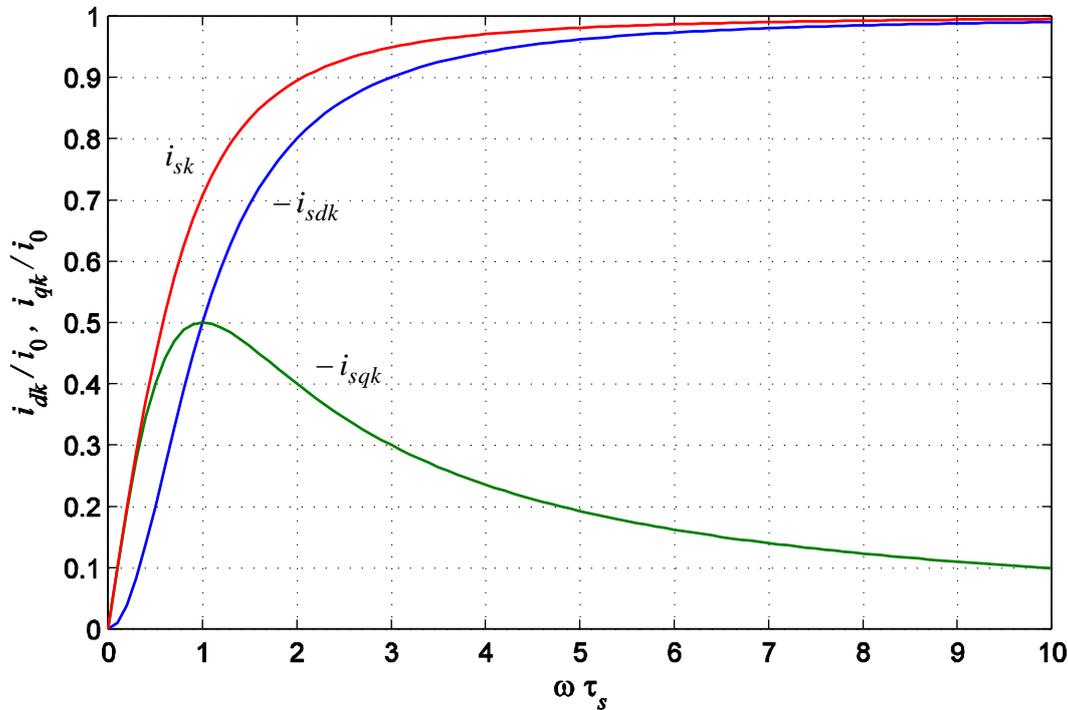
und daraus das stationäre Kurzschlussdrehmoment

result. Based on these equations, the steady-state short-circuit torque results.

$$T_k = -\frac{3p\psi_p i_0}{2} \frac{1}{\omega \tau_s + \frac{1}{\omega \tau_s}} = -\frac{3p\psi_p i_0}{2} \frac{\omega \tau_s}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \quad (7.6)$$

Bei hinreichend großer Drehfrequenz  $\omega\tau_s \gg 1$  kann der stationäre Kurzschlussstrom durch den drehzahlunabhängigen Wert  $i_0$  abgeschätzt werden.

For a sufficiently large rotational frequency  $\omega\tau_s \gg 1$ , the steady-state short circuit current can be estimated through the speed-independent value  $i_0$ .



**Fig. 7-1:**  
Stationäre Kurzschlussströme über der Drehzahl  
Steady state short-circuit current vs. speed

Der Motorkurzschluss kommt also nur in Betracht, wenn der Umrichter den stationären Kurzschlussstrom führen kann, also

The motor short-circuit can therefore only be considered if the drive is capable of conducting the steady-state short circuit current, i.e.

$$i_{sk}(\omega) < i_{\max}$$

Wird der Antrieb bei großer Drehzahl betrieben,  $\omega\tau_s \gg 1$ , muss im Grenzfall

If the drive is operated at high speeds,  $\omega\tau_s \gg 1$ , the condition

$$i_0 < i_{\max} \text{ bzw. } k < 1$$

gelten. Nur für derartige Motoren kommt der Motorkurzschluss als Schutzmaßnahme in Betracht. Andererseits sind Motoren mit  $k > 1$  ohnehin nicht oder nur sehr beschränkt flusschwächbar, so dass dort gut die Pulssperre als Schutzmaßnahme verwendet werden kann.

must hold in the limit case. For such motors, the motor short-circuit can be considered as a protective measure. On the other hand, motors with  $k > 1$  cannot or only to a very limited extent be flux weakened, anyways, making pulse block to a very suitable protective measure.

### 7.3 Transiente Kurzschlussströme Transient Short-Circuit Currents

Neben den stationären Kurzschlussströmen ist das transiente Verhalten zu untersuchen. Die Spitzen der transienten Kurzschlussströme können die stationären Werte deutlich überschreiten. Ausgangspunkt seien die Stromdifferentialgleichungen für den kurzgeschlossenen Motor

Apart from the steady-state short circuit currents, the transient behavior is investigated. The peaks of the transient short-circuit currents can significantly exceed the steady-state values. Starting point are the current differential equations for the shorted motor:

$$L_s \dot{i}_{sd} = -R_s i_{sd} + \omega L_s i_{sq} \quad (7.7)$$

$$L_s \dot{i}_{sq} = -R_s i_{sq} - \omega L_s i_{sd} - \omega \psi_p \quad (7.8)$$

Eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist bereits bekannt; dies sind die stationären Kurzschlussströme des vorangegangenen Abschnitts. Es reicht also aus, nur die homogenen Differentialgleichungen

A particular solution of this differential equation is already known and represented by the steady-state short-circuit currents of the previous section. It is therefore sufficient to only consider the homogeneous differential equations

$$L_s \dot{i}_{dh} = -R_s i_{dh} + \omega L_s i_{qh} \quad (7.9)$$

$$L_s \dot{i}_{qh} = -R_s i_{qh} - \omega L_s i_{dh} \quad (7.10)$$

bzw.

and

$$\dot{i}_{dh} = -\frac{1}{\tau_s} i_{dh} + \omega i_{qh} \quad (7.11)$$

$$\dot{i}_{qh} = -\frac{1}{\tau_s} i_{qh} - \omega i_{dh} \quad (7.12)$$

zu betrachten. Die homogene Lösung führt zu einem mit der Kreisfrequenz  $\omega$  oszillierenden und mit der Zeitkonstante  $\tau_s$  abklingenden Vorgang:

respectively. The homogeneous solution leads to a with the frequency  $\omega$  oscillating and with the time constant  $\tau_s$  decaying process:

$$i_{dh}(t) = e^{-t/\tau_s} (i_{dh0} \cos \omega t + i_{qh0} \sin \omega t) \quad (7.13)$$

$$i_{qh}(t) = e^{-t/\tau_s} (i_{qh0} \cos \omega t - i_{dh0} \sin \omega t)$$

(7.14)

In der  $d/q$ -Ebene ist die Lösungstrajektorie eine Spirale um den Ursprung. Superponiert man die stationäre Lösung, wird der Mittelpunkt der Spirale zum Punkt  $(i_{sdk}, i_{sqk})$  verschoben. Die Anfangswerte dieser homogenen Lösung ergeben sich aus den Stromkomponenten zum Beginn des Kurzschlusses und den stationären Kurzschlussströme nach

In the  $d/q$ -plane, the solution is represented by a spiral trajectory around the origin. Superimposing the steady-state solution, the center of the spiral is shifted to the point  $(i_{sdk}, i_{sqk})$ . The initial values of this homogeneous solution result from the current components at the beginning of the short-circuit and the steady-state short-circuit currents according to

$$i_{dh0} = i_{sd0} - i_{dk} \quad (7.15)$$

$$i_{qh0} = i_{sq0} - i_{qk} \quad (7.16)$$

Für eine Abschätzung des größtmöglichen Spitzenwerts sei eine hohe Drehzahl angenommen, so dass sich die Dämpfung während einer Periode noch nicht viel auswirkt. Tritt dann ein Kurzschluss aus einem Zustand maximalen Stroms,

For estimating the maximum peak value a high rotor speed is assumed, keeping the damping effect within a single period at a low level. If now, a short-circuit occurs out of a state of maximum current,

$$i_{sd0} = 0, \quad |i_{sq0}| = i_{\max},$$

also

i.e.

$$i_{qh0} = i_{sq0} - i_{qk} \approx \pm i_{\max} \quad (7.17)$$

$$i_{dh0} = i_{sd0} - i_{dk} \approx -i_0 \quad (7.18)$$

auf, ergibt sich eine Zeigerlänge des homogenen Anteils von etwa  $\sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2}$ . Zeigt dieser Zeiger nach gewisser Zeit in die negative  $d$ -Richtung, ergibt sich auf diese Weise eine Abschätzung der transienten Stromspitze von

a vector length for the homogeneous component of about  $\sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2}$  results. When this vector is eventually oriented towards the negative  $d$ -direction, an estimation of the transient current peak can be obtained.

$$\hat{i}_s < i_0 + \sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2} = i_{\max} \left( k + \sqrt{1 + k^2} \right) \quad (7.19)$$

Noch größere Stromspitzen würden sich bei Anfangswerten  $i_{sd0} > 0$  ergeben. Da diese aber kein sinnvoller Betriebspunkt ist, bleibt es außer Acht.

Even larger peaks would result for initial values  $i_{sd0} > 0$ . As these values do not represent reasonable operating points, however, they remain ignored.

Die obige Spitzenstromabschätzung wird asymptotisch für sehr große Drehzahlen erreicht und führt ggf. zu sehr großen Spitzenströmen. Abhängig vom tatsächlich ge-

The above peak power estimation is obtained asymptotically for very large speeds and may lead to very large peak currents. Depending on the actually used speed range and stator

nutzten Drehzahlbereich und der Ständerzeitkonstante kann der Wert geringer ausfallen.

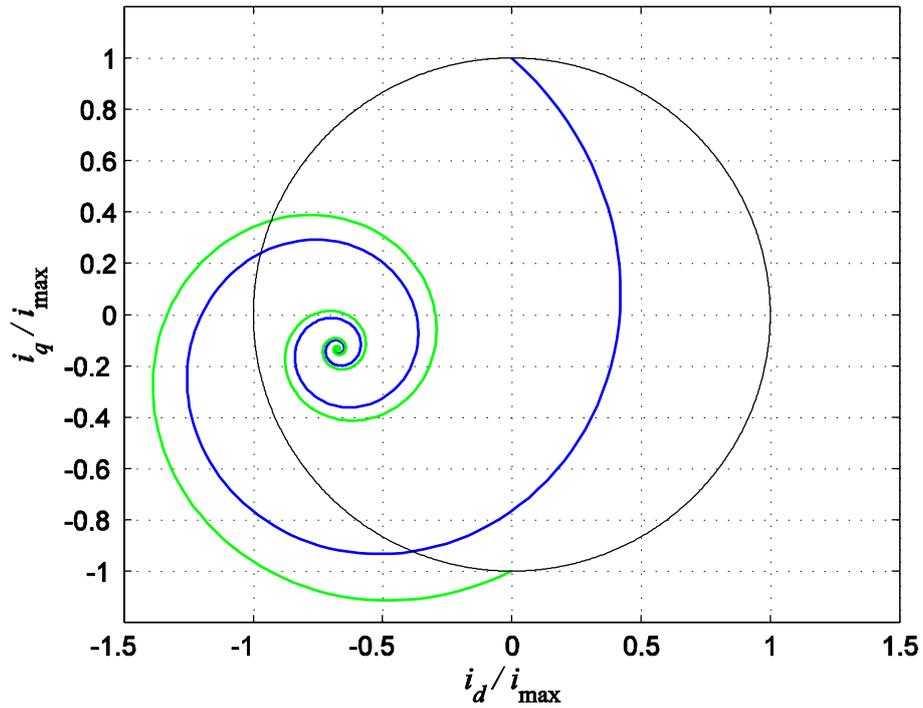
Ob der Umrichter diese transiente Überschreitung der eigentlichen Stromgrenze überlebt, kann nicht generell beantwortet, sondern muss im Einzelfall untersucht werden. Einerseits wird diese Überschreitung in den meisten Fällen nach wenigen Millisekunden abklingen. Andererseits werden die Transistoren nach dem Einschalten des Kurzschlusses nicht mehr gepulst, wodurch keine Schaltverluste mehr anfallen und ggf. kurzfristig höhere Durchlassverluste in Kauf genommen werden können.

Eine weitere Alternative wäre, abhängig von der aktuellen Drehfrequenz entweder die Umrichtersperre oder den Motorkurzschluss als Schutzmaßnahme vorzusehen. Im Flusschwäcbereich träten dann geringe transiente Stromspitzen auf, da sie von günstigeren Anfangswerten in der linken Hälfte des Strombegrenzungskreises ausgehen. Für diese gestufte Maßnahme ist allerdings die Verfügbarkeit des Drehzahlmesswerts zwingend erforderlich. Möchte man sich auch gegenüber Sensorstörungen absichern, wird dieses Vorgehen zweifelhaft.

time constant, the values can be lower, though.

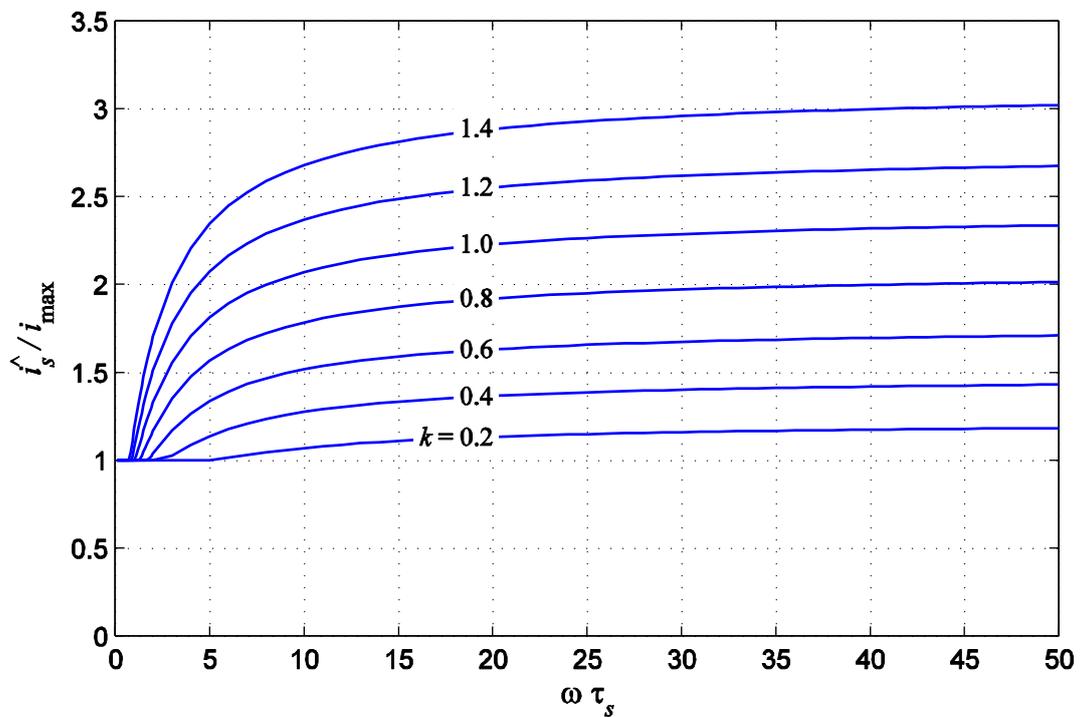
Whether the drive will survive this transient overstepping of the current limit, cannot be answered in general, but must be examined in each particular case. On the one hand, this overstepping will decay in most cases after only a few milliseconds. On the other hand, the transistors are no longer pulsed after applying the short circuit, causing switching losses to completely disappear. In consequence, higher short-term conduction losses can possibly be tolerated.

Another alternative would be, depending on the rotational frequency, to either apply the pulse-block or the motor short-circuit as protective measure. In the flux weakening range small transient current peaks would then occur, as they originate from more favorable initial values in the left half of the current limit circle. For this staggered measure, however, the availability of the rotational frequency is required. If a simultaneous goal is to protect oneself against sensor failures, then this approach is therefore questionable.



**Fig. 7-2:**  
Beispielhafte Trajektorien des Kurzschlussstroms für  $\omega\tau_s = 5$ ,  $k = 0,7$  und zwei verschiedene Anfangswerte

Exemplary trajectories of short-circuit currents for  $\omega\tau_s = 5$ ,  $k = 0.7$  and two different initial values



**Fig. 7-3:**  
Maximale transiente Kurzschlussstromspitze in Abhängigkeit von  $k$  und  $\omega\tau_s$

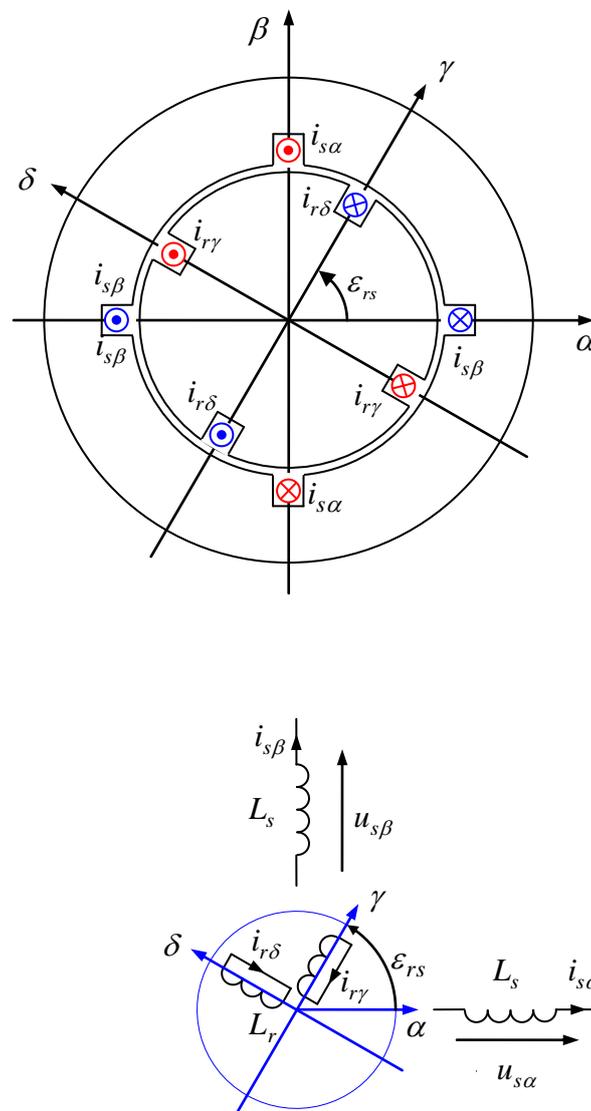
Maximum transient short-circuit current peak as a function of  $k$  and  $\omega\tau_s$

## 8 Asynchronmotor Induction Motor

### 8.1 Modellierung des Asynchronmotors mit orthogonalen Wicklungen Modeling of the Induction Motor with Orthogonal Windings

Modellierung des Ständers und des Läufers  
mit orthogonalen Wicklungen:

Modeling of the stator and rotor with  
orthogonal windings:



**Fig. 8-1:**

Vereinfachtes Modell des Kurzschlussläufer-Asynchronmotors

Simplified model of induction motor with squirrel cage rotor

$\alpha / \beta$ : Ständerfeste Koordinaten

$\alpha / \beta$ : stator-fixed coordinates

$\gamma / \delta$ : Läuferfeste Koordinaten (für das Rotorkoordinatensystem werden nicht die Bezeichnungen  $d$  und  $q$  verwendet, da diese Bezeichnungen später für ein weiteres Koordinatensystem benötigt werden)

$\gamma / \delta$ : rotor-fixed coordinates (for the rotor coordinate system, the  $d/q$  notation is not used, since these terms are needed for another coordinate system later)

Induktionsgesetze für Ständer und Läufer mit Berücksichtigung der ohmschen Widerstände:

Induction rules for stator and rotor also considering ohmic resistances:

$$\dot{\psi}_s^s = \mathbf{u}_s^s - R_s \mathbf{i}_s^s \quad (8.1)$$

$$\dot{\psi}_r^r = \mathbf{u}_r^r - R_r \mathbf{i}_r^r = -R_r \mathbf{i}_r^r \quad (8.2)$$

Der hochgestellte Index soll deutlich machen, in welchem Koordinatensystem der Vektor dargestellt wird, also für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{x}$  beispielsweise

The superscript should make clear, in which coordinate system the vector is represented. For a random vector  $\mathbf{x}$  it therefore follows,

$$\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^r = \begin{bmatrix} x_\gamma \\ x_\delta \end{bmatrix}$$

Wie gewohnt, können die unterschiedlichen Darstellungen durch die Drehtransformation ineinander überführt werden:

As usual, the different representations can be transformed into each other via the rotational transformation,

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{Q}(\varepsilon_{rs}) \mathbf{x}^r \quad (8.3)$$

Zum Beispiel kann der Ständerfluss im Rotorkoordinatensystem dargestellt werden:  $\psi_s^r$ .

For example, the stator flux can be represented in the rotor coordinate system:  $\psi_s^r$ .

Bislang wurden zweidimensionale Vektoren mit reellen Komponenten zur Modellierung der Vorgänge verwendet. Bei Asynchronmotoren hat jedoch die komplexe Schreibweise Vorteile. Die beiden Koordinaten eines Vektors werden dann zu einem komplexen Zeiger

So far, two-dimensional real-valued vectors were used for modeling the processes. For the induction motor, however, the complex notation has certain advantages. The two coordinates of a vector are then converted into a complex vector:

$$\underline{x}^s(t) = x_\alpha(t) + jx_\beta(t) \quad (8.4)$$

zusammengefügt. Die Drehtransformation wird dann sehr einfach durch Multiplikation mit der Exponentialfunktion durchgeführt: The rotational transformation is then very simply performed by multiplication with the exponential function:

$$\underline{x}^r(t) = e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \underline{x}^s(t), \quad \underline{x}^s(t) = e^{j\varepsilon_{rs}(t)} \underline{x}^r(t) \quad (8.5)$$

Für die Transformation der Zeitableitungen folgt: For the transformation of the time derivatives, it follows:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^r(t) &= -j\omega_{rs} e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \underline{x}^s(t) + e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \dot{\underline{x}}^s(t) \\ &= -j\omega_{rs} \underline{x}^r(t) + e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \dot{\underline{x}}^s(t) \end{aligned} \quad (8.6)$$

bzw.

Similarly,

$$\dot{\underline{x}}^s(t) = j\omega_{rs} \underline{x}^s(t) + e^{j\varepsilon_{rs}(t)} \dot{\underline{x}}^r(t) \quad (8.7)$$

Die wichtigsten Gleichungen sind im Abschnitt 9 noch einmal zusammengefasst. The most important equations are once again summarized in Section 9.

In komplexer Schreibweise lauten dann die Spannungsgleichungen völlig analog zur vektoriellen Form In complex notation, the voltage equations are completely analogous to the vector form

$$\dot{\underline{\psi}}_s^s = \underline{u}_s^s - R_s \dot{\underline{i}}_s^s \quad (8.8)$$

$$\dot{\underline{\psi}}_r^r = \underline{u}_r^r - R_r \dot{\underline{i}}_r^r = -R_r \dot{\underline{i}}_r^r \quad (8.9)$$

Wird die Differenzialgleichung für den Rotorfluss in das Ständersystem transformiert, folgt If the differential equation for the rotor flux is transformed into the stator system, it follows

$$\dot{\underline{\psi}}_r^s = j\omega_{rs} \underline{\psi}_r^s - R_r \dot{\underline{i}}_r^s \quad (8.10)$$

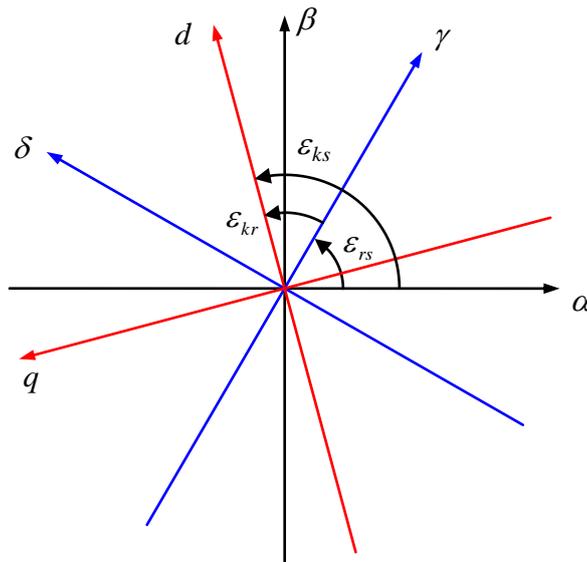
Ebenso kann die Differenzialgleichung für den Statorfluss in das Rotorsystem transformiert werden: Similarly, the differential equation for the stator flux can be transformed into the rotor system:

$$\dot{\underline{\psi}}_s^r = -j\omega_{rs} \underline{\psi}_s^r + \underline{u}_s^r - R_s \dot{\underline{i}}_s^r \quad (8.11)$$

Statt die Gleichungen im Ständer- oder Rotorkoordinatensystem aufzuschreiben, Instead of writing down the equations in the stator or rotor coordinate system, it may be

kann es sinnvoll sein, ein beliebiges anderes Koordinatensystem  $K$ , welches gegenüber dem Ständer mit dem Winkel  $\varepsilon_{ks}$  bzw. gegenüber dem Rotor mit dem Winkel  $\varepsilon_{kr} = \varepsilon_{ks} - \varepsilon_{rs}$  verdreht ist, zu verwenden. Die Achsen des Koordinatensystems  $K$  seien mit  $d$  und  $q$  bezeichnet. Die Bedeutung dieser Bezeichnungen sei jedoch an dieser Stelle dahingestellt.

useful to use another random coordinate system  $K$ , which is rotated against the stator by an angle  $\varepsilon_{ks}$  and against the rotor by an angle  $\varepsilon_{kr} = \varepsilon_{ks} - \varepsilon_{rs}$ . The axes of the coordinate system  $K$  are denoted  $d$  and  $q$ . The actual meaning of these denotations remains to be seen, though.



**Fig. 8-2:**  
Die beiden Flussdifferentialgleichungen lauten dann in diesem Koordinatensystem

In this coordinate system, the two flux differential equations can now be written as

$$\dot{\underline{\psi}}_s^k = j\omega_{sk}\underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \quad (8.12)$$

$$\dot{\underline{\psi}}_r^k = j\omega_{rk}\underline{\psi}_r^k - R_r \underline{i}_r^k \quad (8.13)$$

Neben den Differentialgleichungen werden die Beziehungen zwischen den Strömen und den Flüssen benötigt. Der Asynchronmotor kann im Prinzip als Transformator betrachtet werden. Aufgrund der Symmetrie kann angenommen werden, dass sich die orthogonalen Komponenten gegenseitig nicht beeinflussen und dass die Induktivitäten unabhängig von der Ortsrichtung sind. Das führt zu

In addition to the differential equations, the relations between the currents and fluxes are required. In principle, the induction motor can be regarded as a transformer. Due to symmetry reasons, we may assume that the orthogonal components do not influence each other and that the inductances are independent of the spatial direction. This leads to

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_m \underline{i}_r \quad (8.14)$$

$$\underline{\psi}_r = L_m \underline{i}_s + L_r \underline{i}_r \quad (8.15)$$

$L_s$  : Stator-Selbstinduktivität

$L_s$  : Stator-self inductance

$L_r$  : Rotor-Selbstinduktivität

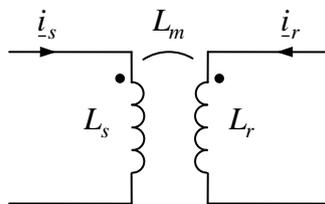
$L_r$  : Rotor-self inductance

$L_m$  : Hauptinduktivität (*mutual inductance*),  
aus prinzipiellen Gründen ist die  
Hauptinduktivität in beiden  
Gleichungen identisch

$L_m$  : Mutual inductance; in principle, the  
mutual inductance is the same in both  
equations

Die oberen Indizes sind in den obigen Beziehungen fortgelassen, da die Gleichungen in jedem Bezugssystem gelten. Allerdings müssen alle komplexen Zeiger einer Gleichung im selben Bezugssystem dargestellt werden.

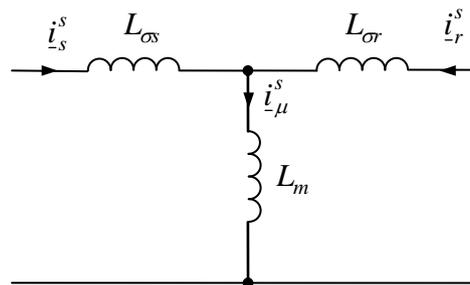
In the above equations, the superscripts are omitted, because the equations are valid in every reference system. However, all complex vectors of an equation have to be presented in the very same reference system.



**Fig. 8-3:**

Kopplung zwischen Stator- und Rotorwicklungen

Coupling between stator and rotor windings



**Fig. 8-4:**

T-Ersatzschaltbild der transformatorischen Kopplung

T-equivalent circuit of the transformer coupling

Einführung der *Streuinduktivitäten*

Introduction of *leakage inductances*

$$L_{\sigma s} = L_s - L_m \quad (8.16)$$

$$L_{\sigma r} = L_r - L_m \quad (8.17)$$

und der Streuziffer

and the leakage coefficients

$$\sigma = \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_s L_r} = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} = \frac{L_m(L_{\sigma s} + L_{\sigma r}) + L_{\sigma s} L_{\sigma r}}{L_s L_r} \quad (8.18)$$

Damit:

It follows:

$$\underline{\psi}_s = L_{\sigma s} \underline{i}_s + L_m(\underline{i}_s + \underline{i}_r) \quad (8.19)$$

$$\underline{\psi}_r = L_{\sigma r} \underline{i}_r + L_m(\underline{i}_s + \underline{i}_r) \quad (8.20)$$

Die Anteile

The portions

$$\underline{\psi}_{\sigma s} = L_{\sigma s} \underline{i}_s, \quad \underline{\psi}_{\sigma r} = L_{\sigma r} \underline{i}_r \quad (8.21)$$

heißen *Streuflüsse*,

are the *leakage fluxes*, while

$$\underline{\psi}_m = L_m(\underline{i}_s + \underline{i}_r) \quad (8.22)$$

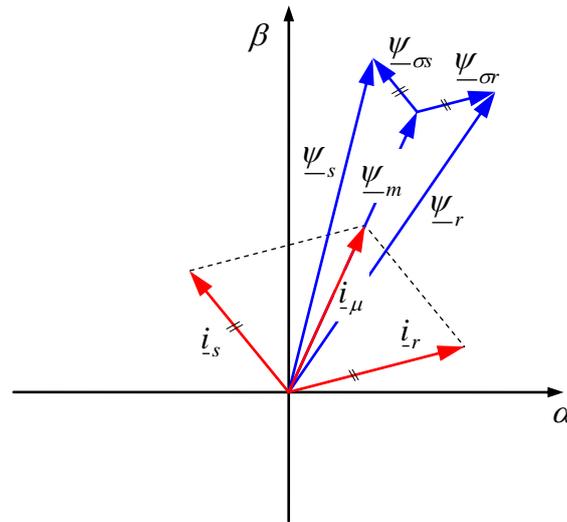
ist der *Hauptfluss*. Die Summe aus Ständer- und Läuferstrom

is the *mutual flux*. The sum of stator and rotor current

$$\underline{i}_\mu = \underline{i}_s + \underline{i}_r \quad (8.23)$$

wird auch als *Magnetisierungsstrom* bezeichnet, da dieser Strom für die Magnetisierung der Hauptinduktivität maßgeblich ist.

is also called *magnetizing current*, as this current is responsible for the magnetization of the mutual inductance.



**Fig. 8-5:**  
Zeigerdiagramme der Ströme und Flüsse      Vector diagram of currents and fluxes

Die Auflösung der Flüsse nach den Strömen führt zu      Solving the flux equations for the currents leads to

$$\underline{i}_s = \frac{L_r \underline{\psi}_s - L_m \underline{\psi}_r}{L_s L_r - L_m^2} \quad (8.24)$$

$$\underline{i}_r = \frac{L_s \underline{\psi}_r - L_m \underline{\psi}_s}{L_s L_r - L_m^2} \quad (8.25)$$

oder unter Verwendung der Streuziffer  $\sigma$  zu      Inserting the leakage coefficients  $\sigma$ , it follows

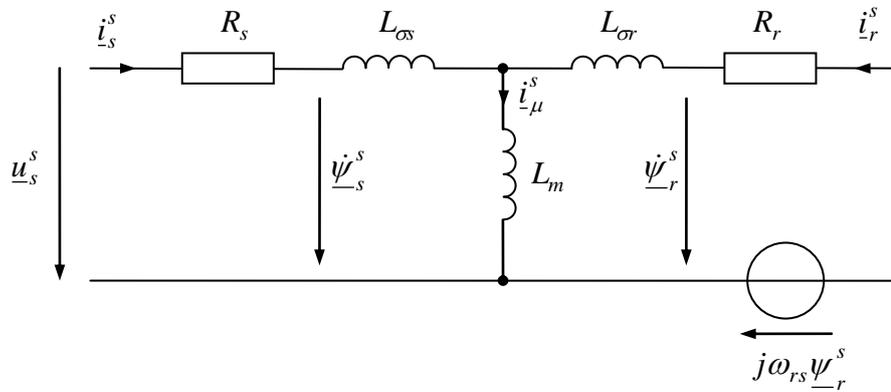
$$\underline{i}_s = \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{\psi}_s - \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \right] \quad (8.26)$$

$$\underline{i}_r = \frac{1}{\sigma L_r} \left[ \underline{\psi}_r - \frac{L_m}{L_s} \underline{\psi}_s \right] \quad (8.27)$$

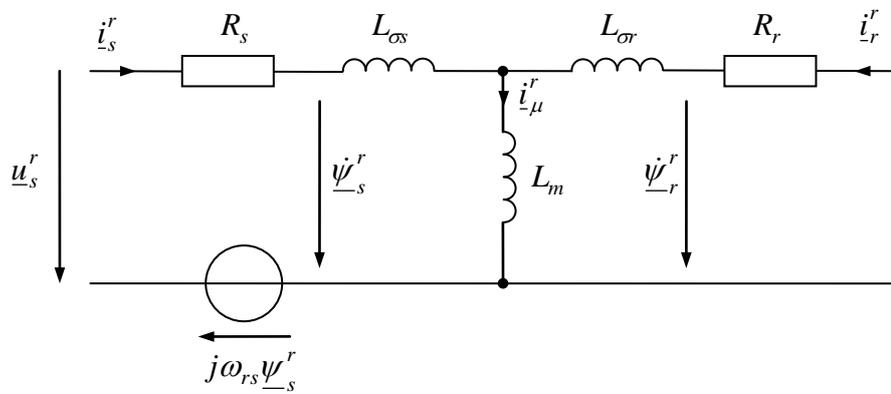
Die erarbeiteten Zusammenhänge führen nun zu den folgenden Ersatzschaltbildern. Zu beachten ist, dass aufgrund der komplexen Schreibweise ein Ersatzschaltbild für jeweils zwei Raumachsen gleichzeitig gilt. Diese Ersatzschaltbilder beschreiben das Verhalten völlig allgemein, insbesondere nicht nur das stationäre, sondern auch das dynamische Verhalten. Aufgrund der Anordnung der

The above developed equations result in the following equivalent circuit diagrams. Please note, that due to the complex notation, the equivalent circuits are applicable for two spatial axes, respectively. The equivalent circuits describe the steady-state as well as the dynamic behavior in general. Due to the arrangement of the mutual and leakage inductances, we refer to this group of circuit

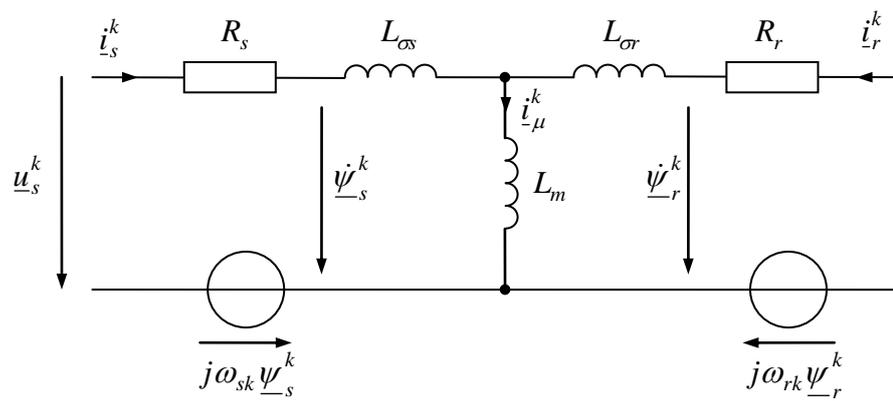
Haupt- und der Streuinduktivitäten be- zeichnet man diese Gruppe von Schaltbildern als T-Ersatzschaltbild.



**Fig. 8-6:** Ersatzschaltbild des Asynchron- motors im Ständerkoordinaten- system      Equivalent circuit diagram of the induction motor in the stator coordinate system



**Fig. 8-7:** Ersatzschaltbild des Asynchron- motors im Rotorkoordinaten- system      Equivalent circuit diagram of the induction motor in the rotor coordinate system

**Fig. 8-8:**

Ersatzschaltbild des Asynchronmotors in einem beliebigen Koordinatensystem  $K$

Equivalent circuit diagram of the induction motor in random  $K$  coordinate system

## 8.2 Drehmomentbildung Torque Generation

Das Drehmoment des Asynchronmotors kann wieder aus der Leistungsbilanz identifiziert werden. Ausgangspunkt sind beispielsweise die Spannungsgleichungen in Rotorkoordinaten (doch ließe sich dies auch in jedem anderen Bezugssystem durchführen):

$$\underline{u}_s^r = \dot{\underline{\psi}}_s^r + j\omega_{rs}\underline{\psi}_s^r + R_r \underline{i}_s^r$$

$$0 = \underline{u}_r^r = \dot{\underline{\psi}}_r^r + R_r \underline{i}_r^r$$

Um die Leistungen zu bilden, werden die Gleichungen jeweils mit den konjugiert komplexen Strömen multipliziert (vgl. das innere Produkt in der Tabelle im Anhang Kapitel 9).

$$\underline{u}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r = \dot{\underline{\psi}}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r + j\omega_{rs}\underline{\psi}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r + R_s \underline{i}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r$$

$$0 = \dot{\underline{\psi}}_r^r \bar{\underline{i}}_r^r + R_r \underline{i}_r^r \bar{\underline{i}}_r^r$$

Sämtliche in diesen Gleichungen auftretenden Terme sind invariant gegenüber der Wahl des Bezugssystems, weshalb die besondere Kennzeichnung des Bezugssystems entfallen kann:

$$\underline{u}_s \bar{\underline{i}}_s = \dot{\underline{\psi}}_s \bar{\underline{i}}_s + j\omega_{rs}\underline{\psi}_s \bar{\underline{i}}_s + R_s \underline{i}_s \bar{\underline{i}}_s$$

$$0 = \dot{\underline{\psi}}_r \bar{\underline{i}}_r + R_r \underline{i}_r \bar{\underline{i}}_r$$

Die Summation der Realteile der Gleichungen und die Identifikation der einzelnen Terme führt zu

$$P_{el} = \dot{W}_{magn} + P_d + P_{mech} \quad (8.28)$$

Mit der zugeführten elektrischen Leistung

$$P_{el} = \frac{3}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}_s \bar{\underline{i}}_s) \quad (8.29)$$

The torque of an induction motor can again be identified from the power balance. Starting point are, for example, the voltage equations in rotor coordinates (any other reference system could be used as well):

In order to calculate the power terms, the equations are multiplied with the conjugated complex currents, respectively (see the inner product in the table of the appendix in Chapter 9).

As all terms appearing in these equations are invariant with respect to the choice of the reference system, the superscript labeling of the reference system may be omitted

The summation of the real parts in the equations and the identification of the individual terms leads to

with the supplied electrical power

der dissipierten Leistung (Verlustleistung)      the dissipated power (power loss)

$$P_d = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left( R_s \underline{i}_s \bar{i}_s + R_r \underline{i}_r \bar{i}_r \right) = \frac{3}{2} \left( R_s |\underline{i}_s|^2 + R_r |\underline{i}_r|^2 \right) \quad (8.30)$$

der Änderung der magnetischen Energie      and the change rate of the magnetic energy

$$\dot{W}_{magn} = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left( \dot{\underline{\psi}}_s \bar{i}_s + \dot{\underline{\psi}}_r \bar{i}_r \right) \quad (8.31)$$

Die Integration liefert im Übrigen den Energieinhalt      Moreover, the integration provides the energy content as

$$W_{magn} = \frac{3}{4} \left( L_m |\underline{i}_s + \underline{i}_r|^2 + L_{\sigma s} |\underline{i}_s|^2 + L_{\sigma r} |\underline{i}_r|^2 \right) \quad (8.32)$$

Folglich muss die mechanische Leistung      Consequently, the mechanical power must be

$$P_{mech} = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left( j \omega_{rs} \underline{\psi}_s \bar{i}_s \right) = \frac{3}{2} \omega_{rs} \operatorname{Im} \left( -\underline{\psi}_s \bar{i}_s \right) = \frac{3}{2} \omega_{rs} \operatorname{Im} \left( \overline{\underline{\psi}_s} i_s \right) \quad (8.33)$$

sein, für welche andererseits gilt      Alternatively,

$$P_{mech} = T \omega_{mech} = T \frac{\omega_{rs}}{p} \quad (8.34)$$

so dass für das Drehmoment

In consequence, the torque can be calculated via

$$T = \frac{3}{2} p \operatorname{Im} \left( \overline{\underline{\psi}_s} i_s \right) \quad (8.35)$$

folgt. Dies ist die gleiche Drehmoment-  
beziehung wie beim Synchronmotor. In  
stator- bzw. rotorfesten Komponenten bzw.  
in den Komponenten des noch nicht festge-  
legten Systems  $K$  ausgeschrieben lautet dies:

This is the same torque equation as for the  
synchronous motor. It can be evaluated in  
different coordinate systems according to

$$T = \frac{3}{2} p \left( \psi_{s\alpha} i_{s\beta} - \psi_{s\beta} i_{s\alpha} \right) = \frac{3}{2} p \left( \psi_{s\delta} i_{s\gamma} - \psi_{s\gamma} i_{s\delta} \right) = \frac{3}{2} p \left( \psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd} \right) \quad (8.36)$$

Dies ist dem Drehmoment beim Synchron-  
motor genau gleich. Statt erneut die  
Leistungsbilanz auszuwerten, hätte man die  
für den Synchronmotors erarbeitete  
Drehmomentbeziehung auch unmittelbar für  
den Asynchronmotor verwenden dürfen,  
denn in dieser Beziehung treten nur

This torque corresponds to the torque of the  
synchronous motor. Instead of once again  
evaluating the power balance, it would have  
been valid to directly use the torque equation  
which was derived for the synchronous motor,  
as only stator quantities occur in this equation.  
For the torque, it is irrelevant in this context

Statorgrößen auf und für das Drehmoment ist es unerheblich, auf welche Weise die kraftbildenden magnetischen Felder im Stator zu Stande kommen.

how the torque generating magnetic fields are formed in the stator.

Das Einsetzen von

Substituting

$$\underline{\psi}_s = \sigma L_s \underline{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.37)$$

führt zu einer weiteren Form der Drehmomentgleichung:

leads to a further representation of the torque equation:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \text{Im}(\underline{\psi}_r \underline{i}_s) \quad (8.38)$$

oder komponentenweise im Allgemeinen Koordinatensystem  $K$ :

Alternatively, it can be written component-wise in the random  $K$  coordinate system:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} (\psi_{rd} i_{sq} - \psi_{rq} i_{sd}) \quad (8.39)$$

### 8.3 Flussorientierte Koordinatensysteme Flux-Oriented Coordinate System

Die obigen Darstellungen des Drehmoments mit Stator- oder Rotorfluss

The above representations of the torque by means of the stator and rotor flux

$$T = \frac{3}{2} p (\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}) = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} (\psi_{rd} i_{sq} - \psi_{rq} i_{sd}) \quad (8.40)$$

geben den Anstoß, ähnlich wie beim Synchronmotor ein flussorientiertes Koordinatensystem zu definieren. Und zwar wird jetzt die Ausrichtung des bislang freien Koordinatensystem  $K$  mit den Achsen so festgelegt, dass die  $d$ -Achse in Richtung des Flusses zeigt. Dann ist per se die  $q$ -Komponente des Flusses gleich null. Da nun das Drehmoment sowohl mit dem Stator- als auch mit dem Rotorfluss ausgedrückt werden kann, führt das – je nachdem, ob die  $d/q$ -Achsen nach dem Stator- oder dem Rotorfluss ausgerichtet werden, so zwei verschiedenen Alternativen.

give rise to the definition of a flux-oriented coordinate system, similar to the one of the synchronous motor. Now, the alignment of the so far free  $K$  coordinate system is determined in a way that the  $d$ -axis is oriented along the direction of the flux. The  $q$ -component of the flux is zero, in consequence. As the torque can be expressed by the stator flux as well as by the rotor flux, this leads to two different variants depending on whether the  $d/q$ -axes are oriented along the direction of the stator or of the rotor flux.

#### Statorfluss-Orientierung

#### Stator flux orientation

Wird als  $d$ -Richtung die Richtung des

Is the  $d$ -axis chosen as the direction of the

Statorflusses gewählt (s. Fig. 8-9 links), spricht man von *Statorfluss-Orientierung*. In diesem Fall ist

$$\psi_{sd} = \left| \underline{\psi}_s \right| = \psi_s \quad \text{und/and} \quad \psi_{sq} = 0 \quad (8.41)$$

und man erhält für das Drehmoment and we get the torque

$$T = \frac{3}{2} p \psi_{sd} i_{sq} \quad (8.42)$$

### Rotorfluss-Orientierung

Bei der *Rotorfluss-Orientierung* (s. Fig. 8-9 rechts) wird die *d*-Achse in Richtung des Rotorflusses gewählt, also

### Rotor flux orientation

We refer to the *rotor flux orientation* if the *d*-axis is aligned with the rotor flux (see Fig. 8-9, right), i.e.

$$\psi_{rd} = \left| \underline{\psi}_r \right| = \psi_r \quad \text{und} \quad \psi_{rq} = 0 \quad (8.43)$$

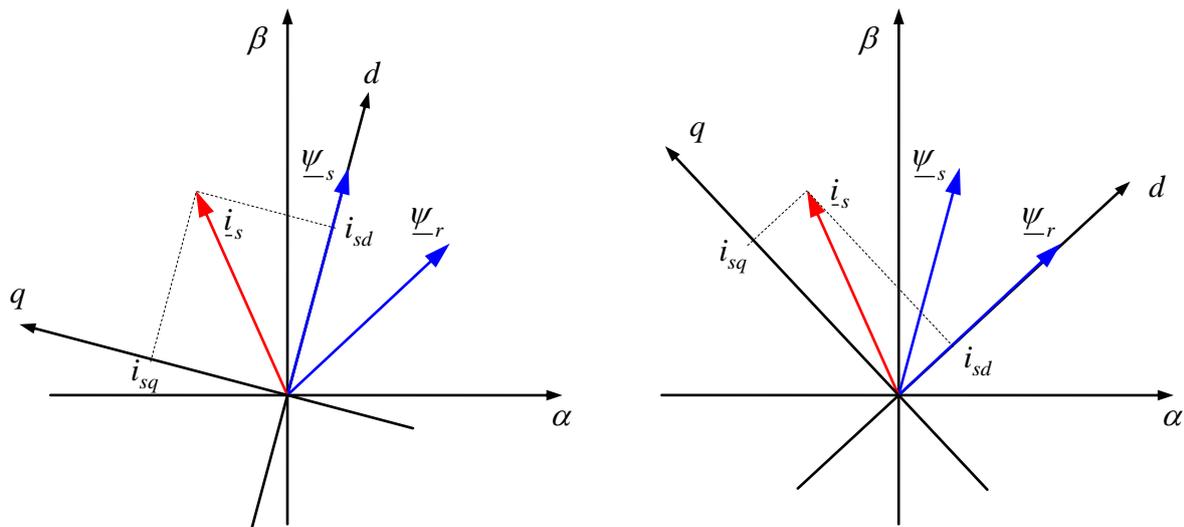
Hiermit lautet das Drehmoment

Then, the torque results as

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_{rd} i_{sq} \quad (8.44)$$

Die Stromkomponente  $i_{sq}$  lässt sich nun wie beim permanent erregten Synchronmotor als drehmomentbildende Stromkomponente interpretieren. Die Bedeutung der Komponente  $i_{sd}$  wird später erarbeitet. Man beachte aber, dass es sich bei den *d/q*-Komponenten in den beiden alternativen Drehmomentdarstellungen (8.42), (8.46) um unterschiedliche Koordinatenachsen handelt (s. Fig. 8-9). Im Folgenden wird nur die Rotorflussorientierung betrachtet. Auf die Statorflussorientierung wird hier nicht weiter eingegangen.

The current component  $i_{sq}$  can be interpreted as the torque generating current component, same as for the permanent magnet synchronous motor. The meaning of the component  $i_{sd}$  will be elaborated later. It should be noted, however, that the *d/q*-components in the two torque representations (8.42), (8.46) refer to different coordinate axes (see Fig. 8-9). In the following, only the rotor flux orientation shall be considered. The stator flux orientation will not be discussed.



**Fig. 8-9:??**  
Statorflussorientiertes  
Koordinatensystem (links).  
Rotorflussorientiertes  
Koordinatensystem (rechts)

Stator flux oriented-coordinate  
system (left)  
Rotor flux oriented-coordinate  
system (right)

### 8.4 Dynamische Modellierung in rotorflussorientierten Koordinaten Dynamic Modeling in Rotor Flux-Oriented Coordinates

Die dynamischen Gleichungen in einem beliebigen Koordinatensystem wurden bereits entwickelt. Sie lauteten:

The dynamic equations in a random coordinate system were already developed:

$$\dot{\underline{\psi}}_s^k = j\omega_{sk}\underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \quad (8.45)$$

$$\dot{\underline{\psi}}_r^k = j\omega_{rk}\underline{\psi}_r^k - R_r \underline{i}_r^k \quad (8.46)$$

Jetzt wird das Koordinatensystem  $K$  im Sinne der Rotorflussorientierung (8.43) festgelegt. Der komplexe Rotorflusszeiger besitzt in seinem eigenen rotorflussorientierten Koordinatensystem nur einen Realteil:

Now the coordinate system  $K$  is aligned following the rotor flux orientation (8.43). The complex rotor flux vector has only a real part when representing it in its own rotor flux-oriented reference frame:

$$\underline{\psi}_{-r}^k = \underline{\psi}_r^{\psi_r} = \psi_{rd} + j\psi_{rq} = \psi_r \quad (8.47)$$

Neben dem Übergang auf das Rotorflusssystem soll aber auch auf neue Zustandsgrößen übergegangen werden. Bisher wurden die Differentialgleichungen mit Stator- und Rotorfluss als Zustandsgrößen angeschrieben. Im Hinblick auf die Dreh-

Apart from the transition to the rotor flux system new state variables shall also be introduced. So far, the differential equations were stated with stator and rotor flux as state variables. However, with regard to the torque representation, the stator current and rotor

momentdarstellung soll nun aber auf Statorstrom und Rotorfluss als beschreibende Zustandsgrößen übergegangen werden. Dazu werden der Rotorstrom und der Statorfluss unter Zuhilfenahme der Gleichungen

$$\underline{i}_r = \frac{1}{L_r} \underline{\psi}_r - \frac{L_m}{L_r} \underline{i}_s \quad (8.48)$$

$$\underline{\psi}_s = \sigma L_s \underline{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.49)$$

welche aus den Induktivitätsbeziehungen herrühren, eliminiert.

flux shall now be used as state variables, instead. To do so, the rotor current and stator flux are being eliminated with the help of the equations

The equations originate from the inductance relations.

### Rotorkreis

Das Einsetzen des Läuferstroms in die Läuferflussdifferenzialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\psi}}_r^k &= j\omega_{rk} \underline{\psi}_r^k - \frac{R_r}{L_r} \underline{\psi}_r^k + \frac{R_r L_m}{L_r} \underline{i}_s^k \\ &= \left( j\omega_{rk} - \frac{R_r}{L_r} \right) \underline{\psi}_r^k + \frac{R_r L_m}{L_r} \underline{i}_s^k \end{aligned} \quad (8.50)$$

Der hierbei auftretende Term

$$\tau_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (8.51)$$

ist die *Rotorzeitkonstante*. Die Differenzialgleichung erhält damit die Gestalt

$$\dot{\underline{\psi}}_r^k = \left( j\omega_{rk} - \frac{1}{\tau_r} \right) \underline{\psi}_r^k + \frac{L_m}{\tau_r} \underline{i}_s^k \quad (8.52)$$

Diese Gleichung wird nun in nach Real- und Imaginärteil, also nach  $d$ - und  $q$ -Komponenten darstellt, wobei beachtet wird, dass der Rotorfluss voraussetzungsgemäß keine  $q$ -Komponente besitzt:

### Rotor circuit

By substituting the rotor current in the rotor flux differential equation, it follows

Hereby, the occurring term

is the *rotor time constant*. Thus, the differential equation takes the form

This equation subdivided into a real and an imaginary part, i.e.  $d$ - and  $q$ -component. It has to be noted that the rotor flux by definition has no  $q$ -component:

$$\dot{\psi}_{rd} = \dot{\psi}_r = -\frac{R_r}{L_r} \psi_r + \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sd} \quad (8.53)$$

$$\dot{\psi}_{rq} = 0 = \omega_{r\psi_r} \psi_r + \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sq} \quad (8.54)$$

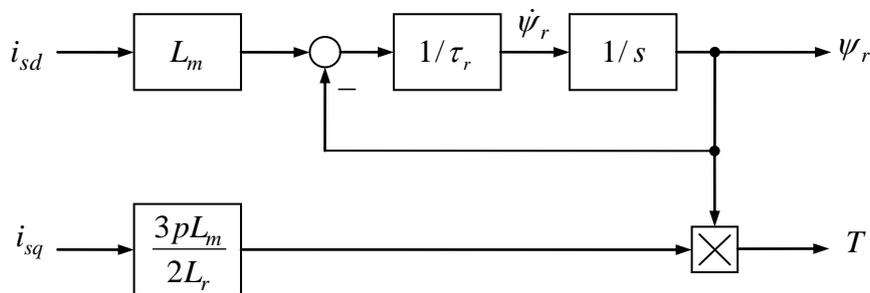
Aus der letzten Gleichung lässt sich die noch unbekannte Frequenz  $\omega_{r\psi_r}$  bestimmen. Dies ist die Frequenz, mit der sich der Rotor gegenüber dem  $d/q$ -Koordinatensystem bewegt. Der negative Wert  $\omega_{\psi_r r} = -\omega_{r\psi_r}$  wird auch als *Rotorfrequenz* oder *Schlupffrequenz* bezeichnet,

From the last equation, we can determine the unknown frequency  $\omega_{r\psi_r}$ . This is the frequency of the rotor relatively to the  $d/q$  coordinate system. The negative value  $\omega_{\psi_r r} = -\omega_{r\psi_r}$  is known as *rotor frequency* or *slip frequency*,

$$-\omega_{r\psi_r} = \omega_{\psi_r r} = \frac{R_r L_m}{L_r} \frac{i_{sq}}{\psi_r} \quad (8.55)$$

Die für das Drehmoment verantwortliche Komponente  $i_{sq}$  bestimmt also zusammen mit dem Rotorfluss  $\psi_r$  die Schlupffrequenz, während die Stromkomponente  $i_{sd}$  für den Aufbau des Rotorflusses verantwortlich ist. Sie werden als *drehmomentbildende* bzw. *flussbildende* oder *magnetisierende* Stromkomponente bezeichnet.

While the torque-generating component  $i_{sq}$  together with the rotor flux  $\psi_r$  determine the slip frequency, the current component  $i_{sd}$  is responsible for forming the rotor flux. They are referred to as *torque generating* and *flux forming* or *magnetizing* current component.



**Fig. 8-10:**  
Wirkungsplan der Fluss- und Drehmomentbildung (Rotor-kreis)

Block diagram for flux forming and torque generation (rotor side)

**Ständerkreis**

**Stator circuit**

Das Einsetzen des Ständerflusses

Substituting the stator flux

$$\underline{\psi}_s = \sigma L_s \underline{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.56)$$

in die rechte und linke Seite der Ständer-  
flussdifferenzialgleichung liefert

in the right and left side of the stator flux  
differential equation results in

$$\begin{aligned}
 & \sigma L_s \dot{i}_s^k + \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k = j\omega_{sk} \left( \sigma L_s \dot{i}_s^k + \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k \right) + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\
 & \sigma L_s \dot{i}_s^k + \frac{L_m}{L_r} \left( j\omega_{rk} \dot{\psi}_r^k - \frac{R_r}{L_r} \dot{\psi}_r^k + \frac{R_r L_m}{L_r} \dot{i}_s^k \right) = j\omega_{sk} \sigma L_s \dot{i}_s^k + j\omega_{sk} \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\
 & \sigma L_s \dot{i}_s^k = \underline{u}_s^k + j\omega_{sk} \sigma L_s \dot{i}_s^k - \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) \dot{i}_s^k - j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k + \frac{L_m R_r}{L_r^2} \dot{\psi}_r^k \\
 & \sigma L_s \dot{i}_s^k = \underline{u}_s^k - j\omega_{ks} \sigma L_s \dot{i}_s^k - \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) \dot{i}_s^k + \left( -j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} + \frac{L_m R_r}{L_r^2} \right) \dot{\psi}_r^k
 \end{aligned} \tag{8.57}$$

wobei

whereas,

$$\omega_{rs} = \omega_{rk} - \omega_{sk}$$

verwendet wurde. Wird explizit nach der  
Zeitableitung des Stroms aufgelöst, erhalten  
wir die Stromdifferenzialgleichung

is used. Explicitly solving for the time  
derivative of the current leads to the current  
differential equation

$$\dot{i}_s^k = -j\omega_{ks} \dot{i}_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{u}_s^k - \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) \dot{i}_s^k + \left( -j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} + \frac{L_m R_r}{L_r^2} \right) \dot{\psi}_r^k \right] \tag{8.58}$$

Die einzelnen Terme lassen sich folgender-  
maßen interpretieren: Der erste Term der  
rechten Seite rührt von der scheinbaren  
Änderung des Stroms aufgrund der Rotation  
des Bezugssystems her. Durch die  
Multiplikation mit der imaginären Einheit  
werden die beiden Stromkomponenten also  
genau kreuzweise verkoppelt. Der erste Term  
in der Klammer ist die treibende äußere  
Spannung an einer Ersatz-Induktivität  $\sigma L_s$ ,  
daneben wirkt ein ohmscher Spannungs-  
abfall, in den auch der Rotorwiderstand  
eingeht. Außerdem gibt es Rückwirkungen  
des Rotorflusses, sowohl direkter, als auch  
rotatorischer Art.

The individual terms can be interpreted as  
follows: The first term on the right side  
originates from the apparent current variation,  
due to the rotation of the reference system.  
Through multiplication with the imaginary  
part, the two current components are exactly  
coupled cross-wise, in consequence. The first  
term in brackets is the driving external  
voltage at the equivalent inductance  $\sigma L_s$ .  
Alongside, a resistive voltage drop, also  
including the rotor resistance takes effect.  
Moreover, there are direct and rotational  
reactions from the rotor flux.

Auch lässt sich eine typische Zeitkonstante,  
die Streuzzeitkonstante

Also a typical time constant, the *leakage time  
constant* can be identified.

$$\tau_\sigma = \frac{\sigma L_s}{R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2}} \tag{8.59}$$

identifizieren. Damit:

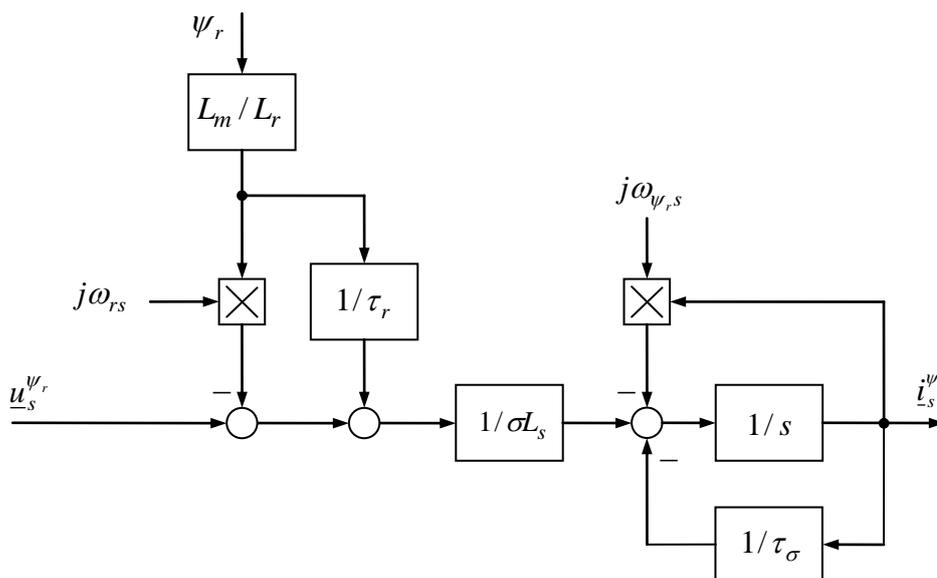
It follows:

$$\dot{i}_s^k = -\left(j\omega_{ks} + \frac{1}{\tau_\sigma}\right)i_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{u}_s^k + \left(-j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} + \frac{L_m R_r}{L_r^2}\right) \underline{\psi}_r^k \right] \quad (8.60)$$

Die hier auftretende Kreisfrequenz  $\omega_{ks}$  ist

The hereby occurring angular frequency  $\omega_{ks}$  corresponds to

$$\omega_{ks} = \omega_{\psi_{r,s}} = \omega_{rs} + \omega_{\psi_{r,r}} \quad (8.61)$$



**Fig. 8-11:**  
Wirkungsplan des Ständerkreises in Rotorflussorientierung

Block diagram of the stator circuit in rotor flux orientation

### Regelungs-idee für die Stromregelung

### Concept of the current control

Der obige Wirkplan des Ständerkreises dient als Basis für den Entwurf einer unterlagerten Stromregelung: Die Rückwirkung aus dem Rotorkreis auf die Dynamik des Ständerstrom wird als Störgröße betrachtet und im Regler durch eine Störgrößenkompensation (EMK-Vorsteuerung) kompensiert. Ebenso lässt sich die über die Kreisfrequenz  $\omega_{\psi_{r,s}}$  vermittelte Verkopplung der beiden Stromkomponenten im Regler durch eine entgegengesetzte Entkopplung kompensieren. Beide Terme werden im Entkopplungs- oder Vorsteueranteil  $\underline{u}_s^{k0}$  zusammengefasst. Die

The above block diagram serves as a basis for the design of a subordinate current control: The reactions from the rotor circuit on the dynamics of the stator current are regarded as a disturbances and can be compensated through a disturbance feed-forward control (EMF feed-forward) in the controller. Furthermore, the coupling of the current components by the angular frequency  $\omega_{\psi_{r,s}}$  can be compensated by an opposing decoupling measure. Both terms are summarized in the decoupling or feed-forward control portion  $\underline{u}_s^{k0}$ . The total voltage

Gesamtspannung wird wie folgt dargestellt: can be written as follows:

$$\underline{u}_s^k = \underline{\Delta u}_s^k + \underline{u}_s^{k0} = \underline{\Delta u}_s^k + j\omega_{ks} \sigma L_s \dot{i}_s^k + \left( j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} - \frac{L_m R_r}{L_r^2} \right) \underline{\psi}_r^k \quad (8.62)$$

Setzt man diese Spannung in die obige Inserting this voltage in the above current Stromdifferenzialgleichung ein, erhält man differential equation, a simple decoupled einen einfachen entkoppelten Ersatz- equivalentent stator circuit can be obtained: Ständerkreis:

$$\dot{i}_s^k = -\frac{1}{\tau_\sigma} i_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \underline{\Delta u}_s^k \quad (8.63)$$

Komponentenweise:

Component-wise:

$$\begin{aligned} \dot{i}_{sd} &= -\frac{1}{\tau_\sigma} i_{sd} + \frac{1}{\sigma L_s} \underline{\Delta u}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} &= -\frac{1}{\tau_\sigma} i_{sq} + \frac{1}{\sigma L_s} \underline{\Delta u}_{sq} \end{aligned} \quad (8.64)$$

Das ist die gleiche Struktur wie schon beim permanent erregten Synchronmotor. Der weitere Regelungsentwurf wird entsprechend durchgeführt.

This is structure exactly corresponds to the one already known from the permanent magnet synchronous motor. The remaining control design is carried out, accordingly.

## 8.5 Transformation der Streuinduktivitäten Transformation of Leakage Inductances

Ausgangspunkt:

Starting point:

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_s^k &= L_s \underline{i}_s^k + L_m \underline{i}_r^k \\ \underline{\psi}_r^k &= L_m \underline{i}_s^k + L_r \underline{i}_r^k\end{aligned}\tag{8.65}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_s^k &= j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \\ \dot{\underline{\psi}}_r^k &= j\omega_{rk} \underline{\psi}_r^k - R_r \underline{i}_r^k\end{aligned}$$

Die Ständergrößen, also Strom und Spannung, aber auch der Ständerfluss, sollen unverändert bleiben. Die Rotorgrößen hingegen werden mit einem konstanten Faktor  $c$  ausgehend von obigen Gleichungen skaliert:

The stator quantities, i.e. current and voltage but also the stator flux, shall not be altered. The rotor quantities, however, are scaled with a constant factor  $c$  as follows:

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_s^k &= L_s \underline{i}_s^k + cL_m \frac{\underline{i}_r^k}{c} \\ c\underline{\psi}_r^k &= cL_m \underline{i}_s^k + c^2 L_r \frac{\underline{i}_r^k}{c}\end{aligned}\tag{8.66}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_s^k &= j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \\ c\dot{\underline{\psi}}_r^k &= j\omega_{rk} c\underline{\psi}_r^k - c^2 R_r \frac{\underline{i}_r^k}{c}\end{aligned}$$

und wieder in der alten Form

and again in the previous form

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_s^k &= L_s \underline{i}_s^k + L'_m \underline{i}'^k_r \\ \underline{\psi}'^k_r &= L'_m \underline{i}_s^k + L'_r \underline{i}'^k_r\end{aligned}\tag{8.67}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_s^k &= j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \\ \dot{\underline{\psi}}'^k_r &= j\omega_{rk} \underline{\psi}'^k_r - R'_r \underline{i}'^k_r\end{aligned}$$

Nun aber mit den transformierten Größen

Written with the transformed variables,

$$\underline{\psi}'^k_r = c\underline{\psi}_r^k\tag{8.68}$$

$$\begin{aligned}\underline{i}'_r &= \frac{\underline{i}_r^k}{c} \\ R'_r &= c^2 R_r \\ L'_m &= c L_m \\ L'_r &= c^2 L_r\end{aligned}$$

geschrieben. Die Ständerinduktivität  $L_s$  wird durch die Transformation zwar nicht verändert. Es ändert sich aber ihre Aufteilung in Haupt- und Streuinduktivität:

Although, the stator inductance  $L_s$  itself is not changed by the transformation, its distribution into mutual and leakage inductance is affected, however.

$$L'_{\sigma s} = L_s - L'_m \quad (8.69)$$

Die transformierte Streuinduktivität des Rotors ist

The transformed leakage inductance of the rotor is

$$L'_{\sigma r} = L'_r - L'_m \quad (8.70)$$

Durch die Wahl des Skalierungsfaktors kann die Streuung des resultierenden Ersatzschaltbildes zwischen Ständer- und Läuferkreis verschoben werden.

By choosing a suitable scaling factor, leakages of the resulting equivalent circuit can be shifted between the stator and rotor circuit.

### 8.5.1 Modell mit ständerseitig konzentrierter Streuung Model with Leakage Inductance Concentrated on Stator Side

Soll die Streuinduktivität des Rotorkreises verschwinden, also

If the leakage inductance on the rotor side shall disappear, then

$$L'_{\sigma r} = L'_r - L'_m = 0$$

$$L'_r = L'_m$$

(8.71)

$$c^2 L_r = c L_m$$

Damit folgt für den Faktor  $c$

In this case, factor  $c$  is chosen as

$$c = \frac{L_m}{L_r} \quad (8.72)$$

Die transformierten Größen lauten

The transformed variables are

$$\underline{\psi}'_r = \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.73)$$

$$\underline{i}'_r = \frac{L_r}{L_m} \underline{i}_r \quad (8.74)$$

$$R'_r = \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r \quad (8.75)$$

$$L'_m = L'_r = \frac{L_m^2}{L_r} = L_s \frac{L_m^2}{L_s L_r} = (1 - \sigma) L_s \quad (8.76)$$

$$L'_{\sigma s} = L_s - L'_m = L_s - \frac{L_m^2}{L_r} = L_s \left( 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} \right) = \sigma L_s \quad (8.77)$$

Die Drehmomentgleichung vereinfacht sich Finally, the torque equation simplifies to  
zu

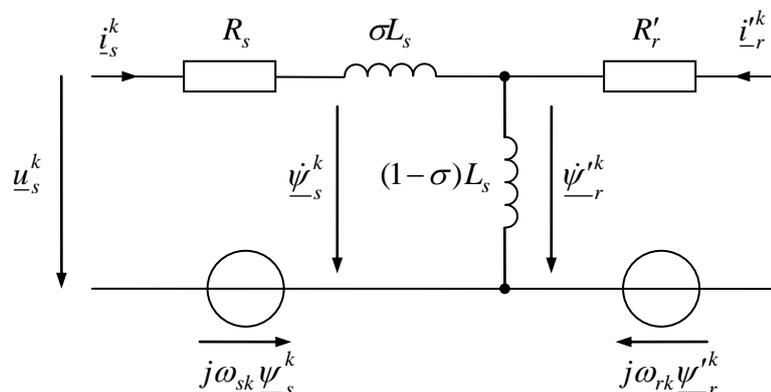
$$T = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\underline{\psi}'_r \underline{i}_s) \quad (8.78)$$

bzw. or

$$T = \frac{3}{2} p \psi'_r i_{sq} \quad (8.79)$$

im rotorflussorientierten Koordinatensystem. in the rotor flux oriented coordinate system.  
Auch die Ständerstromdifferentialgleichung Also, the stator current differential equation is  
vereinfacht sich durch diese Transformation simplified by this transformation to  
zu

$$\underline{i}_s^k = j\omega_{sk} \underline{i}_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{u}_s^k - (R_s + R'_r) \underline{i}_s^k + \left( j\omega_{rs} + \frac{R'_r}{L'_m} \right) \underline{\psi}'_r^k \right] \quad (8.80)$$



**Fig. 8-12:**

Ersatzschaltbild des Asynchronmotors mit ständerseitig konzentrierter Streuung

Equivalent circuit of induction motor with leakage concentrated on stator side

Da sich viele Beziehungen durch die Transformation der Streuinduktivität in den Ständerkreis vereinfachen, wird bei der rotorflussorientierten Regelung gern von vornherein von dieser Struktur ausgegangen.

Since many relations simplify through the transformation of the leakage inductance to the stator side, the rotor flux oriented control is usually based on this structure from the start.

### 8.5.2 Modell mit rotorseitig konzentrierter Streuung Model with Leakage Inductance Concentrated on Rotor Side

Aus der Forderung

From the requirement

$$L'_{\sigma s} = L_s - L'_m = 0 \quad (8.81)$$

ergibt sich der Skalierungsfaktor zu

the scaling factor,

$$c = \frac{L_s}{L_m} \quad (8.82)$$

Es folgt für die transformierten Größen

results. It follows for the transformed variables

$$\underline{\psi}'_r = \frac{L_s}{L_m} \underline{\psi}_r \quad (8.83)$$

$$\underline{i}'_r = \frac{L_m}{L_s} \underline{i}_r \quad (8.84)$$

$$R'_r = \frac{L_s^2}{L_m^2} R_r \quad (8.85)$$

$$L'_m = L_s \quad (8.86)$$

$$L'_r = \frac{L_s^2}{L_m^2} L_r = L_s \frac{L_s L_r}{L_m^2} = \frac{1}{1-\sigma} L_s \quad (8.87)$$

$$L'_{\sigma r} = L'_r - L_s = \frac{\sigma}{1-\sigma} L_s \quad (8.88)$$

Die Drehmomentbeziehung lautet

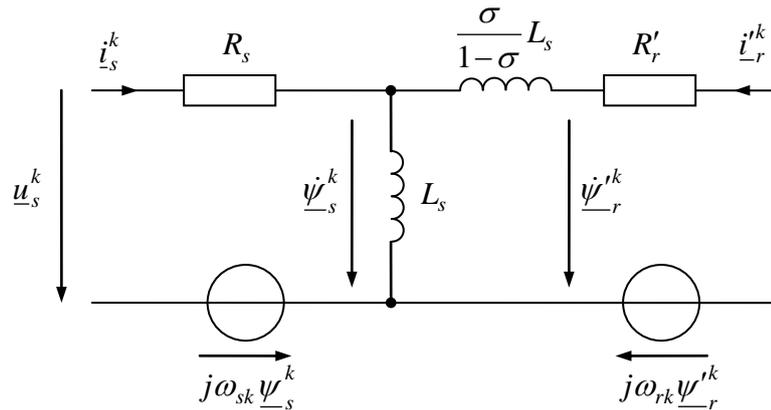
The torque equation is given as

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r L_s} \text{Im}(\underline{\psi}'_r \underline{i}_s) = \frac{3}{2} p (1 - \sigma) \text{Im}(\underline{\psi}'_r \underline{i}_s) \quad (8.89)$$

bzw.

or, alternatively

$$T = \frac{3}{2} p (1 - \sigma) \psi'_r i_{sq} \quad (8.90)$$



**Fig. 8-13:**

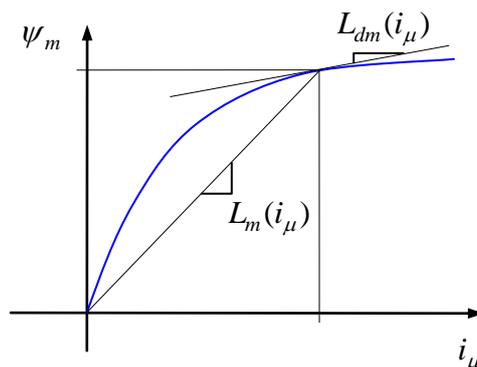
Ersatzschaltbild des Asynchronmotors mit rotorseitig konzentrierter Streuung

Equivalent circuit of induction motor with leakage concentrated on rotor side

## 8.6 Berücksichtigung des realen Magnetisierungsverhaltens Consideration of Real Magnetization Behavior

Bislang wurden die Induktivitäten im Modell des Asynchronmotors als ideal konstant angesehen. Tatsächlich wird das Eisen im Motor im Betrieb nicht unerheblich gesättigt. Dies ist das Resultat einer wirtschaftlich-technisch optimalen Auslegung, das man die Eisensättigung natürlich durch Einsatz von mehr Material verringern könnte, was den Motor aber schwer und teuer machen würde. Oft reicht es aus, nur die Sättigung der Hauptinduktivität zu berücksichtigen und die Streuinduktivitäten weiterhin als konstant anzunehmen. Dann ist die Hauptinduktivität bzw. der Hauptfluss vom Magnetisierungsstrom  $i_\mu$  abhängig.

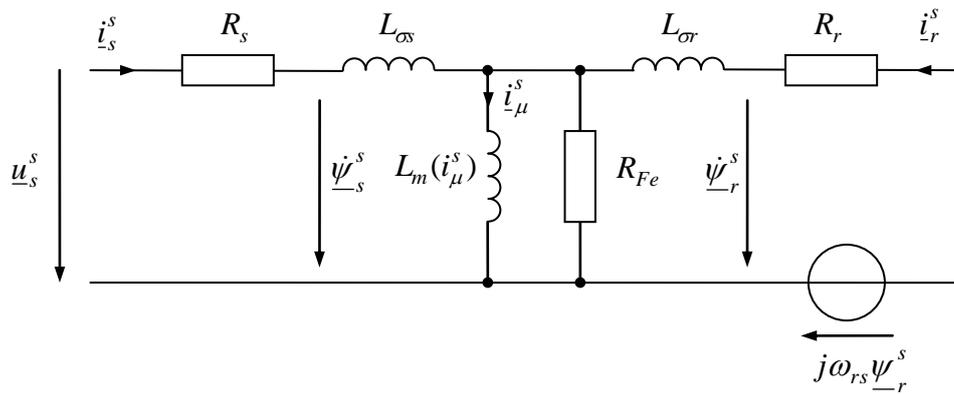
So far, the inductances in the model of the induction motor were assumed as constant. In fact, the iron in the motor may be saturated considerably during operation. This is owed to an economically and technically optimal motor design. Of course, it would be possible to reduce iron saturation by using more material, however, this measure would make the motor heavier and more expensive. Quite often, it is acceptable to consider only the saturation of the mutual inductance while assuming the leakage inductances as constant. Then, the mutual inductance or the mutual flux is dependent on magnetizing current  $i_\mu$ .



**Fig. 8-14:** Sättigung der Hauptinduktivität      Saturation of the mutual inductance

Die Ummagnetisierung des Materials ist aufgrund des hysteretischen Verhaltens mit zusätzlichen Verlusten verbunden. Näherungsweise kann man annehmen, dass diese Verluste in etwa quadratisch mit dem Flussbetrag ansteigen. Mit der Frequenz steigen sie zunächst etwas linear an. Diese Gesetzmäßigkeit zusätzlicher Ummagnetisierungsverluste lässt sich im Ersatzschaltbild durch einen weiteren zur Hauptinduktivität parallel angeordneten Ersatzwiderstand  $R_{Fe}$  berücksichtigen.

Altering the magnetization of a material is due to its hysteretic behavior associated with additional losses. In a first approximation, one can assume that these losses increase with the square of the flux magnitude and linearly with the frequency. In the circuit diagram, these additional hysteresis losses can be accounted for by inserting an equivalent resistance  $R_{Fe}$  parallel to the mutual inductance.



**Fig. 8-15:**  
Ersatzschaltbild mit Berücksichtigung der Sättigung der Hauptinduktivität und der Eisenverluste

Equivalent circuit diagram considering the saturation of the mutual inductance as well as iron losses

## 8.7 Stationäres Betriebsverhalten Steady-State Operating Characteristics

### 8.7.1 Spannungsgleichungen und Zeigerdiagramm Voltage Equations and Vector Diagrams

Im stationären Zustand sind alle Größen im flussorientierten Bezugssystem eingeschwenkt. Insbesondere haben dann auch alle Zeiger von Strömen, Spannungen und Flüssen die gleiche Winkelgeschwindigkeit. Die Kreisfrequenz des Rotorflusssystems ist dann genau die elektrische Frequenz von Strom und Spannung an den Ständerklemmen, so dass im stationären Zustand die einfachere Bezeichnung *Ständerfrequenz*

In steady state, all quantities in the flux-oriented reference system are settled. In particular, all current components, voltages and fluxes have the same angular velocity. Then, the angular frequency of rotor flux oriented system exactly corresponds to the frequency of current and voltage at the stator terminals. Therefore, in steady-state we can simply use the term *stator frequency*.

$$\omega_s = \omega_{\psi_{r,s}} = \omega_{u,s} = \omega_{i,s} \quad (8.91)$$

verwendet werden kann. Die Frequenz zwischen den elektrischen Zeigern und dem Rotor wird als Rotorfrequenz bzw. Schlupffrequenz bezeichnet:

The frequency between the electrical phasors and the rotor is referred to as rotor frequency or slip frequency.

$$\omega_r = \omega_{\psi_{r,r}} = \omega_{u,r} = \omega_{i,r} \quad (8.92)$$

Die (auf das elektrische System bezogene) Drehfrequenz ist damit

The rotational frequency (related to the electrical system) can now be expressed as

$$\omega_{rs} = \omega_s - \omega_r \quad (8.93)$$

Die dimensionslose Größe

The dimensionless variable

$$s = \frac{\omega_r}{\omega_s} \quad (8.94)$$

heißt *Schlupf*.

is called *slip*.

Im stationären Zustand stellt sich der stationäre Rotorfluss

In steady state, the stationary rotor flux

$$\psi_r = L_m i_{sd} \quad (8.95)$$

ein. Die stationäre Ständerspannung lautet

arises. The stationary stator voltage follows the equation

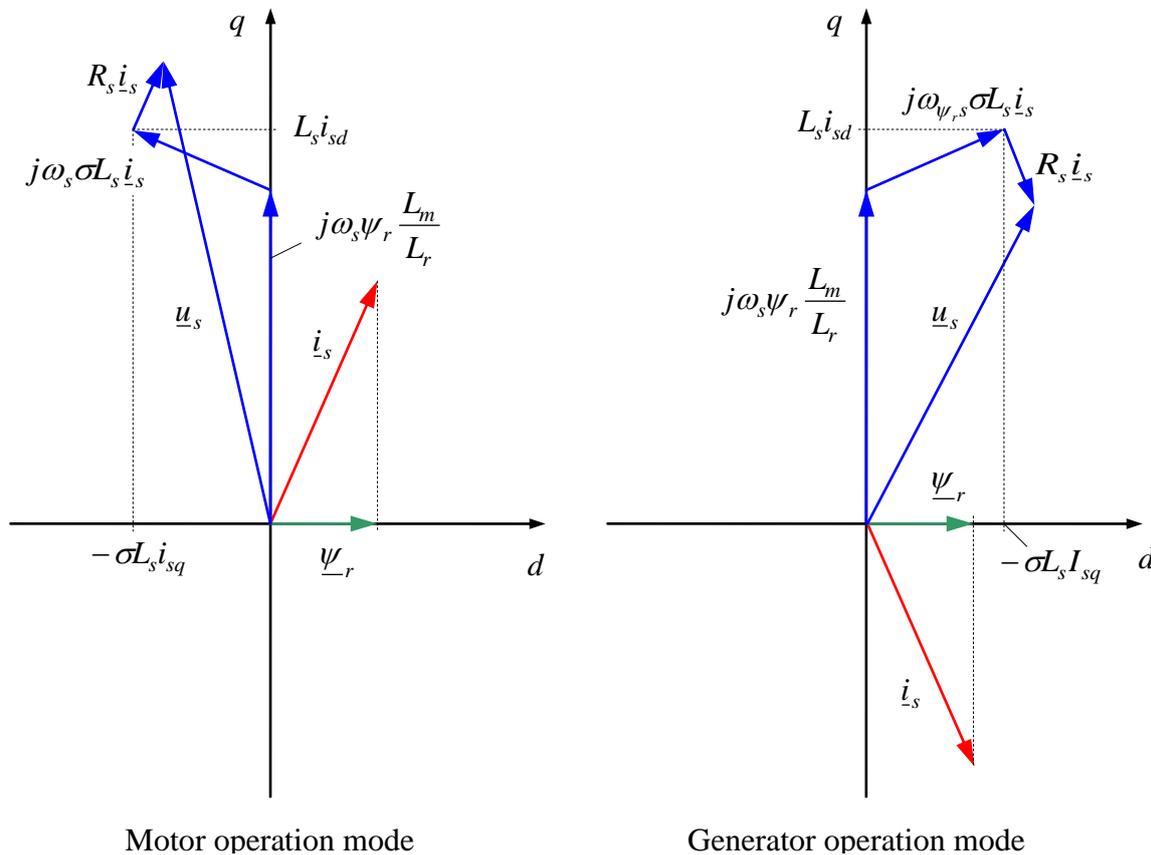
$$\underline{u}_s^{\psi_r} = R_s \underline{i}_s^{\psi_r} + j\omega_s \left( \sigma L_s \underline{i}_s^{\psi_r} + \frac{L_m}{L_r} \psi_r \right) \quad (8.96)$$

bzw. in einzelnen Komponenten

or in individual components

$$u_{sd} = R_s i_{sd} - \omega_s \sigma L_s i_{sq} \quad (8.97)$$

$$\begin{aligned} u_{sq} &= R_s i_{sq} + \omega_s \left( \sigma L_s i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \psi_r \right) \\ &= R_s i_{sq} + \omega_s \left( \sigma L_s + \frac{L_m^2}{L_r} \right) i_{sd} \\ &= R_s i_{sq} + \omega_s L_s i_{sd} \end{aligned}$$



**Fig. 8-16:**

Zeigerdiagramme für den stationären Zustand (bei passender Skalierung von Strom- und Flusszeiger lässt sich der Rotorfluss als Projektion des Ständerstromzeigers auf die  $d$ -Achse darstellen)

Phasor diagram for steady state operation (With appropriate scaling of current and flux phasors, the rotor flux can be represented as a projection of the stator current phasor on the  $d$ -axis)

Im stationären Zustand kann man die Beziehung für das Drehmoment direkt als Produkt der Stromkomponenten ausdrücken:

In steady state, we can express the torque relationship directly as the product of the current components:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} \quad (8.98)$$

Das Drehmoment ist also direkt der durch den Stromzeiger aufgespannten Rechteckfläche in  $d/q$ -Koordinaten proportional, sofern die restlichen Parameter als konstant angenommen werden.

The torque is directly proportional to the rectangular plane spanned by the current phasor in  $d/q$ -coordinates, provided the remaining parameters are assumed constant.

### 8.7.2 Stationäres Ersatzschaltbild Steady-State Equivalent Circuit Diagram

Ausgangspunkt: Ständer- und Rotor- Spannungsgleichungen      Starting point: stator and rotor voltage equations

$$\underline{u}_s^{\psi_r} = R_s \underline{i}_s^{\psi_r} + j\omega_s \underline{\psi}_{-s}^{\psi_r} = R_s \underline{i}_s^{\psi_r} + j\omega_s L_m (\underline{i}_s^{\psi_r} + \underline{i}_r^{\psi_r}) + j\omega_s L_{\sigma s} \underline{i}_s^{\psi_r}$$

$$0 = \underline{u}_r^{\psi_r} = R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_r \underline{\psi}_{-r}^{\psi_r} = R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_r L_m (\underline{i}_s^{\psi_r} + \underline{i}_r^{\psi_r}) + j\omega_r L_{\sigma r} \underline{i}_r^{\psi_r}$$

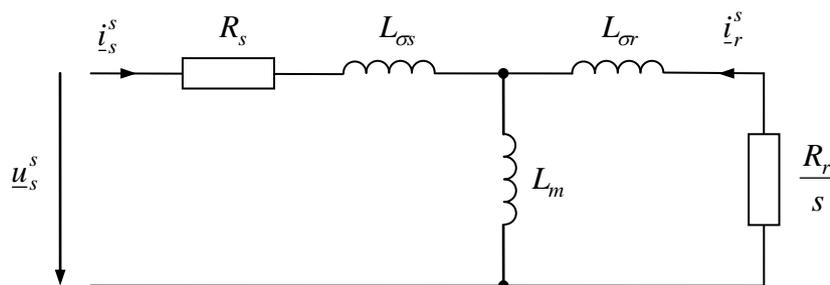
Die Division der Läufer-Spannungsgleichung durch den Schlupf  $s$  liefert      Dividing the rotor voltage equation by the slip  $s$  leads to

$$0 = \frac{1}{s} R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_s \underline{\psi}_{-r}^{\psi_r}$$

$$= \frac{1}{s} R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_s L_m (\underline{i}_s^{\psi_r} + \underline{i}_r^{\psi_r}) + j\omega_s L_{\sigma r} \underline{i}_r^{\psi_r}$$

Diese Gleichungen können nun im Sinne der normalen komplexen Zeiger für Wechselspannungssysteme interpretiert werden. Die Terme  $j\omega_s L_m$ ,  $j\omega_s L_{\sigma s}$ ,  $j\omega_s L_{\sigma r}$  werden als komplexe Wechselspannungs-Impedanzen der Induktivitäten bei einer Speisung mit der Frequenz  $\omega_s$  aufgefasst. Das führt zu dem folgenden Ersatzschaltbild, welches im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Ersatzschaltbildern nur für den stationären Zustand gültig ist.

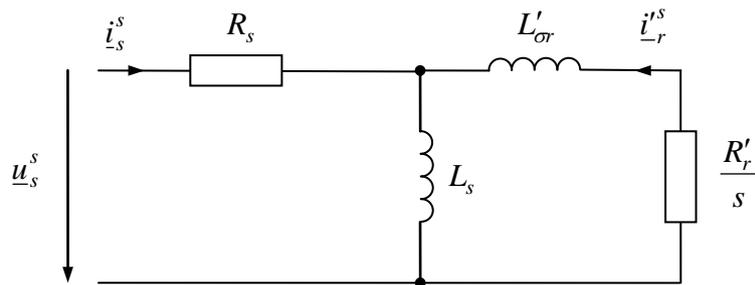
These equations can now be interpreted in terms of the normal complex vectors for AC systems. The terms  $j\omega_s L_m$ ,  $j\omega_s L_{\sigma s}$ ,  $j\omega_s L_{\sigma r}$  are regarded as complex AC-impedances of the inductances. This leads to the following equivalent circuit, which in contrast to the previously presented equivalent circuit diagrams is only valid under steady state conditions.



**Fig. 8-17:** Stationäres Ersatzschaltbild des Asynchronmotors      Steady state equivalent circuit diagram of an induction motor

In diesem Ersatzschaltbild kann die Ständerstreuinduktivität in den Rotorkreis transformiert werden (Abschnitt 8.5.2):

In this equivalent circuit diagram, the stator leakage inductance can be transformed to the rotor side (Section 8.5.2):

**Fig. 8-18:**

Ersatzschaltbild des Asynchronmotors für den stationären Zustand mit rotorseitig konzentrierter Streuung

Steady state equivalent circuit diagram of an induction motor with leakage concentrated on rotor side.

### 8.7.3 Drehmoment bei Speisung mit konstanter Spannung und konstanter Frequenz Torque at Constant Voltage and Frequency Supply

Im unregelmäßigen Betrieb kann der Asynchronmotor an ein Drehspannungssystem mit konstanter Amplitude und Frequenz angeschlossen werden. Zur Bestimmung des Drehmoments wird von der Gleichung

In the uncontrolled operation mode, the induction motor can be connected to a three-phase system with constant amplitude and frequency. The torque estimation can be based on the equation

$$T = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\bar{\psi}_s i_s) = -\frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\bar{\psi}_s i_r) \quad (8.99)$$

ausgegangen, wobei vom obigen stationären Ersatzschaltbild mit rotorseitig konzentrierter Streuung Gebrauch gemacht wird. Der Rotorstrom wird unter Vernachlässigung des Ständerwiderstands  $R_s$  über die Rotormaschine zu

whereas the above steady state equivalent circuit diagram with rotor-sided leakage is made use of. The rotor current is determined from the rotor loop, while neglecting the stator resistance  $R_s$ .

$$i_r^s = -\frac{1}{\frac{R'_r}{s} + j\omega_s L'_{\sigma r}} u_s^s \quad (8.100)$$

bestimmt. Der Ständerfluss ist dann

Then, the stator flux results to

$$\psi_s^s = \frac{1}{j\omega_s} u_s^s \quad (8.101)$$

Es folgt

It follows

$$\begin{aligned}
 T &= -\frac{3}{2} p \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{-j\omega_s} \bar{u}_s \frac{-1}{\frac{R'_r}{s} + j\omega_s L'_{\sigma r}} u_s \right] \\
 &= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\frac{R'_r}{s} + j\omega_s L'_{\sigma r}} \right] \\
 &= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{s}{R'_r + j\omega_s s L'_{\sigma r}} \right] \\
 &= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega_s s}{R'_r + j\omega_s s L'_{\sigma r}} \right] \\
 &= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega_s s (R'_r - j\omega_s s L'_{\sigma r})}{R_r'^2 + (\omega_s s L'_{\sigma r})^2} \right] \\
 &= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_s s R'_r}{R_r'^2 + (\omega_s s L'_{\sigma r})^2} \\
 &= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_r R'_r}{R_r'^2 + (\omega_r L'_{\sigma r})^2}
 \end{aligned} \tag{8.102}$$

Benutzt man statt des Zeigerbetrags der Ständerspannung den Effektivwert

When using the RMS value of the stator voltage instead of the phasor amplitude,

$$U_s = \frac{u_s}{\sqrt{2}} \tag{8.103}$$

erhält die Gleichung die Form

then the equation results in

$$T = 3p \frac{U_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_r R'_r}{R_r'^2 + (\omega_r L'_{\sigma r})^2} \tag{8.104}$$

welche als Klosssche Formel bezeichnet wird. Bei konstanter Ständerfrequenz wird das maximale Drehmoment bei der Rotorfrequenz

This is referred to as Kloss's formula. With a constant stator frequency, the maximum torque is reached at a rotor frequency

$$\omega_{rk} = \frac{R'_r}{L'_{\sigma r}} \tag{8.105}$$

erreicht, die als *Kippfrequenz* bezeichnet wird, wie man durch Kurvendiskussion schnell zeigen kann. Das Drehmoment an dieser Stelle wird als *Kipp-Drehmoment* be-

also known as *sweep* or *slip frequency*. The corresponding torque at this frequency is called *sweep torque* and amounts to

zeichnet. Es beträgt

$$T_k = \frac{3p}{2L'_{\sigma r}} \frac{U_s^2}{\omega_s^2} \quad (8.106)$$

Mit Hilfe der Größen des Kippunktes lässt sich die Drehmomentbeziehung in der übersichtlichen Form

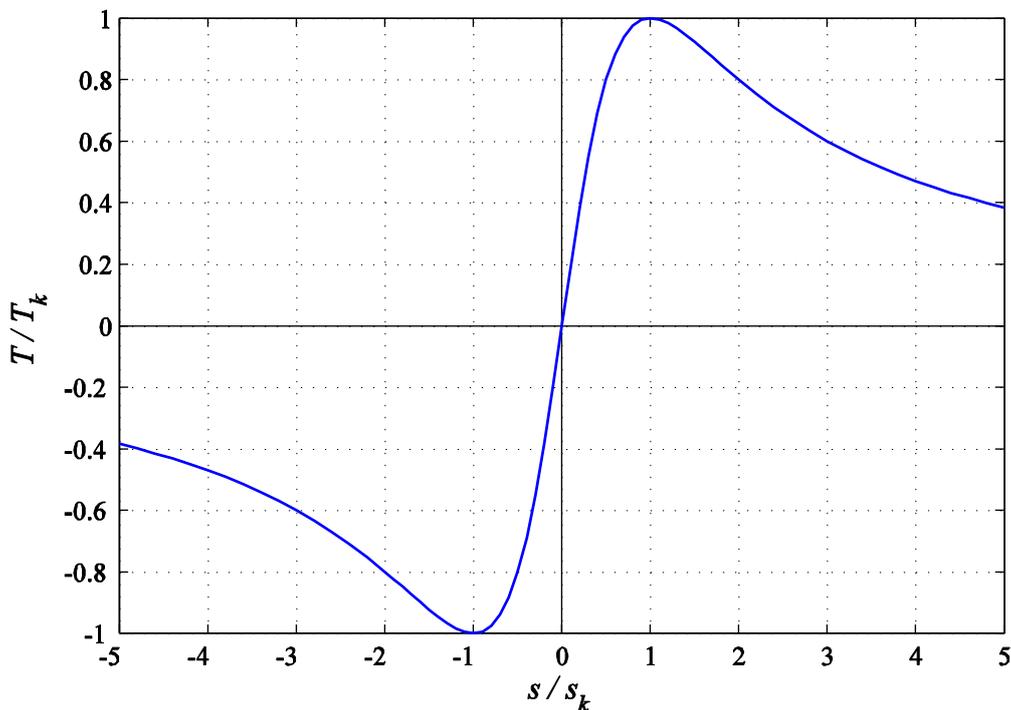
By making use of the introduced sweep quantities, the torque equation can be expressed in the clear form

$$\frac{T}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_r}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_r}} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (8.107)$$

ausdrücken. Für kleinen Schlupf  $|s| \ll s_k$  kann das Drehmomentverhalten approximiert werden.

For small slips  $|s| \ll s_k$ , the torque behavior can be approximated with the linear function

$$\frac{T}{T_k} \approx 2 \frac{s}{s_k} \quad (8.108)$$



**Fig. 8-19:**

Drehmoment als Funktion des  
Schlupfes

Torque as a function of the slip

### 8.7.4 Verlustminimaler Betrieb Operation with Minimum Losses

Im stationären Zustand lässt sich das Drehmoment durch das Produkt der beiden Stromkomponenten ausdrücken:

In steady state, the torque can be expressed by the product of the current components:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} \quad (8.109)$$

Ein gewünschtes Drehmoment lässt sich also durch verschiedene Kombination von  $i_{sd}, i_{sq}$  erreichen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche dieser möglichen Arbeitspunkte die kleinsten ohmschen Verluste verursacht. Die ohmschen Stator- und Rotorverluste lauten

A desired torque can thus be achieved by various combinations of  $i_{sd}, i_{sq}$ . We want to investigate at this point, which one of these possible operating points causes the lowest ohmic losses. The ohmic stator and rotor losses are

$$P_d = \frac{3}{2} R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + \frac{3}{2} R_r (i_{rd}^2 + i_{rq}^2) \quad (8.110)$$

Die Rotorströme können mit Hilfe der Beziehung

With the help of the equation

$$\underline{\psi}_r = L_m \underline{i}_s + L_r \underline{i}_r \quad (8.111)$$

durch Rotorfluss und Ständerströme ausgedrückt werden. Komponentenweise ergibt dies

the rotor currents can be expressed through rotor flux and stator currents. Component-wise this results in

$$i_{rd} = \frac{1}{L_r} \psi_{rd} - \frac{L_m}{L_r} i_{sd} = \frac{1}{L_r} \psi_r - \frac{L_m}{L_r} i_{sd} \quad (8.112)$$

$$i_{rq} = \frac{1}{L_r} \psi_{rq} - \frac{L_m}{L_r} i_{sq} = -\frac{L_m}{L_r} i_{sq} \quad (8.113)$$

Im stationären Zustand, auf den die weitere Betrachtung beschränkt werden möge, gilt außerdem

In steady state, what shall be focused on in the following, the equation

$$\psi_r = L_m i_{sd} \quad (8.114)$$

so dass also die  $d$ -Komponente des Rotorstrom im stationären Zustand stets Null ist:

also holds, so that the  $d$ -component of rotor current is always zero:

$$i_{rd} = 0 .$$

Die ohmschen Verluste können dann allein

The ohmic losses can then be solely expressed

durch die Statorströme ausgedrückt werden: by the stator currents:

$$P_d = \frac{3}{2} R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + \frac{3}{2} R_r i_{rq}^2 = \frac{3}{2} \left[ R_s i_{sd}^2 + \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r} \right) i_{sq}^2 \right] \quad (8.115)$$

Diese Verluste sind nun für ein gegebenes Drehmoment  $T$  zu minimieren. Mathematisch handelt es sich um eine Extremwertaufgabe mit zwei Variablen  $i_{sd}, i_{sq}$  unter einer Nebenbedingung, was durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion

These losses are now to be minimized for a given torque  $T$ . Mathematically, this corresponds to an extreme value problem with two variables  $i_{sd}, i_{sq}$  under a constraint, which is solved by setting the partial derivatives of the Lagrangian

$$L(i_{sd}, i_{sq}, \lambda) = T(i_{sd}, i_{sq}) - \lambda P_d(i_{sd}, i_{sq}) \quad (8.116)$$

gelöst wird:

to zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial i_{sd}} &= \frac{\partial T}{\partial i_{sd}} - \lambda \frac{\partial P_d}{\partial i_{sd}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial i_{sq}} &= \frac{\partial T}{\partial i_{sq}} - \lambda \frac{\partial P_d}{\partial i_{sq}} = 0 \end{aligned}$$

Das ergibt also

This leads to

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sq} &= \frac{3}{2} 2\lambda R_s i_{sd} \\ \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} &= \frac{3}{2} 2\lambda \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r} \right) i_{sq} \end{aligned} \quad (8.117)$$

Die Division beider Gleichungen eliminiert den Lagrangeschen Multiplikator  $\lambda$  und führt zu

Calculating the quotient of both equations eliminates the Lagrangian multiplier  $\lambda$ , leading to

$$\begin{aligned} \frac{i_{sq}}{i_{sd}} &= \frac{R_s}{R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r}} \frac{i_{sd}}{i_{sq}}, \\ \frac{i_{sq}}{i_{sd}} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r}}} \end{aligned} \quad (8.118)$$

Die verlustminimalen Betriebspunkte liegen also in der  $i_{sd}/i_{sq}$ -Ebene auf Ursprungs-

The operating points with minimum losses thus lie on the line through the origin in the

geraden mit der oben bestimmten Steigung. Motorischer und generatorischer Betrieb unterscheiden sich durch die Vorzeichen. Nun sollen noch die Stromkomponenten in Abhängigkeit des vorgegebenen Drehmoments bestimmt werden. Mittels der letzten Formel kann  $i_{sq}$  in der Drehmomentformel eliminiert werden:

$i_{sd}/i_{sq}$  plane. Motor and generator operation mode are distinguished by the sign. Now, the current components as a function of the given torque shall be determined. Using the last formula,  $i_{sq}$  can be eliminated in the torque formula:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} = \pm \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r^2}}} i_{sd}^2 \quad (8.119)$$

Die Auflösung nach  $i_{sd}$  ergibt

Solving for  $i_{sd}$  results in

$$i_{sd} = \sqrt{|T| \frac{2L_r}{3pL_m^2} \sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r^2}}} \quad (8.120)$$

und dann

and

$$i_{sq} = \text{sgn}(T) \sqrt{|T| \frac{\frac{2L_r}{3pL_m^2}}{\sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r^2}}}} \quad (8.121)$$

Der optimale Rotorfluss ist demnach

The optimal rotor flux can therefore be calculated via

$$\psi_r = L_m i_{sd} = \sqrt{|T| \frac{2L_r}{3p} \sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r^2}}} \quad (8.122)$$

Die Rechnung wurde wieder unter der Annahme konstanter Induktivitäten ausgeführt, was für kleine Magnetisierungen eine brauchbare Näherung ist. In der Nähe des Bemessungspunktes wird die Sättigung aber stärker, so dass das hier gefundene Ergebnis ähnlich wie in Abschnitt 8.7.5 modifiziert werden muss.

The calculations were once again performed under the assumption of constant inductances, which is a useful approximation for small magnetizations. However, near the nominal operating point of the machine, the degree of saturation increases, making it necessary to modify the derived results, similar to section 8.7.5.

Im Rahmen der rotorflussorientierten Regelung würde man nur den oben bestimmten Rotorfluss als Sollwert der Flussregelung

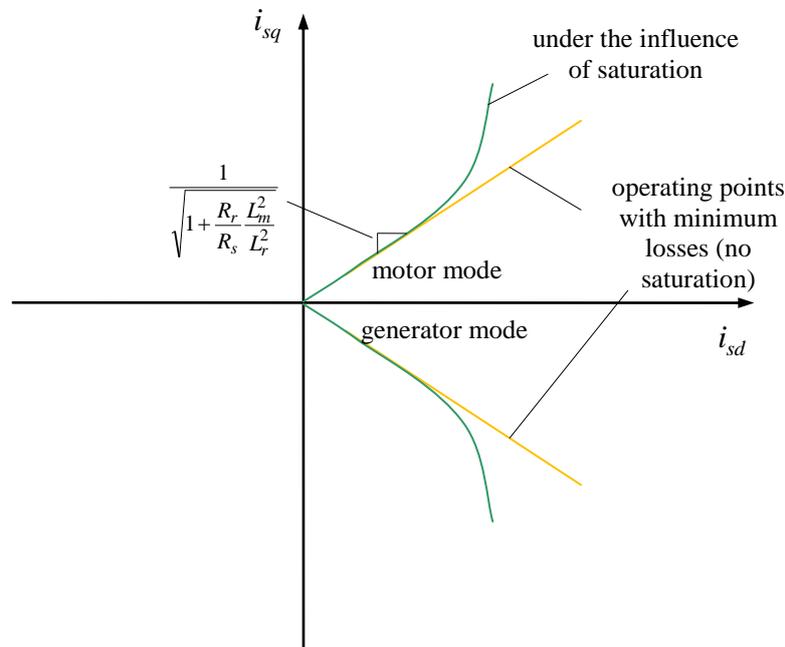
As part of the rotor flux oriented control, only the above determined rotor flux would be used as reference for the flux control. In

vorgeben. Der Flussregler würde dann für die Einstellung des notwendigen magnetisierenden Stroms  $i_{sd}$  sorgen und die Drehmomentsteuerung das passende  $i_{sq}$  einstellen. Die obigen Formeln für  $i_{sd}$  und  $i_{sq}$  müssen also in der Regelung nicht implementiert werden, sondern nur diejenige für  $\psi_r$  in Abhängigkeit des Soll-Drehmoments.

Führt man den Rotorfluss entsprechend der Strategie dieser Verlustminimierung, muss eine verringerte Drehmomentdynamik in Kauf genommen werden. Da der Fluss sich nur über die recht große Rotorzeitkonstante verändert, können dynamische Drehmomentanforderungen nicht so schnell umgesetzt werden. Wird ein hochdynamisches Drehmomentverhalten gefordert, sollte auch im Leerlauf und bei Schwachlast ständig ein genügend großer Fluss im Motor vorgehalten werden.

consequence, the flux controller would adjust the necessary magnetizing current  $i_{sd}$ , while the torque control adjusts the suitable  $i_{sq}$ . The above formulas for  $i_{sd}$  and  $i_{sq}$  must therefore not be implemented in the control. Instead, only the implementation of the formula for  $\psi_r$  as a function of the nominal torque becomes necessary.

When controlling the rotor flux according to this loss minimizing strategy, reduced torque dynamics must be taken into account. As flux changes always follow the relatively large rotor time constant, dynamic torque requirements cannot be realized that quickly. If high-dynamic torque characteristics are required, a sufficiently large flux should be permanently maintained in the motor, also during idle mode and at light load operation.



**Fig. 8-20:**  
Betriebspunkte minimaler Verluste

Operating points with minimum losses

### 8.7.5 Betrieb an der Stromgrenze Operating at Current Limits

Kurven konstanten Drehmoments in der Stromebene sind also Hyperbeln. Allerdings sind die Induktivitäten aufgrund der Sättigung des magnetischen Materials vom Strom abhängig. Bei konstant angenommenen Induktivitäten würde das maximale Drehmoment bei einem maximal möglichen Strom

Constant torque curves in the current plane are hyperbolas. However, the inductances due to saturation of the magnetic material are dependent on the current. With assumed constant inductances the maximum torque would be set at a maximum possible current

$$i_{\max} > i_s = |\dot{i}_s| = \sqrt{i_{sd}^2 + i_{sq}^2} \quad (8.123)$$

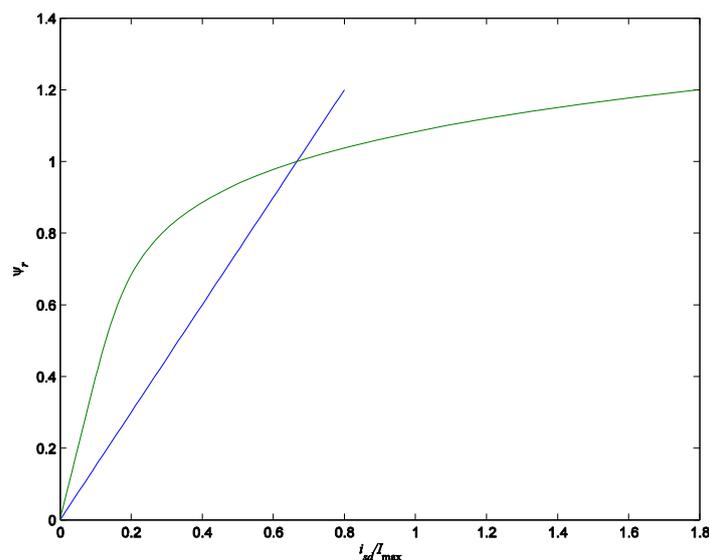
im Punkt

at the operating point

$$i_{sd} = i_{sq} = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (8.124)$$

angenommen. Da die realen Kurven konstanten Drehmoments aufgrund der Eisensättigung merklich von der Hyperbelform abweichen, wird das maximale Drehmoment in der Regel in einem Punkt erreicht, bei dem drehmomentbildende  $i_{sq}$  Strom deutlich größer als der magnetisierende Strom  $i_{sd}$  ist.

Since the real constant torque curves due to the iron saturation noticeably deviate from the hyperbolic form, the maximum torque is usually achieved at a point at which the torque-generating current  $i_{sq}$  is significantly larger than the magnetizing current  $i_{sd}$ .

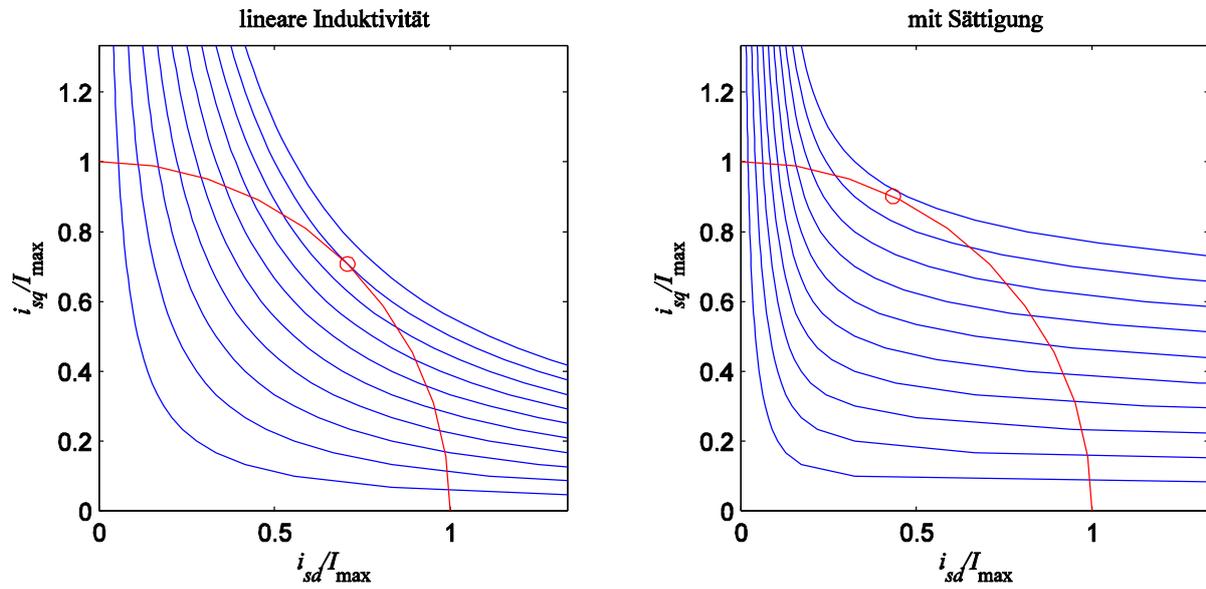


**Fig. 8-21:**

Stationäre Kennlinie des Rotorflusses über der magnetisierenden Stromkomponente für lineare und sättigende

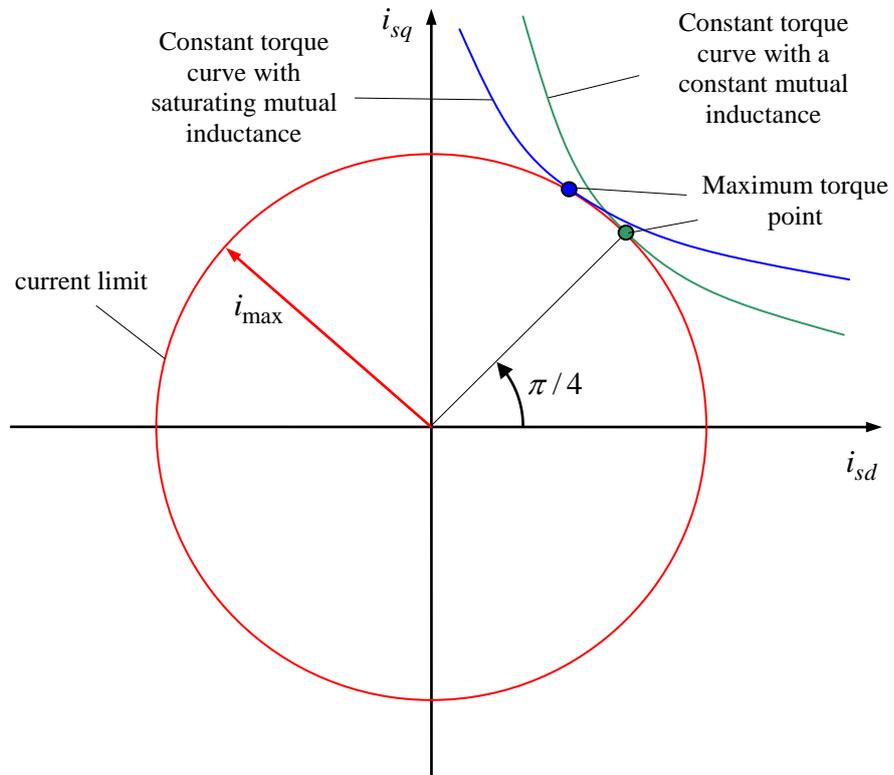
Steady state characteristic of rotor flux over magnetizing current component for linear and saturating inductance

## Induktivität



**Fig. 8-22:**  
Kurven konstanten Dreh-  
moments für lineare und  
sättigende Induktivität und  
Punkt maximalen Drehmoments  
bei gegebenem Maximalstrom

Constant-torque curves for linear  
(left) and saturating inductance  
(right) incl. point of maximum  
torque at a given maximum  
current



**Fig. 8-23:**  
Vergleich der Betriebspunkte  
maximalen Drehmoments für  
lineare und sättigende Induk-  
tivität

Comparison of maximum torque  
operating points for linear and  
saturating inductance

### 8.7.6 Betrieb an der Spannungsgrenze, Flussschwächung Operation at the Voltage Limit, Flux Weakening

Bei konstantem Läuferfluss steigt mit steigender Drehzahl die Motorspannung etwa proportional an. Vernachlässigt man die ohmschen Spannungsabfälle, gilt für den Spannungsbetrag im stationären Zustand

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 = \omega_s^2 \left[ \left( \frac{L_m}{L_r} \psi_r + \sigma L_s i_{sd} \right)^2 + (\sigma L_s i_{sq})^2 \right] = \omega_s^2 \left[ (L_s i_{sd})^2 + (\sigma L_s i_{sq})^2 \right] \quad (8.125)$$

With a constant rotor flux, the motor voltage increases approximately proportional with the speed. Neglecting resistive voltage drops, the voltage magnitude in steady state results to

Der speisende Umrichter kann nur eine maximale Spannung bereitstellen, welche durch die Fläche des Hexagons beschränkt ist (s. Abschnitt 3). Für eine einfache Betrachtung nehmen wir eine kreisförmige Beschränkung mit

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 \leq u_{\max}^2 \quad (8.126)$$

The inverter can only provide a maximum voltage, which is limited by the area of the hexagon (see Section 3). For a simple analysis, we assume a circular restriction.

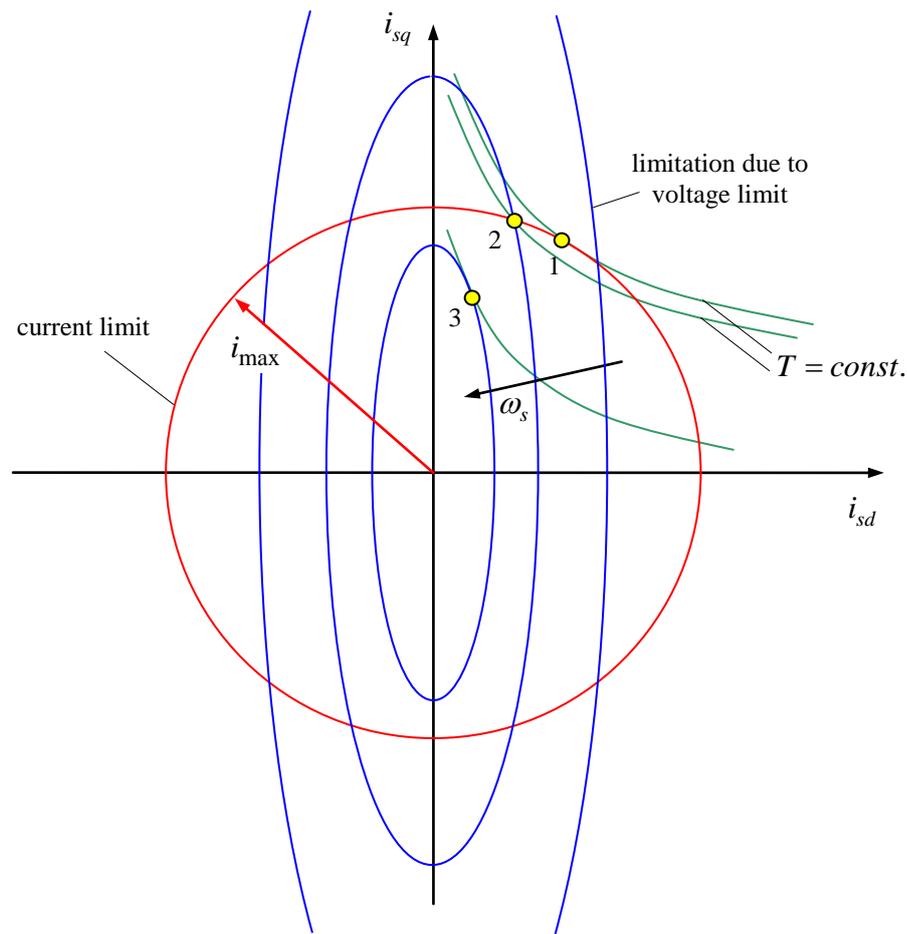
an. Bei kleinen Drehzahlen bzw. Frequenzen ist die Umrichterspannung in der Regel ausreichend und die Spannungsgrenze wird nicht erreicht. Wächst die dann Drehzahl an, wird irgendwann die Spannungsgrenze erreicht. Dieser Punkt wird als Bemessungs- oder Typenpunkt des Antriebs bezeichnet. Größere Drehzahlen können erreicht werden, indem der Läuferfluss reduziert (geschwächt) wird. Dadurch sinkt allerdings das verfügbare Drehmoment

At low speeds or frequencies, the inverter voltage is usually sufficient and the voltage limit is not reached. As the speed increases, the voltage limit is reached at some point. This point is referred to as the rated point of the drive. Greater speeds can be achieved by reducing (weakening) the rotor flux. This however reduces the available torque

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} \quad (8.127)$$

es sei denn, der reduzierte Fluss  $\psi_r$  kann durch einen vergrößerten Strom  $i_{sq}$  ausgeglichen werden, was aber in der Regel nicht oder nur in geringem Maße möglich ist, da der Strom seinerseits durch die Stromgrenze  $i_{\max}$  begrenzt ist. Man kann die Beschränkung der Spannung auch in der Ebene der Ströme darstellen. Dadurch ergeben sich beschränkende Ellipsen, die mit wachsender Ständerfrequenz immer kleiner werden. Die Hauptachsen dieser Ellipse liegen in der  $i_d$ - und  $i_q$ -Richtung und haben die Längen  $u_{\max} / (\omega_s L_s)$  und  $u_{\max} / (\omega_s \sigma L_s)$ .

unless the reduced flux  $\psi_r$  can be compensated by an increased current  $i_{sq}$ . This is, however, usually not possible or possible only to a limited extent, as the current itself is in turn limited by the current limit  $i_{\max}$ . One can also represent the voltage limitation within the current plane. This results in a limiting ellipse, which becomes smaller with increasing stator frequency. The principal axes of this ellipse are oriented to the  $i_d$ - and  $i_q$ -directions with lengths of  $u_{\max} / (\omega_s L_s)$  and  $u_{\max} / (\omega_s \sigma L_s)$ .



**Fig. 8-24:**  
Betrieb an Spannungs- und  
Stromgrenze

Operation at voltage and current  
limits

Mit Hilfe des Diagramm können drei qualitativ verschiedene Fälle verdeutlicht werden:

Using the above diagram, three qualitatively different cases can be distinguished:

1. Die Drehzahl bzw. die Ständerfrequenz ist klein bzw. die verfügbare Spannung genügend groß, so dass die Spannungsgrenze für alle möglichen Stromzeiger innerhalb der Strombegrenzung keine zusätzliche Einschränkung darstellt. Das größte Drehmoment wird im Berührungspunkt der Drehmoment-Isolinien mit dem Strombegrenzungskreis erreicht (Punkt 1). Das erreichbare maximale Drehmoment ist in diesem Bereich unabhängig von der Frequenz. Setzt

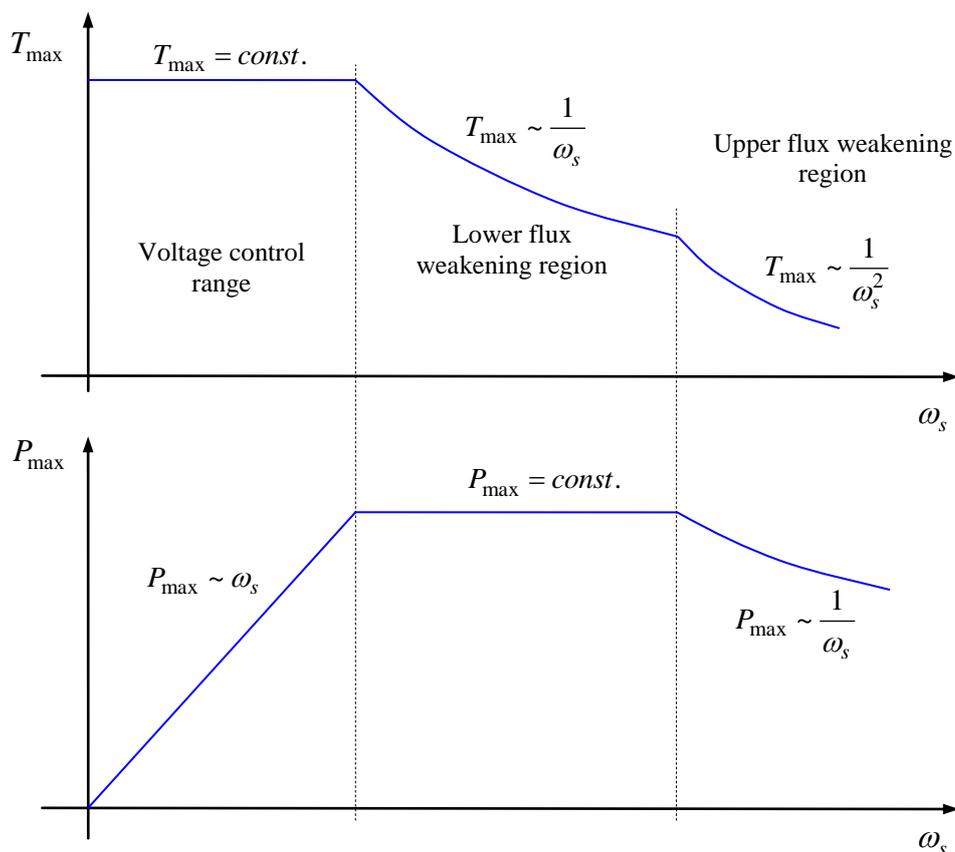
1. The speed and the stator frequency are small and the available voltage is sufficiently large. In this case the voltage limit does not impose restrictions on how to set currents within the current limit circle. The maximum torque is achieved at the contact point of constant torque curves and current limit circle (point 1). The maximum achievable torque is independent of the frequency in this region. Setting the stator frequency and the rotational frequency equal in a

man überschlägig Ständerfrequenz und Drehfrequenz gleich, so ergibt sich in diesem Bereich eine mit der Frequenz proportional wachsende Leistung. Dieser Bereich wird als *Spannungsstellbereich* oder in Anlehnung an die Begriffe des Gleichstrommotors als *Ankerstellbereich* bezeichnet.

2. Bei größerer Drehzahl bzw. Frequenz kommt die Spannungsgrenze zum Tragen. Es sind nur noch diejenigen Stromzeiger möglich, die sowohl innerhalb des Strombegrenzungskreises als auch innerhalb der begrenzenden Spannungsellipse liegen. Das maximale Drehmoment wird im Schnittpunkt beider Begrenzungskurven erreicht. Das maximale verfügbare Drehmoment reduziert sich mit wachsender Frequenz überschlägig mit  $1/\omega_s$ . Da in diesem Bereich die flussbildende Stromkomponente  $i_{sd}$  bzw. der Rotorfluss  $\psi_r$  drehzahlabhängig verringert werden muss, heißt dieser Bereich *Flussschwächbereich*, genauer *unterer Flussschwächbereich*. Die maximale Leistung ist im unteren Flussschwächbereich näherungsweise konstant.
3. Bei weiter wachsender Frequenz werden die aus der Spannungsbegrenzung herrührenden Ellipsen so klein, dass nun die Strombegrenzung keine Rolle mehr spielt. Das maximale Drehmoment wird im Berührungspunkt der Spannungsellipsen mit den Drehmoment-Isolinien erreicht. Dieser Bereich heißt *oberer Flussschwächbereich*. Das erreichbare Drehmoment reduziert sich hier mit  $1/\omega_s^2$ , die maximale Leistung mit  $1/\omega_s$ .

first estimation, then the power increases proportionally with the frequency. The described region is referred to as *voltage control range*, or in accordance with the terms of the DC motor as the *armature control range*.

2. At higher speeds or frequencies the voltage limit comes into effect. Valid phasors have to be located within both the current limit circle and the limiting voltage ellipse. The maximum torque is achieved at the intersection of the two limiting curves. The maximum available torque is reduced with increasing frequency, roughly by  $1/\omega_s$ . As in this region, the flux-forming current component  $i_{sd}$  and the rotor flux  $\psi_r$  are reduced depending on the speed, this area is called *flux weakening region*. More precisely, we refer to this region as the *lower flux weakening region*. The maximum achievable power is approximately constant in the lower flux weakening region.
3. With further increase in frequency, the limiting voltage ellipses become so small that the current limit is of no importance any longer. The maximum torque is achieved at the contact point of voltage ellipses and constant torque curves. This region is called *upper flux weakening region*. The attainable torque is by  $1/\omega_s^2$  and the maximum power by  $1/\omega_s$ .

**Fig. 8-25:**

Ungefähre Verlauf des maximalen Drehmoment und der maximalen Leistung beim Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen

Approximate maximum torque and maximum power curves when operating at current and voltage limits

Der im Betrieb ausgenutzte Flussschwächbereich wird gern als Verhältnis der maximalen Drehzahl zur Bemessungsdrehzahl angegeben. Man spricht dann z.B. von einem Flussschwächbereich von 1:3.

The utilized flux weakening region during operation is often expressed as the ratio of the maximum speed to the rated speed. For example, we speak of a flux weakening region of 1:3.

Je nach Anwendungsbereich werden Spannungsstellbereich und Flussschwächbereich unterschiedlich ausgelegt: Wächst das Last-Drehmoment mit der Drehzahl, wie es beispielsweise für Pumpen und Lüfter charakteristisch ist, ist ein Betrieb im Flussschwächbereich nicht sinnvoll, da sich in diesem Bereich das Drehmoment des Antriebs reduzieren würde. Derartige Antriebe arbeiten weitgehend vollständig nur im Spannungsstellbereich.

Depending on the field of application voltage control range and flux weakening region are designed differently: In case the load torque increases with the speed, which is typical for pumps and fans for example, operation in the flux weakening region is not reasonable, as the torque of the drive would be reduced. Such drives operate almost completely in the voltage control range, in consequence.

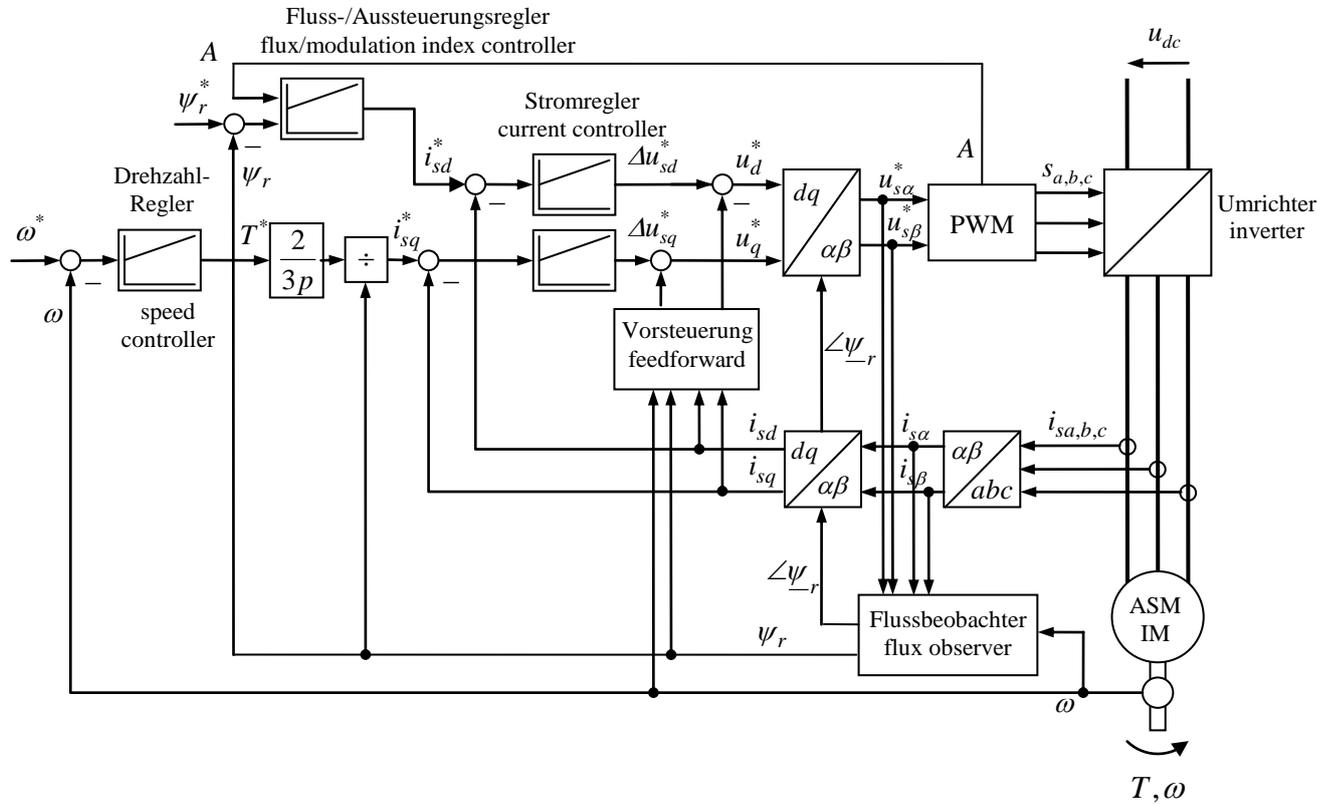
Bei vielen Antrieben gilt es, die installierte Leistung des Antriebs über einen größeren Drehzahlbereich gleichmäßig zu nutzen. Dies ist typischerweise bei Traktionsantrieben (Bahnen, Straßenfahrzeuge) der Fall. Derartige Antriebe werden für einen großen unteren Flussschwächbereich von beispielsweise 1:3 bis 1:5 ausgelegt.

Der obere Flussschwächbereich wird bei typischen Anwendungen nicht oder allenfalls marginal genutzt. Der Grund liegt in der mit der Drehzahl abfallenden Leistung, für die es kaum eine passende Antriebsaufgabe mit passender Lastcharakteristik gibt.

For many drives, it is important to utilize the installed power evenly within a preferably large speed range. This is a typical characteristic of traction drives (railways, road vehicles). Such drives are designed for a large lower flux weakening region of 1:3 to 1:5, for example.

The upper flux weakening region, on the other hand, is not or only to a limited extent used in typical applications. The reason lies in the decreasing power as a function of the speed for which hardly any drive task with a suitable load characteristic can be found.

### 8.8 Regelungsstruktur Control structure



**Fig. 8-26:**  
Grundstruktur der rotorfluss-orientierten Regelung der Asynchronmaschine (vorläufig, einige Beschriftungen sind durcheinandergeraten)

Basic structure of the rotor flux-oriented control of the asynchronous machine

## 9 Zweidimensionale Vektoren vs. komplexe Zeiger Two-Dimensional Vectors vs. and Complex Numbers

	vektorielle Schreibweise / Vector notation	komplexe Schreibweise / Complex notation
	$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\underline{x} = x_1 + jx_2$
Transformation zwischen zwei Bezugssystemen A und B  Transformation between two reference systems A und B	$\mathbf{x}^B = \mathbf{Q}(-\varepsilon_{BA})\mathbf{x}^A$ with $\mathbf{Q}(\varphi_{BA}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{BA} & -\sin \varphi_{BA} \\ \sin \varphi_{BA} & \cos \varphi_{BA} \end{bmatrix}$	$\underline{x}^B = e^{-j\varphi_{BA}} \underline{x}^A$
Transformation der Zeitab- leitung  Transformation of the time derivative	$\dot{\mathbf{x}}^B = -\dot{\varphi}_{BA}\mathbf{J}\mathbf{x}^B + \mathbf{Q}(\varphi_{BA})\dot{\mathbf{x}}^A$	$\dot{\underline{x}}^B = -j\dot{\varphi}_{BA}\underline{x}^B + e^{-j\varphi_{BA}}\dot{\underline{x}}^A$
Drehung um 90°  Rotation by 90°	$\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{J}$ with $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$j \underline{x}$
Drehstreckung  Rotation-dilation	$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$	$(a_1 + ja_2) \underline{x}$
Allgemeine Abbildung  General mapping	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$	N/A
Betrag  Magnitude	$ \mathbf{x}  = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$	$ \underline{x}  = \sqrt{\underline{x}\underline{x}}$
inneres Produkt / Scalar/inner product	$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$	$\operatorname{Re} \bar{\underline{x}} \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$
äußeres Produkt / Vector/cross product	$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$	$\operatorname{Im} \bar{\underline{x}} \underline{y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

## 10 Fourier- und Laplace-Transformation von zweidimensionalen Zeitfunktionen Fourier and Laplace Transforms of Two-Dimensional Time-Domain Functions

Eine vektorwertige Zeitfunktion

A vector-valued time function

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_\alpha(t) \\ x_\beta(t) \end{bmatrix},$$

deren Komponenten  $x_\alpha(t), x_\beta(t)$  reellwertige Funktionen sind, kann komponentenweise in den Fourier- oder Laplace-Bereich transformiert werden:

whose components  $x_\alpha(t), x_\beta(t)$  represent real-valued functions can be transformed component-wise into the Fourier or Laplace domain:

$$\underline{\mathbf{X}}(s) = \begin{bmatrix} \underline{X}_\alpha(s) \\ \underline{X}_\beta(s) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{X}}(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{X}_\alpha(\omega) \\ \underline{X}_\beta(\omega) \end{bmatrix}$$

mit der Laplace- bzw. der Fouriertransformation

with the Laplace or Fourier transformation

$$\underline{X}_{\alpha,\beta}(s) = \int_0^{\infty} x_{\alpha,\beta}(t) e^{-st} dt \quad \text{bzw.} \quad \underline{X}_{\alpha,\beta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\alpha,\beta}(t) e^{-j\omega t} dt$$

und den zugehörigen Rücktransformationen

and the corresponding inverse transformations

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \underline{X}_{\alpha,\beta}(s) e^{st} ds \quad \text{bzw.} \quad x_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}_{\alpha,\beta}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Statt einer komponentenweisen Transformation kann man die beiden reellwertigen Zeitfunktionen  $x_\alpha(t), x_\beta(t)$  zu einer *komplexwertigen Zeitfunktion*

and apply the Laplace or Fourier transformation to this complex-valued function:

$$\underline{x}(t) = x_\alpha(t) + jx_\beta(t)$$

zusammenfassen und diese komplexwertige Funktion der Laplace- oder der Fouriertransformation unterwerfen:

and apply the Laplace or Fourier transformation to this complex-valued function:

$$\underline{\mathbf{X}}(s) = \int_0^{\infty} \underline{x}(t) e^{-st} dt \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{X}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}(t) e^{-j\omega t} d\omega$$

Offensichtlich gilt

Obviously, the following equation holds:

$$\underline{X}(s) = \underline{X}_\alpha(s) + j\underline{X}_\beta(s)$$

Diese Bildfunktion  $\underline{X}(s)$  ist ebenfalls komplexwertig (wie die der reellwertigen Zeitfunktionen), aber sie ist nicht zu sich selbst konjugiert komplex, wie man es bei Bildfunktionen reellwertiger Zeitfunktionen gewohnt ist. Im Allgemeinen gilt also *nicht*

This transformed function  $\underline{X}(s)$  is complex-valued as well (such as the real-valued time functions). However, it is not a complex conjugate to itself, as it is common for transformed real-valued time functions. In general, the following equations do not apply:

$$\overline{\underline{X}}(s) = \underline{X}(\bar{s}) \quad \text{bzw.} \quad \overline{\underline{X}}(\omega) = \underline{X}(-\omega)$$

Insbesondere reicht es bei der Fourier-Transformierten nicht wie sonst üblich aus, sich nur die positiven Frequenzen anzusehen, sondern es muss das Frequenzspektrum über allen positiven und negativen Frequenzen betrachtet werden.

For the Fourier transform in particular, it is not sufficient to only consider the positive frequencies. Instead, the frequency range for all positive and negative frequencies must be taken into account.

Die Rücktransformationen sind über

The inverse transformations

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \underline{X}(s) e^{st} ds \quad \text{bzw.} \quad \underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

eindeutig definiert und über

are clearly defined:

$$x_\alpha(t) = \operatorname{Re} \underline{x}(t)$$

$$x_\beta(t) = \operatorname{Im} \underline{x}(t)$$

können die ursprünglichen Komponenten wieder gewonnen werden.

The original components can be recovered according to

Es gelten die üblichen Rechenregeln der Laplace- und Fourier-Transformation in gleicher Form auch für die Transformation komplexwertiger Zeitfunktionen. Die *Modulationsregel* soll jedoch genauer betrachtet werden:

The well-known rules of the Laplace and Fourier transform can be applied in the same way for the transformation of complex-valued time functions. The *modulation rule* shall be considered in more detail, however:

Es gilt

It is,

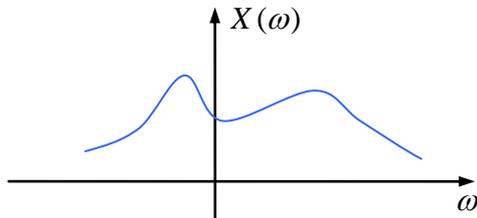
$$\underline{x}(t)e^{-j\omega_0 t} \mapsto \underline{X}(s + j\omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \underline{x}(t)e^{-j\omega_0 t} \mapsto \underline{X}(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}(t)e^{-j\omega_0 t} &= x_\alpha(t) \cos \omega_0 t + x_\beta(t) \sin \omega_0 t + j(-x_\alpha(t) \sin \omega_0 t + x_\beta(t) \cos \omega_0 t) \\ &= x_d(t) + jx_q(t) \end{aligned}$$

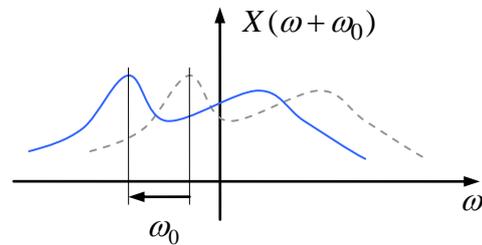
mit

with

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(-\omega_0 t) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}(-\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$



Spectrum in stator-fixed  $\alpha / \beta$ - coordinates



Spectrum in rotating  $d/q$ - coordinates

Das Spektrum wird bei einer Transformation in ein mit  $\omega_0$  rotierendes Bezugssystem folglich genau um  $\omega_0$  verschoben. Insbesondere erscheint ein Frequenzanteil an der Stelle  $\omega = \omega_0$  im Spektrum der ständerfesten Größen im Spektrum im mitdrehenden Bezugssystem nun an der Stelle  $\omega = 0$ , also als Gleichgröße.

Insofern lassen sich die Frequenzen im Spektrum nicht nur als *Schwingungen* mit positiven oder negativen Frequenzen deuten, sondern ein Anteil mit einer positiven Frequenz entspricht einem im mathematisch positiven Sinne *rotierenden Vektor* oder Zeiger, eine negative Frequenz einem im Gegensinn rotierenden Vektor.

Bezieht man sich auf eine Frequenz  $\omega_0$ , so nennt man den Frequenzanteil an der Stelle  $\omega = +\omega_0$  den *mitdrehenden* (engl. *positive sequence*), denjenigen bei  $\omega = -\omega_0$  den *gedrehenden* Anteil (*negative sequence*).

In consequence, a transformation into a reference frame rotating with speed  $\omega_0$  leads to a frequency shift of the spectrum by exactly  $\omega_0$  (see above figure). In particular, the frequency component at  $\omega = \omega_0$  in the spectrum of the stator-fixed quantities now appears as a DC-quantity at  $\omega = 0$  in the spectrum of the rotating reference system.

That way, the frequencies in the spectrum can not only be interpreted as *oscillations* with positive or negative frequencies: A positive frequency component corresponds to a rotating vector in the mathematically positive sense, a negative frequency corresponds to a vector rotating in the opposite direction.

When referring to a frequency  $\omega_0$ , the frequency component at the point  $\omega = +\omega_0$  is referred to as the *positive sequence* component, the one at  $\omega = -\omega_0$  is referred to as the *negative sequence* component, accordingly.

## 11 Deutsch-englisches Glossar German-English Glossary

Abtastung	sampling
Admittanz	admittance
Anker	armature
Ankerrückwirkung	armature reaction
Anlaufdrehmoment	stall torque
Anschluss	terminal
Antrieb	drive
Arbeit	work
Asynchronmotor	induction motor, asynchronous motor
Bandbreite	bandwidth
Blindleistung	reactive power
Bodediagramm	Bode plot
Drehmoment	torque
Drehstrommotor	three-phase motor
Drehung	rotation
Drehzahl	rotational speed, speed
Dreieckschaltung	delta connection
Drossel	inductor
Durchflutung	magnetomotive force (MMF)
Effektivwert	root mean square (RMS) value
elektrische Feldstärke	electric field strength
elektromotorische Kraft	electromotive force (EMF)
Elektrotechnik	electrical engineering
Energie	energy
Entkopplung	decoupling controller
Erregung	excitation
Feld	field
Flussschwächung	flux weakening
Formfaktor	waveform factor
fremderregt	separately excited
Frequenz	frequency
Getriebe	gear
Gleichrichter	rectifier
Gleichspannung	direct voltage, DC voltage
Gleichstrom	direct current, DC
Gleichstrommotor	DC motor
Hauptinduktivität	mutual inductance
Hochsetzsteller	boost converter
Impedanz	impedance
Induktivität	inductance
induzierte Spannung	induced voltage
Istwert	actual value

Käfigläufer	squirrel cage rotor
Kapazität	capacity
Knoten	node
Kondensator	capacitor, condensor
Kapazität	capacity
Kraft	force
Kurzschluss	short circuit
Kurzschlussstrom	short-circuit current
Ladung	charge
Last	load
Leerlaufspannung	open-circuit voltage, off-load voltage
Leistung	power
Leistungsfaktor	power factor
Leitwert	conductance, conductivity
Losbrechdrehmoment	stall torque
Magnet	magnet
magnetische Feldstärke	magnetic force
magnetische Flussdichte	magnetic flux density
magnetische Spannung, Durchflutung	magnetomotive force (MMF)
magnetischer Fluss	magnetic flux
Magnetisierungsstrom	magnetizing current
Masche	mesh
Mittelwert	mean, average value
Mittelwertmodellierung	state-space averaging
Nennwert	rated value, rating
Netzwerk	network
Ortskurve	frequency response locus
Parallelschaltung	parallel connection
Permanentmagnet-Synchronmotor	permanent magnet synchronous motor
Polpaar	pole pair
Polteilung	pole pitch
Pulsweitenmodulation	pulse width modulation (PWM)
Quelle	source
Regelfehler	control error
Regelkreis	closed-loop control
Regler	controller
Reihenschaltung	series connection
Resonanzfrequenz	resonant frequency
Rotor, Läufer	rotor
Schalter	switch
Schaltkreis	circuit
Scheinleistung	apparent power
Scheitelfaktor	crest factor
Schlupf	slip
Sehnung	fractional pitch winding
Sollwert	set point, reference value
Spannung	voltage

---

Spannungsquelle	voltage source
Spule	coil
Stator, Ständer	stator
Stellbefehl	firing command
Stellgröße	actuating variable
Sternschaltung	star connection
Streuinduktivität	leakage inductance
Strom	current
Stromquelle	current source
Stromschwankung	current ripple
Tiefsetzsteller	buck converter
Totzeit	dead time
Transformator	transformer
Übertragungsfunktion	transfer function
Vektormodulation	vector modulation
Verlustleistung	losses
Vorsteuerung	feedforward control
Wechselrichter	inverter
Wechselspannung	alternating voltage, AC voltage
Wechselsperrzeit	interlocking time
Wechselstrom	alternating current, AC
Welle	shaft
Wicklung	winding
Wicklungsfaktor	winding factor
Widerstand	resistance, resistor
Windung	turn
Winkelgeschwindigkeit	angular velocity
Wirkleistung	active power
Wirkungsgrad	efficiency
Zeitkonstante	time constant

---

## 12 Literatur Bibliography

Dierk Schröder  
Elektrische Antriebe – Grundlagen  
Springer Verlag, 3. Aufl., 2007

*Ein sehr umfangreiches reichhaltiges Buch (mehr als 700 Seiten), welches verschiedenste Systeme elektrischer Antriebe anspricht. Sehr gute Darstellung, sehr zu empfehlen.*

John Chiasson  
*Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*  
Wiley, 2005

*Ein sehr umfangreiches, reichhaltiges Buch, welches, wie der Titel verspricht, sich ausgiebig mit der Modellierung und der Regelung elektrischer Maschinen auseinandersetzt*

Werner Leonhard  
*Control of Electrical Drives*  
Springer, 3rd edition, 2001

*Hier werden die Grundprinzipien der flussorientierten Regelung für Antriebe mit Synchron- und Asynchronmotoren dargestellt*

Duane Hanselman  
*Brushless Permanent Magnet Motor Design*  
The Writers' Collective, 2nd edition, 2003

*Ein interessantes Buch, welches sich ausgiebig mit Wicklungsschemata und den daraus resultierenden Motoreigenschaften beschäftigt, was in anderen Büchern kaum zu finden ist.*

Rudolf Richter  
Elektrische Maschinen I  
Birkhäuser Verlag, 3. Auflage, 1967

*Ein klassisches Buch über elektromaschinenbauliche Aspekte und das Betriebsverhalten, welches zahlreiche Details liefert, die in modernen Darstellungen kaum noch zu finden sind.*

Gerhard Müller, Bernd Ponick  
Grundlagen elektrischer Maschinen  
Wiley-VHC, 9. Auflage, 2006

Gerhard Müller, Bernd Ponick  
Theorie elektrischer Maschinen  
Wiley-VHC, 4. Auflage

W. Nürnberg,  
Die Asynchronmaschine  
2. Auflage, Springer, 1962