

Elektrische Antriebstechnik

Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Skript zur Vorlesung

Stand vom 21.01.2020

Universität Paderborn

Fachgebiet Leistungselektronik und
Elektrische Antriebstechnik

Inhalt

1	Einleitung	5
2	Antriebstechnische Begriffe und Grundlagen	6
2.1	Grundbegriffe	6
2.2	Trägheitsgesetz	8
2.3	Antriebstechnische Aufgabenstellungen	10
2.4	Drehmoment- und Drehzahlanpassung	11
2.4.1	Getriebe	11
2.4.2	Translatorisch-rotatorische Anpassung	12
2.4.3	Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe für einen Arbeitspunkt	12
2.4.4	Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe für einen Arbeitsbereich	16
2.4.5	Getriebebemessung für reine Beschleunigungsvorgänge	18
2.4.6	Getriebebemessung für Beschleunigungsvorgänge mit Lastdrehmoment	23
2.4.7	Getriebebemessung für durchlaufenden Betrieb und Beschleunigungsvorgänge	26
2.5	Lastkennlinien	27
2.5.1	Trockene Reibung	27
2.5.2	Viskose Reibung	28
2.5.3	Lüfter	29
2.5.4	Wickler, Haspel	30
2.5.5	Traktionsantrieb	32
2.6	Schwingungsfähiger Antriebsstrang	34
3	Gleichstrommotor	38
3.1	Wirkprinzip	38
3.2	Aufbau	39
3.3	Kommutator und Ankerwicklungsschemata	41
3.4	Kommutierung und Wendepolwicklung	42
3.5	Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung	46
3.6	Mathematische Modellierung	47
3.7	Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad	50
3.8	Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen	50
3.9	Fremderregter und permanent erregter Motor	51
3.10	Nebenschlussmotor	55
3.11	Reihenschlussmotor	56
3.12	Geregelter Betrieb	59
3.13	Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen	66
4	Gleichstromsteller	70
4.1	Tiefsetzsteller	70
4.1.1	Funktionsprinzip	70
4.1.2	Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung	75
4.1.3	Schaltungstechnische Realisierung	77

4.1.4	Lücken beim Tiefsetzsteller	78
4.2	Hochsetzsteller	82
4.2.1	Funktionsprinzip	82
4.2.2	Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung	83
4.2.3	Schaltungstechnische Realisierung	84
4.2.4	Lücken beim Hochsetzsteller	85
4.3	Weitere aus dem Tiefsetzsteller abgeleitete Schaltungen	87
4.3.1	Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Stromrichtung	87
4.3.2	Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Spannungsrichtung	88
4.3.3	Vier-Quadranten-Steller	89
5	Fremdgeführte Umrichter	90
5.1	Thyristor-Mittelpunkt- und Brückenschaltungen	90
5.2	Umkehrstromrichter	93
5.3	Wechselspannungssteller	95
6	Wechselstromtransformatoren	99
6.1	Modellierung von Transformatoren mit Streuung	99
6.2	Dynamische Gleichungen und elektrisches Ersatzschaltbild	102
6.3	Transformation der Sekundärgrößen	103
6.3.1	Transformation der sekundärseitigen Größen auf die Primärseite im Verhältnis der Windungszahlen	104
6.3.2	Transformation auf eine primärseitig konzentrierte Streuung	105
6.3.3	Transformation auf eine sekundärseitig konzentrierte Streuung	106
7	Drehstromtransformatoren	108
7.1	Darstellung mit Wechselstromtransformatoren	108
7.2	Fünf- und Drei-Schenkel-Drehstromtransformator	108
7.3	Stern-Dreieck-Schaltung	111
7.4	Ersatzschaltbilder des Drehstrom-Transformators	113
7.5	Bezeichnungen und Schaltzeichen	114
8	Asynchronmotoren	115
8.1	Aufbau	115
8.2	Modellierung und Ersatzschaltbild	115
8.3	Kurzschluss-Asynchronmotor	118
8.4	Drehmoment	119
8.5	Stromortskurve	126
8.6	Wechselstrom-Asynchronmotor	128
8.6.1	Spaltpolmotor	128
8.6.2	Kondensatormotor	131
9	Synchronmaschinen	133
10	Thermisches Verhalten	140

10.1	Grundlagen der Wärmeleitung	140
10.2	Betriebsarten	145
10.3	Detaillierte Wärmeleitungsmodelle	151
11	Lebensdauer	155
12	Anhang: Begriffe und Tabellen für elektrische Betriebsmittel	167
12.1	Spannungsklassen	167
12.2	Schutzklassen	167
12.3	Schutzarten	168
12.4	Betriebsarten	168
12.5	Isolierstoffklassen für Motoren	169
12.6	Phasenfolge, Rechts- und Linkslauf	169
13	Größengleichungen vs. Zahlenwertgleichungen	171
14	Literatur	173

1 Einleitung

Elektrische Antriebe werden heute für vielfältige Funktionen eingesetzt:

- Förderantriebe (Rollgänge, Gurtförderer, Umlaufförderer, usw.)
- Hubantriebe (Krane, Aufzüge, Hubtische, Regalbediensysteme usw.)
- Fahrtriebe (Bahnen, Straßenfahrzeuge, Flurförderfahrzeuge usw.)
- Positionierantriebe (Bestückungs- und Montageautomaten, Werkzeugwechsler, Medizintechnik usw.)
- Roboter
- Gleichlaufantriebe (Transportieren, Bandbehandlungsanlagen für Blech, Papier, Folien, Textilien, Fäden, Drähte, Seile usw.)
- Wickelantriebe
- Taktantriebe (Querschneider, fliegende Scheren, usw.)
- Synchrone Bewegungsführung („Königswelle“ und „elektronische Kurvenscheiben“: Schneiden, Stanzen, Kleben, Schweißen, Verformen, Verpacken, Sortieren)
- Umformen (Extruder für Kunststoffe, Aluminium, Lebens- und Futtermittel, Spritzen, Ausblasen, Pressen, Tiefziehen, Rütteln, Schleudern)
- Werkzeugantriebe (für Metall, Holz, Stein, Glas, Papier, Kunststoffe usw.)
- Pumpen, Lüfter, Kompressoren
- Küchengeräte
- Kleinantriebe (CD-Laufwerke, Sitzverstellung usw.)

Man schätzt, dass etwa 60% der gesamten elektrischen Energie letztendlich in elektrischen Antrieben genutzt wird. Elektrische Antriebe werden gegenüber anderen Antriebsarten (hydraulisch, pneumatisch) aufgrund ihrer hervorragenden Steuerbarkeit bevorzugt. Diese Steuerbarkeit von Drehmoment, Drehzahl oder Position kommt durch die Speisung eines Motors als elektromechanischer Energiewandler durch eine steuerbare Leistungselektronik zustande.

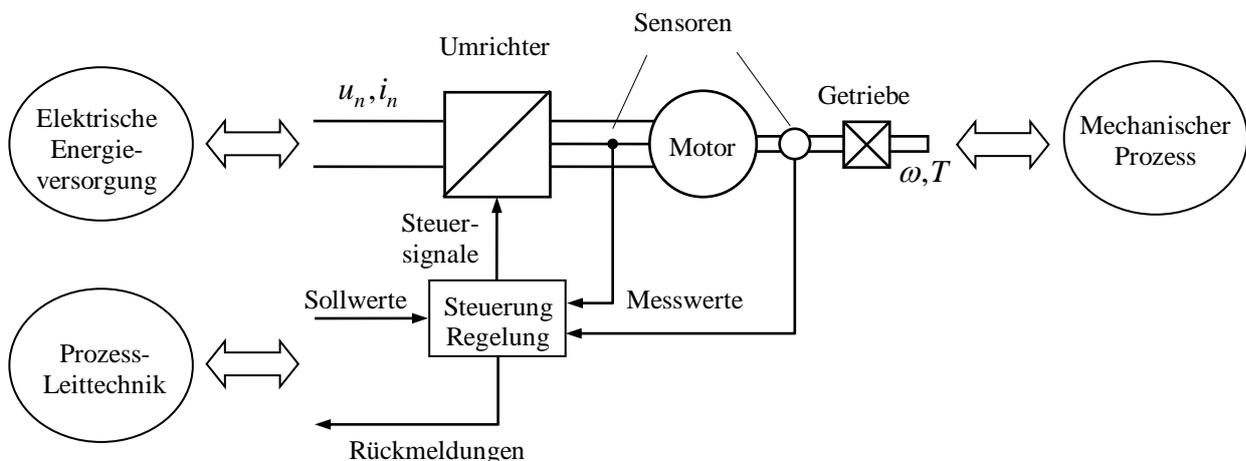


Bild 1-1: Typische Struktur eines elektrischen Antriebs mit seinen Schnittstellen zur elektrischen Energieversorgung, zum anzutreibenden mechanischen Prozess und zur übergeordneten Prozessleittechnik

2 Antriebstechnische Begriffe und Grundlagen

2.1 Grundbegriffe

Der Motor als elektrisch-mechanischer Wandler:

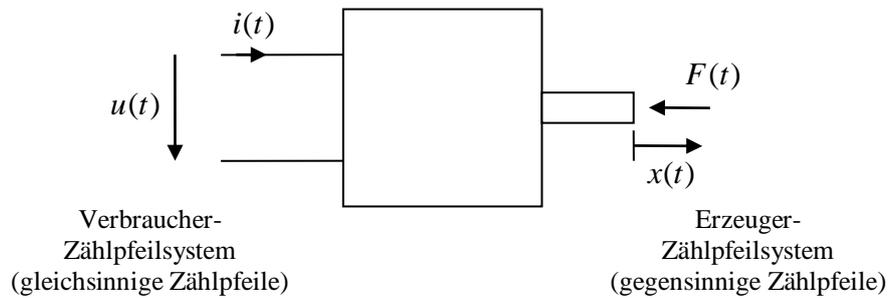


Bild 2-1: Elektrisch und mechanisch freigeschnittener translatorischer Wandler mit einem Freiheitsgrad

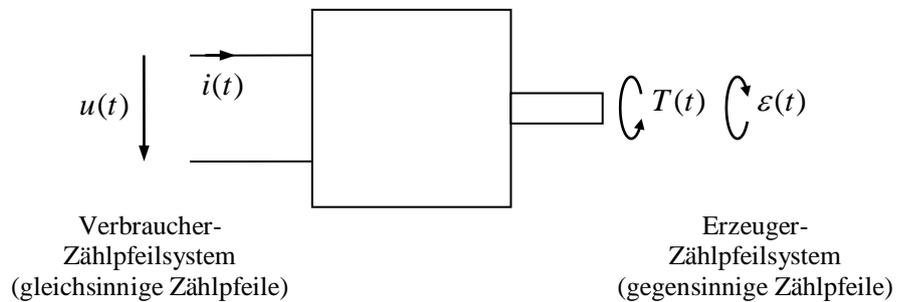


Bild 2-2: Elektrisch und mechanisch freigeschnittener rotatorischer Wandler mit einem Freiheitsgrad

	Translatorisch	rotatorisch
Kinematische Größen ¹		
• Verschiebung, Winkel	x	ε
• Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	$\omega = \dot{\varepsilon}$
• Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varepsilon}$
• Ruck	$r = \dot{a} = \ddot{v} = \ddot{\ddot{x}}$	$\rho = \dot{\alpha} = \ddot{\omega} = \ddot{\varepsilon}$
Dynamische Größen ²		
• Kraft, Drehmoment	F	T
mechanische Leistung	$P_{\text{me}} = vF$	$P_{\text{me}} = \omega T$
Arbeit	$W[t_0, t] = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau$	$W[t_0, t] = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau$
Masse, Massenträgheitsmoment	m	J
Impuls, Drehimpuls	$p = mv$	$D = \omega J$
kinetische Energie	$E = \frac{1}{2} mv^2$	$E = \frac{1}{2} J\omega^2$

Leistungsbilanz des Wandlers:

$$P_{\text{el}} = P_{\text{me}} + \dot{E}_i + P_i \quad (2.1)$$

wobei $P_{\text{el}} = ui$ die zugeführte elektrische Leistung, E_i die im Wandler gespeicherte innere Energie und P_i die im Wandler in andere Energieformen (Wärme) umgesetzte Leistung ist. P_i sind also die Verluste des Wandlers.

Der Wirkungsgrad wird üblicherweise nur für den stationären Betrieb definiert, also für $\dot{E}_i = 0$. Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis von genutzter zu eingesetzter Leistung. Für den Fall des Antriebs betrachten wir die mechanische Leistung als Nutzleistung. Dann ist

$$\eta_{\text{mot}} = \frac{P_{\text{me}}}{P_{\text{el}}} = 1 - \frac{P_i}{P_{\text{el}}} \quad (2.2)$$

Wird der Wandler zum Zwecke der Erzeugung elektrischer Energie eingesetzt, also als Generator, wird der Wirkungsgrad entsprechend zu

$$\eta_{\text{gen}} = \frac{P_{\text{el}}}{P_{\text{me}}} = 1 - \frac{P_i}{P_{\text{me}}} \quad (2.3)$$

definiert.

¹ die *Kinematik* ist die Lehre der Bewegung, ohne dass dabei die Ursachen der Bewegungen ergründet werden

² im ursprünglichen engen Wortsinn ist die *Dynamik* die Lehre von den Wirkungen der Kräfte, griechisch *δύναμις* = Kraft

2.2 Trägheitsgesetz

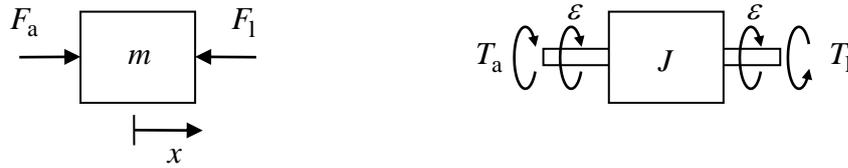


Bild 2-3:

Newton'sches Trägheitsgesetz:

$$\dot{p} = m\dot{v} = F_a - F_l \quad (2.4)$$

$$\dot{D} = J\dot{\omega} = T_a - T_l \quad (2.5)$$

Im stationären Fall gilt

$$F_a = F_l \quad (2.6)$$

bzw.

$$T_a = T_l \quad (2.7)$$

Arbeit:

$$W[t, t_0] = \int_{t_0}^t P d\tau = \int_{t_0}^t Fv d\tau = \int_{x_0}^x F dx \quad (2.8)$$

bzw.

$$W[t, t_0] = \int_{t_0}^t P d\tau = \int_{t_0}^t T\omega d\tau = \int_{x_0}^x T d\epsilon \quad (2.9)$$

Begriffe Arbeit vs. Energie:

Arbeit ist eine kumulierte (mathematisch: aufintegrierte) Leistung „Leistung mal Zeit“ oder „Kraft mal Weg“. Die mathematische Darstellungsform einer Arbeit ist typischerweise ein Integral über ein *Zeitintervall*.

Energie ist dagegen ein in einem System innewohnendes Potenzial. Sie ist von anderen Systemzuständen abhängig. Ihre mathematische Form ist die einer Funktion von Zustandstandsvariablen zu einem *Zeitpunkt*. Allein aufgrund der äußerlichen mathematischen Form lassen sich Energie und Arbeit also bereits unterscheiden. Beispiele für Energien:

Potenzielle Energie einer gespannten Feder, kinetische Energie einer translatorisch oder rotatorisch bewegten Masse, magnetische Energie einer Spule.

Arbeit kann gleich Energie sein. Beispielsweise ist die zur Beschleunigung einer Masse aufzuwendende Arbeit gleich der kinetischen Energie zum Ende der Beschleunigung. In diesem Fall lässt sich das Arbeitsintegral auflösen (wir sagen, es sei *integrierbar*) und in eine Zustandsfunktion überführen.

Trotz vieler (schlechter) Beispiele in der Literatur, ist es begrifflich also falsch, z.B. die an einem Reibungsvorgang geleistete Arbeit als Reibungsenergie oder Bremsenergie zu bezeichnen.

2.3 Antriebstechnische Aufgabenstellungen

Eine Form der Kategorisierung antriebstechnischer Aufgabenstellung orientiert sich an der Frage, ob die mechanische Positionierung oder die Bereitstellung mechanischer Leistung im Vordergrund steht:

Positionierungsaufgaben oder Führung einer gewünschten Bewegung

Beispiele:

- Roboter für die Fertigungsautomatisierung (Schweißen, Lackieren, usw.)
- Positionieren und Führen von Werkzeugen und Werkstücken z.B. in Fräsmaschinen oder komplexen Bearbeitungszentren
- Positionierung eines Schreib-Lese-Kopfes einer Festplatte oder eines CD-Laufwerks
- ...

Bereitstellung mechanischer Antriebsleistung

Beispiele:

- Antriebe für Pumpen und Lüfter
- Traktionsantriebe für Schienen- und Straßenfahrzeuge
- Bohrmaschinen
- Haushaltsgeräte
- Zentrifugen
- Förderbänder
-

Viele Antriebsaufgaben beinhalten allerdings Aspekte beider Kategorien. Es werden sowohl hohe Anforderungen an eine genaue Bewegung als auch große Leistungen benötigt:

- Krane, Aufzüge: Hohe Leistung während der Fahrbewegung, Präzision bei Annäherung an die Haltepositionen
- Papier- und Druckmaschinen: große Leistung bei sehr genauer Positionierung
- Walzwerke: sehr große Antriebsleistung bei sehr genauer Führung des Walzgutes
-

2.4 Drehmoment- und Drehzahlanpassung

2.4.1 Getriebe

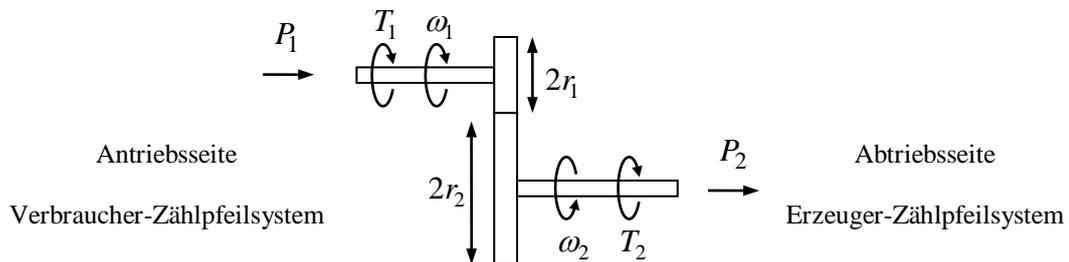


Bild 2-4: Getriebe

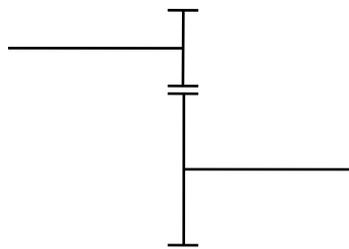


Bild 2-5: Symbolische Darstellung in der Getriebetechnik

In einigen Fällen gelingt es, elektrische Antriebe zu finden, die direkt in ihrem Drehmoment- und Drehzahlbereich zu den Erfordernissen der Last passen. In diesen Fällen sprechen wir von *Direktantrieben*. In vielen anderen Fällen werden zur Anpassung von Drehzahl und Drehmoment Getriebe notwendig. In den meisten Fällen wird es darum gehen, die typischerweise recht hohe Drehzahl des Antriebs auf eine geringere Drehzahl der Last herunterzusetzen. Getriebe können mit Zahn- oder Reibrädern ausgeführt werden. Zahnräder bilden eine *formschlüssige*, Reibräder eine *kraftschlüssige* Verbindung. Letztere ist mit Schlupf verbunden, welcher im Folgenden außer Acht bleibt.

Getriebeübersetzung:

$$i_G = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.10)$$

r_1, r_2 effektive Radien

z_1, z_2 Zahnzahlen

Bei stationärer Betrachtung bzw. bei Vernachlässigung der Getriebeträgheit und Reibung folgt für die Drehmomente

$$i_G = \frac{T_2}{T_1} \quad (2.11)$$

bzw. für die Leistungen

$$P_2 = P_1 \quad (2.12)$$

2.4.2 Translatorisch-rotatorische Anpassung

Die einfachste Art, eine rotatorische in eine translatorische Bewegung umzusetzen, ist über Seilscheiben, Rädern oder Zahnrad-Zahnstangen möglich. Es gilt

$$v = \omega r \quad (2.13)$$

bzw.

$$T = Fr \quad (2.14)$$

2.4.3 Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe für einen Arbeitspunkt

Bei durchlaufenden Antrieben können die Massenträgheiten für die Bemessung vernachlässigt werden. Ausgegangen werde zunächst von den Bemessungspunkten der Last und des Antriebs: Die angetriebene Last fordere bei einer Arbeitskreisfrequenz von $\omega_{2\text{erf}}$ das Bemessungsdrehmoment $T_{2\text{erf}}$ bzw. die Leistung

$$P_{2\text{erf}} = \omega_{2\text{erf}} T_{2\text{erf}} \quad (2.15)$$

Der Antrieb liefere dagegen bei der Frequenz $\omega_{1\text{max}}$ das Drehmoment $T_{1\text{max}}$ bzw. die Leistung

$$P_{1\text{max}} = \omega_{1\text{max}} T_{1\text{max}} \quad (2.16)$$

Dieser Bemessungspunkt sei der Eckpunkt aller möglichen Betriebspunkte des Antriebs (Beschränkung auf den motorischen Fall):

$$T_1 \leq T_{1\text{max}}, \quad \omega_1 \leq \omega_{1\text{max}}$$

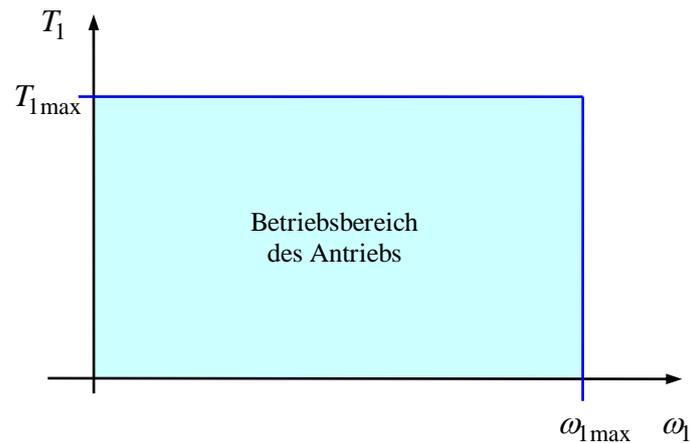


Bild 2-6: Betriebsbereich eines Antriebs

Voraussetzung für die weitere Auslegung ist, dass der Antrieb über eine Leistungsreserve verfügt, wenigstens aber den Leistungsbedarf der Last aufbringt:

$$P_{1\max} \geq P_{2\text{erf}}$$

Unter Vernachlässigung der Getriebeverluste lassen sich nun zwei Übersetzungsverhältnisse finden, zum einen aus dem Verhältnis der Drehmomente, zum anderen aus dem Verhältnis der Drehzahlen:

$$i_{G1} = \frac{T_{2\text{erf}}}{T_{1\max}}, \quad i_{G2} = \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\text{erf}}} \quad (2.17)$$

Jedes Getriebeübersetzungsverhältnis i_G im Intervall

$$i_{G1} \leq i_G \leq i_{G2}$$

stellt eine mögliche Getriebeauslegung dar.

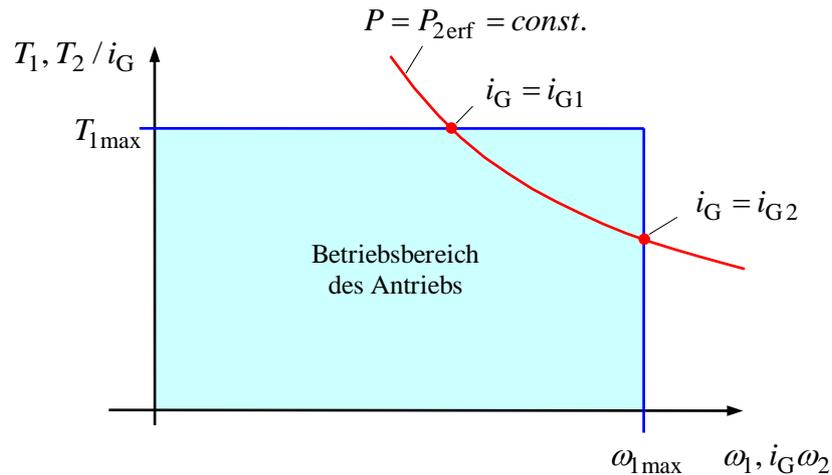


Bild 2-7: Betriebspunkt der Last innerhalb des Betriebsbereichs eines Antriebs bei verschiedenen Getriebeanpassungen

Die Auslegung $i_G = i_{G2}$ führt zur größtmöglichen Reserve im Drehmoment, hat aber keinerlei Reserve in der Drehzahl. Umgekehrt führt die Auslegung $i_G = i_{G1}$ zu größtmöglicher Drehzahlreserve, die aber nur dann genutzt werden kann, wenn das Lastdrehmoment mit steigender Drehzahl nicht noch weiter ansteigt, da keine Drehmomentreserve mehr vorhanden ist. Die Wahl einer kleinen Übersetzung in der Nähe von i_{G1} ist insbesondere dann von Vorteil, wenn beim Getriebe eine Übersetzungsstufe eingespart werden kann und dadurch ein kleineres und kostengünstigeres Getriebe verwendet werden kann.

Jede der Getriebeauslegungen $i_{G1} \leq i_G \leq i_{G2}$ führt nicht nur im betrachteten Bemessungspunkt, sondern im gesamten Drehzahlbereich zu einer geeigneten Anpassung sofern gewährleistet ist, dass die Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik der Last eine monoton steigende Kennlinie aufweist.

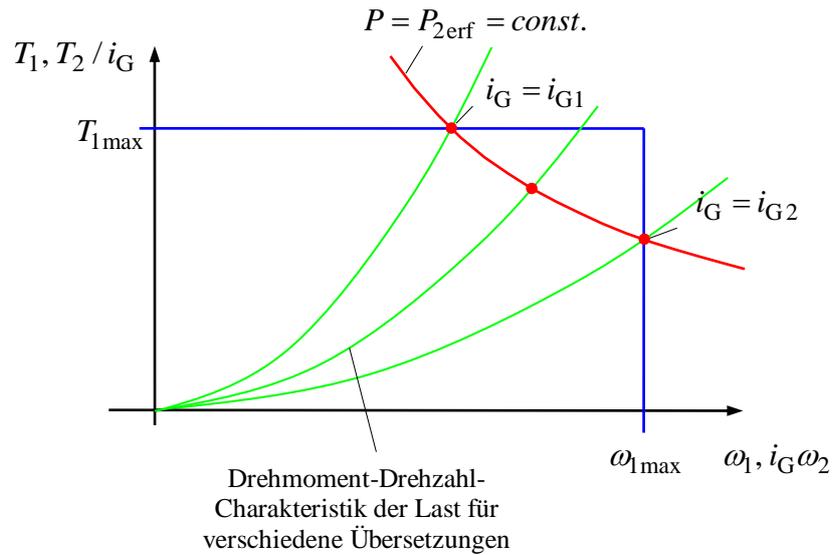


Bild 2-8: Charakteristische Lastkennlinie innerhalb des Betriebsbereichs eines Antriebs bei verschiedenen Getriebeanpassungen

Um die Leistungsreserve des Antriebs oberhalb des Last-Bemessungspunkts optimal nutzen zu können, sollte der Punkt

$$P_{2\max} = P_2(\omega_{2\max}) = P_{1\max} \quad (2.18)$$

bestimmt und aus der daraus ermittelten Geschwindigkeit $\omega_{2\max}$ Punkt die Getriebeübersetzung

$$i_{G\text{opt}} = \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\max}} \quad (2.19)$$

gewählt werden. Für den Spezialfall einer linearen Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik der Last ergibt sich

$$i_{G\text{opt}} = \sqrt{i_{G1}i_{G2}} = \sqrt{\frac{T_{2\text{erf}}}{T_{1\max}} \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\text{erf}}}} \quad (2.20)$$

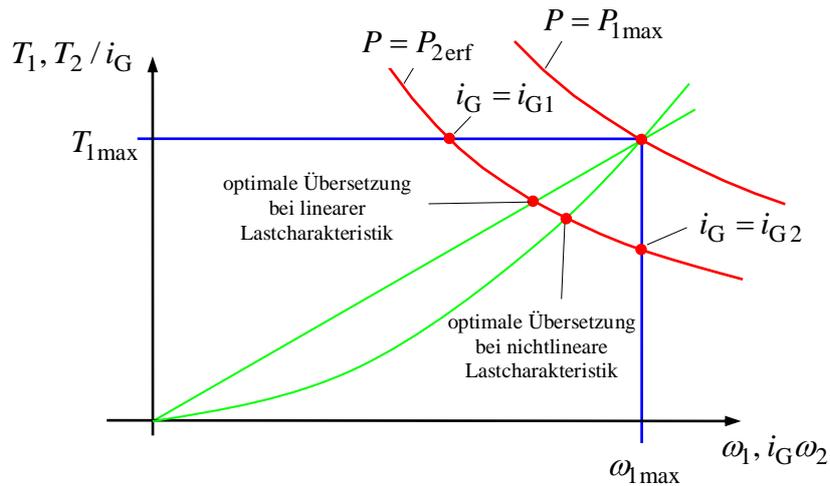


Bild 2-9:

2.4.4 Getriebebemessung für durchlaufende Antriebe für einen Arbeitsbereich

Häufig ist der Arbeitsbereich eines elektrischen Antriebs nicht nur durch ein maximales Drehmoment und eine maximale Drehzahl, sondern zusätzlich auch durch eine maximale Leistung charakterisiert, welche kleiner ist als das Produkt von maximalem Drehmoment und maximaler Drehzahl.

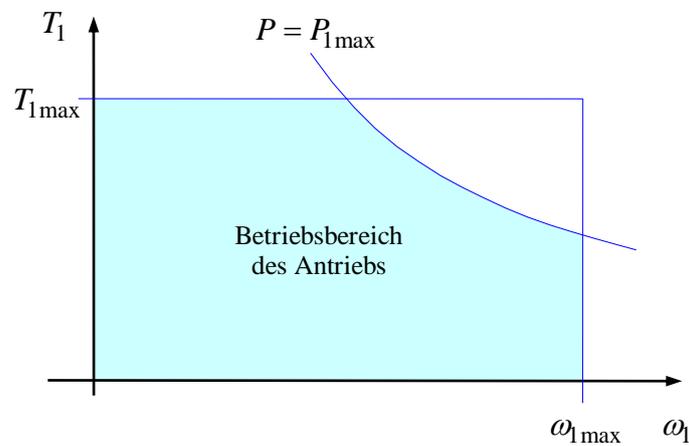


Bild 2-10: Beschränkung von Drehmoment, Drehzahl und Leistung des Antriebs

Dementsprechend ist die Last ggf. nicht nur durch einen einzigen stationären Arbeitspunkt wie im vorangegangenen Abschnitt, sondern durch mehrere Arbeitspunkte oder durch einen Arbeitsbereich charakterisiert:

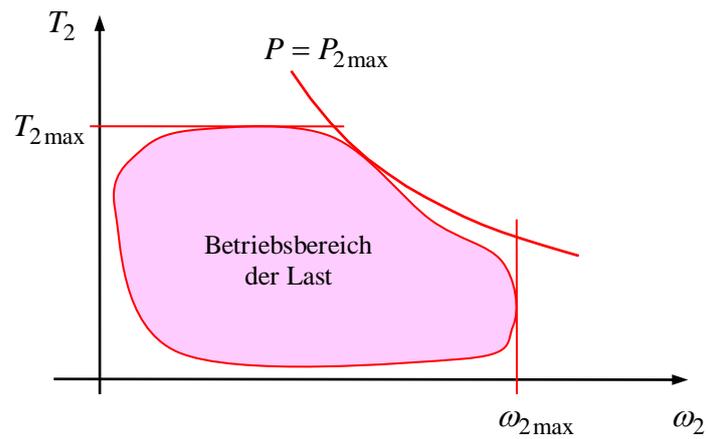


Bild 2-11: Betriebsbereich der Last

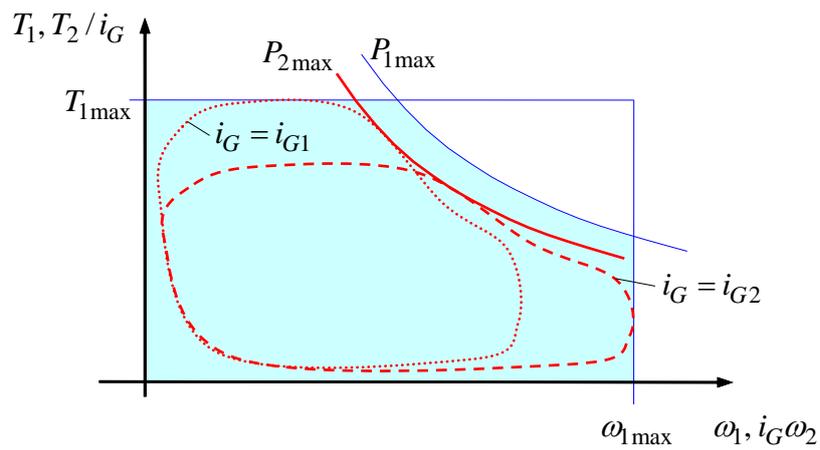


Bild 2-12: Anpassung der Betriebsbereiche von Last und Antrieb für zwei verschiedene Übersetzungsverhältnisse, dargestellt im Drehmoment-Drehzahl-Bereich des Antriebs

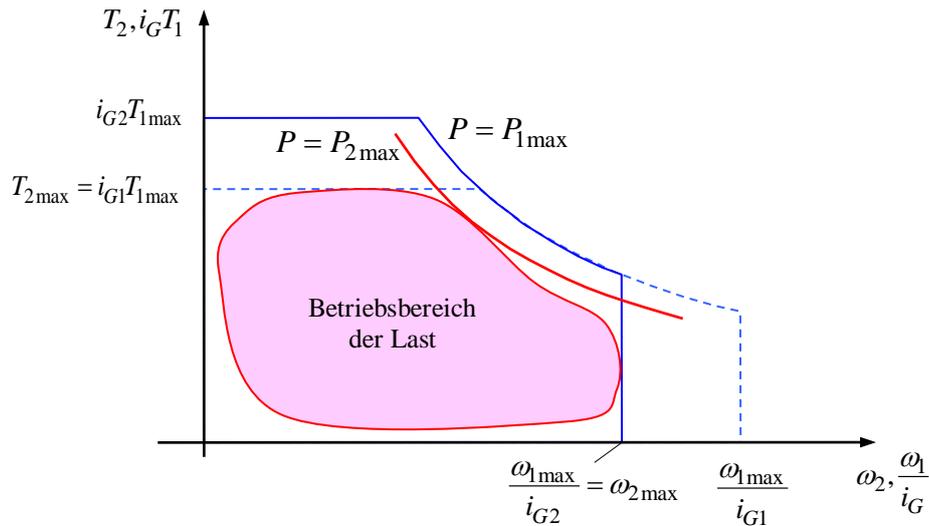


Bild 2-13: Anpassung der Betriebsbereiche von Last und Antrieb für zwei verschiedene Übersetzungsverhältnisse, dargestellt im Drehmoment-Drehzahl-Bereich der Last

$$i_{G1} = \frac{T_{2\max}}{T_{1\max}} \quad (2.21)$$

$$i_{G2} = \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\max}} \quad (2.22)$$

2.4.5 Getriebemessung für reine Beschleunigungsvorgänge

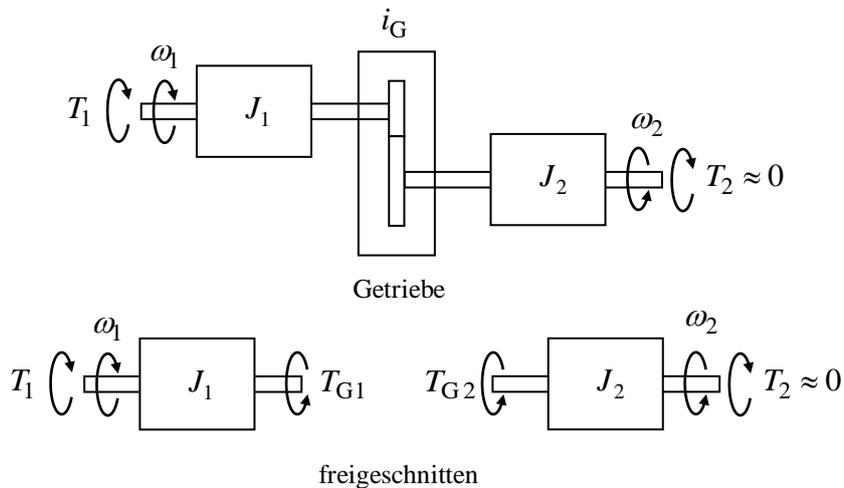


Bild 2-14: Modell des Antriebsstrangs für die Bemessung des Beschleunigungsantriebs

Für diesen Fall soll vereinfachend angenommen werden, dass das Antriebsdrehmoment nur zur Beschleunigung der beteiligten Massenträgheiten dient und dass keine weiteren Last-

Drehmomente berücksichtigt werden müssen, also $T_2 = 0$. Seien J_1 und J_2 die Massenträgheitsmomente von Motor und Last, lauten die Differenzialgleichungen für die Winkelbeschleunigungen

$$J_1 \dot{\omega}_1 = T_1 - T_{G1} \quad (2.23)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = T_{G2} = i_G T_{G1} \quad (2.24)$$

Auflösen der ersten Gleichung nach T_{G1} und Einsetzen liefert

$$J_2 \dot{\omega}_2 = i_G T_{G1} = i_G T_1 - i_G J_1 \dot{\omega}_1 = i_G T_1 - i_G^2 J_1 \dot{\omega}_2$$

$$(i_G^2 J_1 + J_2) \dot{\omega}_2 = i_G T_1$$

$$\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{i_G}{i_G^2 J_1 + J_2} T_1 \quad (2.25)$$

Der Term

$$J'_1 = i_G^2 J_1 \quad (2.26)$$

ist die auf die Lastseite umgerechnete effektive Motorträgheit. Die Frage nach dem größtmöglichen Beschleunigungsvermögen führt nun auf die Extremwertaufgabe

$$0 = \frac{d\alpha_2}{di_G} = T_1 \frac{i_G^2 J_1 + J_2 - i_G 2i_G J_1}{(i_G^2 J_1 + J_2)^2}$$

$$i_G^2 J_1 = J_2$$

und zur Bestimmung der beschleunigungsoptimalen Getriebeübersetzung

$$i_{G \text{ opt}} = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \quad (2.27)$$

In diesem Fall sind die auf eine Getriebeite umgerechneten Drehträgheiten gleich, also

$$J'_1 = J_2$$

Bei gegebenem Antriebsdrehmoment T_1 ergibt sich bei optimaler Getriebeübersetzung also eine Lastbeschleunigung von

$$\alpha_{2 \text{ opt}} = \frac{T_1}{2\sqrt{J_1 J_2}} \quad (2.28)$$

Das notwendige maximale Antriebsdrehmoment $T_{1\max}$ ergibt sich demnach über diese Formel aus der gewünschten Lastbeschleunigung $\alpha_{2\max}$. Zunächst führen wir aber nun als Antriebs-Kenngröße das *Beschleunigungsvermögen*

$$D_{1\max} = \frac{T_{1\max}^2}{J_1} \quad (2.29)$$

ein (auch als *dynamisches Leistungsvermögen* bzw. *power rate* bezeichnet). Diese Kenngröße ist nur von den Parametern des Antriebs, nicht von der Last abhängig. Interessanterweise ist diese Größe ähnlich wie die Leistung invariant gegenüber einer Umrechnung über das Getriebe-Übersetzungsverhältnis, da sich beide Größen des Quotienten mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses transformieren. Damit lässt sich nun die Lastbeschleunigung bei optimaler Übersetzung als

$$\alpha_{2\text{optmax}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_{1\max}}{J_2}} \quad (2.30)$$

ausdrücken. Auch der Beschleunigungsbedarf der Last lässt sich durch die Kennzahl

$$D_{2\text{erf}} = 4\alpha_{2\text{erf}}^2 J_2 \quad (2.31)$$

ausdrücken. Die Anpassung des Beschleunigungsvermögens des Antriebs an den Beschleunigungsbedarf der Last lässt sich also als

$$\alpha_{2\max} = \alpha_{2\text{erf}} \quad (2.32)$$

bzw.

$$D_{1\max} = D_{2\text{erf}} \quad (2.33)$$

schreiben. Wie bei der Leistungsanpassung im Fall von durchlaufenden Antrieben wird sich meist nicht ein exakt passender Antrieb finden oder es soll ohnehin eine Beschleunigungsreserve vorgesehen werden, so dass

$$A = \frac{\alpha_{2\max}}{\alpha_{2\text{erf}}} = \sqrt{\frac{D_{1\max}}{D_{2\text{erf}}}} > 1 \quad (2.34)$$

In diesem Fall besteht wieder ein Spielraum in der Festlegung des tatsächlichen Getriebeübersetzungsverhältnisses i_G . Um diesen Spielraum zu ermitteln, soll zunächst die Gleichung für α_2 in eine auf die optimale Auslegung bezogene Form gebracht werden:

$$\alpha_2 = \frac{i_G}{i_G^2 J_1 + J_2} T_1 = \frac{1}{J_2} \frac{i_G}{i_G^2 \frac{J_1}{J_2} + 1} T_1 = \frac{T_1}{\sqrt{J_1 J_2}} \frac{i_G \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}}{i_G^2 \frac{J_1}{J_2} + 1}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_{2\text{opt}}} = 2 \frac{i_G / i_{G\text{opt}}}{(i_G / i_{G\text{opt}})^2 + 1} = \frac{2i'}{i'^2 + 1} \quad (2.35)$$

wobei

$$i' = \frac{i_G}{i_{G\text{opt}}} \quad (2.36)$$

die Abweichung von der optimalen Auslegung bezeichnet. Die Auflösung der Gleichung

$$\frac{1}{A} = 2 \frac{i'}{i'^2 + 1}$$

nach i' liefert

$$i'^2 - 2Ai' + 1 = 0$$

$$i'_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (2.37)$$

bzw.

$$i_{G3} = i_{G\text{opt}} \left(A - \sqrt{A^2 - 1} \right), \quad i_{G4} = i_{G\text{opt}} \left(A + \sqrt{A^2 - 1} \right) \quad (2.38)$$

Jede Auslegung

$$i_{G3} \leq i_G \leq i_{G4}$$

erfüllt die Beschleunigungsanforderung.

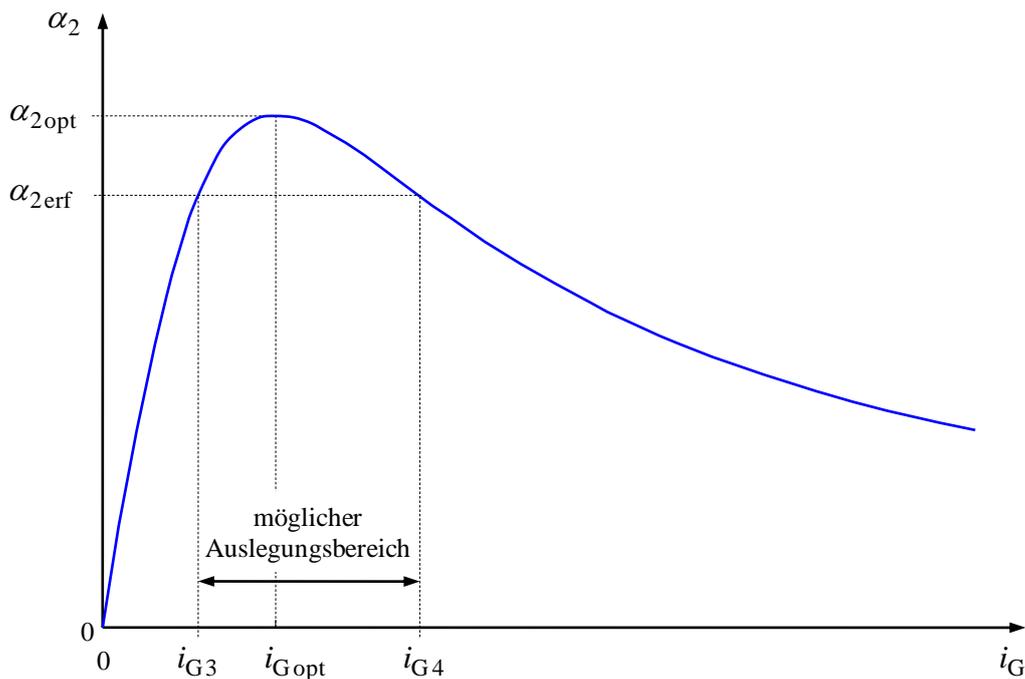


Bild 2-15: Beschleunigung in Abhängigkeit von der Getriebeübersetzung

Das oben eingeführte Beschleunigungsvermögen

$$D_{1\max} = \frac{T_{1\max}^2}{J_1} \quad (2.29)$$

soll noch näher betrachtet werden. Wie schon erwähnt, ist diese Größe invariant gegenüber einer Umrechnung von Drehmoment und Trägheit über ein Getriebeübersetzungsverhältnis. Interpretiert man in obiger Definition den Quotienten $T_{1\max} / J_1$ als Beschleunigung $\alpha_{1\max}$, die sich ergibt, wenn der Motor *ohne Last* nur seine eigene Drehträgheit beschleunigen muss, lässt sich D_{\max} als Produkt von Beschleunigung und Drehmoment,

$$D_{1\max} = \alpha_{1\max} T_{1\max} \quad (2.39)$$

schreiben. Auch diese Darstellung ist weiterhin invariant gegenüber Umrechnungen über ein Übersetzungsverhältnis. Eine weitere Interpretation des Beschleunigungsvermögens $D_{1\max}$ gewinnt man aus

$$D_{1\max} = \dot{\omega}_{1\max} T_{1\max} = \frac{d\omega_{1\max}}{dt} T_{1\max} = \frac{d(\omega_{1\max} T_{1\max})}{dt} = \frac{dP_{1\max}}{dt} = \dot{P}_{1\max} \quad (2.40)$$

Das Beschleunigungsvermögen gibt also auch an, mit welcher Änderungsrate die mechanische Leistung beim Beschleunigen ansteigt. Das erklärt die englische Bezeichnung *power rate*. Dementsprechend ist die Maßeinheit

$$[D_{1\max}] = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{W}}{\text{s}}$$

Hier wird eine wichtige Analogie sichtbar. Während bei der Bemessung für den durchlaufenden Antrieb die Leistung des Antriebs $P_{1\max}$ passend zur Last zu wählen ist, tritt bei der Auslegung des Beschleunigungsantriebs an diese Stelle die Zeitableitung der Leistung $D_{1\max} = \dot{P}_{1\max}$. Wie die Leistung selbst, die einer Bilanzgleichung gehorcht, kann auch die Änderungsrate bilanziert werden. Die vom Antrieb abgegebene Änderungsrate wird von der Trägheit der Last aufgenommen.

2.4.6 Getriebebemessung für Beschleunigungsvorgänge mit Lastdrehmoment

Wird das Lastdrehmoment T_2 nicht vernachlässigt, lauten die Gleichungen für die Beschleunigung:

$$J_1 \alpha_1 = T_1 - T_{G1} = T_1 - T_{G2} / i_G \quad (2.41)$$

$$J_2 \alpha_2 = T_{G2} - T_2 = i_G T_{G1} - T_2 \quad (2.42)$$

$$J_2 \alpha_2 = i_G T_1 - i_G J_1 \alpha_1 - T_2 = i_G T_1 - i_G^2 J_1 \alpha_2 - T_2$$

$$(i_G^2 J_1 + J_2) \alpha_2 = i_G T_1 - T_2$$

$$\alpha_2 = \frac{i_G T_1 - T_2}{i_G^2 J_1 + J_2} \quad (2.43)$$

Die Suche nach der größtmöglichen Lastbeschleunigung wird wieder über eine Extremwertbestimmung gelöst:

$$0 = \frac{d\alpha_2}{di_G} = \frac{T_1 (i_G^2 J_1 + J_2) - (i_G T_1 - T_2) 2i_G J_1}{(i_G^2 J_1 + J_2)^2}$$

$$0 = i_G^2 J_1 + J_2 - (i_G - T_2/T_1) 2i_G J_1$$

$$i_G^2 - 2 \frac{T_2}{T_1} i_G - \frac{J_2}{J_1} = 0$$

Die quadratische Gleichung hat eine positive und eine negative Lösung,

$$\tilde{i}_{G\text{opt}1,2} = \frac{T_2}{T_1} \pm \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \frac{J_2}{J_1}} \quad (2.44)$$

wobei für den normalen Fall des Antriebes nur die positive Lösung relevant ist. Auf einen Index zu Unterscheidung beider Lösungen kann also verzichtet werden:

$$\begin{aligned}\tilde{i}_{G\text{opt}} &= \frac{T_2}{T_1} + \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \frac{J_2}{J_1}} \\ &= \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \left[\sqrt{\frac{J_1 T_2^2}{J_2 T_1^2}} + \sqrt{\frac{J_1 T_2^2}{J_2 T_1^2} + 1} \right] \\ &= i_{G\text{opt}} \left[\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1} + 1} \right]\end{aligned}$$

wobei

$$D_1 = \frac{T_1^2}{J_1}, \quad D_2 = \frac{T_2^2}{J_2} \quad (2.45)$$

$$\tilde{i}_{G\text{opt}} = i_{G\text{opt}} \left[\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1} + 1} \right] \quad (2.46)$$

Die optimale Übersetzung verschiebt sich also bei zusätzlichem Lastdrehmoment im Vergleich zur unbelasteten Beschleunigung zu höheren Werten. Das Einsetzen in die Gleichung für die Lastbeschleunigung ergibt dann die optimale Beschleunigung

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{2\text{opt}} &= \frac{T_1}{2J_1} \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} + \sqrt{\frac{T_2^2}{T_1^2} + \frac{J_2}{J_1}}} \\ &= \frac{T_1^2}{2J_1 \sqrt{J_2}} \frac{1}{\frac{T_2}{\sqrt{J_2}} + \sqrt{\frac{T_2^2}{J_2} + \frac{T_1^2}{J_1}}} \\ &= \frac{D_1}{2\sqrt{J_2}} \frac{1}{\sqrt{D_2} + \sqrt{D_1 + D_2}} \\ &= \alpha_{2\text{opt}} \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2} + \sqrt{D_1 + D_2}}\end{aligned} \quad (2.47)$$

Wird der Antrieb nicht genau auf das optimale Übersetzungsverhältnis bemessen, sondern soll eine Beschleunigungsreserve vorgesehen werden, bietet sich folgendes Vorgehen an: Bei konstanter Beschleunigung kann das Lastdrehmoment in eine äquivalente zusätzliche Lastträgheit umgerechnet werden. Hierfür wird die minimale erforderliche Beschleunigung benutzt:

$$\check{J}_2 = J_2 + \frac{T_2}{\alpha_{2\text{erf}}} \quad (2.48)$$

Das erforderliche Beschleunigungsvermögen ergibt sich dann zu

$$\check{D}_{2\text{erf}} = 4\alpha_{\text{erf}}^2 \check{J}_2 = 4\alpha_{2\text{erf}} (\alpha_{2\text{erf}} J_2 + T_2) \quad (2.49)$$

Der zu wählende Antrieb muss also ein Beschleunigungsvermögen

$$D_{1\text{max}} = \frac{T_{1\text{max}}^2}{J_1} \geq \check{D}_{2\text{erf}}$$

aufweisen. Der Spielraum für die Wahl der Getriebeübersetzung bei einer Beschleunigungsreserve

$$\check{A} = \sqrt{\frac{D_{1\text{max}}}{\check{D}_{2\text{erf}}}} \quad (2.50)$$

ergibt sich wie im vorangegangenen Abschnitt zu

$$\check{i}_{G3} = \check{i}_{G\text{opt}} \left(\check{A} - \sqrt{\check{A}^2 - 1} \right), \quad \check{i}_{G4} = \check{i}_{G\text{opt}} \left(\check{A} + \sqrt{\check{A}^2 - 1} \right) \quad (2.51)$$

wobei aber

$$\check{i}_{G\text{opt}} = \sqrt{\frac{\check{J}_2}{J_1}} \quad (2.52)$$

zu verwenden ist, nicht etwa $\check{i}_{G\text{opt}}$. Durch die Verwendung einer zusätzlichen Ersatz-Trägheit statt des eigentlich vorhandenen Lastdrehmoments wird die tatsächliche Beschleunigung für $\alpha_2 > \alpha_{2\text{erf}}$ unterschätzt, für $\alpha_2 < \alpha_{2\text{erf}}$ dagegen überschätzt, da zur Beschleunigung der Ersatzträgheit mit einer Winkelbeschleunigung $\alpha_2 > \alpha_{2\text{erf}}$ ein höheres Drehmoment als das ersetzte Lastdrehmoment benötigt würde (und umgekehrt). Die Auslegung für $\alpha_2 = \alpha_{2\text{erf}}$ liefert jedoch exakte Werte (s. Bild 2-16).

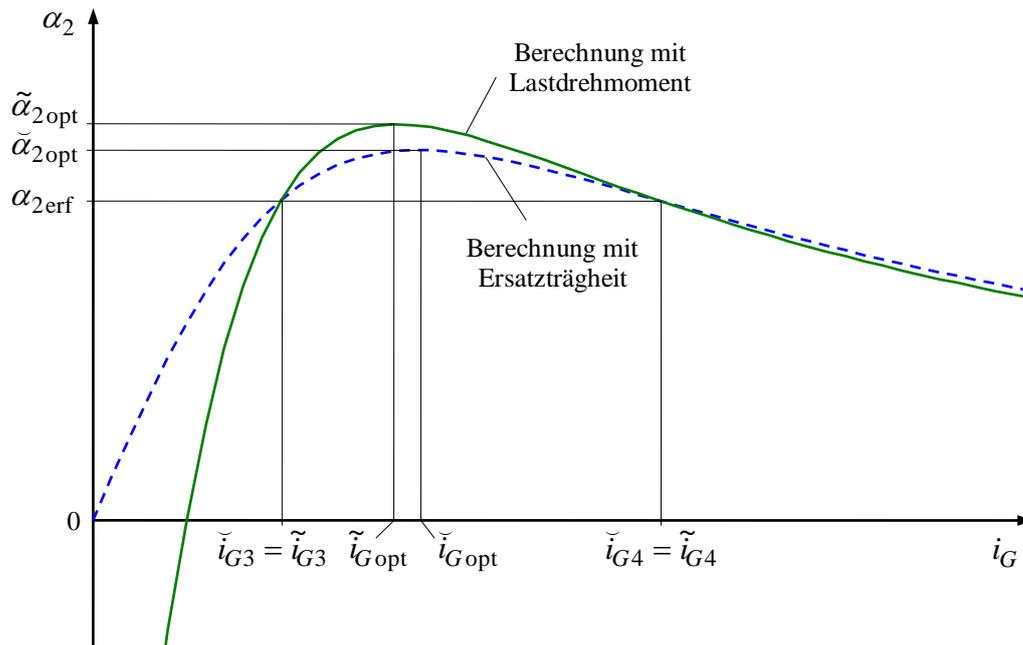


Bild 2-16: Beschleunigung in Abhängigkeit von der Getriebeübersetzung für Beschleunigungsvorgänge mit Lastdrehmoment

2.4.7 Getriebebemessung für durchlaufenden Betrieb und Beschleunigungsvorgänge

In vielen Fällen muss ein Antrieb sowohl Spezifikationen für den durchlaufenden Betrieb als auch für die Beschleunigungsphasen erfüllen. Insofern sind beide Entwurfsschritte für den durchlaufenden Betrieb als auch für Beschleunigungsvorgänge durchzuführen und zu prüfen, ob die Lösungsintervalle nicht-leere Schnittmengen aufweisen,

$$I = [i_{G1}, i_{G2}] \cap [i_{G3}, i_{G4}] \quad \text{bzw.} \quad I = [i_{G1}, i_{G2}] \cap [\tilde{i}_{G3}, \tilde{i}_{G4}] \quad (2.53)$$

Parameter der Motorauswahl sind dabei zunächst die Leistung $P_{1\max}$ und das Beschleunigungsvermögen $D_{1\max}$, die in einem ersten Entwurfsschritt möglichst mit nur geringer Reserve gewählt werden. Ergibt sich dann kein gemeinsamer Lösungsbereich für beide Anforderungen, sollte im Fall $i_{G2} < i_{G3}$ zunächst versucht werden, Motoren gleicher Leistungsdaten, aber größerer Frequenz $\omega_{1\max}$ bzw. geringeren Drehmoments $T_{1\max}$ bzw. größerer Trägheit J_1 zu wählen, im Fall $i_{G1} > i_{G4}$ umgekehrt. Führt das nicht zum Erfolg, müssen größere Reserven für Leistung und Beschleunigungsvermögen in Kauf genommen werden, wobei eine große Reserve immer auch eine Überdimensionierung darstellt, die sich in Größe und Kosten des Antriebs bemerkbar machen wird. Falls sich zu große Diskrepanzen herausstellen, müssen ggf. die Anforderungen überdacht und korrigiert werden.

2.5 Lastkennlinien

In diesem Abschnitt sollen exemplarisch einige Beispiele für das stationäre Drehmoment-Drehzahl-Verhalten verschiedener Belastungen dargestellt werden.

2.5.1 Trockene Reibung

Die trockene Reibung ist durch eine geschwindigkeitsunabhängige Reibkraft gekennzeichnet,

$$F = F_0 \operatorname{sgn}(v) \quad (2.54)$$

bzw.

$$T = T_0 \operatorname{sgn}(\omega) \quad (2.55)$$

Die von der Last aufgenommene Leistung ist

$$P = \omega T = \omega T_0 \operatorname{sgn}(\omega) = T_0 |\omega| \quad (2.56)$$

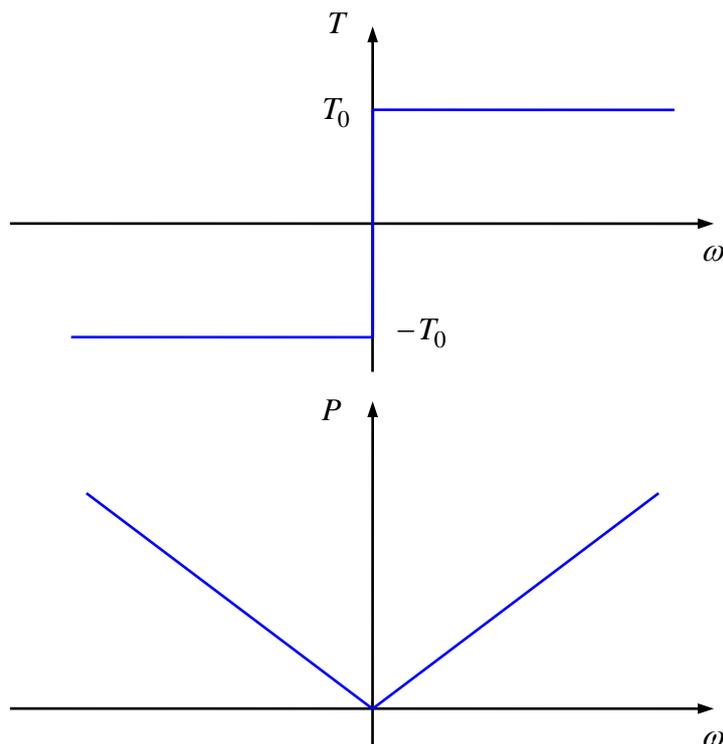


Bild 2-17: Drehmoment und Leistung für trockene Reibung

2.5.2 Viskose Reibung

Bei der viskosen Reibung sind Kraft bzw. Drehmoment proportional zur Geschwindigkeit:

$$T = D\omega \quad (2.57)$$

$$P = D\omega^2 \quad (2.58)$$

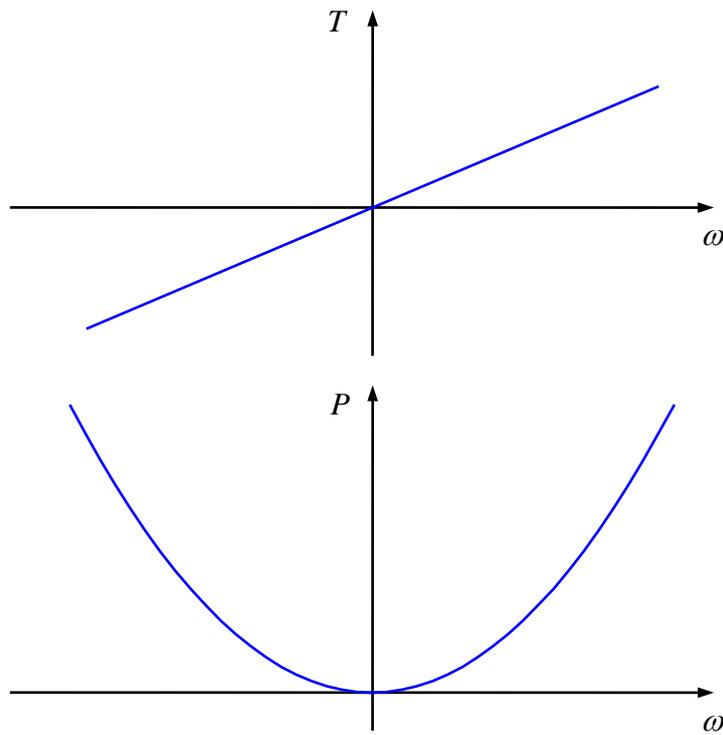


Bild 2-18: Drehmoment und Leistung für viskose Reibung

2.5.3 Lüfter

Lüfter und andere aero- und hydrodynamische Prozesse (z. B. Windwiderstand) haben quadratische Lastkennlinien:

$$T = c\omega^2 \operatorname{sgn}(\omega) \quad (2.59)$$

$$P = c|\omega^3| \quad (2.60)$$

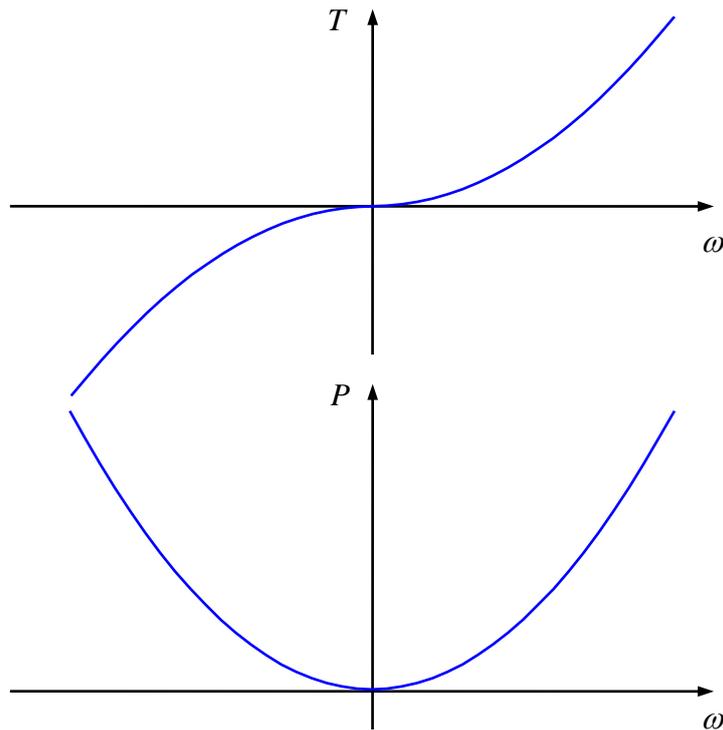


Bild 2-19: Drehmoment und Leistung für aero- und hydrodynamische Prozesse

2.5.4 Wickler, Haspel

Als Beispiel für ein etwas komplexeres System soll ein Wickler oder eine Haspel betrachtet werden, welche die Aufgabe hat, ein Band (Blech, Textil, Folie) oder einen Draht unter definiertem Zug auf- oder abzuwickeln. Der Radius der Rolle wächst im Laufe der Zeit an (bzw. reduziert sich beim Abwickeln).

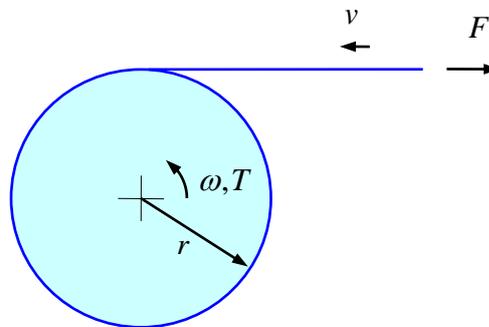


Bild 2-20: Wickler

Bei der Aufstellung der Drehimpulsbilanz ist besondere Sorgfalt geboten: Durch das Aufwickeln verändert sich das Massenträgheitsmoment J . Die Ursache dieser Änderung ist aber nicht wie bei vielen elementaren Aufgabenstellungen der Technischen Mechanik eine Formänderung einer ansonsten gleichbleibenden Masse, sondern die Zufuhr an Material. Diese Materialzufuhr ist aber auch mit einer Zufuhr an Impuls bzw. Drehimpuls verbunden. Die vollständige Drehimpulsbilanz lautet also hier ³

$$\dot{D} = \frac{d}{dt}(J\omega) = T - rF + k \quad (2.61)$$

wobei $T - rF$ die Summe der am Wickel angreifenden Drehmomente und k die materielle Zufuhr rate des Drehimpulses ist. Diese bestimmt sich für ein aufzuwickelndes Element der infinitesimalen Länge dx , welches den linearen Impuls $dp = v\rho dx$ trägt, zu

$$k = r \frac{dp}{dt} = r\rho_1 v \frac{dx}{dt} = r\rho_1 v^2 = \rho_1 \omega^2 r^3 \quad (2.62)$$

Hierbei ist $\rho_1 = dm/dx$ die längenspezifische Dichte des Materials. Der Zusammenhang zur üblichen volumenspezifischen Dichte $\rho = dm/dV$ ergibt sich mit der Dicke d und der Breite b des Bandmaterials als $\rho_1 = \rho b d$.

Die Auswertung der Drehimpulsbilanz führt also zu

$$J\dot{\omega} + \dot{J}\omega = T - rF + \rho_1 \omega^2 r^3 \quad (2.63)$$

³ Hier steht der Buchstabe D für den Drehimpuls. Leider lässt sich die mehrfache Verwendung eines Buchstaben für verschiedene Größen nicht immer vermeiden.

Wird angenommen, dass das bereits aufgewickelte Gut durch zusätzliche Lagen nicht weiter komprimiert wird, wird die Zunahme des Massenträgheitsmoments durch

$$\dot{J} = r^2 \frac{dm}{dt} = r^2 \rho_1 v = r^3 \rho_1 \omega \quad (2.64)$$

beschrieben, wodurch sich die betreffenden Terme auf beiden Seiten der Gleichung aufheben und so trotz veränderlichem Massenträgheitsmoment die Gleichung

$$J\dot{\omega} = T - rF \quad (2.65)$$

folgt. Der über das Bandmaterial zugeführte Impuls entspricht also genau der Massenzufuhr.

Vernachlässigt man bei einer quasistationären Betrachtung die zeitliche Änderung der Drehfrequenz, folgt

$$T = rF \quad (2.66)$$

Arbeitet der Wickler mit konstanter Bandgeschwindigkeit v und konstantem Bandzug F , ergibt sich der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehgeschwindigkeit:

$$T = \frac{vF}{\omega} \quad (2.67)$$

2.5.5 Traktionsantrieb

Die Berücksichtigung von Luftwiderstand F_L , Rollreibung F_r , Hangabtriebskraft F_g führt auf die Widerstandskraft

$$\begin{aligned} F_w &= F_L + F_r + F_g \\ &= \frac{1}{2} \rho_L c_w A_F v^2 + c_r mg \cos \gamma + mg \sin \gamma \end{aligned} \quad (2.68)$$

Die Darstellung der Widerstandskraft über der Geschwindigkeit wird als Widerstands-Geschwindigkeits-Diagramm bezeichnet.

- ρ_L spezifische Dichte der Luft
- A_F wirksame Querschnittfläche des Fahrzeugs
- c_w Luftwiderstandsbeiwert
- c_r Rollwiderstandsbeiwert
- g Gravitationsfeldstärke (Erdbeschleunigung)
- γ Steigungswinkel

Dynamische Gleichung für die Fahrzeugbewegung:

$$m\dot{v} = F_a - F_w \quad (2.69)$$

Im stationären Fall (Beharrungsfahrt) muss die Antriebskraft gleich den Widerstandskräften sein:

$$F_a = F_w \quad (2.70)$$

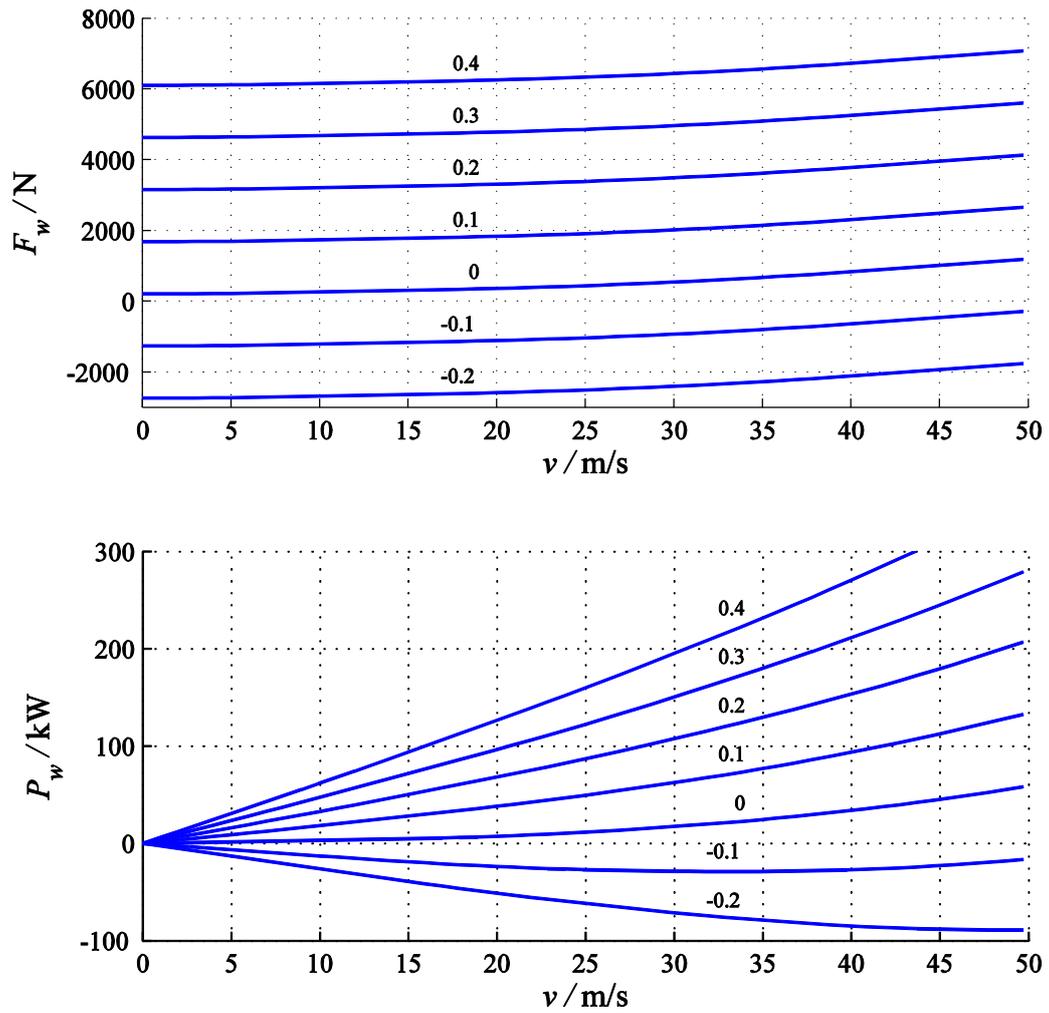


Bild 2-21: Lastkennlinien eines Fahrzeugs für verschiedene Steigungen
Parameter der Kurvenscharen ist die Steigung $\tan \gamma$,

Beispielfahrzeug mit $m = 1500 \text{ kg}$, $c_w = 0,3$, $A = 2 \text{ m}^2$, $c_r = 0,015$

2.6 Schwingungsfähiger Antriebsstrang

Jeder Antriebsstrang ist aufgrund der mechanischen Elastizität mehr oder weniger schwingungsfähig. Die einfachste Modellierung ist die als Zwei-Massen-System:

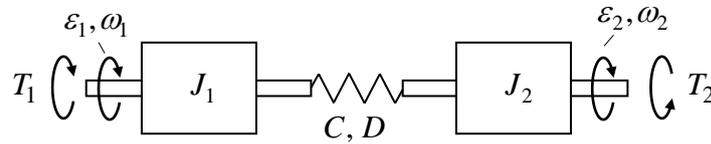


Bild 2-22: Modell eines schwingungsfähigen Antriebsstrangs

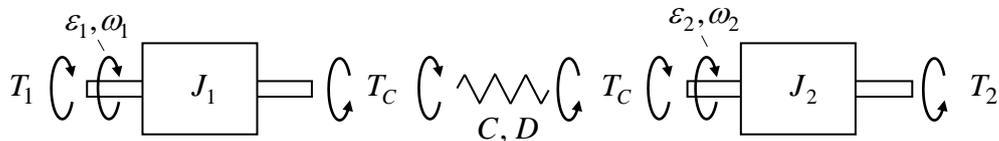


Bild 2-23: Vollständig freigeschnittene Systemkomponenten

Kinematik:

$$\omega_1 = \dot{\varepsilon}_1, \quad \omega_2 = \dot{\varepsilon}_2 \quad (2.71)$$

Dynamische Gleichungen:

$$J_1 \dot{\omega}_1 = T_1 - T_C \quad (2.72)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = T_C - T_2 \quad (2.73)$$

Federgesetz (mit Berücksichtigung einer Dämpfung):

$$T_C = -C(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - D(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1) \quad (2.74)$$

Transformation in den Laplace-Bereich führt zu:

$$s^2 J_1 \varepsilon_1(s) = T_1(s) - T_C(s) \quad (2.75)$$

$$s^2 J_2 \varepsilon_2(s) = T_C(s) - T_2(s) \quad (2.76)$$

$$T_C(s) = -(C + sD)(\varepsilon_2(s) - \varepsilon_1(s)) = -(C + sD)\Delta\varepsilon(s) \quad (2.77)$$

mit

$$\Delta\mathcal{E}(s) = \varepsilon_2(s) - \varepsilon_1(s) \quad (2.78)$$

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} s^2 \Delta\mathcal{E}(s) &= -\frac{T_1(s)}{J_1} - \frac{T_2(s)}{J_2} - \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) (C + sD) \Delta\mathcal{E}(s) \\ (J's^2 + sD + C) \Delta\mathcal{E}(s) &= -\frac{J'}{J_1} T_1(s) - \frac{J'}{J_2} T_2(s) \\ \Delta\mathcal{E}(s) &= -\frac{1}{J_1 + J_2} \frac{J_2 T_1(s) + J_1 T_2(s)}{J's^2 + sD + C} = -\frac{1}{J's^2 + sD + C} \left[\frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

bzw.

$$T_C(s) = \frac{sD + C}{J's^2 + sD + C} \left[\frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right] \quad (2.80)$$

mit

$$J' = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \quad (2.81)$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$s_{1,2} = -\frac{D}{2J'} \pm j \sqrt{\frac{C}{J'} - \frac{D^2}{4J'^2}} = -d\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1-d^2} \quad (2.82)$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J'}} \quad (2.83)$$

$$d = \frac{D}{2J'\omega_0} = \frac{D}{2\sqrt{J'C}} \quad (2.84)$$

Bei typischen Antriebssträngen liegen die Eigenschwingungsfrequenzen bei

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \dots 50 \text{ Hz}$$

Unter Verwendung dieser Kennwerte können die Übertragungsfunktionen die Normalformen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon(s) &= -\frac{1}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2} \left[\frac{1}{J_1} T_1(s) + \frac{1}{J_2} T_2(s) \right] \\ &= -G_\varepsilon(s) \left[\frac{1}{J_1} T_1(s) + \frac{1}{J_2} T_2(s) \right]\end{aligned}\quad (2.85)$$

$$\begin{aligned}T_C(s) &= \frac{2sd\omega_0 + \omega_0^2}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2} \left[\frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right] \\ &= G_T(s) \left[\frac{J'}{J_1} T_1(s) + \frac{J'}{J_2} T_2(s) \right]\end{aligned}\quad (2.86)$$

mit

$$G_\varepsilon(s) = \frac{1}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2}\quad (2.87)$$

und

$$G_T(s) = \frac{2sd\omega_0 + \omega_0^2}{s^2 + 2sd\omega_0 + \omega_0^2}\quad (2.88)$$

Eine Resonanzstelle tritt bei den Übertragungsfunktionen $G_\varepsilon(s)$ und $G_T(s)$ für sehr kleine Dämpfung $d \ll 1$ bei $s \approx j\omega_0$ auf. An den Resonanzstellen finden wir die Verstärkungen

$$|G_\varepsilon(j\omega_0)| \approx \frac{1}{2d\omega_0^2}\quad (2.89)$$

und

$$|G_T(j\omega_0)| \approx \frac{1}{2d}\quad (2.90)$$

bzw. die Resonanzüberhöhungen

$$\left| \frac{G_\varepsilon(j\omega_0)}{G_\varepsilon(0)} \right| \approx \frac{1}{2d}\quad (2.91)$$

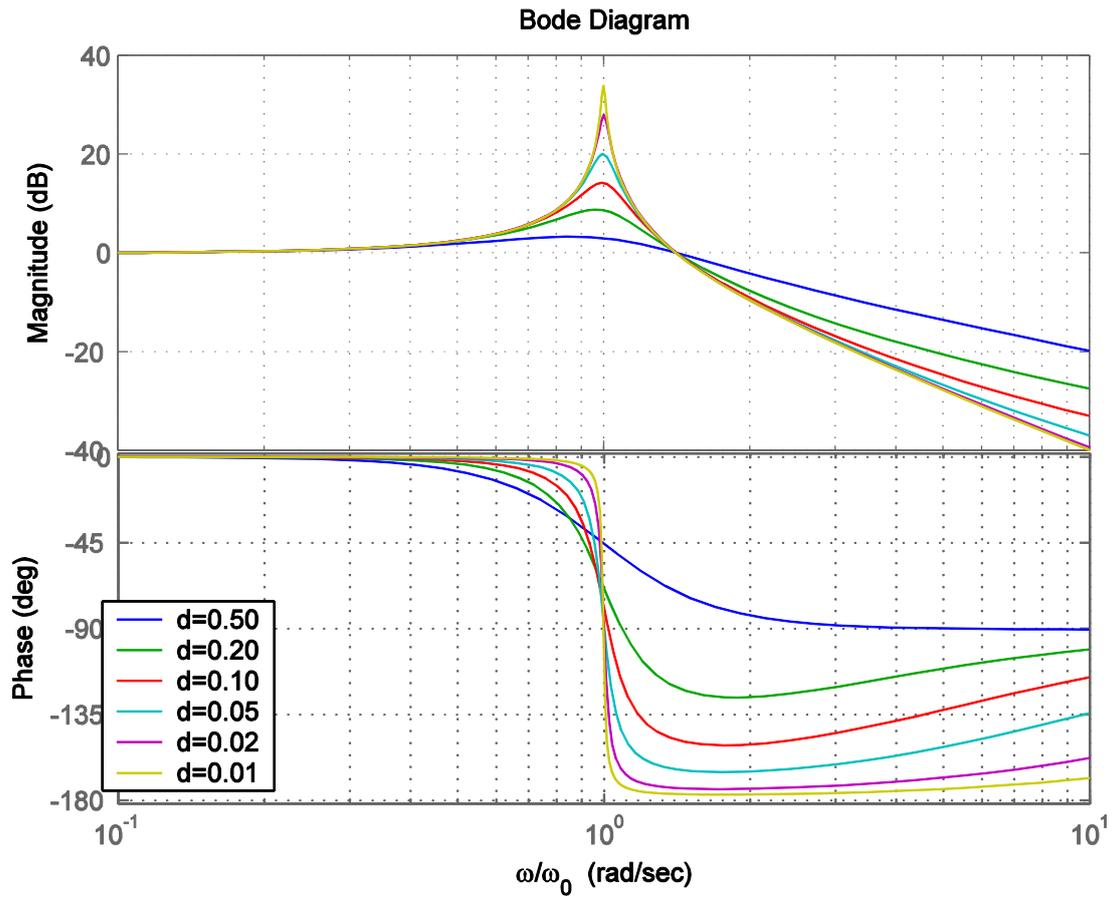


Bild 2-24: Bodediagramm der Verstärkungsfunktion $G_T(j\omega)$ für verschiedene Dämpfungen

3 Gleichstrommotor

3.1 Wirkprinzip

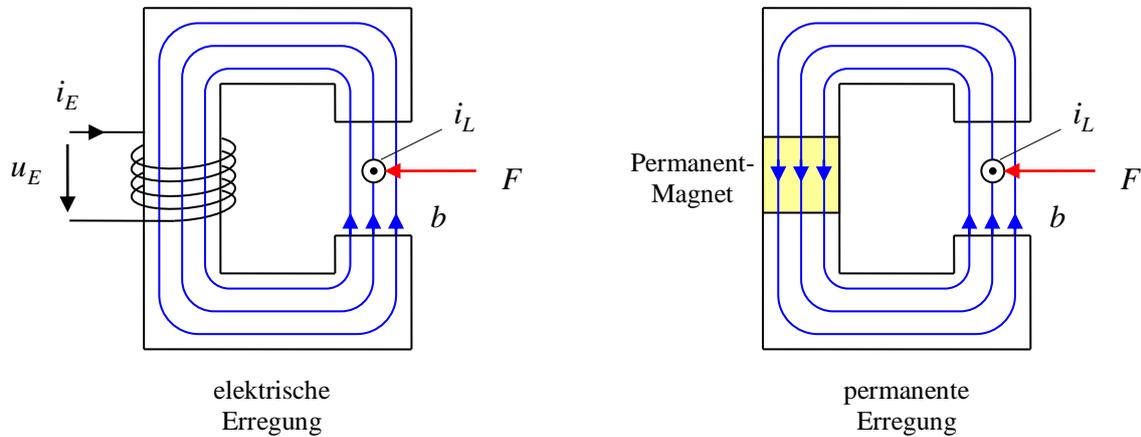


Bild 3-1: Wirkprinzip

Kraftwirkung auf den stromdurchflossenen Leiter (*Lorentzkraft*):

$$F = i_L b l \quad (3.1)$$

l : Länge des Leiters

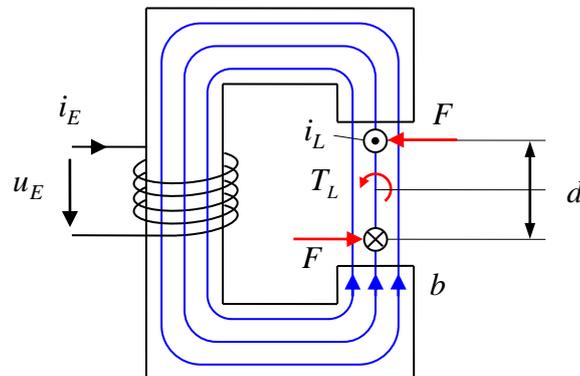


Bild 3-2: Drehmoment auf Leiterschleife

Drehmoment (torque):

$$T_L = 2F \frac{d}{2} = Fd = i_L b d l \quad (3.2)$$

Induzierte Spannung in der Leiterschleife, entweder aus Induktionsgesetz:

$$u_L = \dot{\psi}_L = 2b \frac{d}{2} \omega l = b d l \omega \quad (3.3)$$

oder aus der Leistungsbilanz:

$$P_{el} = P_{mech}$$

$$u_L i_L = T_L \omega = i_L b d l \omega \quad (3.4)$$

$$u_L = b d l \omega \quad (3.5)$$

Der Term

$$\phi_0 = b d l \quad (3.6)$$

lässt sich als der magnetische Fluss deuten, der die Leiterschleife bei senkrechter Ausrichtung und bei homogener Flussdichte durchdringen würde. Hiermit:

$$u_L = \phi_0 \omega \quad (3.7)$$

$$T_L = \phi_0 i_L \quad (3.8)$$

3.2 Aufbau

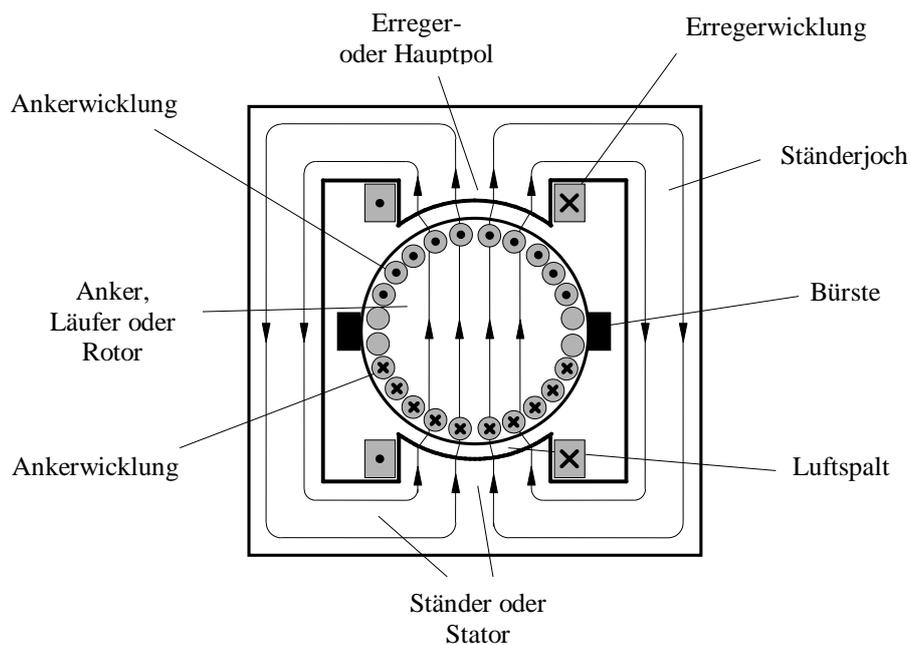


Bild 3-3: Schnittskizze eines Gleichstrommotors

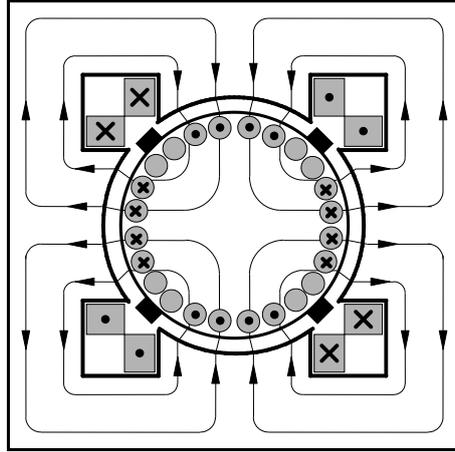


Bild 3-4: Gleichstrommotor mit zwei Polpaaren, $p = 2$

3.3 Kommutator und Ankerwicklungsschemata

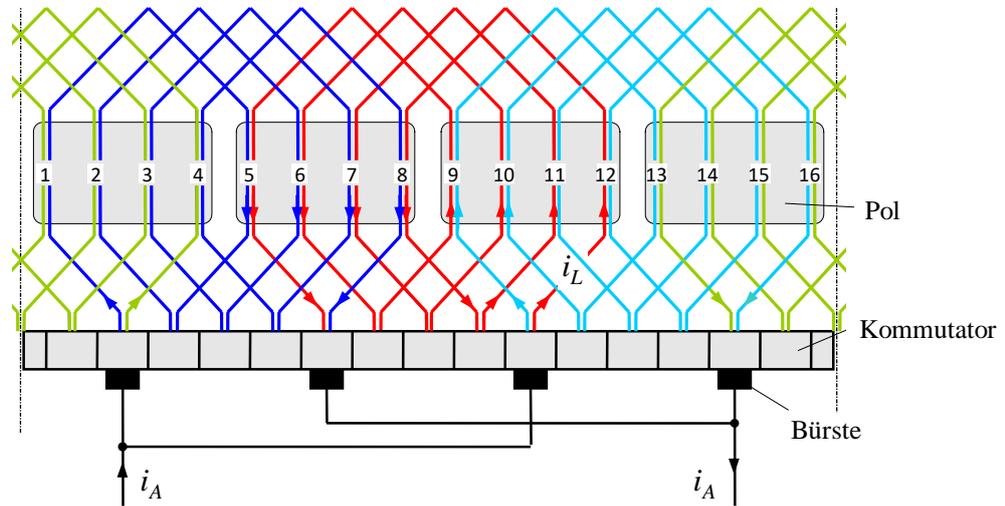


Bild 3-5: Wicklungsschema des Ankers
 Schleifenwicklung, hier für $p = 2$,
 Zahl der parallelen Zweige $2a = 2p$

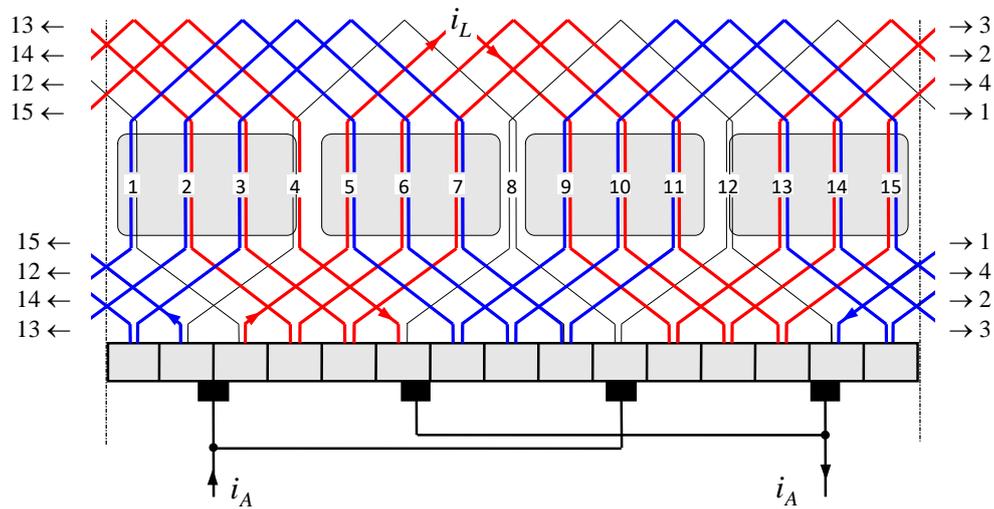


Bild 3-6: Wicklungsschema des Ankers
 Wellenwicklung, hier für $p = 2$,
 Zahl der parallelen Zweige $2a = 2$

3.4 Kommutierung und Wendepolwicklung

Bislang wurde die Kommutierung stark vereinfacht als plötzliche Umschaltung der Stromrichtung in den Ankerschleifen betrachtet. Bei näherem Hinsehen ist diese Vorstellung nicht haltbar, denn die Wicklungen besitzen induktives Verhalten, so dass sie sich einer sprungförmigen Stromänderung widersetzen. Daher soll die Kommutierung im Folgenden genauer analysiert werden.

Zunächst soll festgestellt werden, dass durch die räumliche Ausdehnung einer Bürste diese typischerweise nicht nur einen Kommutatorsteg kontaktiert, sondern zumindest zeitweilig zwei, oder bei entsprechender Bürstenbreite, womöglich sogar mehrere Stege gleichzeitig. Wir wollen nur von zwei gleichzeitig kontaktierten Stegen ausgehen. Mit dem Schema der Schleifenwicklung in Bild 3-5 ist gut zu erkennen, dass auf diese Weise gerade die Ankerschleife kurzgeschlossen wird, in der der Strom kommutiert werden soll. Sei u_L die Spannung dieser Schleife, so wird diese mit Eintritt des Kurzschlusses gleich Null. Vernachlässigt man den Einfluss des Innenwiderstands, wird die Spannung dieser Schleife nur durch das Induktionsgesetz bestimmt

$$u_L = \dot{\psi}_L \quad (3.9)$$

Der mit dieser Leiterschleife verkettete magnetische Fluss ψ_L setzt sich aus dem Anteil der Selbstinduktion und der Flussverkettung mit den anderen Wicklungen zusammen. Hierbei ist neben dem Erregerfeld das *Ankerquerfeld* zu beachten, also das Feld, welches durch die Ankerströme hervorgerufen wird. In Bild 3-7 sind Erreger- und Ankerquerfeld separat dargestellt. Das daraus entstehende Gesamtfeld ergibt sich durch vektorielle Überlagerung.

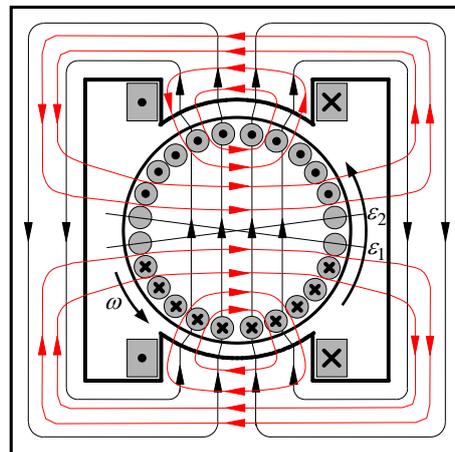


Bild 3-7: Erregerfeld (schwarze Feldlinien) und Ankerfeld (rot)

Schreiben wir also:

$$\psi_L = L_L i_L + \psi_{L,A} + \psi_{L,E}, \quad (3.10)$$

wobei der erste Term der rechten Gleichungsseite den Fluss aufgrund der Selbstinduktion und die anderen Terme die Verkettung mit dem Erregerfeld und dem Ankerfeld angeben, wobei

beim letzten der Beitrag der gerade betrachteten Spule nicht berücksichtigt wird, weil dieser bereits durch den ersten Term ausgedrückt wird. Fragen wir nun nach der Stromänderung während der Kommutierung. Wegen des Bürstenkurzschlusses gilt $u_L = 0$:

$$0 = \dot{\psi}_L = L_L \dot{i}_L + \dot{\psi}_{L,A} + \dot{\psi}_{L,E} \quad (3.11)$$

Die zeitliche Integration über die Dauer des Kurzschlusses zwischen den Positionen ε_1 und ε_2 liefert

$$0 = \Delta\psi_L = L_L \Delta i_L + \Delta\psi_{L,A} + \Delta\psi_{L,E} \quad (3.12)$$

Daraus folgt eine Stromänderung von

$$\Delta i_L = -\frac{1}{L_L} (\Delta\psi_{L,A} + \Delta\psi_{L,E}) \quad (3.13)$$

Zum Beginn der Kommutierung führt die Leiterschleife den Ankerstromanteil $i_A/2a$, zum Abschluss der Kommutierung sollte sich der Strom genau umgekehrt haben, also

$$\Delta i_L = -\frac{1}{a} i_A \quad (3.14)$$

Betrachtet man aber das Feldbild in Bild 3-7, stellt man zwar fest, dass das Erregerfeld keinen Einfluss hat, also $\Delta\psi_{L,E} = 0$, dass aber die Änderung der Flussverkettung mit dem Ankerquerfeld negativ ist, $\Delta\psi_{L,A} < 0$, so dass die nach (3.13) zu erwartende Stromänderung nicht wie nach (3.14) gewünscht negativ, sondern positiv ist. Bestenfalls kann man hoffen, dass die Flussverkettung $\Delta\psi_{L,A}$ verhältnismäßig klein ist, so dass sich der Leiterstrom gegenüber seinem Anfangswert nur wenig ändert. (Allerdings bewirken der bislang vernachlässigte Innenwiderstand und die Bürstenspannung eine gewisse Stromänderung in der gewünschten Richtung.) Wird nun der Kurzschluss der Kommutatorstege durch die Bürste beim Drehen über die Position ε_2 hinaus wieder aufgehoben, wird sich der Strom dennoch nicht sprunghaft auf den Wert $-i_A/2a$ verändern, sondern der Strom fließt zunächst über einen dann entstehenden Lichtbogen⁴ weiter, man spricht vom *Bürstenfeuer*. Erst diese dem Stromfluss entgegen gesetzte Lichtbogenspannung bewirkt dann gemäß (3.9) die gewünschte Fluss- bzw. Stromänderung. Der Lichtbogen bricht zusammen, sobald der Strom i_L den Wert $-i_A/2a$ erreicht hat. Da die Lichtbogenspannung in Näherung nicht von der Höhe des Stroms abhängt, sondern als ungefähr als konstant angenommen werden kann, ist die Zeit für die Stromkommutierung abhängig von der Größe des zu kommutierenden Ankerstroms. Bei sehr großen Ankerströmen, z.B. während einer Überlast, kann der Lichtbogen womöglich solange stehen bleiben, bis bereits der nächste Lichtbogen zwischen den folgenden Kommutatorstegen entsteht. Im extremen Fall setzen sich diese Lichtbögen so weit fort, bis sie sogar die nächste Bürste erreichen, wodurch über die Lichtbögen ein höchst unerwünschter Kurzschluss der

⁴ Genau genommen entsteht der Lichtbogen nicht erst zu diesem Zeitpunkt, sondern bereits beim normalen Kontakt der Kohlebürste mit dem Kommutator fließt der Strom in dem mikroskopischen Spalt über einen Lichtbogen.

Ankerspannung entsteht. Dieses Phänomen wird wegen seines optischen Erscheinungsbilds als *Rundfeuer* bezeichnet.

Bei Kleinmotoren läuft die Kommutierung in der Regel nach der beschriebenen Art ab. Bei größeren Motoren setzt man eine elegantere Methode ein, den Strom ohne einen Lichtbogen zu kommutieren. Dies erreicht man durch die sogenannte Wendepolwicklung, siehe Bild 3-8. Die Wendepolwicklung ist in Reihe mit dem Anker geschaltet und wird folglich wie diese durch den Ankerstrom durchflossen, doch ist der Wicklungssinn dem des Ankers entgegengesetzt. Dadurch wird das Ankerquerfeld kompensiert. In der Gleichung (3.12) tritt also eine weitere Flussverkeftung mit dem Wendepolfeld hinzu,

$$0 = \Delta\psi_L = L_L \Delta i_L + \Delta\psi_{L,A} + \Delta\psi_{L,E} + \Delta\psi_{L,W}, \quad (3.15)$$

wobei, wie schon gesagt, $\Delta\psi_{L,E}$ als Null genommen werden kann. Wird nun die Wendepolwicklung so bemessen, dass ihr Beitrag den des Ankerquerfeldes, welcher aus den ersten beiden Termen besteht, kompensiert,

$$\Delta\psi_{L,W} = L_L \Delta i_L - \Delta\psi_{L,A} = -\frac{L_L}{a} i_A - \Delta\psi_{L,A} \quad (3.16)$$

stellt sich genau die gewünschte Stromänderung ein. Bereits zum Zeitpunkt des Bürstenabrisses führt die Leiterschleife den gewünschten Stromendwert und es entsteht kein Lichtbogen. Man beachte, dass alle in (3.16) auftretenden Terme proportional zum Ankerstrom sind – sofern man von der magnetischen Sättigung absieht. Deshalb funktioniert die Wendepolkompensation unabhängig von der Größe des Ankerstroms.

Man beachte, dass die Flussänderung $\Delta\psi_L$ als Fluss des magnetischen Feldes durch die Kommutierungszone zwischen den Winkeln ε_1 und ε_2 betrachtet werden kann. Diese Maßnahme läuft also darauf hinaus, dass dieser magnetische Fluss in der Kommutierungszone zu Null gebracht wird. Man spricht von der *neutralen Zone*. Das führt direkt zu der Dimensionierung der Wendepolwicklung: Deren magnetische Spannung als Produkt der Windungszahl mit dem Ankerstrom muss diejenige des Ankers aufheben, was zu einer direkten Relation zwischen den Windungszahlen von Anker- und Wendepolwicklung führt.

Mit dieser Sichtweise erkennt man, dass eine Lichtbogen-freie Kommutierung auch ohne Wendepolwicklung möglich ist, wenn man die Bürsten und damit ε_1 und ε_2 jeweils in die neutrale Zone bringt, in der also das aus Erreger- und Ankerquerfeld bestehende Gesamtfeld Null ist. Diese Position verändert sich jedoch abhängig vom Ankerstrom. Obwohl das Auffinden der passenden Bürstenstellung sehr einfach durch Beobachtung des Bürstenfeuers gefunden werden kann, ist diese Maßnahme sehr aufwändig, da sie einen manuellen Eingriff erfordert. Maschinen mit manueller Bürstenverstellung finden sich heute nur noch in technischen Museen.

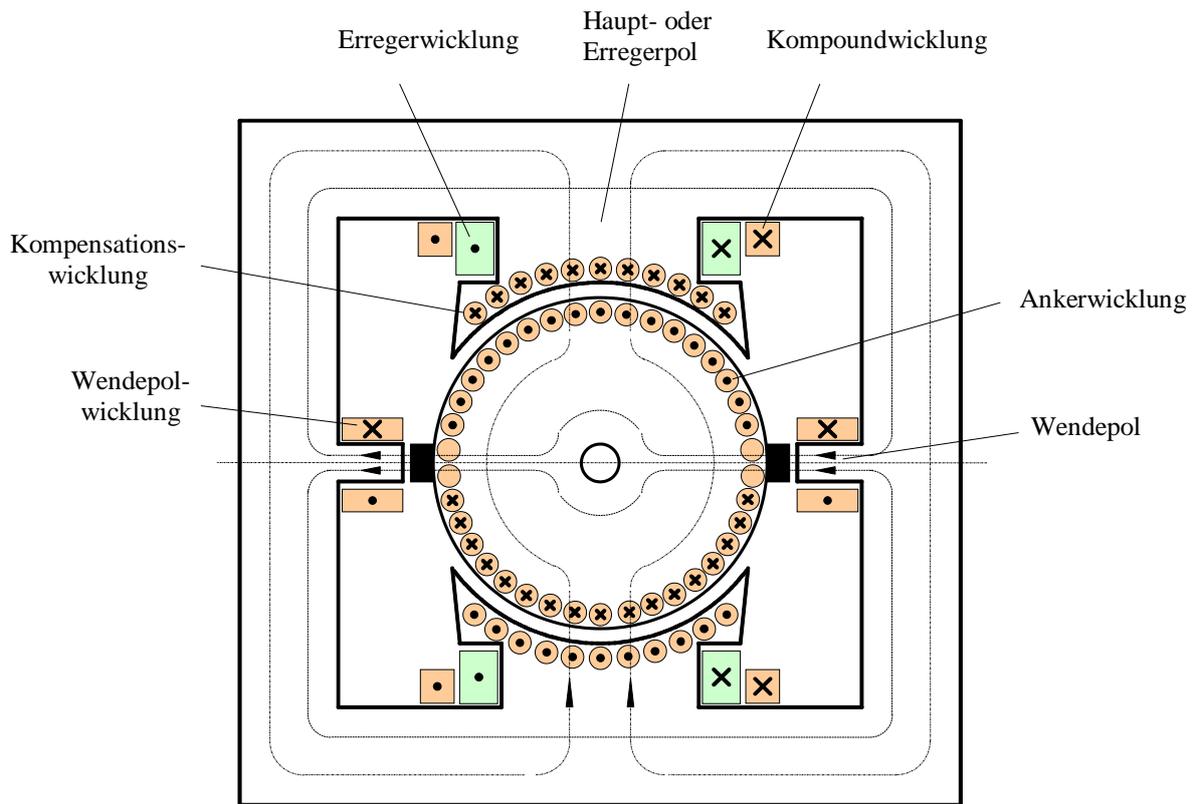


Bild 3-8: Gleichstrommotor mit Erreger-, Anker-, Wendepol-, Compound- und Kompensationswicklung

3.5 Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung

Im Bild 3-7 ist eine weitere Auswirkung des Ankerquerfeldes zu erkennen. Das Ankerquerfeld verändert auch das Feld in den Erregerpolen. In der dort dargestellten Situation wird das Feld am rechten Rand des oberen Pols verstärkt, während es am linken Rand abgeschwächt wird. Diese Feldverzerrung würde sich auf den Gesamtfluss durch den Erregerpol nicht auswirken, wenn man von einer linearen Superposition der Felder ausgehen dürfte, denn dann gleicht die Feldverstärkung am rechten Rand die Feldabschwächung am linken Rand genau aus. Tatsächlich muss aber die magnetische Sättigung berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass die Erhöhung der magnetischen Spannung bzw. der magnetischen Flussdichte im Sättigungsbereich nur zu einer unterproportionalen Flussdichteerhöhung führt, während sich die Feldabschwächung am linken Rand weitgehend proportional auswirkt. In der Summe resultiert aufgrund der einseitigen Erregerpolsättigung eine Abschwächung des Erregerflusses, was zu einer Verringerung sowohl des Drehmoments als auch der induzierten Ankerspannung führt, also insgesamt zu einer schlechteren Maschinenausnutzung. Diesen Effekt bezeichnet man als *Ankerrückwirkung*.

Mögliche Gegenmaßnahmen sind (vgl. Bild 3-8):

Erhöhung der magnetischen Spannung im Erregerkreis durch eine *Kompoundwicklung*, welche vom Ankerstrom durchflossen wird. Diese Wicklung kann auch als zusätzliche Nebenschlusswicklung angesehen werden und gleicht die Schwächung des Erregerflusses durch die Ankerrückwirkung aus.

Alternativ kann eine Kompensationswicklung in den Erregerpolen vorgesehen werden. Diese wird auch vom Ankerstrom, aber in dem der Ankerwicklung entgegen gesetzten Sinn durchflossen. Auf diese Weise wird die Ankerrückwirkung auf die Erregerpole aufgehoben und die einseitige Sättigung vermieden. Diese Maßnahme ist aber recht aufwändig.

Sowohl die Kompensationswicklung als auch die Wendepolwicklung dienen der Kompensation des Ankerfeldes in verschiedenen Raumbereichen des Motors. Man beachte den Wicklungssinn dieser beiden Wicklungen im Vergleich mit der Ankerwicklung. Wird ein Motor mit diesen beiden zusätzlichen Wicklungen ausgestattet, ist bei der Bemessung der Wendepolwicklung zu berücksichtigen, dass ein Teil des Ankerquerfeldes bereits durch die Kompensationswicklung kompensiert wird.

3.6 Mathematische Modellierung

Bezeichnungen:

T_L	Drehmoment einer Leiterschleife
T	gesamtes Drehmoment des Ankers (Luftspaltdrehmoment)
N_A	Zahl der Anker-Leiterschleifen
N_E	Gesamtzahl aller Erregerwindungen
$2a$	Zahl der parallelen Ankerstromzweige
p	Polpaarzahl
α	Polbedeckung, Verhältnis der aktiven Polflächen zur Ankeroberfläche
ϕ_E	Erregerfluss
b_E	Erregerflussdichte
l	aktive Länge des Ankers
d	Ankerdurchmesser
δ	Luftspalt
A_{pol}	Polfläche

Resultierendes auf den Anker wirkendes Drehmoment:

$$T = N_A T_L \alpha = N_A \phi_0 \alpha i_L = N_A b_E d l \alpha i_L \quad (3.17)$$

Ankerstrom i_A teilt sich auf $2a$ Zweige auf:

$$i_L = \frac{1}{2a} i_A \quad (3.18)$$

$$\phi_E = b_E A_{pol} = \frac{\pi d l \alpha}{2p} b_E \quad (3.19)$$

Damit:

$$T = \frac{p N_A}{a \pi} \phi_E i_A = c \phi_E i_A = \psi'_E i_A \quad (3.20)$$

wobei

$$c = \frac{p N_A}{a \pi} \quad (3.21)$$

$$\psi'_E = c \phi_E \quad (3.22)$$

Die induzierte Spannung (*elektromotorische Kraft, EMK*) folgt wieder aus der Leistungsbilanz,

$$u_i = c \phi_E \omega = \psi'_E \omega \quad (3.23)$$

oder alternativ durch Summation der induzierten Spannungen der in Reihe geschalteten Leiterschleifen.

Spannungsgleichung des Ankerkreises unter Berücksichtigung des Ankerwiderstands R_A , der Ankerinduktivität L_A und des Bürstenspannungsabfalls u_B :

$$u_A = u_i + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B \quad (3.24)$$

Mit guter Genauigkeit kann der Bürstenspannungsabfall u_B also eine konstante, vom Ankerstrom unabhängige Spannung von etwa 1 V angesetzt werden.

Erregerstromkreis:

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E \quad (3.25)$$

Beachte: Im Allgemeinen sind zwischen zwei Wicklungen Gegeninduktivitäten zu berücksichtigen. Die Flüsse von Erreger- und Ankerwicklung sind aber durch die zueinander senkrechte Anordnung nicht miteinander verkettet, so dass die Gegeninduktivität zwischen diesen Wicklungen Null ist.

Magnetischer Kreis der Erregung:

Magnetische Leitfähigkeit des Erregerkreises

$$\Lambda_E = \frac{1}{R_{magE}} = \frac{\mu_0 A_{Pol}}{2\delta} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l}{2\delta \cdot 2p} = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l}{4p\delta} \quad (3.26)$$

Induktivität:

$$L_E = \Lambda_E \frac{N_E^2}{p^2} p = \Lambda_E \frac{N_E^2}{p} \quad (3.27)$$

Erregerfluss:

$$\phi_E = \Lambda_E \frac{N_E}{p} i_E = \frac{L_E}{N_E} i_E = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l N_E}{4p^2 \delta} i_E \quad (3.28)$$

$$\psi'_E = c \phi_E = \frac{c L_E}{N_E} i_E = L'_E i_E \quad (3.29)$$

$$L'_E = \frac{c L_E}{N_E} = \frac{\mu_0 \alpha d l N_E N_A}{4a p \delta} \quad (3.30)$$

Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen:

$$T = \psi'_E i_A \quad (3.20)$$

$$\psi'_E = L'_E i_E \quad (3.29)$$

$$u_A = \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B \quad (3.24)$$

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E \quad (3.25)$$

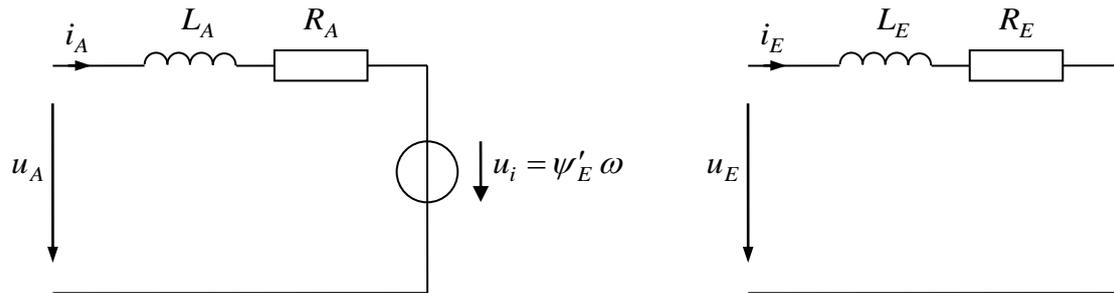


Bild 3-9: Ersatzschaltbilder des Anker- und des Erregerkreises

Dynamisches Verhalten

Das dynamische Verhalten des Anker- bzw. Erregerstroms entspricht dem eines RL -Gliedes. Die maßgeblichen Anker- und Erregerzeitkonstanten sind

$$\tau_A = \frac{L_A}{R_A} \quad (3.31)$$

und

$$\tau_E = \frac{L_E}{R_E} \quad (3.32)$$

3.7 Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad

Elektrische Leistung (Verbraucherzählpeilsystem):

$$p_{el} = p_{elA} + p_{elE} = u_A i_A + u_E i_E \quad (3.33)$$

Mechanische Leistung (Erzeugerzählpeilsystem):

$$p_{mech} = \omega T \quad (3.34)$$

Energiebilanz:

$$p_{el} = \dot{w}_A + \dot{w}_E + p_V + p_{mech} \quad (3.35)$$

Verlustleistung:

$$P_V = P_{VA} + P_{VE} = R_E i_E^2 + R_A i_A^2 \quad (3.36)$$

Innere Energien:

$$w_A = \frac{1}{2} L_A i_A^2 \quad (3.37)$$

$$w_E = \frac{1}{2} L_E i_E^2 \quad (3.38)$$

Wirkungsgrad des Ankerkreises (Vernachlässigung der Erregerverluste) im stationären Zustand für den motorischen Betrieb:

$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{elA}} = \frac{\omega T}{U_A I_A} = \frac{\omega T}{(R_A I_A + \psi'_E \omega) I_A} = \frac{\omega T}{\left(R_A \frac{T}{\psi'_E} + \psi'_E \omega \right) \frac{T}{\psi'_E}} = \frac{\omega}{\omega + \frac{R_A}{\psi'^2_E} T} = \frac{1}{1 + \frac{R_A}{\psi'^2_E} \frac{T}{\omega}} \quad (3.39)$$

3.8 Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen

Man unterscheidet verschiedene Schaltungsarten:

- *Fremderregung*: Erreger- und Ankerkreis werden aus verschiedenen elektrischen Quellen gespeist
- *Nebenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind parallel geschaltet
- *Reihenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind in Reihe geschaltet

Wicklung	Klemmen
Ankerwicklung	A1, A2
Wendepolwicklung	B1, B2
Kompensationswicklung	C1, C2
Erregerwicklung für Reihenschlusschaltung	D1, D2
Erregerwicklung für Nebenschlusschaltung	E1, E2
Erregerwicklung für Fremderregung	F1, F2

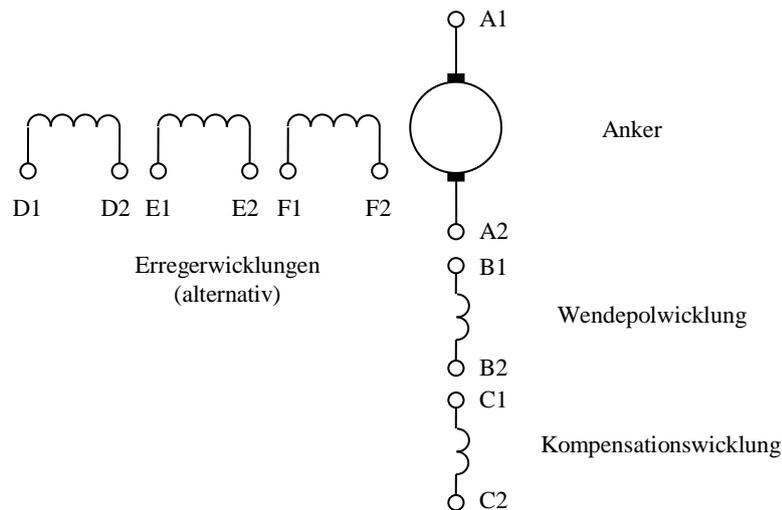


Bild 3-10: Schaltsymbol und Klemmenbezeichnungen des Gleichstrommotors

3.9 Fremderregter und permanent erregter Motor

Beim fremderregten Betrieb werden Erreger- und Ankerwicklung unabhängig voneinander gespeist. Typischerweise werden der Erregerstrom und damit der Erregerfluss konstant gehalten,

$$i_E = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \phi_E = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \psi'_E = \text{const.}$$

Dies gelingt durch Aufschaltung einer konstanten Erregerspannung u_E allerdings nur unvollkommen, da sich der Strom aufgrund des temperaturabhängigen Widerstands R_E verändern kann. Ggf. wird eine Erregerstromregelung vorgesehen.

Beim permanent erregten Motor wird der Erregerfluss von einem Permanentmagneten erzeugt. Sein Verhalten gleicht dem des fremderregten Motors mit konstantem Erregerstrom.

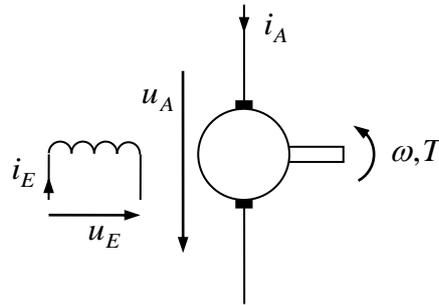


Bild 3-11: Fremderregter Gleichstrommotor

Stationäres Strom-Spannungs-Verhalten bei konstanter Drehzahl

$$U_A = \psi'_E \omega + R_A I_A \quad (3.40)$$

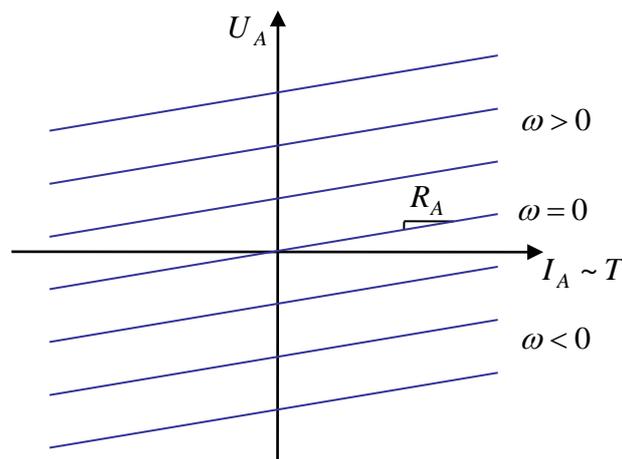


Bild 3-12: Stationäre Kennlinien von Ankerstrom und -spannung

Stationäres Drehmoment-Drehzahl-Verhalten bei konstanter Spannung

Einsetzen der Drehmomentbeziehung in die Spannungsgleichung:

$$U_A = \frac{R_A}{\psi'_E} T + \omega \psi'_E \quad (3.41)$$

Auflösen nach ω ergibt das stationäre Drehmoment-Drehzahlverhalten für konstante Ankerspannung:

$$\omega = \frac{U_A}{\psi'_E} - \frac{R_A T}{\psi'^2_E} \quad (3.42)$$

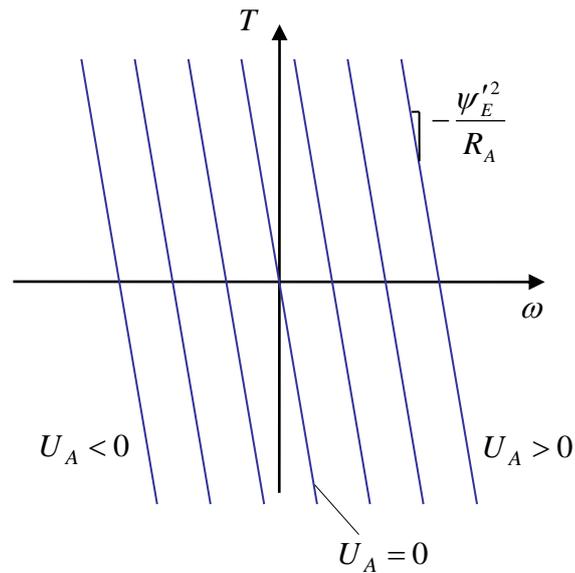


Bild 3-13: Stationäre Kennlinien von Drehmoment und Drehzahl bei konstanter Ankerspannung

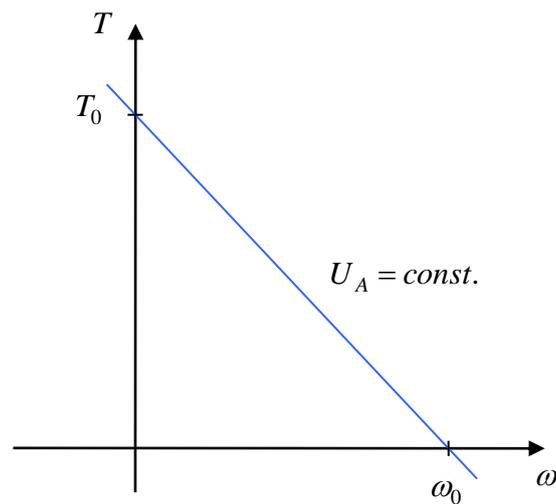


Bild 3-14: Losbrech-Drehmoment und Leerlaufdrehzahl bei konstanter Ankerspannung

Losbrech-Drehmoment und -Ankerstrom (bei $\omega = 0$):

$$I_{A0} = \frac{U_A}{R_A} \quad (3.43)$$

$$T_0 = \frac{U_A \psi'_E}{R_A} \quad (3.44)$$

Leerlaufdrehzahl ($T = 0$ bzw. $I_A = 0$)

$$\omega_0 = \frac{U_A}{\psi'_E} \quad (3.45)$$

Wird der Gleichstrommotor mit konstanter Ankerspannung betrieben, entsteht beim Einschalten aus dem Stillstand heraus ein sehr großer Anlaufstrom, der ggf. den zulässigen Maximalwert überschreitet. Bei kleinen Motoren mit geringer Trägheit, die schnell beschleunigen, kann ein derartiger kurzzeitiger Überstrom ggf. hingenommen werden. Andernfalls muss der Anlaufstrom begrenzt werden. Die klassische Vorgehensweise arbeitet mit Anlaufwiderständen vorgenommen, die mit steigender Drehzahl dann überbrückt werden.

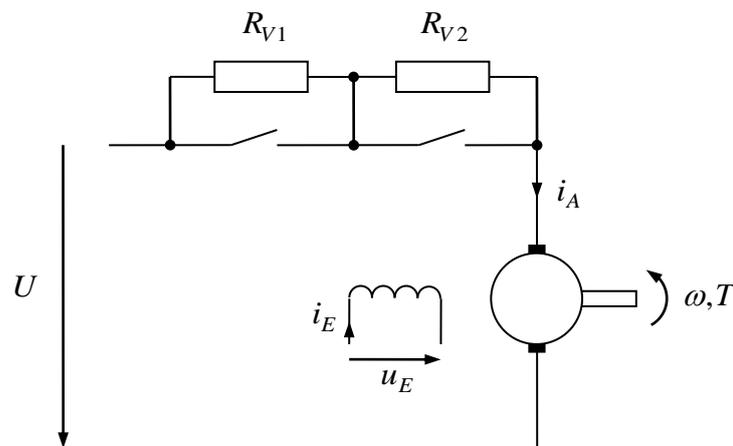


Bild 3-15: Betrieb mit Vorwiderstand

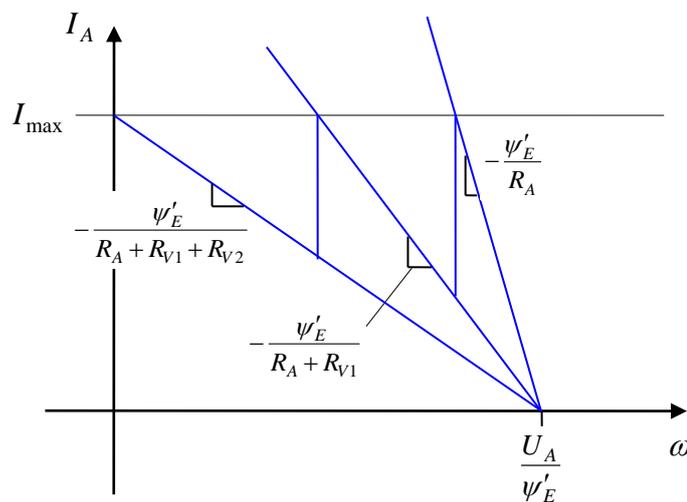


Bild 3-16: Anfahren mit Vorwiderständen

3.10 Nebenschlussmotor

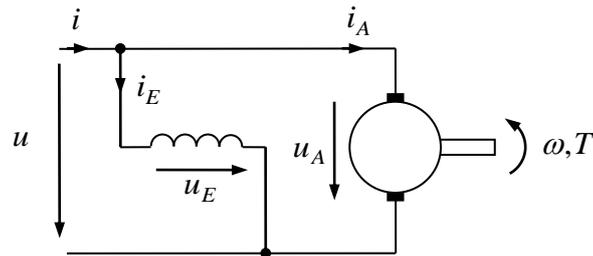


Bild 3-17: Nebenschlusschaltung

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E \omega + L_A \dot{i}_A \quad (3.46)$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \quad (3.47)$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \quad (3.48)$$

Nebenschluss:

$$u = u_A = u_E \quad (3.49)$$

$$i = i_A + i_E \quad (3.50)$$

Stationäres Verhalten:

$$I_E = \frac{U}{R_E} \quad (3.51)$$

$$I_A = \frac{U - L'_E I_E \omega}{R_A} = \frac{U - L'_E U / R_E \omega}{R_A} = \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A} U \quad (3.52)$$

$$I = I_E + I_A = \left[\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} - \frac{L'_E \omega}{R_A R_E} \right] U \quad (3.53)$$

$$T = L'_E I_E I_A = L'_E \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A R_E} U^2 \quad (3.54)$$

3.11 Reihenschlussmotor

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E \omega + L_A \dot{i}_A \quad (3.55)$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \quad (3.56)$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \quad (3.57)$$

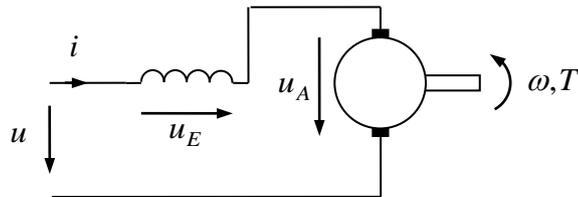


Bild 3-18: Reihenschlusschaltung

Reihenschluss:

$$u = u_A + u_E \quad (3.58)$$

$$i = i_A = i_E \quad (3.59)$$

$$R = R_A + R_E \quad (3.60)$$

$$L = L_A + L_E \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} u &= R i + L'_E i \omega + L \dot{i} \\ u &= (R + L'_E \omega) i + L \dot{i} \\ u &= R'(\omega) i + L \dot{i} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Drehzahlabhängiger effektiver Widerstand:

$$R'(\omega) = R + L'_E \omega \quad (3.63)$$

$$T = \psi'_E i = L'_E i^2 \quad (3.64)$$

Quadratische Abhängigkeit des Drehmoments vom Strom, Änderung des Vorzeichens ist nur durch Wechsel der Verschaltung von Erreger- und Ankerwicklung möglich, $i = i_A = -i_E$.

Daher kann ein Reihenschlussmotor auch mit Wechselspannung gespeist werden. Sinusförmige Speisung mit der Frequenz ω_{el} , Schreibweise mit komplexen Effektivwertzeigern:

$$\underline{U} = R'(\omega) \underline{I} + j\omega_{el} L \underline{I} \quad (3.65)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R'(\omega) + j\omega_{el} L} \quad (3.66)$$

Das Drehmoment pulsiert mit $2\omega_{el}$. Drehmomentmittelwert:

$$\bar{T} = L'_E \overline{i^2} = L'_E I^2 = \frac{L'_E U^2}{R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2} \quad (3.67)$$

Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik:

$$\begin{aligned} (R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2) \bar{T} &= L'_E U^2 \\ ((R + L'_E \omega)^2 + \omega_{el}^2 L^2) \bar{T} &= L'_E U^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Wird der Reihenschlussmotor mit konstanter Spannung betrieben und dabei mechanisch entlastet, $T \rightarrow 0$, wächst die Drehzahl über alle Grenzen, $\omega \rightarrow \infty$ (s. Bild 3-19).

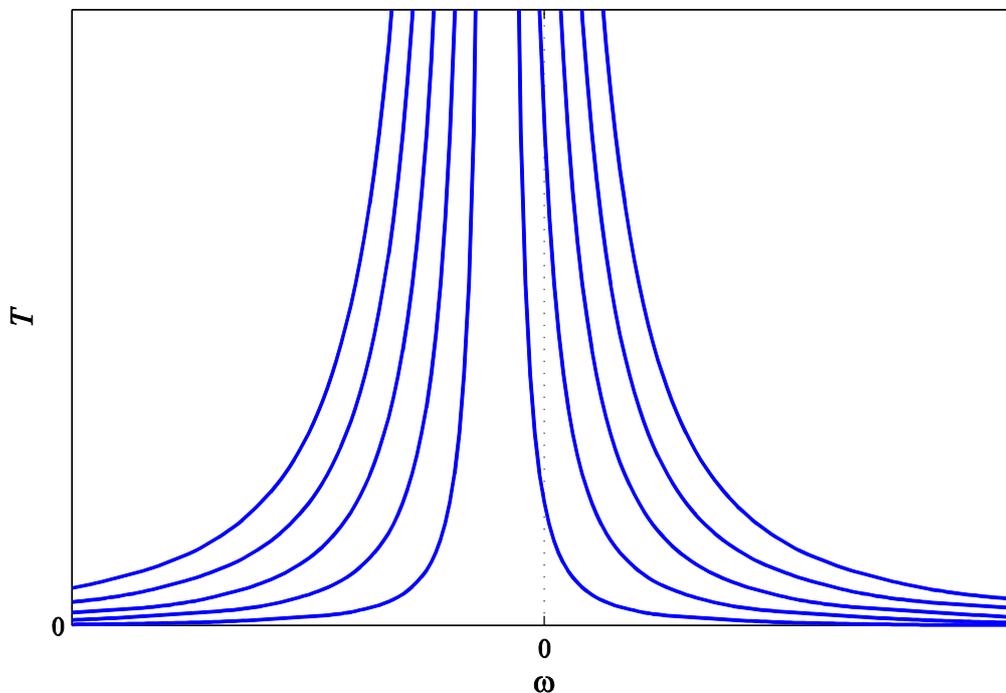


Bild 3-19: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Spannungen U bei Gleichspannungsspeisung

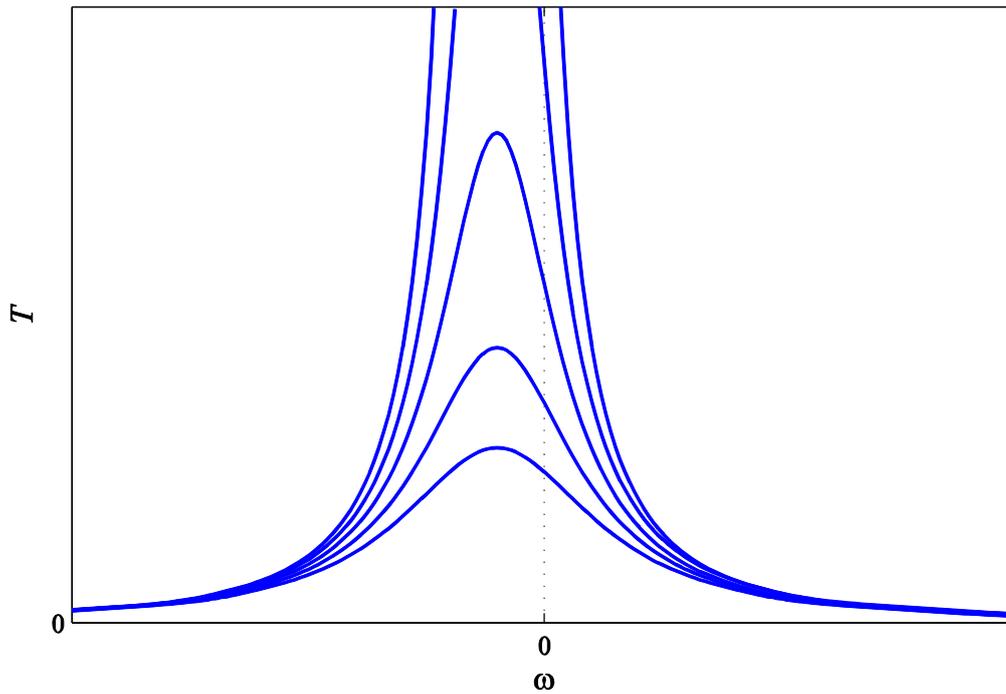


Bild 3-20: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für GS-Speisung und verschiedene Frequenzen bei WS-Speisung, die Höhe der Spannungen U ist für alle Kurven konstant

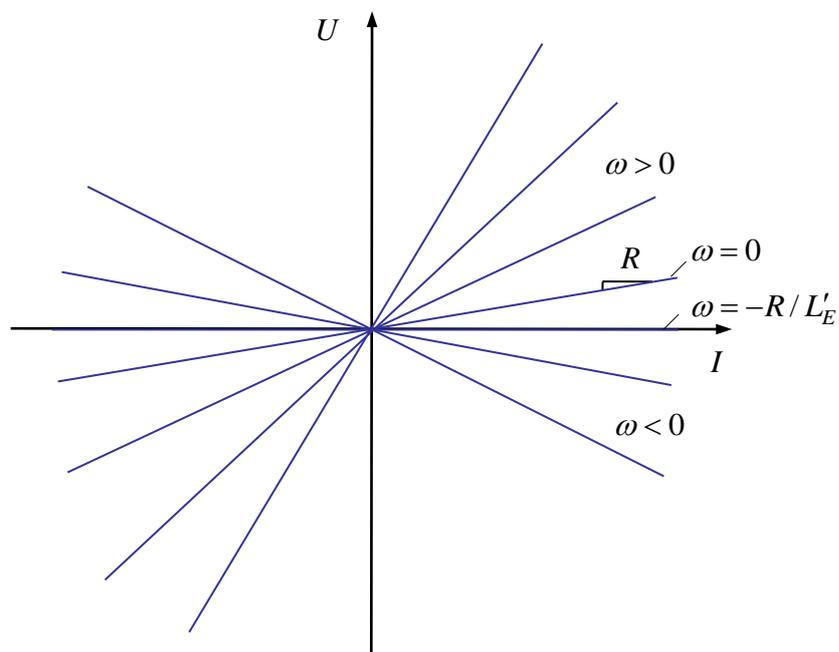


Bild 3-21: Strom-Spannungs-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Drehzahlen

3.12 Geregelter Betrieb

Um gezielt einen bestimmten Betriebspunkt einzustellen, bedarf es veränderbarer Speisespannungen. Im Fall von Wechsel- oder Drehspannung kann eine steuerbare Thyristorbrücke zum Einsatz kommen. Steht eine Gleichspannung als Energieversorgung zur Verfügung, werden Gleichstromsteller eingesetzt. Die Art des Gleichstromstellers hängt von der gewünschten Betriebsart des Motors ab. Soll der Motor nur in einer Richtung motorisch betrieben werden, reicht ein einfacher Tiefsetzsteller aus. Sind beide Drehrichtungen und beide Drehmomentrichtungen (motorischer und generatorischer Betrieb) zu beherrschen, muss für die Ankerspeisung ein 4-Quadranten-Steller verwendet werden. Für den Erregerkreis ist jeweils ein einfacher Tiefsetzsteller ausreichend. Die Speisung mit linear arbeitenden Endstufen kommt wegen der hohen Verluste allenfalls nur für sehr kleine Leistungen in Betracht.

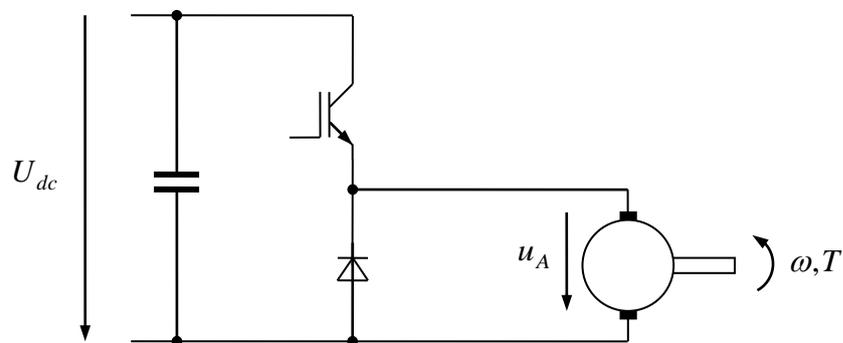


Bild 3-22: Speisung des Ankerkreises durch einen Tiefsetzsteller

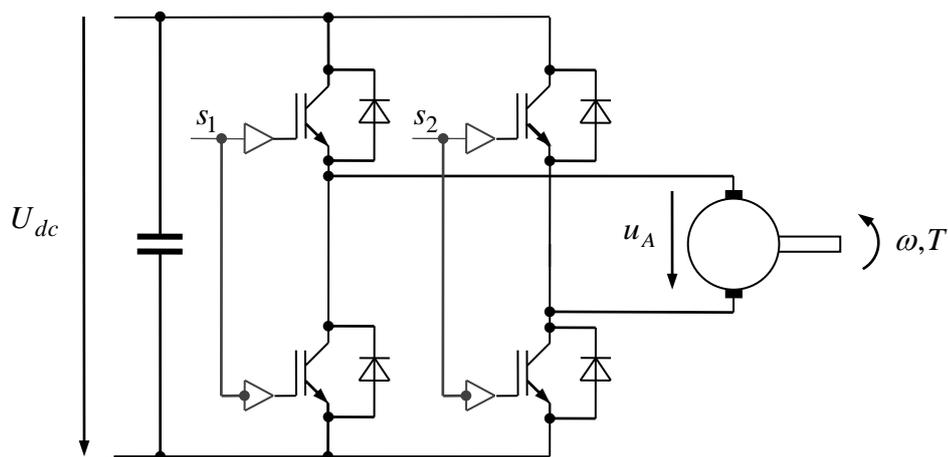


Bild 3-23: Speisung des Ankerkreises durch einen 4-Quadranten-Steller

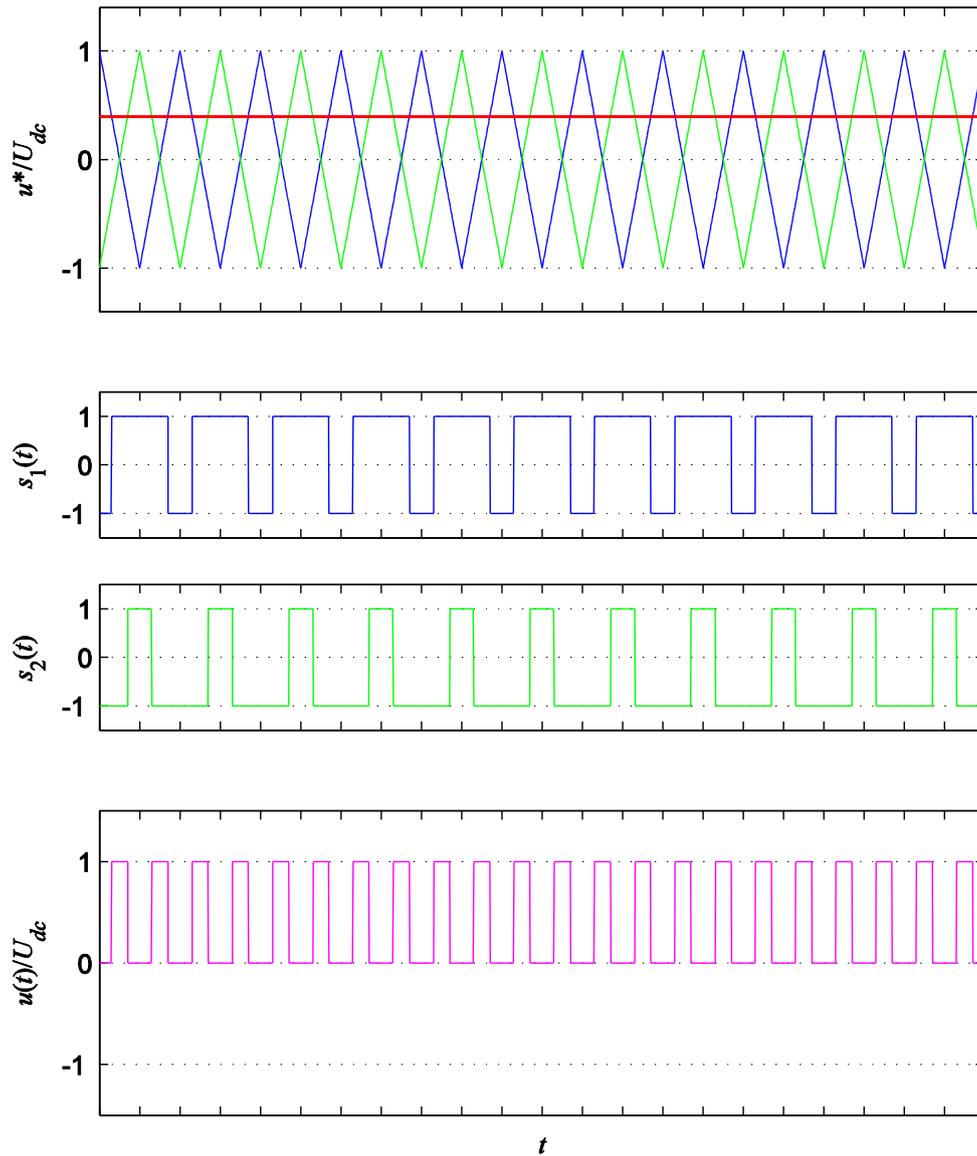


Bild 3-24: Pulsweitenmodulation für 4-Quadranten-Steller mit versetzter Taktung der beiden Brückenarme

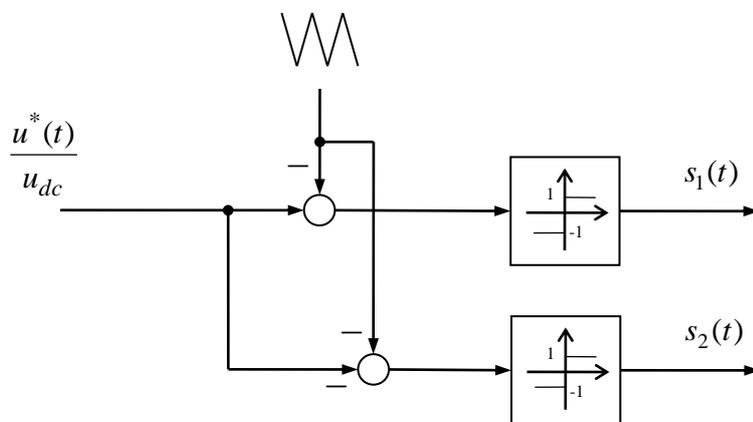


Bild 3-25: Realisierung der PWM für einen 4-Quadranten-Steller

Dynamisches Verhalten des unregulierten Motors mit konstanter Erregung

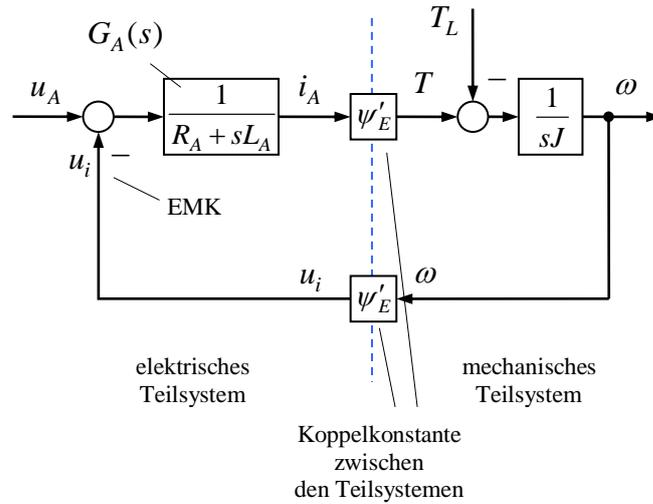


Bild 3-26: Wirkungsplan des Gleichstrommotors mit konstanter Erregung (fremd- oder permanenterregt)

Übertragungsfunktion des Ankreises:

$$sL_A i_A(s) = u_A(s) - R_A i_A(s) - u_i(s) \quad (3.69)$$

$$i_A(s) = G_A(s)(u_A(s) - u_i(s)) \quad (3.70)$$

mit der Übertragungsfunktion des Ankerkreises

$$G_A(s) = \frac{1}{sL_A + R_A} = \frac{1}{R_A} \frac{1}{s\tau_A + 1} \quad (3.71)$$

und der Ankerzeitkonstante

$$\tau_A = \frac{L_A}{R_A} \quad (3.31)$$

Mechanisches Verhalten:

$$\omega(s) = \frac{1}{sJ} (T(s) - T_L(s)) \quad (3.72)$$

Gesamtsystem:

$$\omega(s) = \frac{1}{sJ} (\psi'_E i_A(s) - T_L(s)) = \frac{1}{sJ} \frac{\psi'_E}{sL_A + R_A} (u_A(s) - \psi'_E \omega(s)) - \frac{1}{sJ} T_L(s) \quad (3.73)$$

$$\omega(s) \left(1 + \psi_E'^2 \frac{1}{sJ} \frac{1}{sL_A + R_A} \right) = \frac{1}{sJ} \psi_E' \frac{1}{sL_A + R_A} u_A(s) - \frac{1}{sJ} T_L(s) \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \omega(s) &= \frac{\left(\psi_E' \frac{1}{sJ} \frac{1}{sL_A + R_A} \right) u_A(s) - \frac{1}{sJ} T_L(s)}{1 + \psi_E'^2 \frac{1}{sJ} \frac{1}{sL_A + R_A}} = \frac{\psi_E' u_A(s) - (sL_A + R_A) T_L(s)}{sJ(sL_A + R_A) + \psi_E'^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\psi_E'} u_A(s) - \frac{R_A}{\psi_A'^2} \left(s \frac{L_A}{R_A} + 1 \right) T_L(s)}{s^2 \frac{JL_A}{\psi_E'^2} + s \frac{JR_A}{\psi_E'^2} + 1} \\ &= \frac{1}{\psi_E'} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2d \frac{s}{\omega_0} + 1} u_A(s) - \frac{R_A}{\psi_A'^2} \frac{s\tau_A + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2d \frac{s}{\omega_0} + 1} T_L(s) \\ &= G_u(s) u_A(s) + G_T(s) T_L(s) \end{aligned} \quad (3.75)$$

mit

$$\omega_0 = \frac{\psi_E'}{\sqrt{JL_A}} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{JR_A \omega_0}{2\psi_E'^2} = \frac{R_A}{2\psi_E'} \sqrt{\frac{J}{L_A}} \\ &= \frac{1}{2\omega_0 \tau_A} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ist das System schwach gedämpft, also $d < 1$, treten bei Ausgleichsvorgängen Schwingungen auf. Die Pole der Übertragungsfunktionen $G_u(s)$, $G_T(s)$ liegen bei

$$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} \quad (3.78)$$

Für den Fall schwacher Dämpfung sind diese komplex:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -d\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2} \\ &= -\frac{1}{\tau_d} \pm j\omega_d \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die tatsächliche Schwingungsfrequenz ist also nicht die Kennkreisfrequenz ω_0 , sondern

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - d^2} \quad (3.80)$$

Die Abklingzeitkonstante ergibt sich zu

$$\tau_d = \frac{1}{d\omega_0} = 2 \frac{L_A}{R_A} = 2\tau_A \quad (3.81)$$

Je nach Dämpfung und Anregung tritt somit ein mehr oder weniger heftiges Überschwingen in der Drehzahl auf, das ggf. sicherheitsrelevant sein kann, wenn bei einem solchen Vorgang die spezifizierte Maximaldrehzahl überschritten werden würde. Typischerweise kann bei kleinen Motoren von wenigen Watt Leistung davon ausgegangen werden, dass der Fall starker Dämpfung vorliegt, sodass nur exponentiell verlaufende Ausgleichvorgänge, aber kein Schwingen zu beobachten sein wird. Bei Motoren größerer Leistung, die typischerweise mit deutlich kleineren Ankerwiderständen einhergehen, oder insbesondere bei trägheitsarmen Motoren muss aber mit schwacher Dämpfung, also mit Überschwingen gerechnet werden.

Konsequenz dieser Betrachtung ist, dass es sich in vielen Fällen nicht empfiehlt, den Motor rein gesteuert zu betreiben und seiner eigenen Dynamik zu überlassen. Die entsprechende Maßnahme ist also die Einführung eines geschlossenen Regelkreises zur Regelung der Drehzahl. Vorteile einer Regelung sind:

- Vermeidung, zumindest aber Minimierung des Überschwingens der Drehzahl im Fall schwacher Dämpfung
- Erhöhung der Drehzahldynamik im Fall starker Dämpfung
- Vermeidung eines stationären Regelfehlers aufgrund des unbekanntes Lastdrehmoments

Die einfachste Art der Regelung ist eine einschleifige Regelung

Die Regelung wird häufig kaskadiert aufgebaut: Da Ankerstrom und Drehmoment bei konstanter Erregung zueinander proportional sind, wird eine innere Drehmomentregelung als Stromregelung realisiert. Das hat den zusätzlichen Vorteil, dass eine Begrenzung des Ankerstroms auf den zulässigen Maximalwert sehr einfach durch eine Begrenzung des Sollwerts bewerkstelligt werden kann. Der Stromregler muss dann allerdings zuverlässig arbeiten, so dass der Istwert den Sollwert tatsächlich nicht überschreitet. Die Drehzahlregelung wird dann als äußerer Regelkreis aufgebaut.

Bei einfachen Regelungen kann ggf. auf die unterlagerte Stromregelung verzichtet werden. Die Drehzahlregelung wird dann unmittelbar auf die Ankerspannung. Hierbei ist man auf genügende Dämpfung der Regelstrecke selbst angewiesen, also insbesondere auf einen größeren Ankerinnenwiderstand, welcher dämpfend auf regelungstechnische Ausgleichsvorgänge wirkt. Größere Maschinen, bei denen der Ankerwiderstand klein ist, können auf diese Weise nur schlecht geregelt werden. Außerdem entfällt bei dieser Regelungsstruktur die Möglichkeit, den Ankerstrom bezüglich seines zulässigen Maximalwerts zu überwachen.

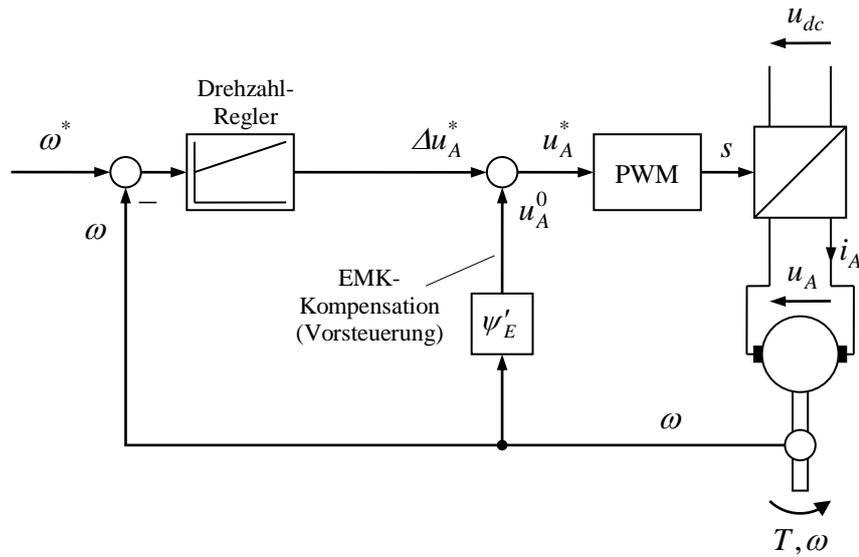


Bild 3-27: Drehzahlregelung ohne unterlagerte Ankerstromregelung

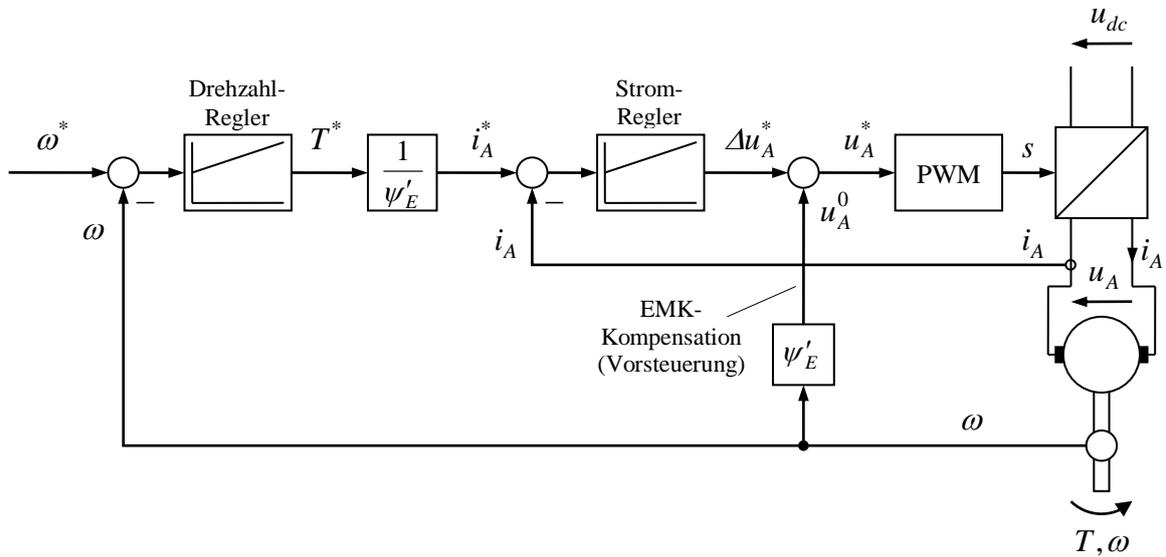


Bild 3-28: Drehzahlregelung mit unterlagerner Ankerstromregelung

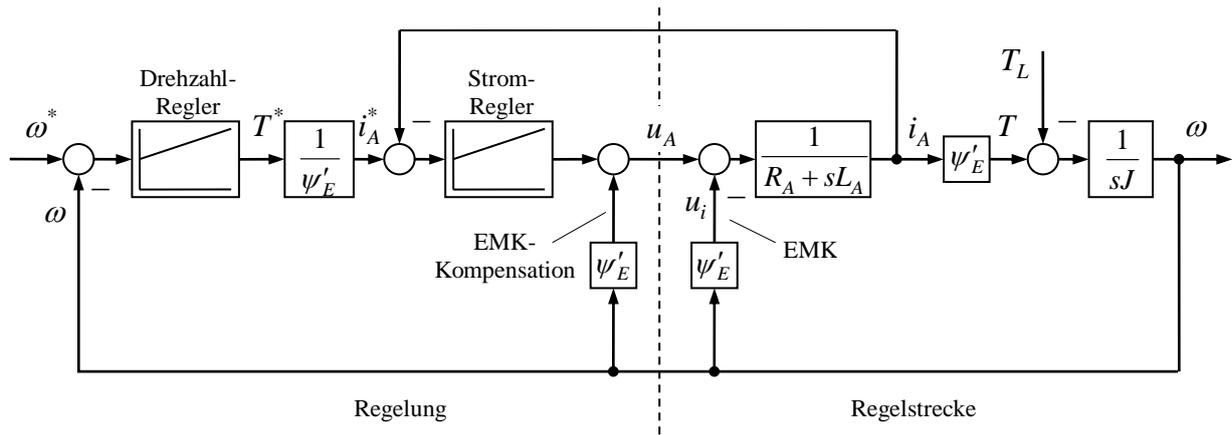


Bild 3-29: Regelungstechnische Modellbildung des gesamten Systems

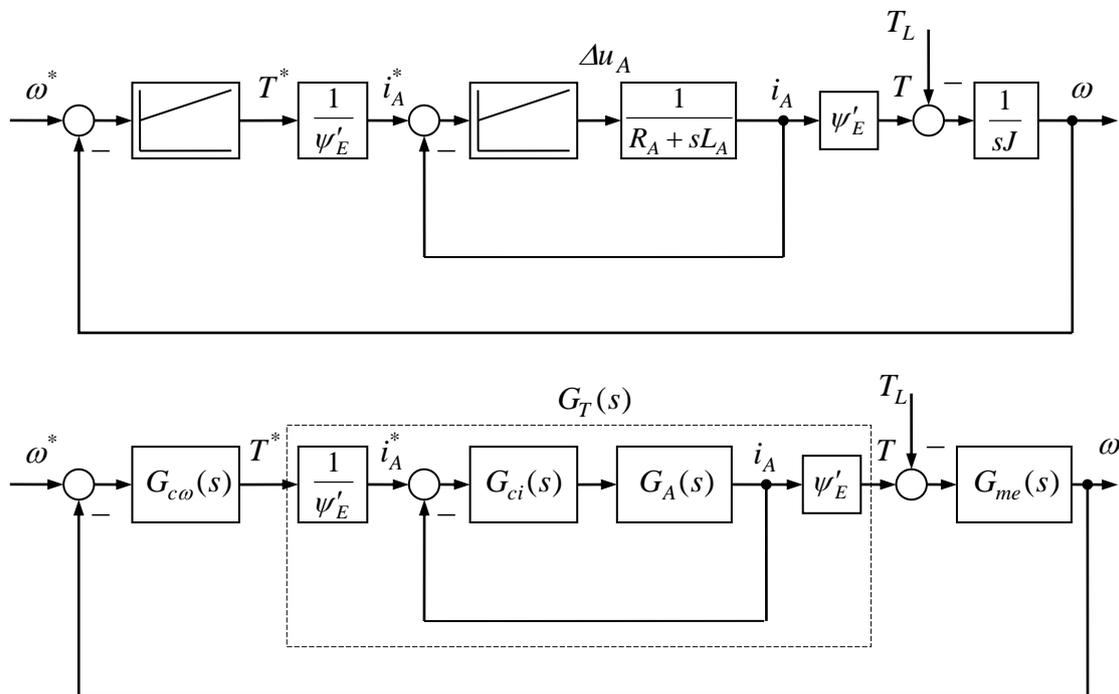


Bild 3-30: Vereinfachte regelungstechnische Modellbildung

Differenzialgleichung für den Ankerstrom und Drehzahl:

$$L_A \dot{i}_A = u_A - R_A i_A - u_i = u_A - R_A i_A - \omega \psi'_E \tag{3.82}$$

$$J \dot{\omega} = T - T_L \tag{3.83}$$

Laplace-Transformierte:

$$sL_A i_A = u_A(s) - R_A i_A(s) - u_i(s) \quad (3.84)$$

$$sJ\omega(s) = T(s) - T_L(s) \quad (3.85)$$

Übertragungsfunktionen:

Übertragungsfunktion des elektrischen Teilsystems (Ankeradmittanz):

$$G_A(s) = Y_A(s) = \frac{i_A(s)}{u_A(s) - u_i(s)} = \frac{1}{R_A + sL_A} \quad (3.86)$$

Drehmoment-Führungsübertragungsfunktion

$$G_T(s) = \frac{T(s)}{T^*(s)} = \frac{G_{ci}(s)G_A(s)}{1 + G_{ci}(s)G_A(s)} \quad (3.87)$$

Übertragungsfunktion des mechanischen Teilsystems:

$$G_{me}(s) = \frac{\omega_A(s)}{T(s) - T_L(s)} = \frac{1}{sJ} \quad (3.88)$$

Drehzahl-Führungsübertragungsfunktion

$$G_\omega(s) = \frac{G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)} \quad (3.89)$$

Störübertragungsfunktion

$$G_{T_L}(s) = \frac{G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)} \quad (3.90)$$

3.13 Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen

Die stationären Gleichungen für den fremderregten Motor lauten

$$u_A = R_A i_A(s) + \omega \psi'_E \quad (3.91)$$

$$T = \psi'_E i_A \quad (3.92)$$

Das Drehmoment ist (bei konstantem Erregerfluss) durch die Stromgrenze des Motors bzw. des speisenden Umrichters

$$|i_A| \leq I_{\max} \quad (3.93)$$

begrenzt,

$$T_{\max} = \psi'_E I_{\max} \quad (3.94)$$

$$T_{\min} = \psi'_E I_{\max} \quad (3.95)$$

Auch die vom speisenden Umrichter gelieferte Spannung ist begrenzt:

$$|u_A| \leq U_{\max} \quad (3.96)$$

Wird der Erregerfluss konstant gehalten (was beim Permanentmagnet-Gleichstrommotor ohnehin der Fall ist), erreicht die Spannung bei der Drehzahl

$$\omega_1 = \frac{U_{\max} - R_A i_A}{\psi'_E} = \frac{U_{\max}}{\psi'_E} - \frac{R_A}{\psi_E'^2} T = \omega_0 - \frac{R_A}{\psi_E'^2} T \quad (3.97)$$

ihre Begrenzung. Die Drehzahl kann darüber hinaus bei gleichbleibendem Fluss nicht weiter gesteigert werden. Die Drehzahl ω_0 ist die Leerlaufdrehzahl, die als ungefähre Abschätzung der Drehzahlgrenze dienen kann. Die exakte Grenzdrehzahl ω_1 hängt aber nicht nur vom Erregerfluss, sondern auch vom Ankerstrom bzw. vom Drehmoment ab. Bei Betrieb mit maximalen Strom $i_A = \pm I_{\max}$ resultieren für den motorischen und generatorischen Fall die Grenzdrehzahlen

$$\omega_{1mot} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\psi'_E} \quad (3.98)$$

$$\omega_{1gen} = \frac{U_{\max} + R_A I_{\max}}{\psi'_E} \quad (3.99)$$

Höhere Drehzahlen als ω_{1mot} bzw. ω_{1gen} sind jedoch möglich, wenn der Erregerfluss verringert (geschwächt) wird. Der Fluss muss im Wesentlichen umgekehrt proportional zur Drehzahl reduziert werden,

$$\psi'_E = \frac{U_{\max} - R_A I_A}{\omega} \approx \frac{U_{\max}}{\omega} \quad (3.100)$$

Dazu bedarf es natürlich einer steuerbaren Erregerspeisung (Permanentmagnet-Gleichstrommotoren sind nicht flussschwächbar). Das verfügbare Drehmoment reduziert sich nun umkehrt proportional zur Drehzahl,

$$T_{\max} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega} \quad (3.101)$$

bzw. für generatorischen Betrieb

$$T_{\min} = \frac{U_{\max} + R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega} \quad (3.102)$$

Die verfügbare mechanische Leistung

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = (U_{\max} - R_A I_{\max}) I_{\max} \approx U_{\max} I_{\max} \quad (3.103)$$

bleibt konstant. Dieser Bereich wird *Flussschwächbereich* bzw. *Konstant-Leistungsbereich* genannt. Im unteren Drehzahlbereich $|\omega| < \omega_1$, wo die Ankerspannung nicht ihre Grenze erreicht, ist die verfügbare Leistung dagegen proportional zur Drehzahl

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = \omega \psi'_E I_{\max} \quad (3.104)$$

bzw.

$$P_{\min} = \omega T_{\min} = -\omega \psi'_E I_{\max} \quad (3.105)$$

Dieser Bereich heißt *Anker-Stellbereich* oder *Spannungs-Stellbereich* bzw. *Konstant-Drehmoment-Bereich*. Der Flussschwächbereich wird häufig als dimensionsloses Verhältnis der Drehzahl ω_1 zur maximalen Drehzahl ω_{\max} , welche in der Regel aus mechanischen Grenzen resultiert, angegeben.

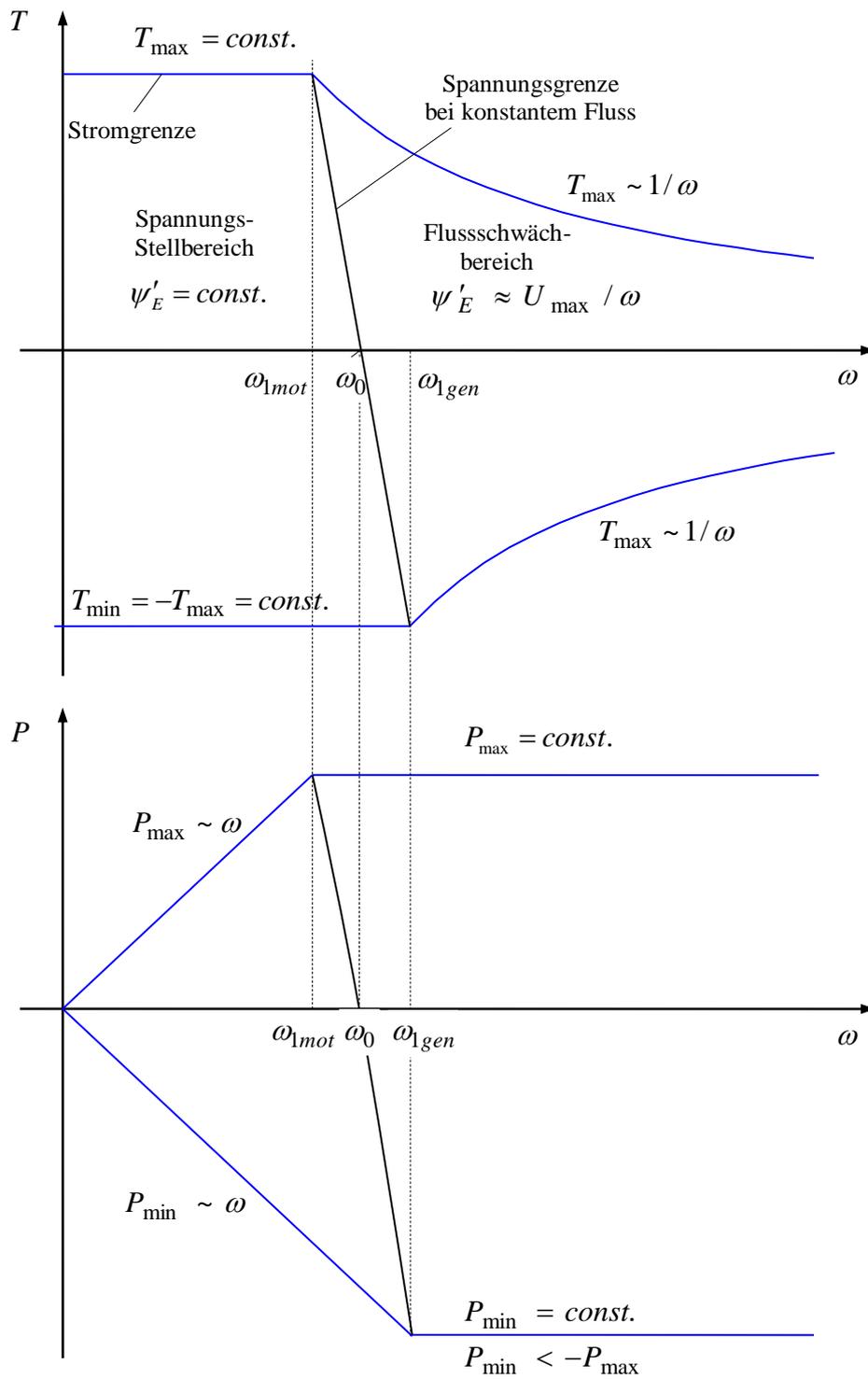


Bild 3-31: Verläufe von verfügbarem Drehmoment und verfügbarer Leistung über der Drehzahl

4 Gleichstromsteller

Gleichstromsteller werden für verschiedene Anwendungen und Leistungsklassen mit Spannungen von wenigen Volt bis zu einigen 100 V oder sogar kV und Leistungen von einem Watt und darunter bis zu einigen 100 kW oder darüber eingesetzt.

4.1 Tiefsetzsteller

4.1.1 Funktionsprinzip

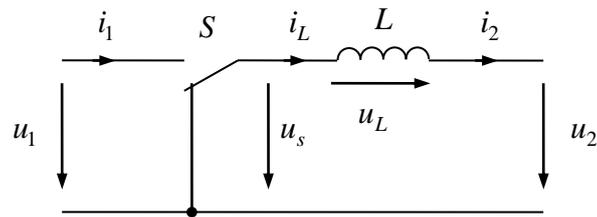


Bild 4-1: Prinzipbild des Tiefsetzstellers

Annahme konstanter Spannungen:

$$u_1(t) = U_1 \quad , \quad u_2(t) = U_2 \quad . \quad (4.1)$$

Der Schalter S wird mit dem *Tastverhältnis*

$$D = \frac{T_e}{T_s} \quad (4.2)$$

getaktet (s. Bild).

Begriffe:

T_e *Einschaltzeit* (Schalter oben)

T_a *Ausschaltzeit* (Schalter unten)

$T_s = T_e + T_a$ *Schaltperiode*

$f_s = \frac{1}{T_s}$ *Schaltfrequenz*

Stellerspannung:

$$u_s(t) = \begin{cases} u_1(t) = U_1 & \text{während der Einschaltzeit} \\ 0 & \text{während der Ausschaltzeit} \end{cases} \quad (4.3)$$

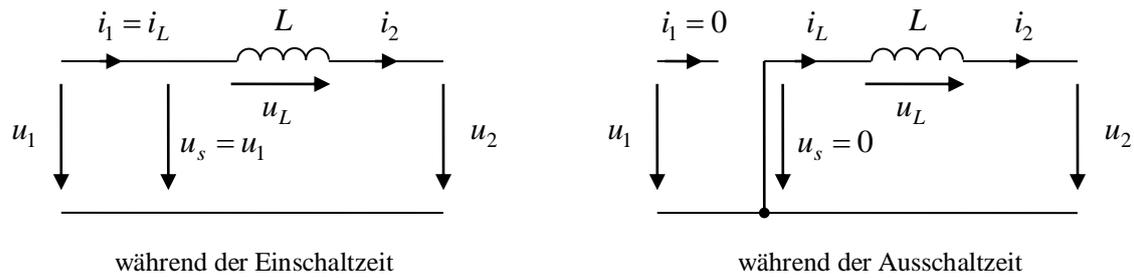


Bild 4-2: Ersatzschaltbilder während Ein- und Ausschaltzeit

Analyse des stationären Verhaltens

Zeitlicher Verlauf des Stroms $i_L(t)$ (vgl. Bild 4-2): Aus

$$L \dot{i}_L(t) = u_L(t) = u_s(t) - U_2 \quad (4.4)$$

folgt während der Einschaltzeit $t \in [0, T_e]$:

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} t \quad (4.5)$$

und während der Ausschaltzeit $t \in [T_e, T_s]$:

$$i_L(t) = i_L(T_e) - \frac{U_2}{L} (t - T_e) = i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} T_e - \frac{U_2}{L} (t - T_e) \quad (4.6)$$

Der Drosselstrom $i_L(t)$ ist genau dann stationär (bzw. periodisch), wenn

$$i_L(T_s) = i_L(0) \quad (4.7)$$

Daraus folgt:

$$i_L(0) + \frac{U_1 - U_2}{L} T_e - \frac{U_2}{L} (T_s - T_e) = i_L(0)$$

$$(U_1 - U_2) T_e - U_2 (T_s - T_e) = 0$$

$$U_1 T_e - U_2 T_s = 0$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_e}{T_s} = D \quad (4.8)$$

Das Tastverhältnis bestimmt ähnlich wie das Übersetzungsverhältnis beim Transformator das Verhältnis der Spannungen!

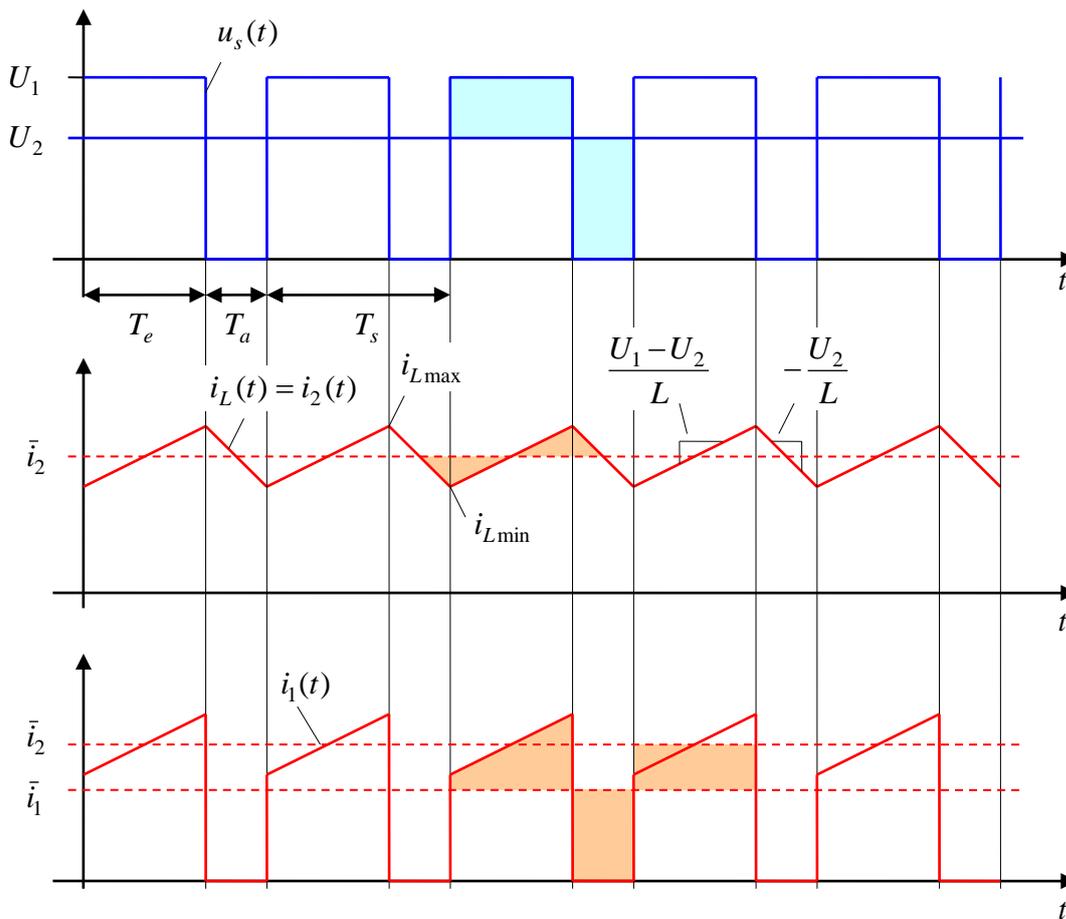


Bild 4-3: Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller im stationären Zustand

Andere alternative Betrachtung mit *Mittelwerten*: Der Strom $i_L(t)$ ändert sich über eine Periode T_s nicht, wenn die Drosselspannung $u_L(t)$ im *Mittel Nullist*, $\bar{u}_L = 0$, denn aus

$$L \dot{i}_L(t) = u_L(t) \quad (4.9)$$

folgt durch Integration über eine Schaltperiode T_s :

$$L(i_L(T_s) - i_L(0)) = \int_0^{T_s} u_L(t) dt = T_s \bar{u}_L = 0 \quad (4.10)$$

Maschengleichung:

$$u_s(t) = u_L(t) + U_2 \quad (4.11)$$

Mittelwerte im stationären Zustand:

$$\bar{u}_s = \bar{u}_L + U_2 = U_2 \quad (4.12)$$

Der Mittelwert der Stellerspannung ist aber

$$\bar{u}_s = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} u_s(t) dt = \frac{T_e U_1}{T_s} = D U_1 \quad (4.13)$$

Daher folgt

$$\bar{u}_s = U_2 = D U_1 \quad (4.14)$$

bzw.

$$\frac{U_2}{U_1} = D \quad (4.15)$$

Für den Mittelwert des Stroms $i_1(t)$ ergibt sich:

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_1(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_L(t) dt = \frac{T_e}{T_s} \bar{i}_L = \frac{T_e}{T_s} \bar{i}_2 \quad (4.16)$$

$$\bar{i}_1 = D \bar{i}_2 \quad (4.17)$$

Also

$$D = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\bar{i}_1}{\bar{i}_2} \quad (4.18)$$

Der Strom des Tiefsetzstellers ist also niemals konstant, sondern schwankt stets nach einem dreieckförmigen Verlauf hin und her. Für die Schwankungsbreite des Stroms i_L folgt

$$\Delta i_L = i_{L\max} - i_{L\min} = i_L(T_e) - i_L(T_s) = \frac{U_2}{L} T_a = \frac{D(1-D) T_s U_1}{L} \quad (4.19)$$

Die maximale Stromschwankungsbreite ergibt sich folglich für das Tastverhältnis $D = 0,5$ zu

$$\Delta i_{L\max} = \frac{T_s U_1}{4L} = \frac{U_1}{4L f_s} \quad (4.20)$$

Damit:

$$\Delta i_L = 4D(1-D) \Delta i_{L\max} \quad (4.21)$$

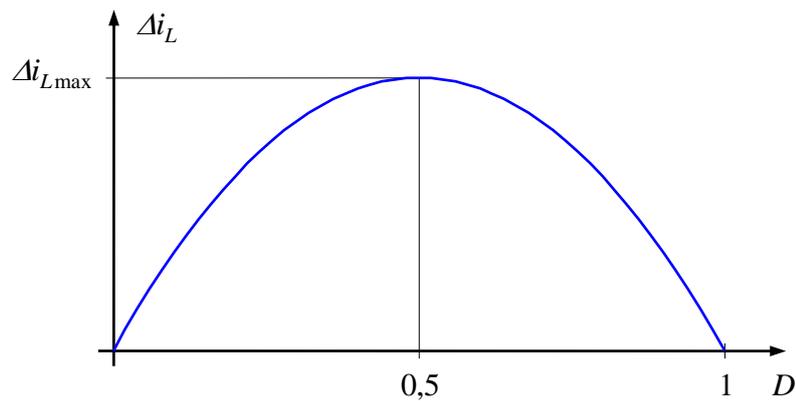


Bild 4-4: Stromschwankung über Tastverhältnis

Die Stromschwankung kann über die *Glättungsdrossel* L oder über die Schaltperiode T_s bzw. über die Schaltfrequenz $f_s = 1/T_s$ beeinflusst werden. Typische Schaltfrequenzen liegen im Bereich einiger 100 Hz (typisch im Leistungsbereich einiger MW mit Spannungen bis zu einigen kV) bis zu 1 MHz (im Kleinspannungsbereich von wenigen Volt und wenigen Watt). Im letzteren Fall kommen typischerweise MOSFET statt Bipolar-Transistoren zum Einsatz.

Ein wichtiges Maß zur Beurteilung der Stromschwankung ist neben dem Spitze-Spitze-Wert die quadratisch bewertete Abweichung vom Mittelwert, also der Effektivwert der Größe

$$i_L(t) - \bar{i}_L$$

welche wir mit

$$\Delta I_L^2 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (i_L(t) - \bar{i}_L)^2 dt \quad (4.22)$$

bezeichnen. Über diese Größe können die durch die Stromschwankung entstehenden zusätzlichen Verluste bestimmt werden. Beispielsweise ließe sich die in einem Widerstand umgesetzte Leistung durch den arithmetischen Mittelwert und die quadratische Abweichung nach

$$P = R\bar{i}_L^2 + R\Delta I_L^2 \quad (4.23)$$

angeben. Das Verhältnis von Scheitelwert eines dreieckförmigen Verlaufs zu seinem Effektivwert ist aber unabhängig von der Form des Dreiecks stets $\sqrt{3}$, also

$$\begin{aligned} \Delta I_L &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \Delta i_L \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} 4D(1-D) \Delta i_{L,max} \end{aligned} \quad (4.24)$$

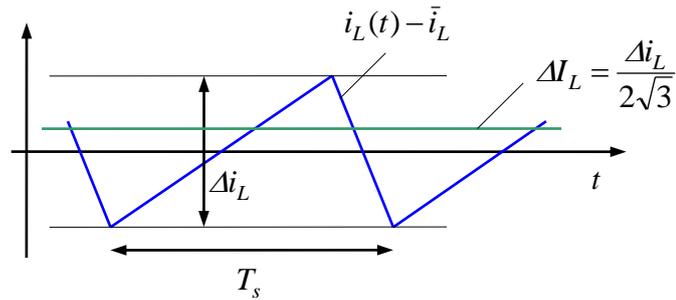


Bild 4-5: Zum Effektivwert der Stromschwankung

4.1.2 Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

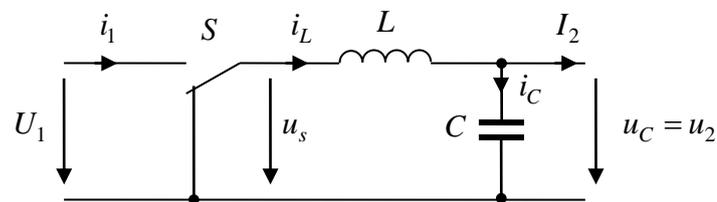


Bild 4-6: Tiefsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

Ist die Ausgangsspannung u_2 nicht von sich aus konstant (z.B. aufgrund der Gegenspannung eines Gleichstrommotors), kann ein Kondensator zur Glättung eingesetzt werden. Es wird ein konstanter Laststrom

$$i_2 = I_2$$

angenommen. Im stationären Zustand muss der Kondensatorstrom

$$i_C(t) = i_L(t) - I_2 \quad (4.25)$$

im zeitlichen Mittel Null sein, $\bar{i}_C = 0$. Daher gilt

$$\bar{i}_L = I_2 \quad (4.26)$$

Die resultierende Schwankung der Kondensatorspannung

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t') dt' = \frac{1}{C} \int (i_L(t') - I_2) dt' \quad (4.27)$$

ergibt sich durch einfache geometrische Betrachtung aus den dreieckförmigen Stromkurvenformen zu (vgl. das folgende Bild)

$$\Delta u_C = u_{C \max} - u_{C \min} = \frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_2} (i_L(t') - I_2) dt' = \frac{1}{C} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Delta i_L (t_2 - t_1) = \frac{1}{4C} \Delta i_L \frac{T_s}{2} \quad (4.28)$$

$$\Delta u_C = \frac{D(1-D)T_s^2 U_1}{8LC} \quad (4.29)$$

Hierbei wird vereinfachend angenommen, dass die Spannungsschwankung Δu_C klein gegenüber der mittleren Kondensatorspannung \bar{u}_2 ist, so dass die Rückwirkung auf den Verlauf der Ströme vernachlässigt werden kann. Die maximal mögliche Spannungsschwankung wird bei $D = 0,5$ erreicht:

$$\Delta u_{C \max} = \frac{T_s^2 U_1}{32LC} \quad (4.30)$$

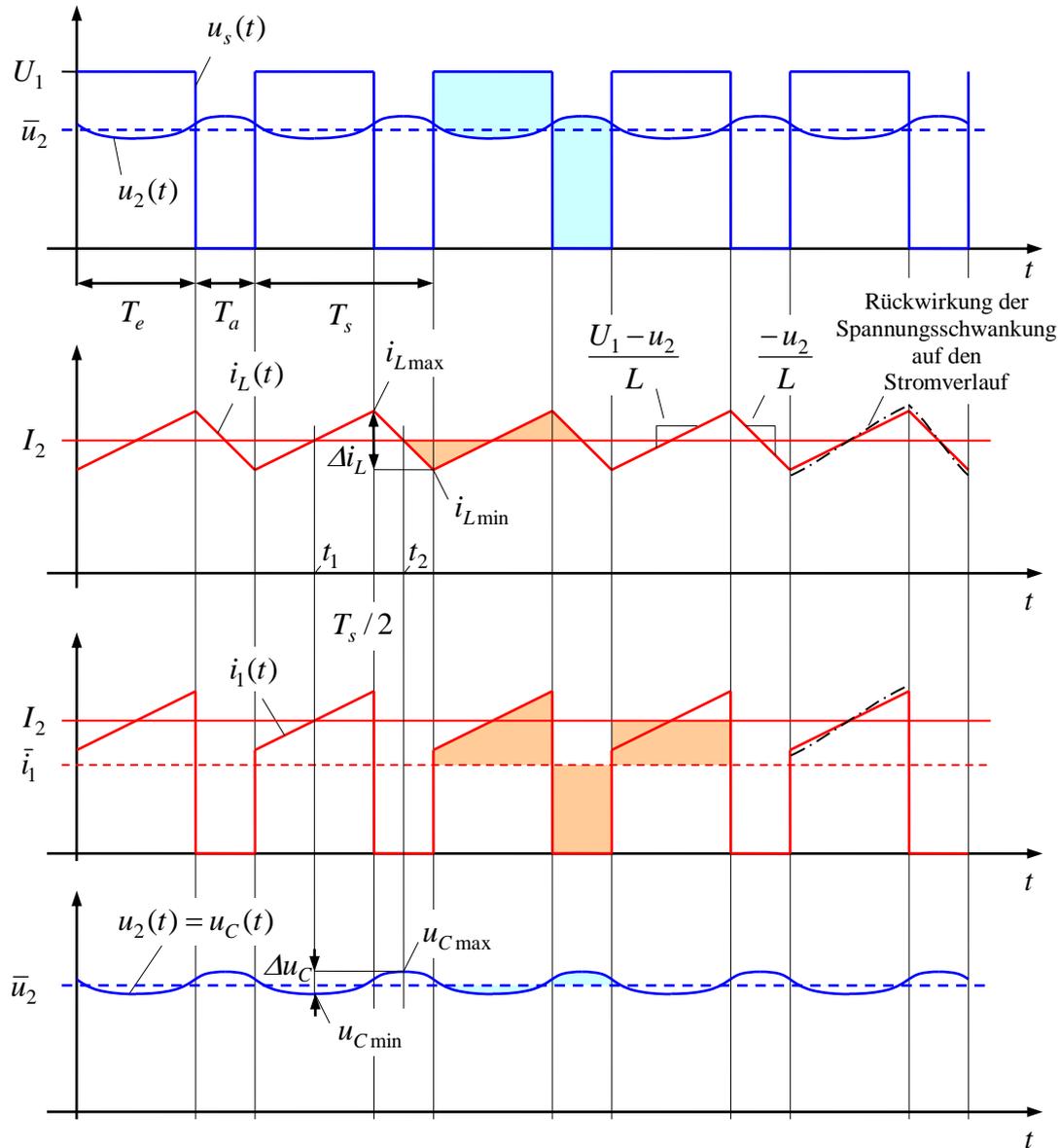


Bild 4-7: Zeitliche Verläufe beim Tiefsetzsteller mit Glättungskondensator

4.1.3 Schaltungstechnische Realisierung

Technisch wird der Schalter des Tiefsetzstellers durch einen Halbleiterschalter (meist ein Bipolar- oder Feldeffekttransistor) und eine Diode realisiert. Diese Schaltungstopologie kann jedoch – selbst bei idealisiertem Schaltverhalten – die volle Funktionalität des idealen Schalters nicht vollständig nachbilden. Diese Topologie kann nur positive Ströme bei positiver Spannung führen (s. Bild 4-8, vgl. aber Abschnitt 4.3). Der Steller beherrscht nur einen Quadranten.

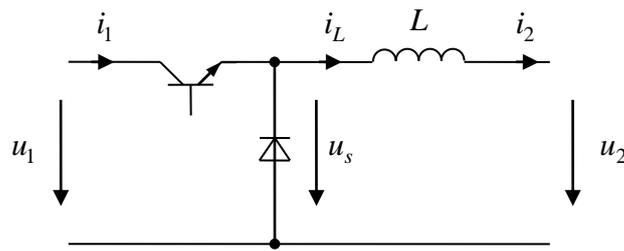


Bild 4-8: Realisierung des Tiefsetzstellers mit Transistor und Diode

4.1.4 Lücken beim Tiefsetzsteller

Die Realisierung des idealen Schalters durch Diode und Transistor beim Tiefsetzsteller führt dazu, dass der Schalter nur in einer Richtung Strom und Leistung führen kann. Ist der mittlere Strom klein, kann die Stromschwankung aufgrund der Pulsung dazu führen, dass im Minimum der Strom sogar Null wird. Der Strom erlischt, da die Diode den Strom nicht umgekehrt leiten kann. Der Strom bleibt solange Null, bis der Transistor in der nächsten Einschaltzeit wieder angesteuert wird. Der Stromfluss zeigt während der Zeit T_a'' eine Lücke, der Strom *lückt*. Dieser Vorgang wird als *Lücken* bezeichnet.

Im Lückbetrieb verändert sich das Spannungsverhältnis, es wird nicht mehr allein durch das Tastverhältnis bestimmt:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_e}{T_e + T_a''} \neq D \quad (4.31)$$

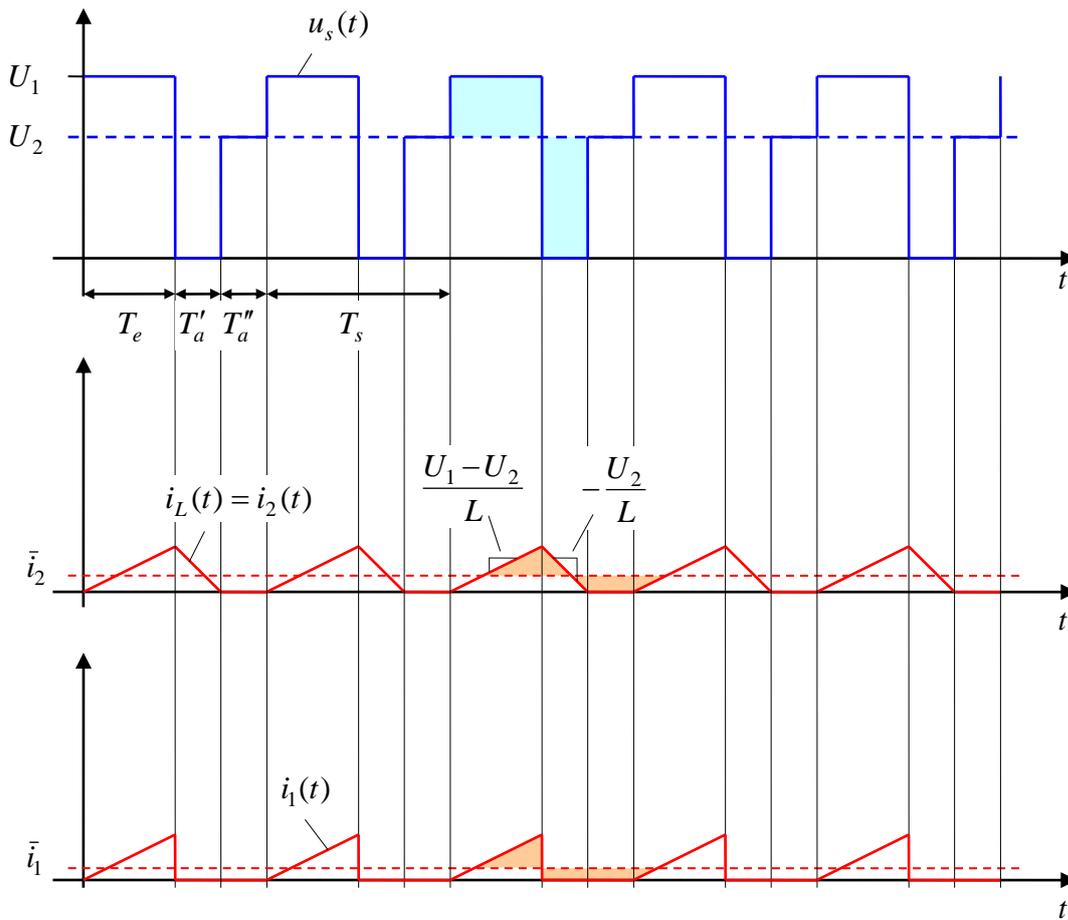


Bild 4-9: Lücken beim Tiefsetzsteller

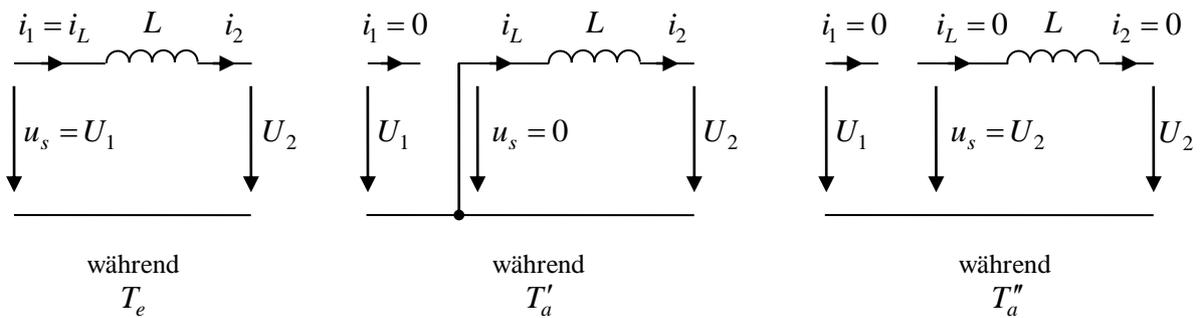


Bild 4-10: Ersatzschaltbilder des Tiefsetzstellers im Lückbetrieb

Transistor leitet: $T_e, D = \frac{T_e}{T_s}$

Diode leitet: $T'_a, D' = \frac{T'_a}{T_s}$

Lückgrenze:

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_L \geq \frac{1}{2} \Delta i_L = 2D(1-D) \Delta i_{L\max} \quad (4.32)$$

mit

$$\Delta i_{L\max} = \frac{T_s U_1}{4L} \quad (4.33)$$

Stromschwankung im lückenden Betrieb auswerten:

steigende Flanke: $\Delta i_L = \frac{U_1 - U_2}{L} T_e = \frac{U_1 - U_2}{L} D T_s$

fallende Flanke: $\Delta i_L = \frac{U_2}{L} T'_a = \frac{U_2}{L} D' T_s$

Division der Gleichungen führt zu

$$\frac{D'}{D} = \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{U_1}{U_2} - 1 \quad (4.34)$$

Strommittelwert im lückenden Betrieb:

$$\begin{aligned} \bar{i}_2 = \bar{i}_L &= \frac{1}{2} \Delta i_L \frac{T_e + T'_a}{T_s} = \frac{1}{2} \Delta i_L (D + D') = \frac{1}{2} \Delta i_L D \frac{U_1}{U_2} \\ &= \frac{1}{2L} \frac{U_1(U_1 - U_2)}{U_2} D^2 T_s = \frac{D^2 T_s}{2L} \left(\frac{U_1^2}{U_2} - U_1 \right) = 2D^2 \left(\frac{U_1}{U_2} - 1 \right) \Delta i_{L\max} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Durch Auflösung nach dem Spannungsverhältnis erhält man die Beziehung für die bezogene Ausgangsspannung in Abhängigkeit vom mittleren Laststrom:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{i}_L}{2\Delta i_{L\max} D^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{i}_2}{2\Delta i_{L\max} D^2}} \quad (4.36)$$

Im lückenden Betrieb wird dagegen (bei angenommener verlustfreier Drossel) die Ausgangsspannung allein durch das Tastverhältnis bestimmt und unabhängig vom Strom:

$$\frac{U_2}{U_1} = D \quad (4.37)$$

Bild 4-11 zeigt das Spannungsverhältnis für lückfreien sowie für lückenden Betrieb in Abhängigkeit vom Laststrom. Im lückfreien Betrieb ist die Ausgangsspannung unabhängig vom Laststrom und hängt nur vom Tastverhältnis ab. Die Ausgangsspannung beim lückenden Betrieb weist dagegen eine starke Abhängigkeit vom Laststrom auf.

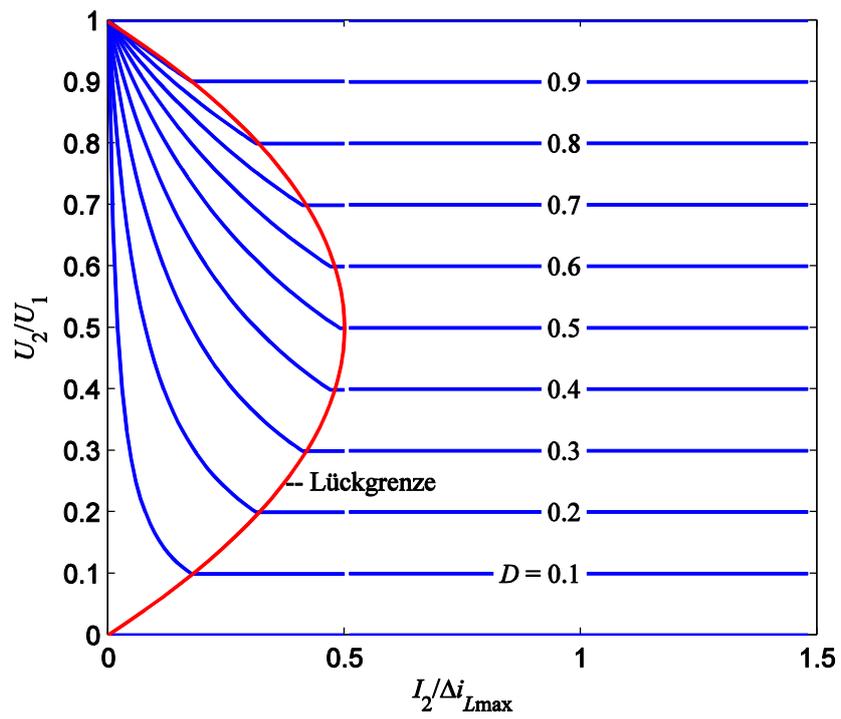


Bild 4-11: Belastungskennlinie für den Tiefsetzsteller

4.2 Hochsetzsteller

4.2.1 Funktionsprinzip

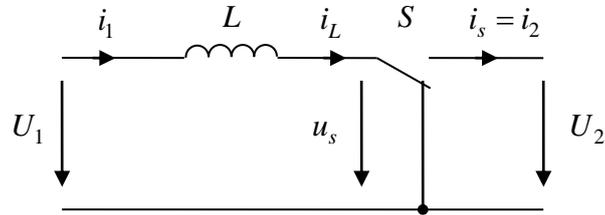


Bild 4-12: Prinzipbild des Hochsetzstellers

Annahme konstanter Spannungen:

$$u_1(t) = U_1, \quad u_2(t) = U_2. \quad (4.38)$$

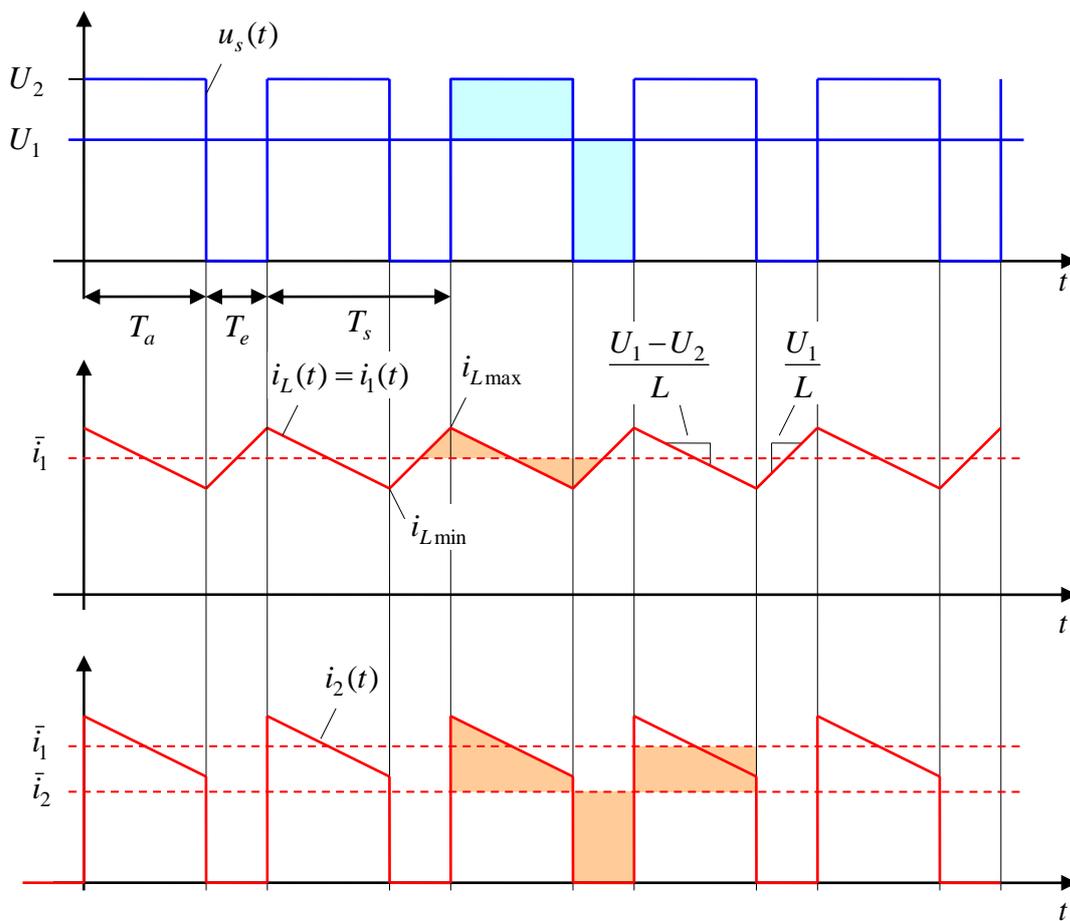


Bild 4-13: Zeitliche Verläufe beim Hochsetzsteller im stationären Zustand

Die Intervalle T_e und T_a werden hier anders definiert als beim Tiefsetzsteller. Die Motivation dazu ergibt sich erst beim Blick auf die Realisierung des Schalter durch Transistor und Diode (s. Bild 4-16).

Tastverhältnis:

$$D = \frac{T_e}{T_s} \quad (4.2)$$

Im stationären Zustand gilt:

$$1 - D = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\bar{i}_2}{\bar{i}_1} \quad (4.39)$$

$$\Delta i_L = i_{L\max} - i_{L\min} = \frac{U_1}{L} T_e = \frac{DT_s U_1}{L} = \frac{D(1-D) T_s U_2}{L} \quad (4.40)$$

4.2.2 Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

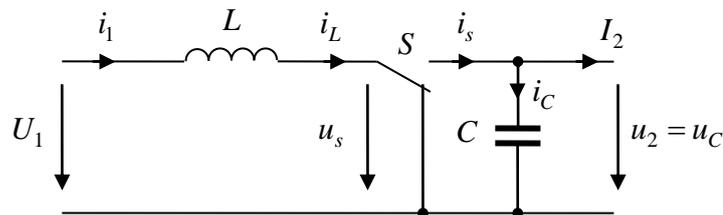


Bild 4-14: Hochsetzsteller mit Kondensator zur Spannungsglättung

Glättung der Ausgangsspannung mit Glättungskondensator. Annahme konstanten Laststroms

$$i_2(t) = I_2 \quad (4.41)$$

Im stationären Zustand gilt wegen $\bar{i}_C = 0$

$$\bar{i}_S = I_2 \quad (4.42)$$

Spannungsschwankung:

$$\Delta u_C = u_{C\max} - u_{C\min} = \frac{I_2}{C} T_e = \frac{I_2 D T_s}{C} = \frac{D(1-D) T_s \bar{i}_1}{C} \quad (4.43)$$

wobei die Rückwirkung der Spannungsschwankung auf die Stromverläufe vernachlässigt wurde.

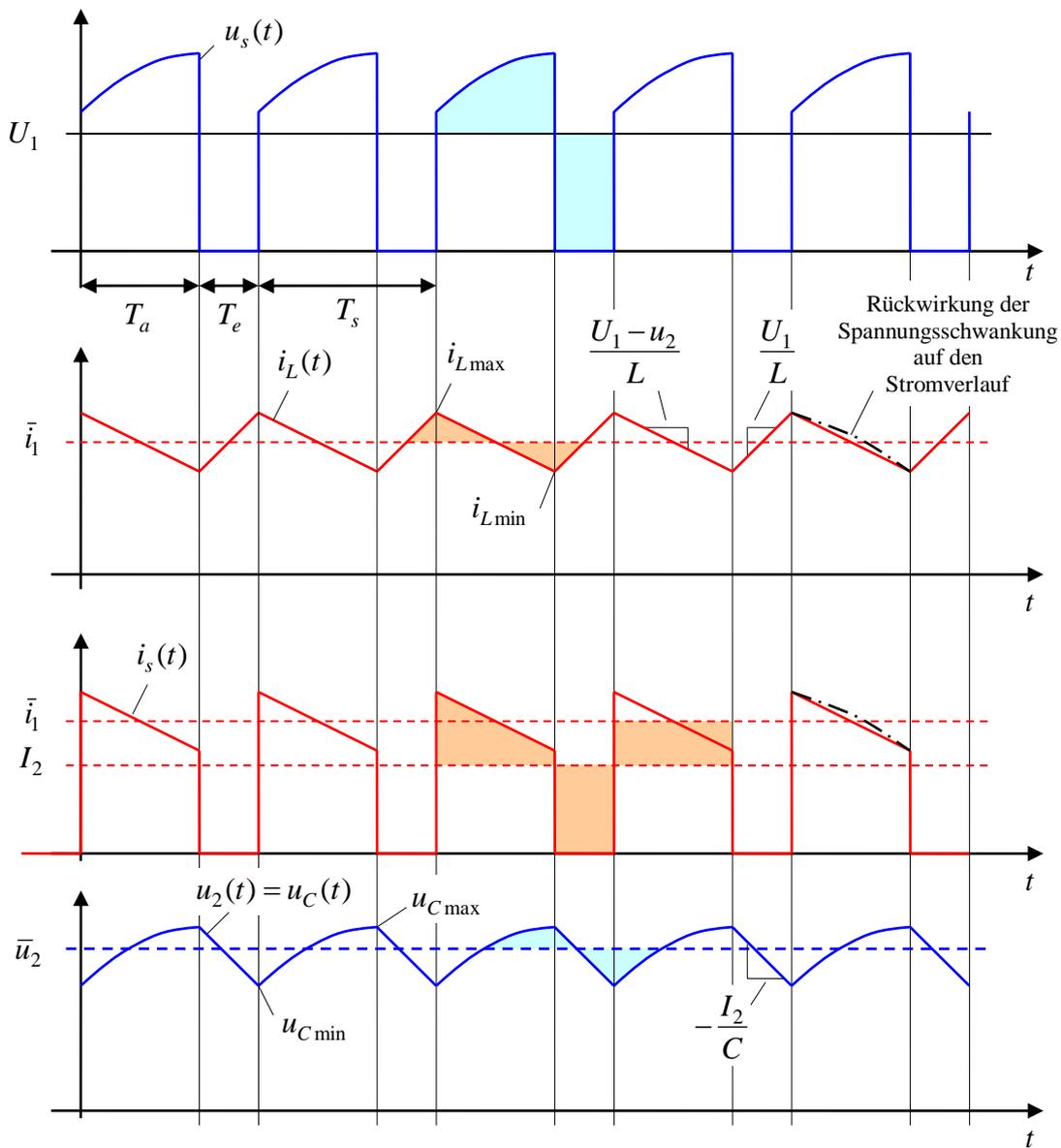


Bild 4-15: Zeitliche Verläufe beim Hochsetzsteller mit Glättungskondensator

4.2.3 Schaltungstechnische Realisierung

Das nachfolgende Bild zeigt die Realisierung des Hochsetzstellers mit einem Transistor und einer Diode. Auch diese Schaltungstopologie kann nur positive Ströme bei positiver Spannung beherrschen. Vgl. aber Abschnitt 4.3.

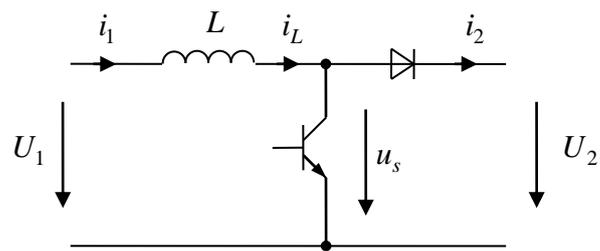


Bild 4-16: Realisierung des Hochsetzstellers mit Transistor und Diode

Die Drossel des Hochsetzstellers hat eine etwas andere Bedeutung als beim Tiefsetzsteller. Anders als bei diesem kann beim Hochsetzsteller keinesfalls auf die Drossel verzichtet werden. Durch den getakteten Betrieb wird sie im Kurzschluss mit Energie aufgeladen, die sie dann an den Ausgang abgibt (Funktion als *Speicherdrossel*).

4.2.4 Lücken beim Hochsetzsteller

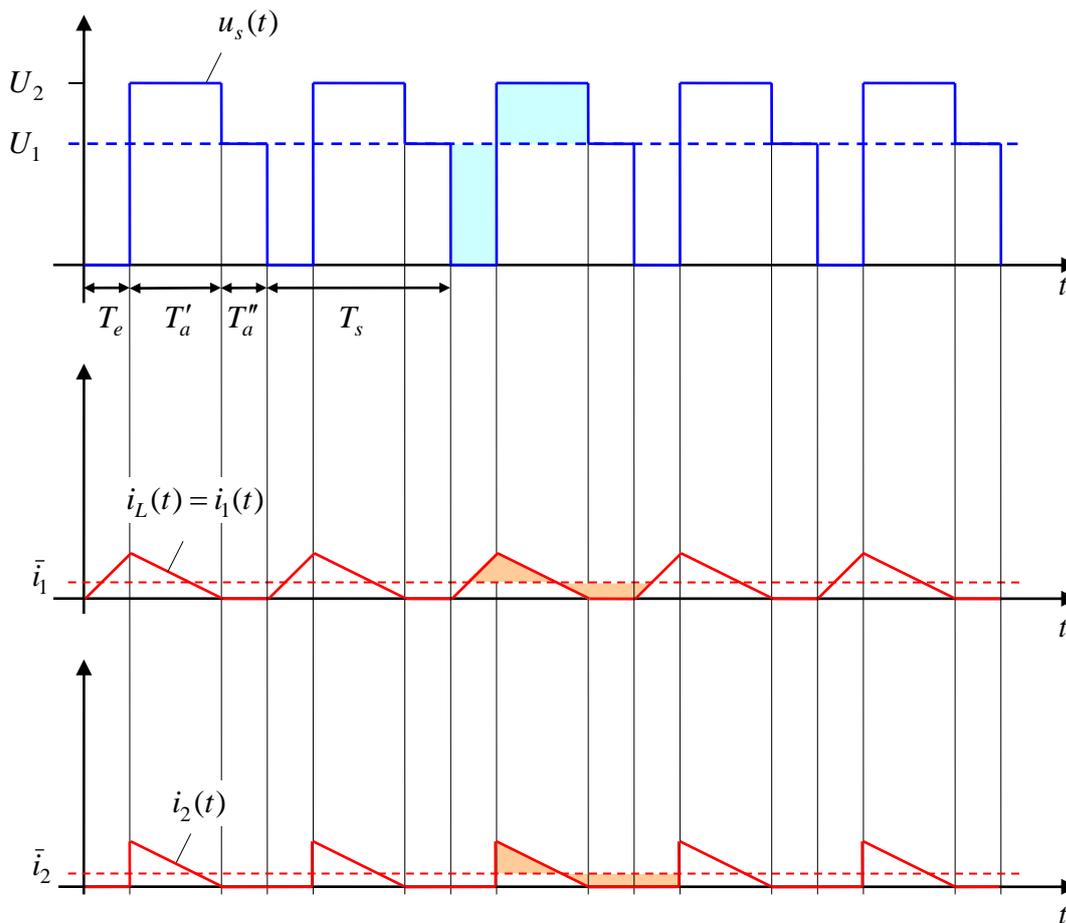


Bild 4-17: Lücken beim Hochsetzsteller

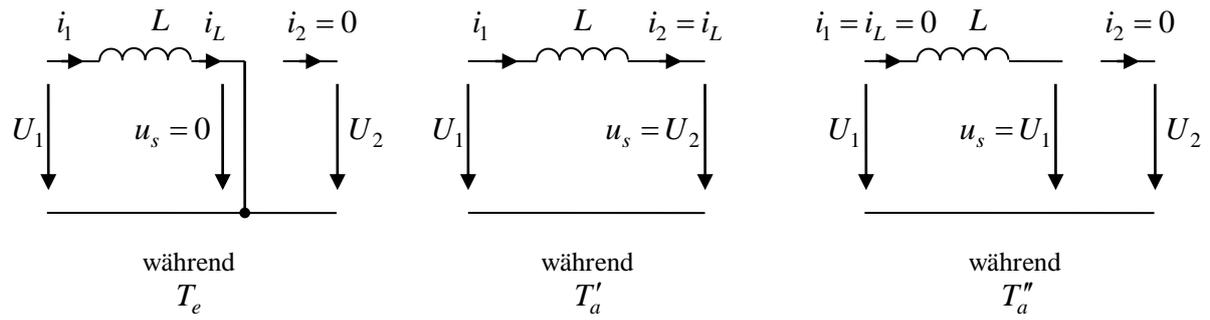


Bild 4-18: Ersatzschaltbilder des Hochsetzstellers im Lückbetrieb

Die Formeln sind entsprechend vom Tiefsetzsteller zu übertragen.

4.3 Weitere aus dem Tiefsetzsteller abgeleitete Schaltungen

4.3.1 Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Stromrichtung

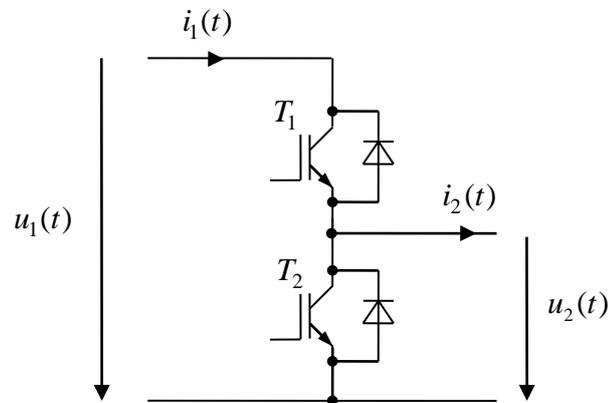


Bild 4-19: Bidirektionaler Gleichstromsteller (Zwei-Quadranten-Steller), Realisierung mit IGBT und Dioden

Der bidirektionale Tiefsetzsteller ist mit zwei Transistoren und zwei antiparallelen Dioden ausgerüstet, um den Strom in beide Richtungen führen zu können. Die Transistoren werden komplementär angesteuert. Der Steller verhält sich je nach Richtung des Stromflusses wie ein Tief- oder Hochsetzsteller. Die Problematik des Lückens tritt hier nicht auf. Die Polarität der Spannung ist bei dieser Schaltungstopologie weiterhin nicht umkehrbar. Der Steller beherrscht also zwei der vier möglichen Strom-Spannungsquadranten. Er kann als *Zwei-Quadranten-Steller* bezeichnet werden.

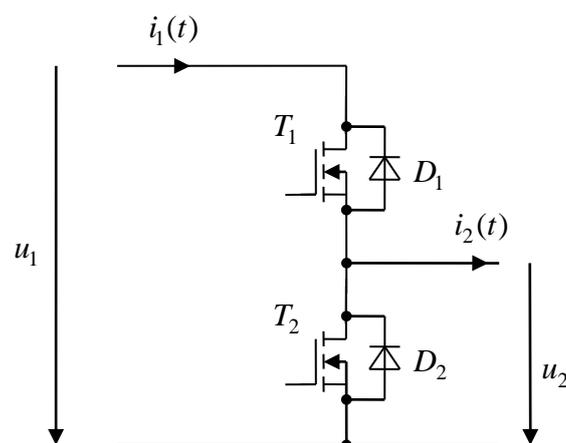


Bild 4-20: Bidirektionaler Gleichstromsteller (Zwei-Quadranten-Steller), Realisierung mit MOSFET und Dioden (entweder integrierte Bodydioden oder zusätzliche externe Dioden).

Die Schaltung mit zwei MOSFET wird sogar mit Vorteil für den Ein-Quadranten-Betrieb eingesetzt, da ein leitender MOSFET einen geringen Spannungsabfall als eine Diode aufweist und – anders als ein Bipolartransistor – den Strom auch in *inverser* Richtung führen kann. Bei positivem Strom i_2 leitet dann der MOSFET T_2 in umgekehrter Richtung. Dadurch können die Verluste insbesondere bei kleinen Betriebsspannungen erheblich reduziert werden. Obwohl die Diode D_2 bei angesteuertem Transistor T_2 also keinen Strom führt, sollte zum Zwecke einer geordneten Kommutierung unter Einhaltung der Wechselsperrzeit auf diese nicht verzichtet werden (ggf. sowieso vorhandene interne Body-Diode). Die Diode D_1 wäre für den Ein-Quadranten-Betrieb allerdings entbehrlich.

4.3.2 Bidirektionaler Gleichstromsteller mit Umkehrung der Spannungsrichtung

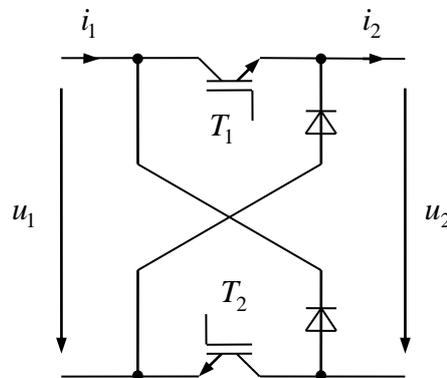


Bild 4-21: Bidirektionaler Tiefsetzsteller mit Umkehrung der Spannung (asymmetrische Halbrücke)

Voraussetzung:

$$i_2 > 0, \quad u_1 > 0 \quad (4.44)$$

Schaltfunktion

$$s(t) \in \{-1, 0, +1\} \quad (4.45)$$

$$u_2(t) = s(t)u_1(t) \quad (4.46)$$

$$i_1(t) = s(t)i_2(t) \quad (4.47)$$

s	T_1	T_2	u_2	i_1
+1	1	1	$+u_1$	$+i_2$
-1	0	0	$-u_1$	$-i_2$
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

4.3.3 Vier-Quadranten-Steller

Einsatzgebiete:

- Stromrichter für Gleichstrommotoren, wenn sowohl beide Drehrichtungen sowie motorischer und generatorischer Betrieb beherrscht werden müssen.
- Stromrichter für Einphasen-Wechselstrommotoren (Asynchronmotor, Synchronmotor)
- Gleichrichter (Netzstromrichter) für Einphasen-Wechselspannung.

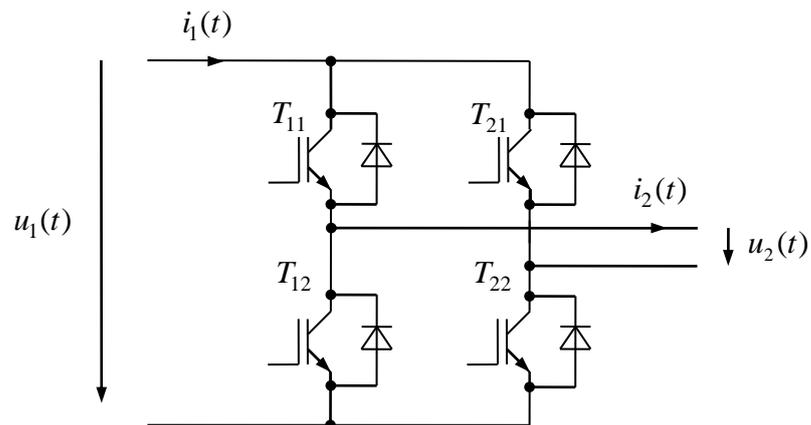


Bild 4-22: Vier-Quadranten-Steller, Realisierung mit IGBT

5 Fremdgeführte Umrichter

Im Gegensatz zu selbstgeführten Umrichtern, bei denen die Kommutierung allein durch die Ansteuerung des leistungselektronischen Schalters ausgelöst wird, benötigen *fremdgeführte* Umrichter zur Kommutierung eine passende Gegenspannung. Je nach Einsatzbereich spricht man von *netzgeführten* oder *lastgeführten* Stromrichtern.

Die folgenden Schaltungen können dazu eingesetzt werden, eine Wechsel- oder Drehspannung in eine Gleichspannung umzuformen.

5.1 Thyristor-Mittelpunkt- und Brückenschaltungen

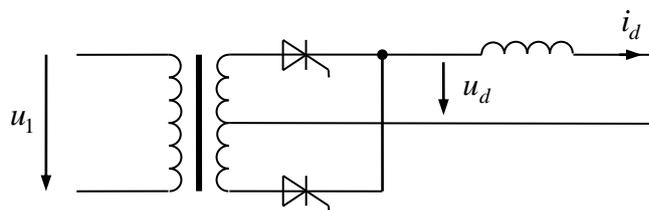


Bild 5-1: M2-Schaltung

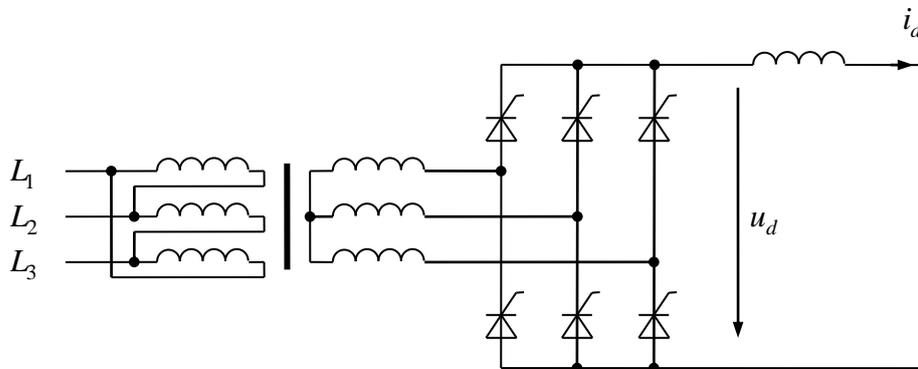


Bild 5-2: B6-Schaltung

Die B6-Schaltung kann auch ohne Transformator direkt am Netz betrieben werden. Das ausgangsseitige Potenzial wird dann aber durch die Leiterspannungen festgelegt. In diesem Fall wird auch eine Kommutierungsinduktivität benötigt, die beim Betrieb mit Transformator durch dessen Streuinduktivität bereitgestellt wird.

Allgemein: p -pulsige Schaltung. Die maximale mittlere Ausgangsspannung wird über die Mittelung über einen „Puls“ der Länge $2\pi/p$ bestimmt

$$U_{d\max} = \frac{1}{2\pi/p} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \hat{u} \cos \gamma \, d\gamma = \hat{u} \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} = U \frac{\sqrt{2} p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} \quad (5.1)$$

Spannungsmittelwert in Abhängigkeit des Steuerwinkels α :

$$U_d = \frac{p}{2\pi} \int_{\alpha - \frac{\pi}{p}}^{\alpha + \frac{\pi}{p}} \hat{u} \cos \varphi \, d\varphi = \hat{u} \frac{p}{2\pi} \left[\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{p} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{p} \right) \right] = \hat{u} \frac{p}{\pi} \cos \alpha \sin \frac{\pi}{p} \quad (5.2)$$

$$U_d = U_{d\max} \cos \alpha \quad (5.3)$$

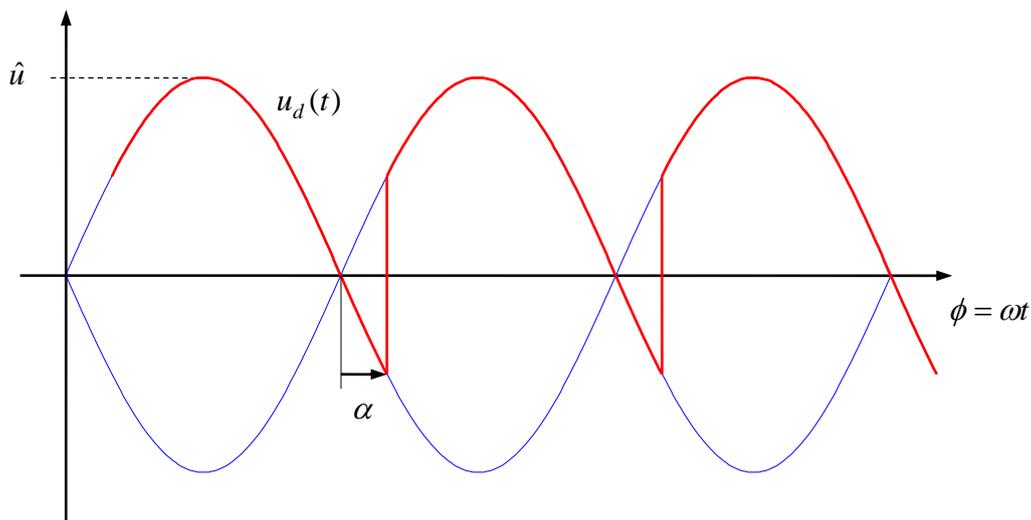


Bild 5-3: Spannungsverlauf einer zweipulsigen Schaltung
Steuerwinkel $\alpha = 30^\circ$

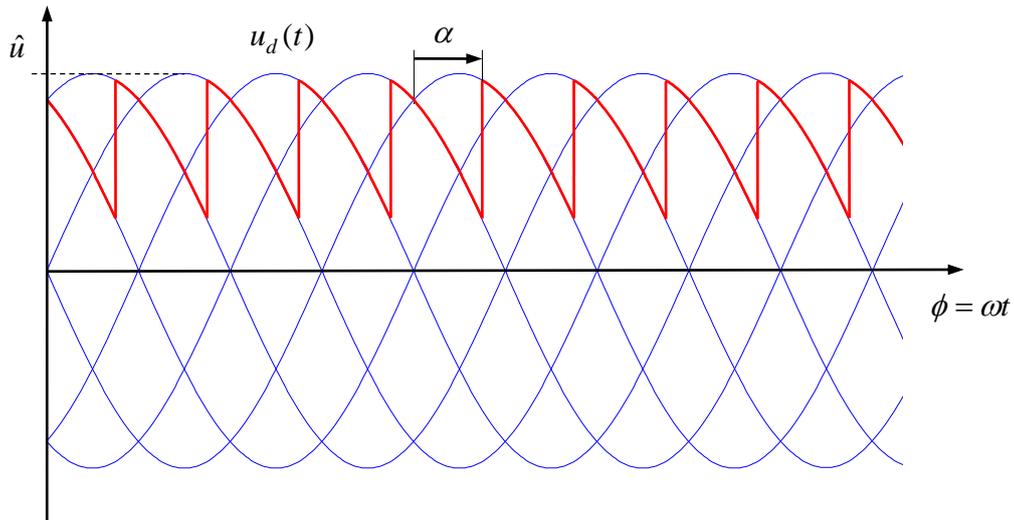


Bild 5-4: Spannungsverlauf einer sechspulsigen Schaltung
hier: Steuerwinkel $\alpha = 45^\circ$

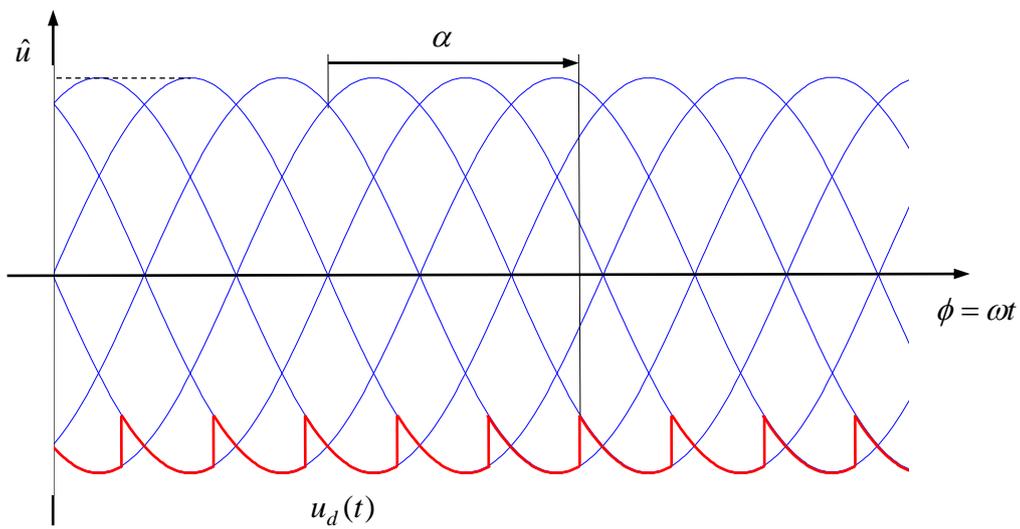


Bild 5-5: Spannungsverlauf einer sechspulsigen Schaltung
hier: Steuerwinkel $\alpha = 165^\circ$

5.2 Umkehrstromrichter

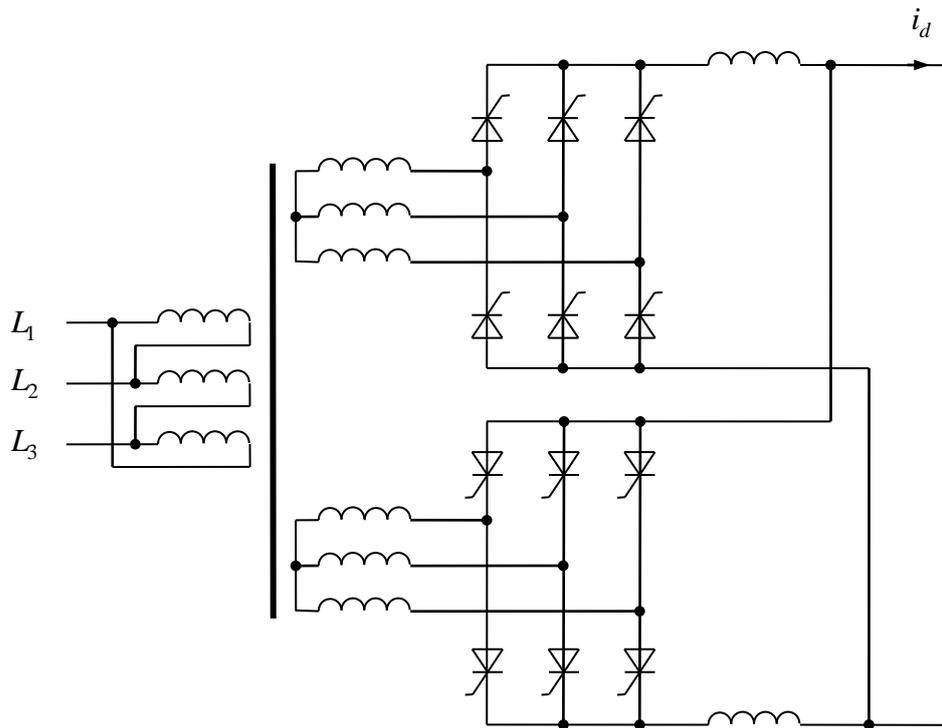


Bild 5-6: Kreisstrombehafteter Umkehrstromrichter

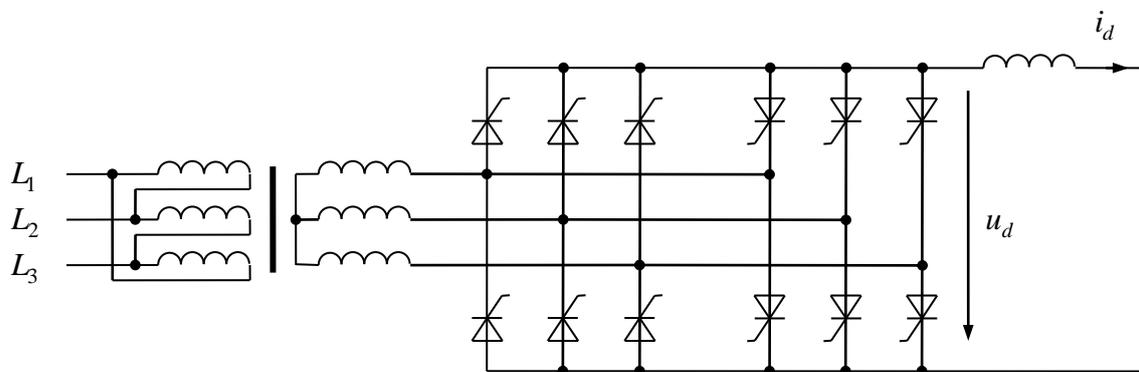


Bild 5-7: Kreisstromfreier Umkehrstromrichter

Durch seine beiden antiparallelen Brücken kann der Umkehrstromrichter beide Strom- und Spannungsrichtungen beherrschen.

Beim kreisstromfreien Umkehrstromrichter darf jedoch immer nur eine Brücke aktiv sein, da andernfalls ein Kurzschluss entsteht. Jede der beiden Brücken ist für eine Stromrichtung

zuständig. Der Wechsel der Brücken, also dann, wenn eine Umkehrung der Stromrichtung notwendig wird, erfolgt nach folgendem Schema:

- Steuerwinkel der aktiven Brücke in Wechselrichterendlage stellen (Thyristoren müssen wegen Gefahr des Wechselrichterkippen solange weiter gezündet werden, bis der Strom erloschen ist)
- Abwarten, bis der Strom erloschen ist
- Sperren der bislang aktiven Brücke, d.h. keine weiteren Zündimpulse erzeugen
- Aktivieren der anderen Brücke

Der kreisstrombehaftete Umkehrstromrichter kann dagegen sehr schnell von einem Stromrichter zum anderen umgeschaltet werden. Durch gleichzeitigen Betrieb beider Brücken im Bereich kleiner Ströme kann man durch einen Kreisstrom auch das Lücken vollständig vermeiden.

5.3 Wechselspannungssteller

In Wechselspannungsstellern, insbesondere im Konsum- und Kleinleistungsbereich, werden häufig Triacs eingesetzt. Ein Triac lässt sich funktionell als Antiparallelschaltung zweier Thyristoren verstehen.

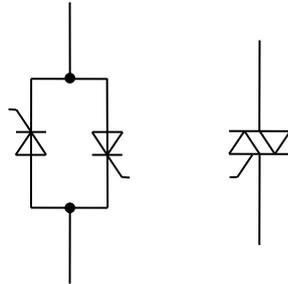


Bild 5-8: Triac als Antiparallelschaltung zweier Thyristoren

Mit einem durch eine Triac-Schaltung gespeisten Universalmotor (Reihenschlussmotor in WS-Speisung) lassen sich einfache drehzahlverstellbare Antriebe aufbauen:

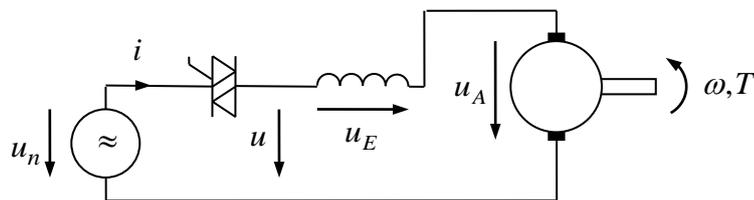


Bild 5-9: Phasenanschnittsteuerung für Universalmotor

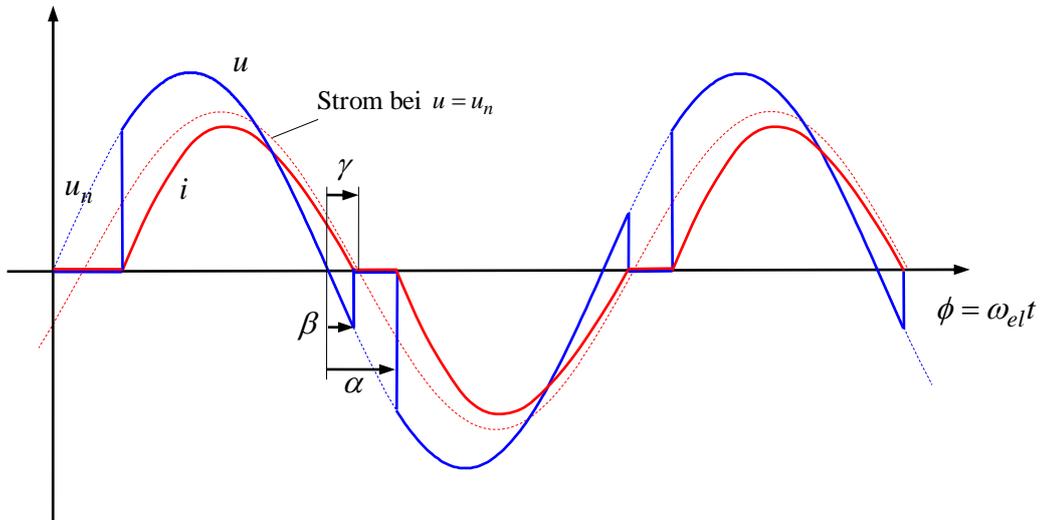


Bild 5-10: Verläufe von Strom und Spannung einer Phasenanschnittsteuerung bei ohmsch-induktiver Last

Der Universalmotor verhält sich an seinen Klemmen wie ein RL -Glied mit

$$R'(\omega_{me}) = R_A + R_E + L'_E \omega_{me} \quad (5.4)$$

$$L = L_A + L'_E \quad (5.5)$$

wobei der Ersatzwiderstand R' von der Drehfrequenz ω_{me} abhängig ist. Bei stationärer sinusförmiger Speisung

$$u(\phi) = u_n(\phi) = \hat{u} \sin \phi \quad (5.6)$$

bestimmt sich der Phasenwinkel γ zwischen Spannung und Strom

$$i(\phi) = \hat{i} \sin(\phi - \gamma) \quad (5.7)$$

nach

$$\tan \gamma = \frac{\omega_{el} L}{R'(\omega_{me})} = \omega_{el} \tau \quad (5.8)$$

mit der drehzahlabhängigen Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L}{R'(\omega_{me})} \quad (5.9)$$

Die Stromamplitude bestimmt sich zu

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R'^2(\omega_{me}) + \omega_{el}^2 L^2}} \quad (5.10)$$

Bei Speisung durch die Phasenanschnittsschaltung ergibt sich der Stromverlauf durch eine Superposition eines sinusförmigen Abschnitts mit einem mit der Zeitkonstante τ exponentiell abklingenden Anfangswertanteils:

$$i(\phi) = \hat{i} \left(\sin(\phi - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\phi - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \right) \quad \text{für } \alpha \leq \omega t \leq \pi + \beta \quad (5.11)$$

Der Koeffizient der Exponentialfunktion ist so gewählt, so dass die Anfangsbedingung $i(\alpha) = 0$ erfüllt wird. Der Winkel β , bei dem der Strom wieder verlischt, lässt sich aus der Bedingung

$$i(\pi + \beta) = \hat{i} \left(-\sin(\beta - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \beta - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \right) = 0$$

$$\sin(\beta - \gamma) = -\sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \beta - \alpha}{\omega_{el}\tau}}$$

bestimmen, was allerdings eine transzendente Gleichung darstellt, die nicht geschlossen gelöst werden kann. Unter der Annahme, dass der Winkel β nicht viel von γ abweicht (s. Zeitverläufe im obigen Bild), also $\gamma - \beta \ll 1$, lässt sich eine Näherungslösung entwickeln:

$$\sin(\beta - \gamma) = -\sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} e^{\frac{\gamma - \beta}{\omega_{el}\tau}}$$

$$\beta - \gamma = -\sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \left(1 + \frac{\gamma - \beta}{\omega_{el}\tau} \right)$$

$$\beta \omega_{el}\tau = \gamma \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} (\omega_{el}\tau + \gamma - \beta)$$

$$\beta \left(\omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} \right) = \gamma \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} (\omega_{el}\tau + \gamma)$$

$$\beta = \frac{\gamma \omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}} (\omega_{el}\tau + \gamma)}{\omega_{el}\tau - \sin(\alpha - \gamma) e^{-\frac{\pi + \gamma - \alpha}{\omega_{el}\tau}}} \quad (5.12)$$

Für sehr kleine Zeitkonstanten $\omega_e l \tau \ll 1$ folgt $\beta \approx \gamma$.

Im normalen Phasenanschnittsbetrieb muss $\alpha > \beta$ eingehalten werden. Ist der Steuerwinkel $\alpha < \beta$, führt das dazu, dass der Triac bereits wieder angesteuert wird, wenn der Strom noch gar nicht erloschen ist. Bei impulsförmiger Ansteuerung ist das Ergebnis, dass jeder 2. Steuerimpuls ohne Wirkung bleibt und entsprechend jede 2. Halbschwingung ausfällt. Steht dagegen das Ansteuersignal im gesamten Intervall $\alpha < \phi < \pi$ an, so dass der Triac auch noch nach dem Winkel α gezündet wird, wird die Netzspannung vollständig durchgeschaltet. Ein Phasenanschnitt findet dann nicht mehr statt.

Für den Fall $\alpha > \beta$ soll der Grundschwungsanteil u_1 der Spannung $u(t)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\phi) \sin \phi \, d\phi = \hat{u} - \frac{2}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} \hat{u} \sin^2 \phi \, d\phi = \hat{u} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} (1 - \cos 2\phi) \, d\phi \right] \\
 &= \hat{u} \left[1 - \frac{\alpha - \beta}{\pi} + \frac{1}{2\pi} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \right] \\
 &= \hat{u} \left[1 - \frac{\alpha - \beta}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \right]
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

6 Wechselstromtransformatoren

6.1 Modellierung von Transformatoren mit Streuung

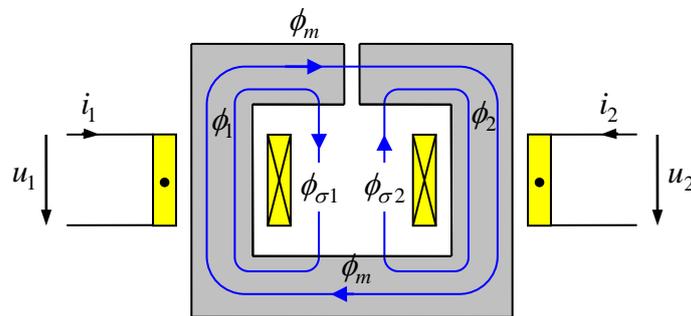


Bild 6-1: Streuflüsse im Transformator hier mit Luftspalt

Begriffe:

Streuung: Die nicht vollständige Verkettung zweier Wicklungen.

Streuflüsse: Der Anteil des Flusses einer Wicklung, der nicht mit der anderen Wicklung verkettet ist: $\phi_{\sigma 1}$, $\phi_{\sigma 2}$

Hauptfluss ϕ_m : Der Anteil des Flusses, der beide Wicklungen miteinander verkettet (m steht für *main* oder *mutual*).

Eine Streuung ist nicht grundsätzlich unerwünscht, sondern ist bei manchen Anwendungen durchaus sinnvoll und nutzbringend.

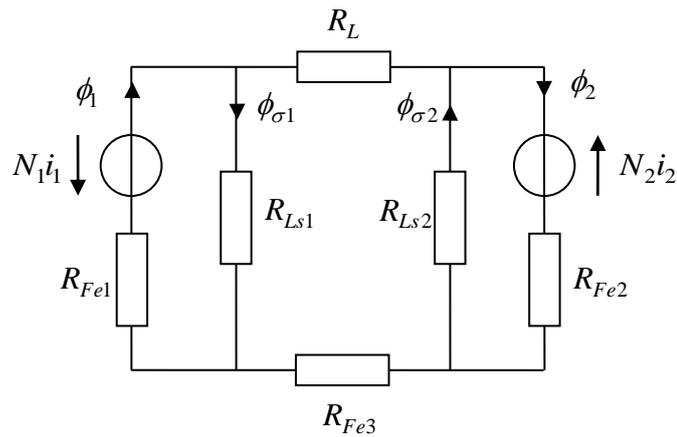


Bild 6-2: Reluktanzmodell mit Luftspalt und Streuwegen.

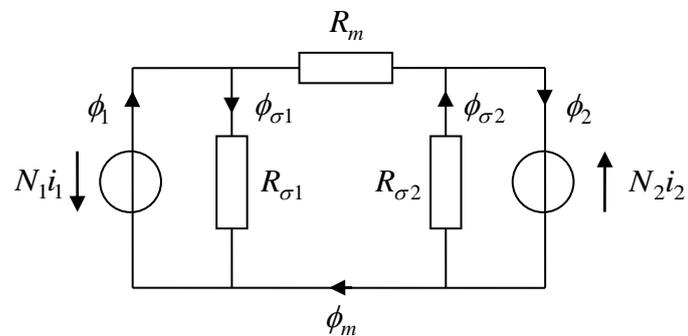


Bild 6-3: Vereinfachtes Reluktanzmodell

Berechnung des magnetischen Kreises:

$$\phi_{\sigma 1} = \frac{N_1 i_1}{R_{\sigma 1}} \quad (6.1)$$

$$\phi_{\sigma 2} = \frac{N_2 i_2}{R_{\sigma 2}} \quad (6.2)$$

$$\phi_m = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_m} \quad (6.3)$$

$$\phi_1 = \left(\frac{1}{R_{\sigma 1}} + \frac{1}{R_m} \right) N_1 i_1 + \frac{1}{R_m} N_2 i_2 = (\Lambda_m + \Lambda_{\sigma 1}) N_1 i_1 + \Lambda_m N_2 i_2 \quad (6.4)$$

$$\phi_2 = \left(\frac{1}{R_{\sigma 2}} + \frac{1}{R_m} \right) N_2 i_2 + \frac{1}{R_m} N_1 i_1 = (\Lambda_m + \Lambda_{\sigma 2}) N_2 i_2 + \Lambda_m N_1 i_1 \quad (6.5)$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m + A_{\sigma 1} & A_m \\ A_m & A_m + A_{\sigma 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{N} \boldsymbol{i} \quad (6.7)$$

mit den Vektoren und Matrizen

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_m + A_{\sigma 1} & A_m \\ A_m & A_m + A_{\sigma 2} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

wobei

$$A_m = \frac{1}{R_m}, \quad A_{\sigma 1} = \frac{1}{R_{\sigma 1}}, \quad A_{\sigma 2} = \frac{1}{R_{\sigma 2}} \quad (6.9)$$

die magnetischen Leitwerte der Haupt- und Streuwege sind. Die magnetische Leitwertmatrix ist symmetrisch,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \quad (6.10)$$

Übergang auf mehrfach verkettete Flüsse:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{A} \boldsymbol{N} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{L} \boldsymbol{i} \quad (6.12)$$

Die Matrix

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{A} \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

heißt *Induktivitätsmatrix*. Üblicherweise verwendet man statt der Matrixindizierung der einzelnen Elemente L_{jk} folgende alternative Bezeichnungen:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_m \\ L_m & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{m1} + L_{\sigma 1} & L_m \\ L_m & L_{m2} + L_{\sigma 2} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Die Induktivitätsmatrix ist im Übrigen symmetrisch,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^T, \quad \text{bzw.} \quad L_{12} = L_{21} = L_m \quad (6.15)$$

Die Elemente werden wie folgt bezeichnet bzw. bestimmt:

Hauptinduktivität oder Gegeninduktivität	$L_m = N_1 N_2 \Lambda_m$
Primäre Hauptinduktivität	$L_{m1} = N_1^2 \Lambda_m$
Sekundäre Hauptinduktivität	$L_{m2} = N_2^2 \Lambda_m$
Primäre Streuinduktivität	$L_{\sigma 1} = N_1^2 \Lambda_{\sigma 1}$
Sekundäre Streuinduktivität	$L_{\sigma 2} = N_2^2 \Lambda_{\sigma 2}$
Primäre Selbstinduktivität	$L_1 = L_{11} = L_{m1} + L_{\sigma 1} = N_1^2 (\Lambda_m + \Lambda_{\sigma 1})$
Sekundäre Selbstinduktivität	$L_2 = L_{22} = L_{m2} + L_{\sigma 2} = N_2^2 (\Lambda_m + \Lambda_{\sigma 2})$

Der sogenannte Kopplungsfaktor ist definiert als

$$\kappa = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (6.16)$$

Die *Streuung* oder *Streuziffer* ist

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - L_m^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{L_{m1} L_{m2}}{L_1 L_2} = 1 - \kappa^2 \quad (6.17)$$

Bei idealer Flussverkettung (keine Streuung) zwischen den beiden Wicklungen ist $\kappa = 1$ und $\sigma = 0$.

6.2 Dynamische Gleichungen und elektrisches Ersatzschaltbild

Dynamische Gleichungen:

$$\dot{\psi}_1 = u_1 - R_1 i_1 \quad (6.18)$$

$$\dot{\psi}_2 = u_2 - R_2 i_2 \quad (6.19)$$

Zusammenhang zwischen Strömen und Flüssen:

$$\psi_1 = L_1 i_1 + L_m i_2 \quad (6.20)$$

$$\psi_2 = L_2 i_2 + L_m i_1 \quad (6.21)$$

Daraus folgen die Spannungsgleichungen, die man in einem Ersatzschaltbild darstellen kann

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dot{i}_1 + L_m \dot{i}_2 \quad (6.22)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dot{i}_2 + L_m \dot{i}_1 \quad (6.23)$$

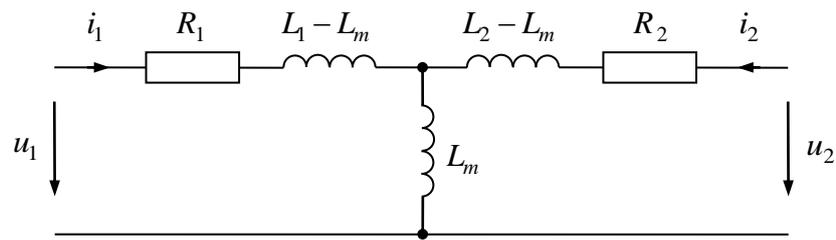


Bild 6-4: T-Ersatzschaltbild des Transformators unter Berücksichtigung der Wicklungswiderstände

Man beachte, dass die in dem Ersatzschaltbild auftretenden Induktivitäten $L_1 - L_m$ und $L_2 - L_m$ durchaus negative Werte annehmen können.

Daraus folgenden die stationären Gleichungen, hier dargestellt in Form von Effektivwertzeigern:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega(L_1 \underline{I}_1 + L_m \underline{I}_2) \quad (6.24)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega(L_2 \underline{I}_2 + L_m \underline{I}_1) \quad (6.25)$$

6.3 Transformation der Sekundärgrößen

Einführung transformierter Größen:

$$u'_2 = \alpha u_2 \quad (6.26)$$

$$i'_2 = \frac{1}{\alpha} i_2 \quad (6.27)$$

Umformung der primärseitigen Spannungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \dot{i}_1 + L_1 \dot{i}_1 + L_m \dot{i}_2 \\ &= R_1 \dot{i}_1 + L_1 \dot{i}_1 + \alpha L_m \dot{i}'_2 \\ &= R_1 \dot{i}_1 + L_1 \dot{i}_1 + L'_m \dot{i}'_2 \end{aligned} \quad (6.28)$$

mit

$$L'_m = \alpha L_m \quad (6.29)$$

Multiplikation der sekundärseitigen Spannungsgleichung mit α liefert:

$$\begin{aligned}\alpha u_2 &= \alpha R_2 i_2 + \alpha L_2 \dot{i}_2 + \alpha L_m \dot{i}_1 \\ u'_2 &= \alpha^2 R_2 i'_2 + \alpha^2 L_2 \dot{i}'_2 + \alpha L_m \dot{i}_1 \\ &= R'_2 i'_2 + L'_2 \dot{i}'_2 + L'_m \dot{i}_1\end{aligned}\quad (6.30)$$

mit

$$L'_2 = \alpha^2 L_2 \quad (6.31)$$

$$R'_2 = \alpha^2 R_2 \quad (6.32)$$

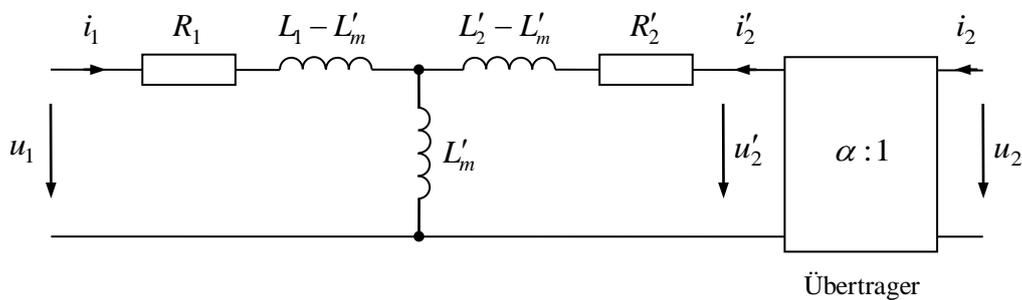


Bild 6-5: T-Ersatzschaltbild des Transformators mit transformierten Sekundärgrößen

Die Streuziffer und der Kopplungsfaktor sind gegenüber dieser Transformation invariant:

$$\kappa' = \frac{L'_m}{\sqrt{L_1 L'_2}} = \frac{\alpha L_m}{\sqrt{L_1 \alpha^2 L_2}} = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} = \kappa \quad (6.33)$$

In gleicher Weise können auch die Primärgrößen transformiert werden, was hier nicht dargestellt ist.

Verschiedene Anwendungen dieser Transformation sind in den folgenden Abschnitten beschrieben:

6.3.1 Transformation der sekundärseitigen Größen auf die Primärseite im Verhältnis der Windungszahlen

$$\alpha = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.34)$$

Es ergibt sich:

$$L'_m = \frac{N_1}{N_2} L_m = L_{m1} \quad (6.35)$$

$$L'_2 = \frac{N_1^2}{N_2^2} L_2 \quad (6.36)$$

und

$$L_1 - L'_m = L_{\sigma 1} \quad (6.37)$$

$$L'_2 - L'_m = \frac{N_1^2}{N_2^2} L_{\sigma 2} = L'_{\sigma 2} \quad (6.38)$$

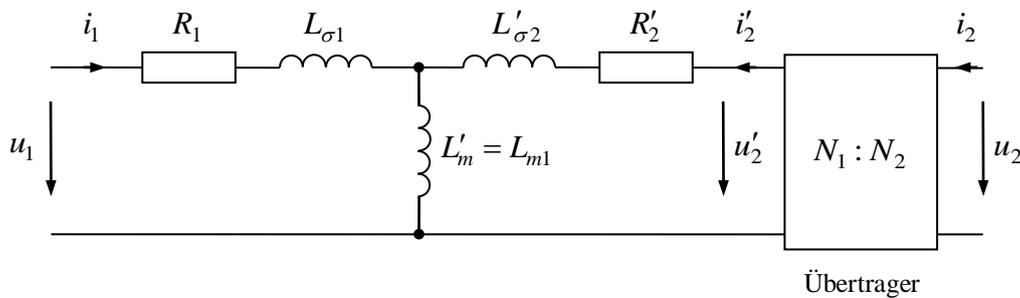


Bild 6-6: T-Ersatzschaltbild des Transformators
Sekundärgrößen auf die Primärseite transformiert

Anders als im allgemeinen Ersatzschaltbild Bild 6-4 sind die hier auftretenden Streuinduktivitäten $L_{\sigma 1}$, $L'_{\sigma 2}$ stets nicht-negative Größen.

6.3.2 Transformation auf eine primärseitig konzentrierte Streuung

Die Transformation kann so angewendet werden, dass die Streuinduktivität der Sekundärseite verschwindet:

$$L'_2 - L'_m = \alpha^2 L_2 - \alpha L_m = 0 \quad (6.39)$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{L_m}{L_2} \quad (6.40)$$

sowie

$$L'_{\sigma 1} = L_1 - L'_m = L_1 - \frac{L_m^2}{L_2} = L_1 \left(1 - \frac{L_m^2}{L_1 L_2} \right) = \sigma L_1 \quad (6.41)$$

$$L'_m = \frac{L_m^2}{L_2} \quad (6.42)$$

$$R'_2 = \frac{L_m^2}{L_2^2} R_2 \quad (6.43)$$

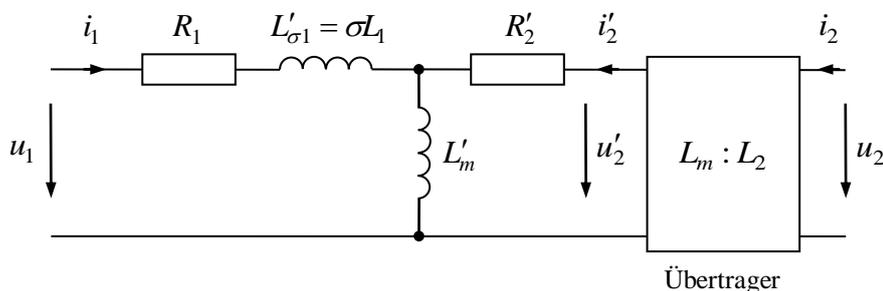


Bild 6-7: Ersatzschaltbild des Transformators mit primärseitig konzentrierter Streuung

6.3.3 Transformation auf eine sekundärseitig konzentrierte Streuung

Die Transformation kann so angewendet werden, dass die Streuinduktivität der Primärseite verschwindet:

$$L_1 - L'_m = L_1 - \alpha L_m = 0 \quad (6.44)$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{L_1}{L_m} \quad (6.45)$$

sowie

$$L'_m = L_1 \quad (6.46)$$

$$L'_{\sigma 2} = L'_2 - L'_m = \frac{L_1^2}{L_m^2} L_2 - L_1 = L_1 \left(\frac{L_1 L_2}{L_m^2} - 1 \right) = \frac{\sigma}{1 - \sigma} L_1 \quad (6.47)$$

$$R'_2 = \frac{L_1^2}{L_m^2} R_2 \quad (6.48)$$

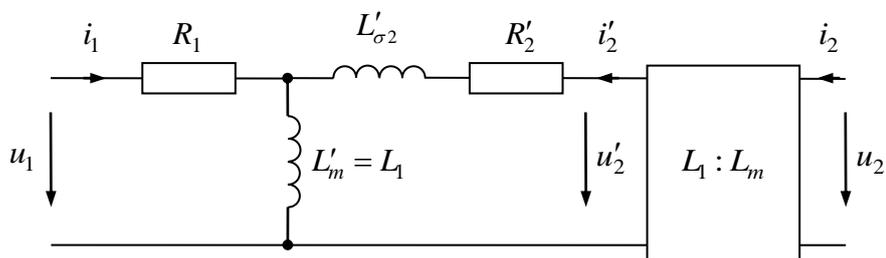


Bild 6-8: Ersatzschaltbild des Transformators mit sekundärseitig konzentrierter Streuung (Γ -Ersatzschaltbild)

7 Drehstromtransformatoren

7.1 Darstellung mit Wechselstromtransformatoren

Einen Drehstromtransformator kann man sich funktionellzunächst aus drei Wechselstromtransformatoren zusammengesetzt denken:

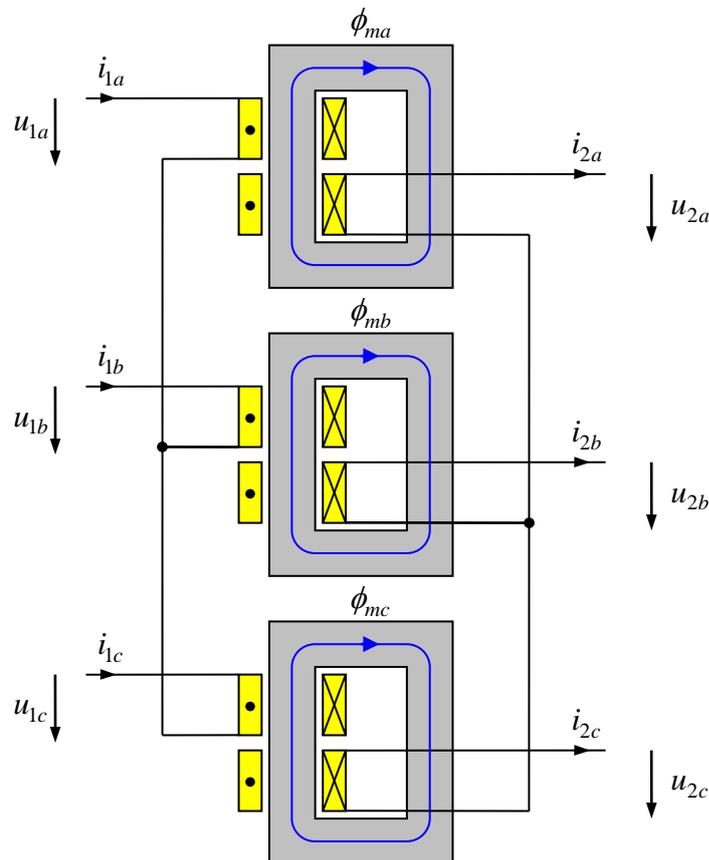


Bild 7-1: Drei Wechselstromtransformatoren in Stern-Stern-Schaltung

7.2 Fünf- und Drei-Schenkel-Drehstromtransformator

Die einzelnen Wechselstromtransformatoren können vorteilhafterweise konstruktiv zusammengefasst werden. Die Transformatoren teilen sich dabei einen gemeinsamen magnetischen Rückschluss über einen 4. bzw. 5. wicklungsfreien Schenkel. Diese freien Schenkel führen den Gesamtfluss

$$\phi_{m0}(t) = \phi_{ma}(t) + \phi_{mb}(t) + \phi_{mc}(t) \quad (7.1)$$

Dadurch beeinflussen sich zwar die Einzeltransformatoren, diese Verkopplung ist aber sehr gering, da der magnetische Spannungsabfall entlang der freien Schenkel klein ist.

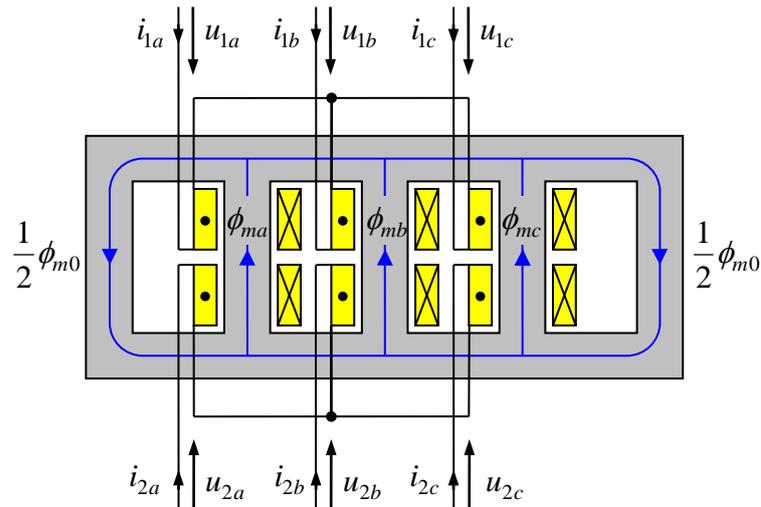


Bild 7-2: Drehstromtransformator mit fünf Schenkeln
in Stern-Stern-Schaltung

Sind Primär- und Sekundärseite des Drehstromtransformators als Sternschaltung ausgeführt,

$$i_{1a}(t) + i_{1b}(t) + i_{1c}(t) = 0 \quad (7.2)$$

$$i_{2a}(t) + i_{2b}(t) + i_{2c}(t) = 0 \quad (7.3)$$

resultiert unter der Voraussetzung, dass alle drei Hauptflüsse der Einzeltransformatoren durch eine gleiche und konstante Reluktanz bzw. magnetische Leitfähigkeit Λ_m beschreiben werden,

$$\phi_{ma} = \Lambda_m (N_1 i_{1a} + N_2 i_{2a}) \quad (7.4)$$

$$\phi_{mb} = \Lambda_m (N_1 i_{1b} + N_2 i_{2b}) \quad (7.5)$$

$$\phi_{mc} = \Lambda_m (N_1 i_{1c} + N_2 i_{2c}) \quad (7.6)$$

dass die Flusssumme Null ist,

$$\phi_{m0} = \phi_{ma} + \phi_{mb} + \phi_{mc} = \Lambda_m N_1 (i_{1a} + i_{1b} + i_{1c}) + \Lambda_m N_2 (i_{2a} + i_{2b} + i_{2c}) = 0 \quad (7.7)$$

Das bedeutet, dass auf den magnetischen Rückschluss über freie Schenkel verzichtet werden kann, da diese keinen magnetischen Fluss führen müssen, was zum dreischenkligen Drehstromtransformator führt. Allerdings ist diese Annahme in der Praxis nicht exakt erfüllt: Die Schenkel haben nicht exakt gleiche magnetische Widerstände und somit die gleiche Hauptinduktivität, insbesondere weicht aus konstruktiven Gründen der mittlere leicht von den äußeren ab. Außerdem ist aufgrund der magnetischen Sättigung die Hauptinduktivität nicht konstant, sondern die Flüsse der einzelnen Schenkel ergeben sich über die nichtlineare Magnetisierungskennlinie $\Phi(\theta)$:

$$\phi_{ma} = \Phi(N_1 i_{1a} + N_2 i_{2a}) \quad (7.8)$$

$$\phi_{mb} = \Phi(N_1 i_{1b} + N_2 i_{2b}) \quad (7.9)$$

$$\phi_{mc} = \Phi(N_1 i_{1c} + N_2 i_{2c}) \quad (7.10)$$

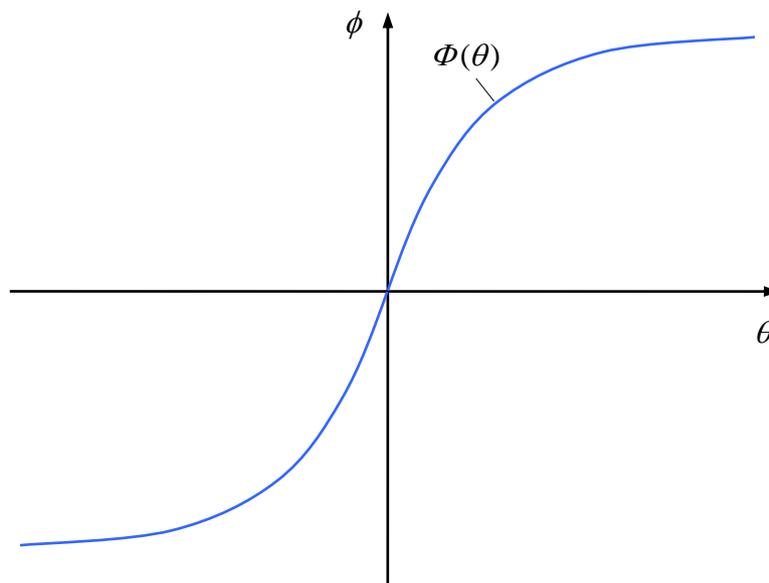


Bild 7-3: Magnetisierungskennlinie

Bei einer solchen nichtlinearen Abhängigkeit folgt aus der Sternpunktbedingung der Ströme nun nicht mehr, dass auch die Summe der Flüsse exakt Null ist. Dieser Nullsystemfluss ϕ_{m0} müsste sich dann über einen Luftweg schließen (s. Bild 7-4), da kein Weg durch das Kernmaterial möglich ist. Dies ist allerdings unerwünscht, weil dadurch ein äußeres Streufeld entsteht, welches andere elektrotechnische Komponenten stören kann oder sich über den Kessel eines großen ölgekühlten Transformators schließt, in welchem dadurch ggf. unerwünschte Wirbelströme induziert werden.

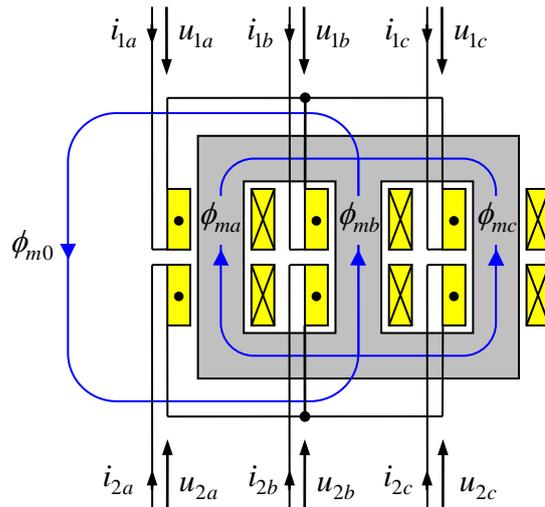


Bild 7-4: Drehstromtransformator mit drei Schenkeln in Stern-Stern-Schaltung

7.3 Stern-Dreieck-Schaltung

Der Nullsystemfluss ϕ_{m0} kann jedoch durch einen Nullsystemstrom i_0 ausgeglichen werden. Dazu wird entweder die Primär oder die Sekundärwicklung nicht als Stern-, sondern als Dreieckschaltung ausgeführt.

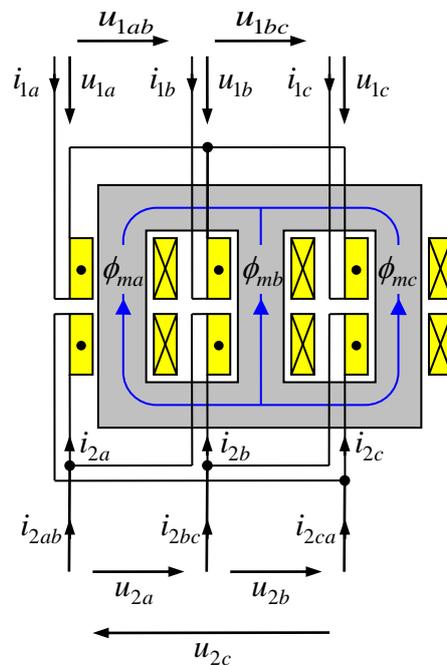


Bild 7-5: Drehstromtransformator mit drei Schenkeln in Stern-Dreieck-Schaltung

Die Umrechnung zwischen Wicklungsströmen i_{2a}, i_{2b}, i_{2c} und Außenleiterströmen $i_{2ab}, i_{2bc}, i_{2ca}$ der Dreieckschaltung ergibt⁵:

$$i_{ab} = i_a - i_b \quad (7.11)$$

$$i_{bc} = i_b - i_c \quad (7.12)$$

$$i_{ca} = i_c - i_a \quad (7.13)$$

Die Auflösung nach den Wicklungsströmen ergibt

$$i_a = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ab} - i_{ca}) \quad (7.14)$$

$$i_b = i_0 + \frac{1}{3}(i_{bc} - i_{ab}) \quad (7.15)$$

$$i_c = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ca} - i_{bc}) \quad (7.16)$$

wobei

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c) \quad (7.17)$$

Die Dreiecksschaltung kann dann – anders als eine Sternschaltung – einen Kreisstrom i_0 führen, welcher sich in den Außenleiterströmen nicht bemerkbar macht. Dieser verändert aber die Magnetisierung aller drei Schenkel derart, dass der Nullsystemfluss unterdrückt wird. Für das Verhalten kann ein vereinfachtes Ersatzmodell betrachtet werden:

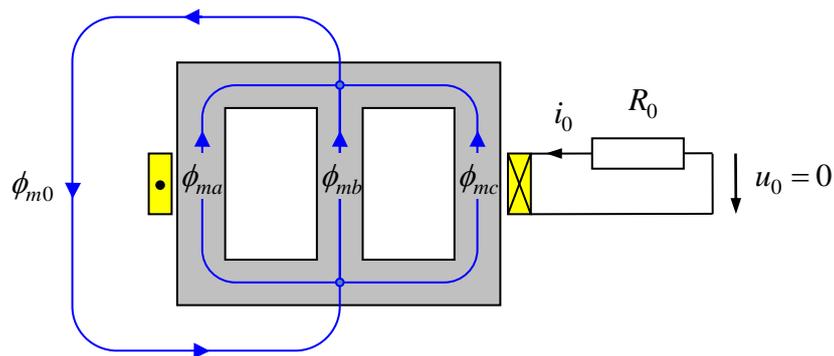


Bild 7-6: Ersatzmodell für das Nullsystem

⁵ Der Index für die Sekundärseite wird im Folgenden im Hinblick darauf weggelassen, dass die Dreiecksschaltung auch primärseitig ausgeführt werden könnte; die Beziehungen gelten also sowohl für Index „1“ oder „2“

Der wirksame Ersatzwiderstand ist der dreifache Wicklungswiderstand:

$$R_0 = 3R \quad (7.18)$$

Mit kleinem Wicklungswiderstand gilt näherungsweise

$$\dot{\psi}_{m0} = N\dot{\phi}_{m0} = 0 \quad (7.19)$$

Der Kreisstrom i_0 ist eine freie Größe im Transformator, die von den Außenleiterströmen nicht beeinflusst wird. Bei sekundärseitiger Dreieckschaltung stellt sich i_0 so ein, dass

$$\begin{aligned} i_a &= i_0 + \frac{1}{3}(i_{ab} - i_{ca}), \quad i_b = i_0 + \frac{1}{3}(i_{bc} - i_{ab}), \quad i_c = i_0 + \frac{1}{3}(i_{ca} - i_{bc}) \\ \phi_{m0} &= \phi_{ma} + \phi_{mb} + \phi_{mc} = \mathcal{F}(N_1 i_{1a} + N_2 [i_{20} + \frac{1}{3}(i_{2ab} - i_{2ca})]) \\ &\quad + \mathcal{F}(N_1 i_{1b} + N_2 [i_{20} + \frac{1}{3}(i_{2bc} - i_{2ab})]) \\ &\quad + \mathcal{F}(N_1 i_{1c} + N_2 [i_{20} + \frac{1}{3}(i_{2ca} - i_{2bc})]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bei Speisung eines Transformators mit einem symmetrischen Drehspannungssystem zeigt der Kreisstrom i_0 hauptsächlich eine 3. Harmonische. Im Übrigen stellt sich auf der Sternseite des Transformators durch die nichtlineare Magnetisierung eine Sternpunktverlagerung ein, d.h. eine Potentialverschiebung des Sternpunkts, die von einem symmetrischen linearen Drehstromsystem unbekannt ist. Da der Sternpunkt üblicherweise nicht herausgeführt wird, bleibt die Sternpunktverlagerung wie der Kreisstrom nach außen unbemerkt und ohne Wirkung.

7.4 Ersatzschaltbilder des Drehstrom-Transformators

Beim symmetrischen Betrieb eines Drehstromsystems, d. h. wenn alle Phasenströme bzw. Spannungen gleiche Effektivwerte bei jeweils 120° Phasenverschiebung zeigen, können alle drei Phasen stellvertretend nur durch das Ersatzschaltbild einer einzelnen Phase repräsentiert werden. Dies gilt auch für den Drehstromtransformator. Alle Ersatzschaltbilder des Wechselstromtransformators können direkt für den symmetrischen Betrieb des Drehstromtransformators verwendet werden.

7.5 Bezeichnungen und Schaltzeichen

Dreiecksschaltung	D, d
Sternschaltung	Y, y
Zickzackschaltung	Z, z
Wicklungen einzeln herausgeführt	III,iii
Herausgeführter Sternpunkt	N, n
Kennziffer	$k = 0 \dots 12$

Die Oberspannungsseite wird mit großen Buchstaben, die Unterspannungsseite mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet

Die Kennziffer in der Schaltgruppenbezeichnung gibt die Phasendrehung der Unterspannungsseite in Bezug auf die Oberspannungsseite in 30° -Schritten an.

Beispiele:

- $Yy0$: Transformator in Sternschaltung auf Ober- wie auf Unterspannungsseite. Dadurch entsteht keine Phasendrehung zwischen den Drehspannungssystemen.
- $Yd5$: Durch die Stern-Dreieckschaltung ist das Drehspannungssystem der Unterspannungsseite um $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$ gegenüber der Oberspannung nacheilend.

Da wir den Asynchronmotor im Folgenden nur in seinem stationären Zustand untersuchen wollen, benutzen wir im Ersatzschaltbild statt der Momentanwerte Effektivwertzeiger im Sinne der komplexen Wechselstromrechnung:

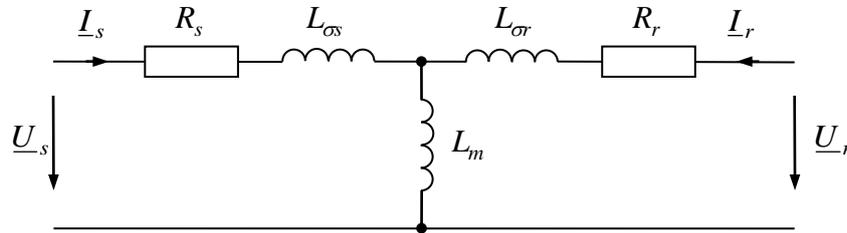


Bild 8-2: Ersatzschaltbild des festgebremsten Asynchronmotors

Wir nehmen an, dass die Drehstromwicklungen des Stators als auch des stillstehenden Rotors mit symmetrischen Drehspannungen der Frequenz ω_s gespeist werden. Die Gleichungen für die Ständer- und Läufermasche des Ersatzschaltbildes liefern dann:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega_s L_{\sigma s} \underline{I}_s + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \quad (8.1)$$

$$\underline{U}_r = R_r \underline{I}_r + j\omega_s L_{\sigma r} \underline{I}_r + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \quad (8.2)$$

Man beachte, dass die um jeweils 120° räumlich versetzte Anordnung der Statorwicklungen dazu führt, dass nicht nur die elektrischen Größen mit der *Statorfrequenz* ω_s schwingen, sondern dass sich ein räumlich drehendes Feld ausbildet – eine Welle, welche mit ω_s als *Winkelgeschwindigkeit* umläuft – ein sogenanntes *Drehfeld*. Stellen wir uns nun vor, dass der Rotor nicht mehr still steht, sondern sich selbst mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{rs} = \dot{\epsilon}_{rs} \quad (8.3)$$

dreht. Dann wird der Rotor das vom Stator erzeugte Drehfeld nicht mehr mit der Frequenz ω_s , sondern mit der Frequenz

$$\omega_r = \omega_s - \omega_{rs} \quad (8.4)$$

wahrnehmen. Diese Frequenz ω_r wird *Rotorfrequenz* genannt. Dementsprechend nehmen wir jetzt an, dass die eingespeiste Rotorspannung und der Rotorstrom mit dieser Frequenz ω_r oszillieren. Diese Verhältnisse des drehenden Motors werden im Ersatzschaltbild Bild 8-3 angedeutet, wobei diese Darstellung letztlich nicht befriedigt, weil man im Sinne der komplexen Wechselstromrechnung erwartet, dass alle Größen des Schaltbildes mit gleicher Frequenz schwingen, was aber in Bild 8-3 nicht der Fall ist.

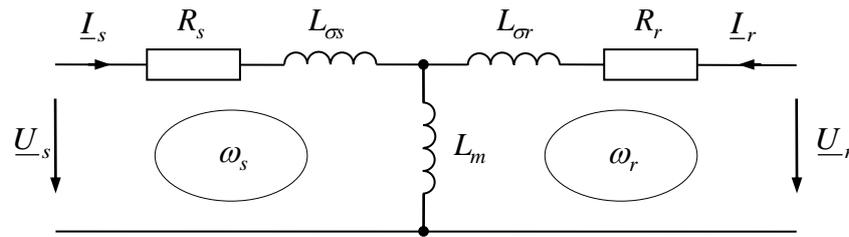


Bild 8-3: Stationäres Ersatzschaltbild des Asynchronmotors, wobei im Stator- und Rotorkreis unterschiedliche Frequenzen angedeutet sind

Durch Gleichungen kann man die Zusammenhänge aber widerspruchsfrei ausdrücken:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega_s L_{\sigma s} \underline{I}_s + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \quad (8.5)$$

$$\underline{U}_r = R_r \underline{I}_r + j\omega_r L_{\sigma r} \underline{I}_r + j\omega_r L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \quad (8.6)$$

In der Statorspannungsgleichung ist die elektrische Frequenz ω_s , in der Rotorgleichung ist sie ω_r . Um für den rotierenden Motor ein Ersatzschaltbild herzuleiten, welches im normalen Sinn der komplexen Wechselstromrechnung verständlich ist, wird nun die Rotorspannungsgleichung mit dem Faktor

$$s = \frac{\omega_r}{\omega_s} \quad (8.7)$$

multipliziert. Diese Größe heißt *Schlupf*. Es folgt

$$\frac{1}{s} \underline{U}_r = \frac{R_r}{s} \underline{I}_r + j\omega_s L_{\sigma r} \underline{I}_r + j\omega_s L_m (\underline{I}_s + \underline{I}_r) \quad (8.8)$$

Die mathematischen Terme für die Spannungsabfälle an den Induktivitäten beinhalten nun formal die gleiche Frequenz wie im Ständerkreis. Die Gleichungen (8.5) und (8.8) lassen sich nun durcheinander gewöhnliches Ersatzschaltbild ausdrücken, in welchem alle beteiligten Ströme und Spannungen mit der gleichen Frequenz ω_s oszillieren. In diesem Ersatzschaltbild treten nun aber ein mit dem Schlupf umgerechneter Rotorwiderstand und eine umgerechnete Rotorspannung auf:

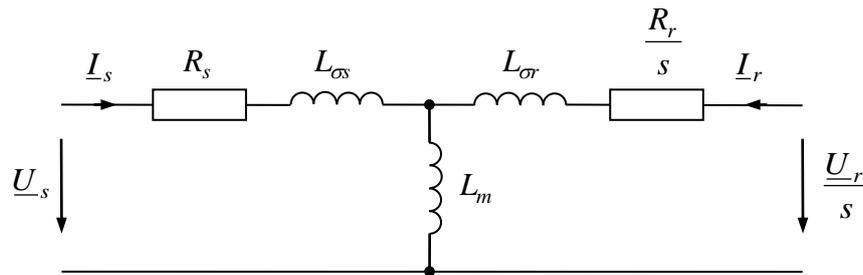


Bild 8-4: Stationäres Ersatzschaltbild des rotierenden Asynchronmotors
in diesem stationären Ersatzschaltbild oszillieren auch die Wechselgrößen
des Rotorkreises mit der Frequenz ω_s

8.3 Kurzschluss-Asynchronmotor

Bislang nahmen wir an, dass auch der Rotor durch ein Drehstromsystem gespeist werde. Dazu müssen Kontakte zwischen den Rotorwicklungen und den äußeren Anschlüssen über drei Schleifringe hergestellt werden. Solche *doppelt gespeisten Asynchronmaschinen* werden in Spezialanwendungen wie z.B. in Windkraftanlagen oder Pumpspeicherwerken eingesetzt, sie sind jedoch im Verhältnis nicht häufig.

Beim normalen Asynchronmotor wird die Rotorwicklung einfach kurzgeschlossen, man nennt diesen Typ *Kurzschluss-Asynchronmotor*. Die Rotorwicklung solcher Asynchronmotoren ist auch keine Wicklung im Sinne einer mit Draht bewickelten Spule. In den meisten Fällen werden die Rotornuten mit Aluminium unter Druck ausgegossen. Die auf diese Weise entstehenden Rotorstäbe werden durch Ringe an beiden Seiten des Rotors kurzgeschlossen, welche im selben Gussprozess hergestellt werden. Bei hochwertigen Maschinen verwendet man statt Aluminium Kupfer, welches ebenfalls im Druckgussverfahren verarbeitet werden kann. Insbesondere große Maschinen werden so gefertigt, dass Kupferstäbe in die Rotornuten geschoben werden, die dann in einem weiteren Arbeitsschritt mit den Kurzschlussringen verlötet oder verschweißt werden müssen. Wegen der Ähnlichkeit der derart entstehenden Rotorwicklung mit einem Kleintier-Laufrad bezeichnet man diesen Motortyp auch *Kurzschlusskäfig-Motor*, engl. *squirrel cage motor*. Durch dieses Konstruktionsprinzip löst sich die Zuordnung der einzelnen Stäben zu den drei Phasen des Rotor-Drehstromsystems auf, wengleich wir die abstrakte Vorstellung eines Drehstromsystems weiterhin aufrecht erhalten können. Tatsächlich vermeidet man sogar zur Vermeidung von Vibrationen – anders als Bild 8-1 suggeriert – Rotorstabzahlen von 6 und Vielfachen davon.

Da dieser Motortyp keine anfälligen Schleifringe benötigt, ist er sehr robust und weitgehend wartungsfrei. Störungen können ggf. durch Bruch der Aluminiumstäbe auftreten.

Für Kurzschluss-Asynchronmaschinen gilt also,

$$\underline{U}_r = 0 \quad (8.9)$$

Die Rotormasche im Ersatzschaltbild Bild 8-4 wird also einfach kurzgeschlossen. Diese Motorvariante wird im Folgenden behandelt.

8.4 Drehmoment

Die Information über das mechanische Drehmoment ist bereits im elektrischen Ersatzschaltbild enthalten. Um dieses herzuleiten, soll der in Bild 8-4 auftretende transformierte Rotorwiderstand in die Form

$$\frac{R_r}{s} = R_r + \frac{1-s}{s} R_r \quad (8.10)$$

gebracht werden. Das entsprechende neue Ersatzschaltbild zeigt Bild 8-5.

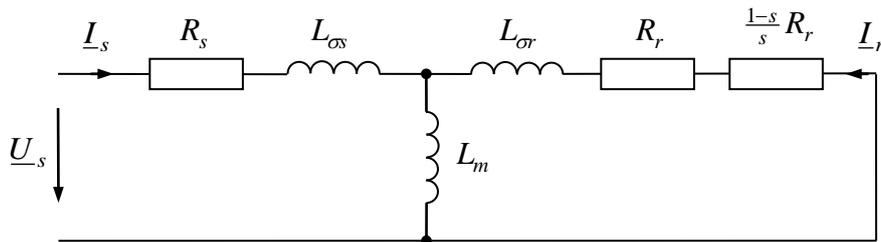


Bild 8-5: Stationäres Ersatzschaltbild des rotierenden Asynchronmotors mit Kurzschlussläufer

Das Drehmoment wird nun über die Leistungsbilanz bestimmt. Es muss gelten

$$\dot{E}_{magn} = P_{el} - P_{mech} - P_v \quad (8.11)$$

Die Energie E_{magn} ist die in den Induktivitäten gespeicherte Energie. Die zugeführte elektrische Leistung eines Drehstromsystems ist

$$P_{el} = 3 \operatorname{Re} \left[\underline{U}_s^* \underline{I}_s \right] \quad (8.12)$$

Die mechanische Leistung ist

$$P_{mech} = \omega_{mech} T \quad (8.13)$$

Die hier auftretende mechanische Drehfrequenz ω_{mech} ist gleich ω_{rs} , sofern der Motor, wie im obigen Bild 8-1 skizziert, mit einem einfachen Wicklungssystem ausgestattet ist. Vielfach werden die Motoren jedoch so aufgebaut, dass sich über den Umfang des Motors mehrere Wicklungen desselben Strangs wiederholen. Dies wird durch die sogenannte Polpaarzahl p angegeben. Für die Betrachtung der elektrischen Vorgänge kann man die Vorstellung eines Motors mit Polpaarzahl $p = 1$ beibehalten; der Zusammenhang zwischen der Frequenz ω_{rs} und der tatsächlichen mechanische Drehfrequenz ergibt sich dann aber nach

$$\omega_{rs} = p \omega_{mech} \quad (8.14)$$

Wird die mechanische Leistung mit Hilfe der Frequenz ω_{rs} ausgedrückt, folgt

$$P_{mech} = \frac{1}{p} \omega_{rs} T \quad (8.15)$$

Die Verlustleistung ist die in den ohmschen Widerständen umgesetzte Leistung ⁷

$$P_v = 3R_s I_s^2 + 3R_r I_r^2 \quad (8.16)$$

Identifiziert man die bekannten elektrischen Leistungsterme P_{el} , P_v und \dot{E}_{magn} im elektrischen Ersatzschaltbild (im stationären Betrieb ist $E_{magn} = const.$, also $\dot{E}_{magn} = 0$), ergibt sich zwangsläufig die Identifikation der mechanischen Leistung:

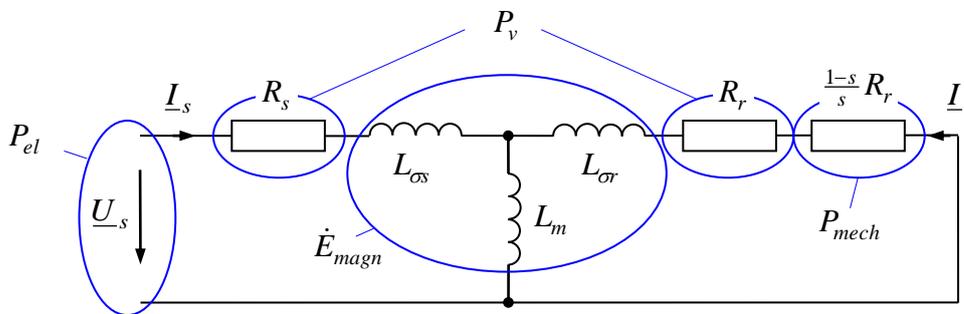


Bild 8-6: Identifikation der Leistungen im Ersatzschaltbild

Es folgt

$$P_{mech} = \frac{1}{p} \omega_{rs} T = 3R_r \frac{1-s}{s} I_r^2 = 3R_r \frac{\omega_{rs}}{\omega_r} I_r^2 \quad (8.17)$$

und für das Drehmoment

$$T = 3pR_r \frac{I_r^2}{\omega_r} \quad (8.18)$$

Für das Folgende ist es einfacher, auf das Modell mit rotorseitig konzentrierter Streuung überzugehen, welches im Kapitel 6.3.3 über Transformatoren hergeleitet wurde:

⁷ wie üblich bezeichnen Großbuchstaben ohne Unterstrich die Beträge der komplexen Effektivwertzeiger, also reelle Effektivwerte

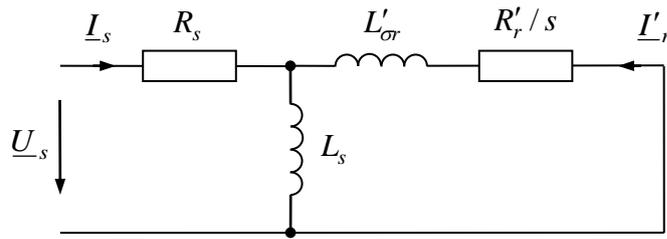


Bild 8-7: Stationäres Ersatzschaltbild des Kurzschluss-Asynchronmotors mit rotorseitig konzentrierter Streuung

$$L'_{\sigma r} = \frac{\sigma}{1-\sigma} L_s \quad (8.19)$$

$$R'_r = \frac{L_s^2}{L_m^2} R_r \quad (8.20)$$

Wird der Spannungsabfall am Ständerwiderstand vernachlässigt, was dann gerechtfertigt ist, wenn die induktiven Spannungsabfälle bei genügend großer Frequenz überwiegen, erhalten wir für den Rotorstrom

$$\underline{I}'_r = \frac{\underline{U}_s}{j\omega_s L'_{\sigma r} + R'_r/s} = \frac{\underline{U}_s}{\omega_s} \frac{\omega_r}{j\omega_r L'_{\sigma r} + R'_r} \quad (8.21)$$

sowie für das Drehmoment die sogenannte *Kloßsche Formel*

$$T = 3p \frac{U_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_r R'_r}{(\omega_r L'_{\sigma r})^2 + R_r'^2} = 3p \frac{U_s^2}{\omega_s^2 L'_{\sigma r}} \frac{1}{\frac{\omega_r L'_{\sigma r}}{R'_r} + \frac{R'_r}{\omega_r L'_{\sigma r}}} \quad (8.22)$$

Bei konstanter Ständerspannung und -frequenz findet sich das Maximum des Drehmoments bei der *Kippfrequenz*

$$\omega_{rk} = \frac{R'_r}{L'_{\sigma r}} = \frac{R_r}{\sigma L_r} \quad (8.23)$$

bzw. dem *Kippschlupf*

$$s_k = \frac{\omega_{rk}}{\omega_s} = \frac{R_r}{\omega_s \sigma L_r} \quad (8.24)$$

wie sich durch Extremwertbestimmung ergibt. Das Drehmoment an dieser Stelle wird als *Kipp-Drehmoment* bezeichnet. Es beträgt

$$T_k = \frac{3p}{2L'_{\sigma r}} \frac{U_s^2}{\omega_s^2} \quad (8.25)$$

Mit Hilfe der Größen des Kippunktes lässt sich die Kloßsche Drehmomentbeziehung in der übersichtlichen Form

$$\frac{T}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_r}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_r}} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (8.26)$$

darstellen. Für kleinen Schlupf $|s| \ll s_k$ kann das Drehmomentverhalten durch

$$\frac{T}{T_k} \approx 2 \frac{s}{s_k} \quad (8.27)$$

linear approximiert werden.

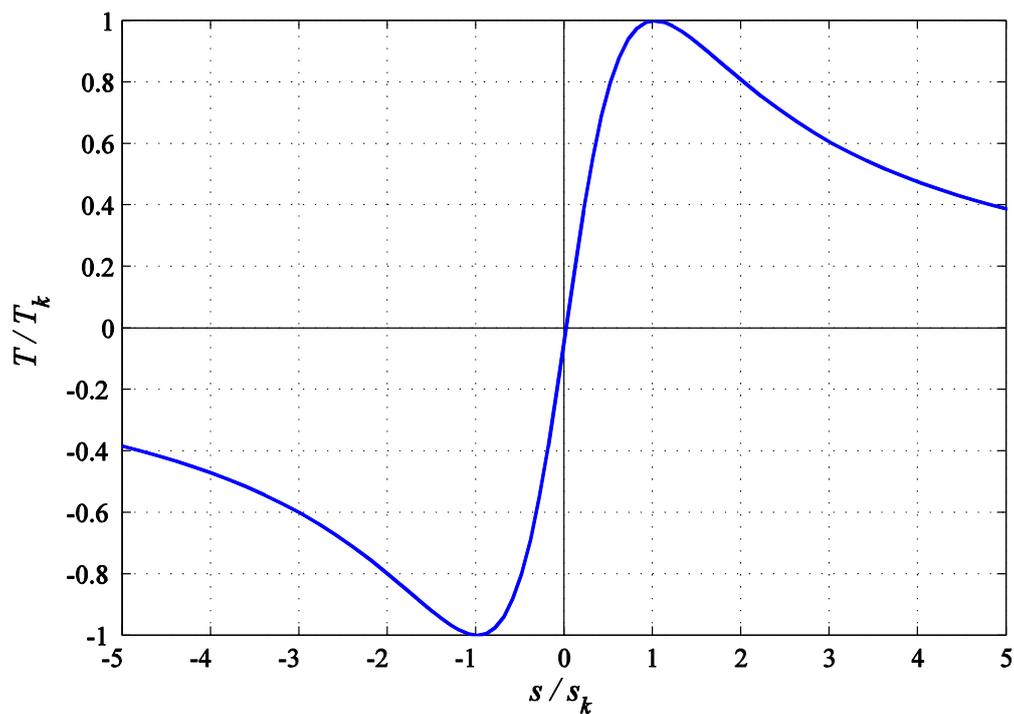


Bild 8-8: Drehmoment in Abhängigkeit des Schlupfes

Stellt man das Drehmoment in Abhängigkeit von der Drehfrequenz ω_{rs} dar,

$$\frac{T}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_s - \omega_{rs}}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_s - \omega_{rs}}} \quad (8.28)$$

ergibt sich eine entsprechend verschobene Schlupfcharakteristik, wie im folgenden Bild dargestellt ist. Das Drehmoment ist bei synchronem Betrieb $\omega_{rs} = \omega_s$ Null. Das Anlaufdrehmoment T_0 bestimmt sich zu

$$\frac{T_0}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_s}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_s}} \approx 2 \frac{\omega_{rk}}{\omega_s} = 2s_k \quad (8.29)$$

Insbesondere bei kleinem Kippschlupf resultiert ein entsprechend kleines Anlaufdrehmoment. Gilt es, bereits aus dem Stillstand heraus ein großes Lastdrehmoment zu überwinden, sollte demnach ein Motor mit großem Kippschlupf gewählt werden. In der Regel wird dies durch einen großen Rotorwiderstand realisiert, welcher aber wegen zusätzlicher Verluste nachteilig ist. Prinzipiell möglich, aber heute aufgrund hoher Kosten kaum noch anzutreffen, ist die Erhöhung des Rotorwiderstands während des Anlaufs durch externe Widerstände. Das setzt aber einen gewickelten Rotor voraus, dessen Anschlüsse über Schleifringe nach außen geführt werden.

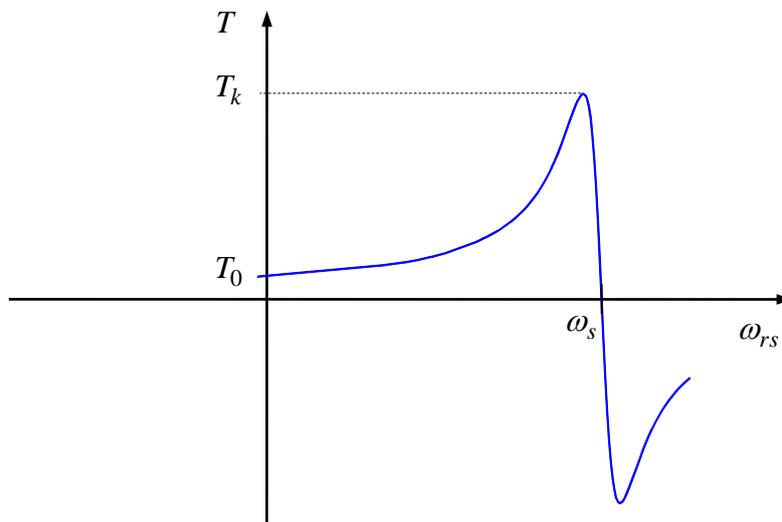


Bild 8-9: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie des Asynchronmotors

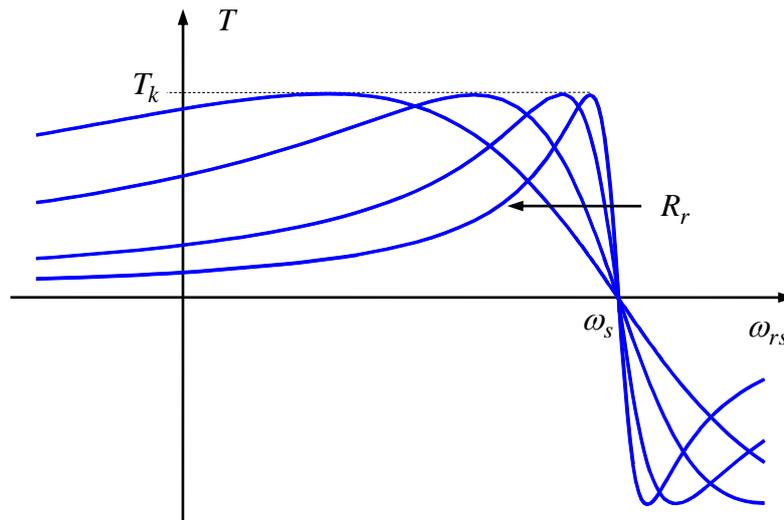


Bild 8-10: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie für verschiedene Rotorwiderstände

Bezieht man die Rotorverluste $P_{vr} = R_r I_r^2$ auf die gesamte Luftspaltleistung $P_l = R_r / s I_r^2$ (das ist die vom Stator in den Luftspalt des Motors abgegebene Leistung), erhalten wir

$$\frac{P_{vr}}{P_l} = \frac{I_r^2 R_r}{I_r^2 R_r / s} = s \quad (8.30)$$

Man erkennt an, dass ein großer Schlupf bezüglich der Verluste ungünstig ist. Um einen guten Wirkungsgrad zu erreichen, sollte der Motor auf geringen Kippschlupf $s_k = R_r / \omega_s \sigma L_r$ ausgelegt werden, was einen kleinen Rotorwiderstand erfordert. Dies steht im Zielkonflikt mit einem großen Anlaufdrehmoment.

Beim Betrieb von Asynchronmotoren am Netz kann man durch besondere Rotornutkonstruktionen einen Kompromiss erreichen: Durch besonders tiefe Nuten tritt bei großen Rotorfrequenzen, also großem Schlupf wie beim Anlauf, Stromverdrängung auf, so dass der Stromfluss im Wesentlichen durch die oberflächennahen Teile des Leiters geführt wird und der effektive Widerstand zunimmt. Mit kleiner werdendem Schlupf wird die Eindringtiefe größer, der Strom verteilt sich gleichmäßiger und der Widerstand nimmt ab.

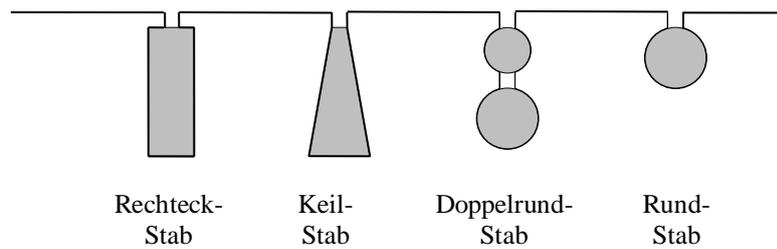


Bild 8-11: Verschiedene Ausführung von Rotorstäben
der Rundstab zeigt die geringste Stromverdrängung

Durch Einsatz sogenannter *Frequenzumrichter* ist heute statt des Betriebs am starren Netz die frequenzvariable Speisung von Asynchronmotoren möglich, weshalb der Anlauf und sogar der drehzahlvariable Betrieb durch Frequenznachführung und nicht mehr über den Rotorwiderstand bewältigt werden kann. Üblicherweise wird bei Veränderung der Ständerfrequenz ω_s die Ständerspannung U_s proportional verstellt, wie die Vorfaktoren U_s / ω_s in den Gleichungen für die Drehmoment- und Stromberechnung nahelegen. Dadurch bleiben Ströme und Drehmoment in ihrem Bemessungsrahmen. Diese Art der Speisung wird als *U/f-Betrieb* bezeichnet.

Mit wachsender Frequenz wird jedoch irgendwann die zulässige bzw. mögliche Spannungsgrenze von Umrichter oder Motor erreicht. Soll die Frequenz über diesen Punkt hinaus erhöht werden, kann die Spannung nur auf dem Maximalwert $U_s = U_{\max}$ gehalten werden. Die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien beider Betriebsweisen zeigen Bild 8-12 und Bild 8-13.

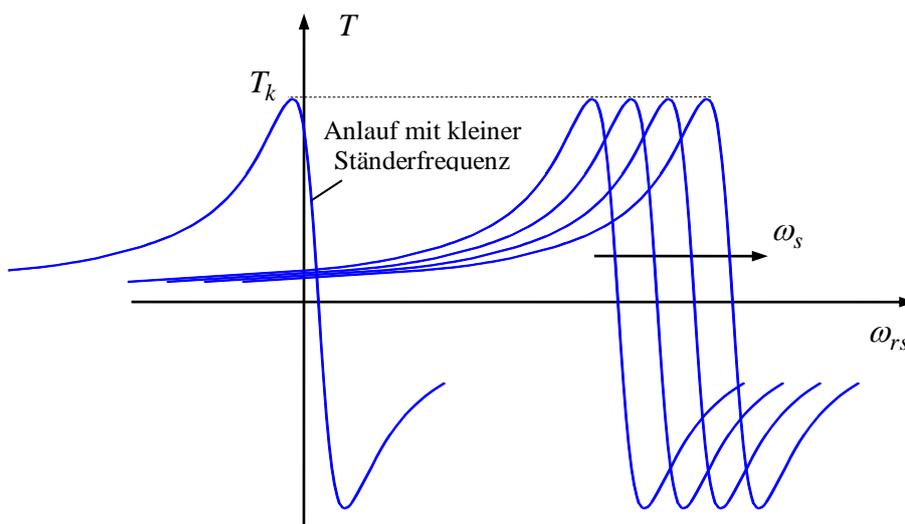


Bild 8-12: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien für verschiedene Ständerfrequenzen ω_s
mit $U_s / \omega_s = const.$

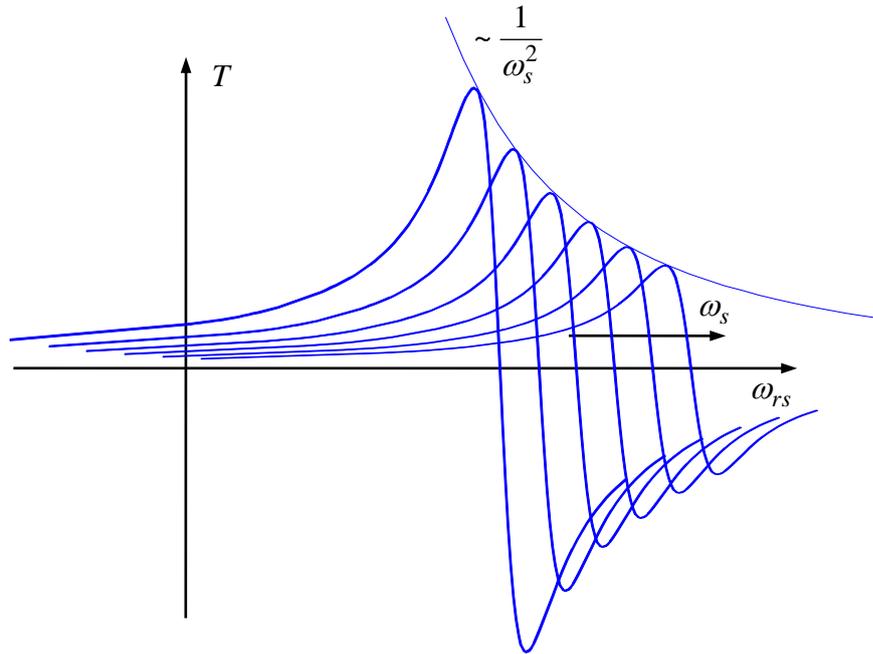


Bild 8-13: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien für verschiedene Ständerfrequenzen ω_s mit $U_s = \text{const.}$ (Flussschwäcbereich)

8.5 Stromortskurve

Die Hauptinduktivität ist gegenüber den Streuinduktivitäten meist recht groß, so dass der Strom über die Hauptinduktivität gegenüber dem Stromfluss über den äußeren Kreis verhältnismäßig klein ist. Dann kann das Ersatzschaltbild (wobei wieder von dem Ersatzschaltbild mit rotorseitig konzentrierter Streuung ausgegangen wird), ohne großen Fehler derart modifiziert werden, dass der Ständerwiderstand in den Rotorkreis verschoben wird:

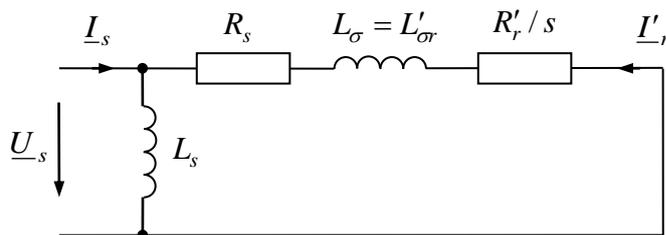


Bild 8-14: Vereinfachtes Stationäres Ersatzschaltbild
Ständerwiderstand in den Rotorkreis verschoben

Die Admittanz bestimmt sich dann zu

$$\underline{Y}_s = \frac{\underline{I}_s}{\underline{U}_s} = \frac{1}{j\omega_s L_s} + \frac{1}{R_s + R_r/s + j\omega_s L_\sigma} \quad (8.31)$$

Die Ortskurve der Admittanz \underline{Y}_s in Abhängigkeit vom Schlupf s bzw. die Ortskurve des Stromzeigers \underline{I}_s bei Speisung mit konstanter Spannung \underline{U}_s und Frequenz ω_s muss aus prinzipiellen Gründen ein Kreis sein. Folgende spezielle Betriebspunkte sollen besonders diskutiert werden:

Leerlauf, d.h. $s = 0$:

Im Leerlauf ist der Motor unbelastet, das Drehmoment ist Null und er dreht mit synchroner Drehzahl, also $\omega_{rs} = \omega_s$. Als Leerlaufstrom ergibt sich.

$$\underline{I}_{s0} = \frac{\underline{U}_s}{j\omega_s L_s} \quad (8.32)$$

Stillstand, d.h. $s = 1$:

Der Zustand des stillstehenden Motors, sei es, dass er zu Versuchszwecken festgebremst ist, oder gerade aus diesem Zustand heraus anläuft, wird gelegentlich als Kurzschluss bezeichnet. Der Anlaufstrom ist

$$\underline{I}_{s1} = \underline{I}_{s0} + \frac{\underline{U}_s}{R_s + R_r + j\omega_s L_\sigma} \quad (8.33)$$

Ideeller Kurzschluss, d.h. $s = \infty$

Dieser Begriff bezeichnet den sich unendlich schnell drehenden Motor. Der Punkt dient nur der Charakterisierung der Ortskurve und ist im Betrieb natürlich nicht erreichbar. Der ideale Kurzschlussstrom ist

$$\underline{I}_{s\infty} = \underline{I}_{s0} + \frac{\underline{U}_s}{R_s + j\omega_s L_\sigma} \quad (8.34)$$

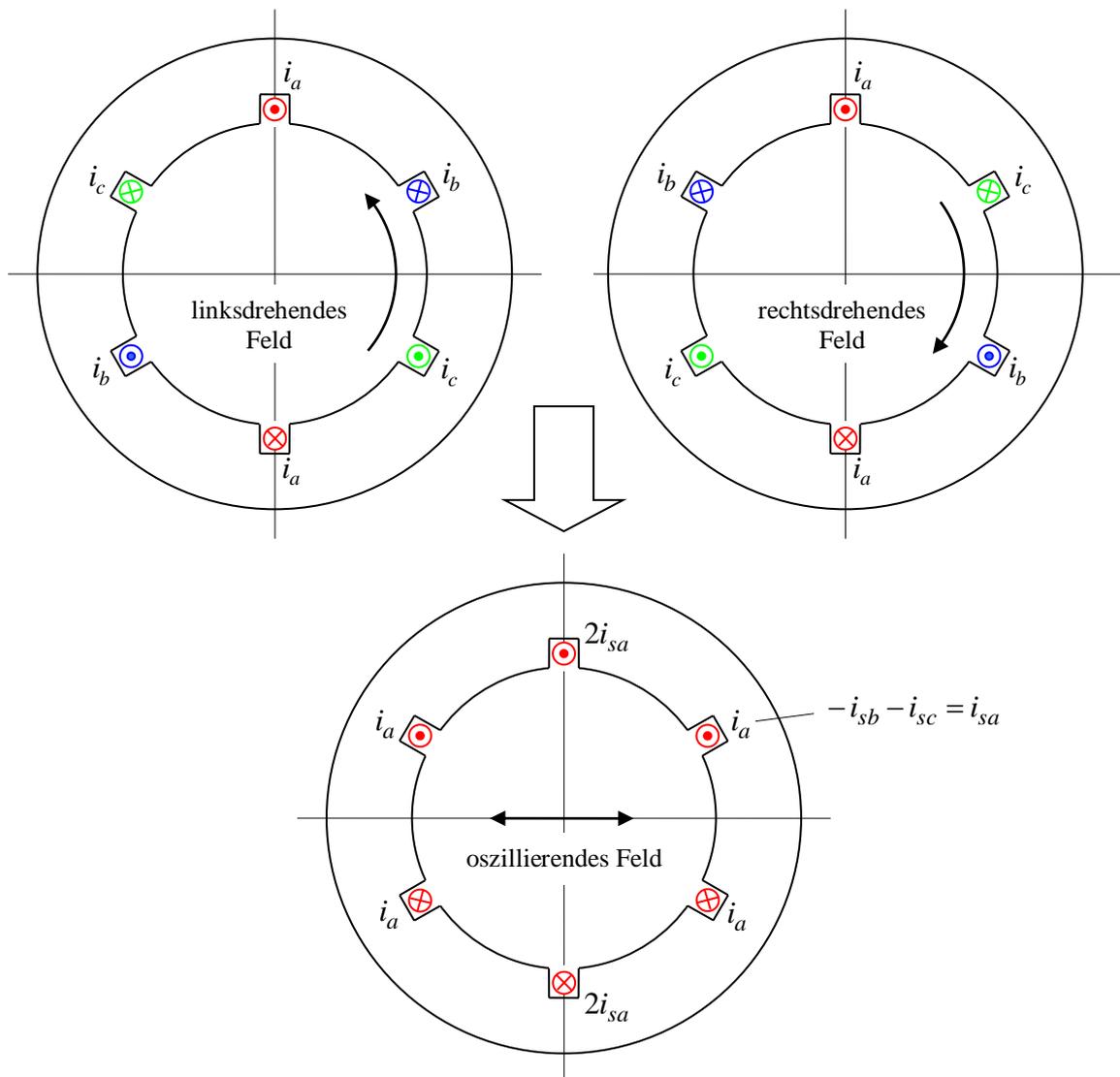


Bild 8-16: Gedankliche Superposition zweier Drehstrom-Asynchronmotoren mit gegenläufigen Feldern zum Wechselstrom-Asynchronmotor (es sind nur die Statoren dargestellt)

Das Drehmoment-Drehzahl-Verhalten kann näherungsweise durch Superposition der beiden der beiden Drehmomentanteile T_+ und T_- des links- und des rechtsdrehenden Feldes, also für die Ständerfrequenzen $+\omega_s$ und $-\omega_s$ gewonnen werden. Da sich diese beiden Drehmomentanteile bei Stillstand genau kompensieren, würde ein derartiger Motor kein Anlauf-Drehmoment entwickeln. Es gibt auch keine ausgezeichnete Drehrichtung. Der Motor dreht in irgendeiner Richtung an, wenn er in diese angestoßen wird.

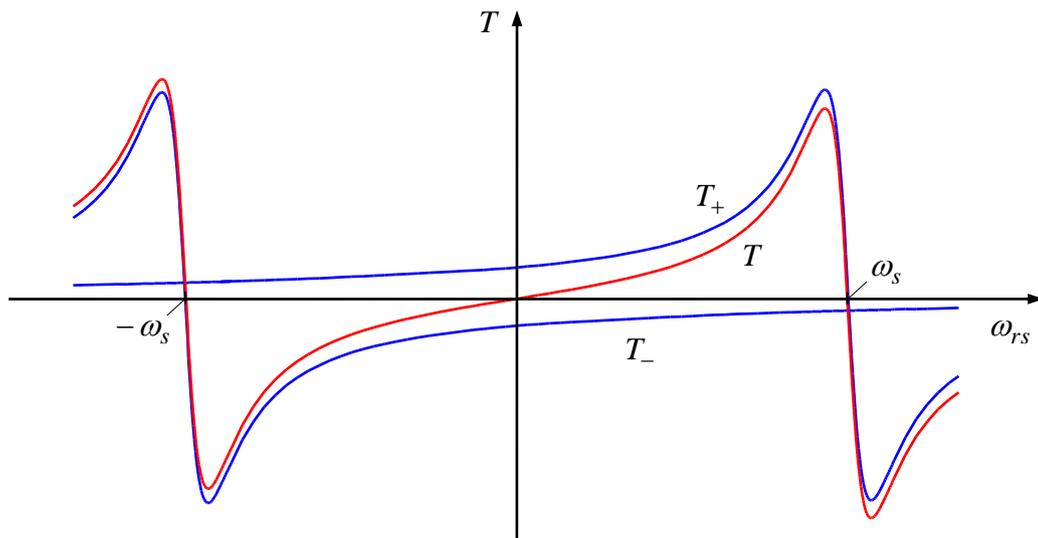


Bild 8-17: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie des WS-ASM als Überlagerung der Drehmomentanteile zweier gegensinnig drehender Drehfelder

Um ein Anlauf-Drehmoment zu ermöglichen, wird der sogenannte *Spaltpolmotor* eingesetzt: Bei diesem wird ein Teil des Pols mit einer Kurzschlusswicklung umwickelt. Meist besteht diese Wicklung nur aus einem einzigen Drahtling. Diese Kurzschlusswicklung widersetzt sich nach dem Induktionsgesetz einer Änderung des durch sie hindurchgehenden magnetischen Flusses, so dass beim Aufbau des Statorflusses dieser zunächst am Kurzschlussring vorbeigeht: Φ_h . Mit einer zeitlichen Verzögerung, deren Zeitkonstante sich aus dem Verhältnis von Induktivität und Widerstand der Kurzschlusswicklung bemisst, wird nun auch der Fluss Φ_s anwachsen und nach und nach einen größeren Anteil des Gesamtflusses übernehmen. Nimmt der Gesamtfluss im Laufe der sinusförmigen Schwingung dann wieder ab, wird der nun im Kurzschlussring gefangene Flussanteil Φ_s gegenüber Φ_h erst verzögert abgebaut. Dadurch erhält das ursprünglich nur oszillierende magnetische Feld einen rotierenden Anteil, wodurch ein Anlaufdrehmoment erzeugt und die Drehrichtung bestimmt wird.

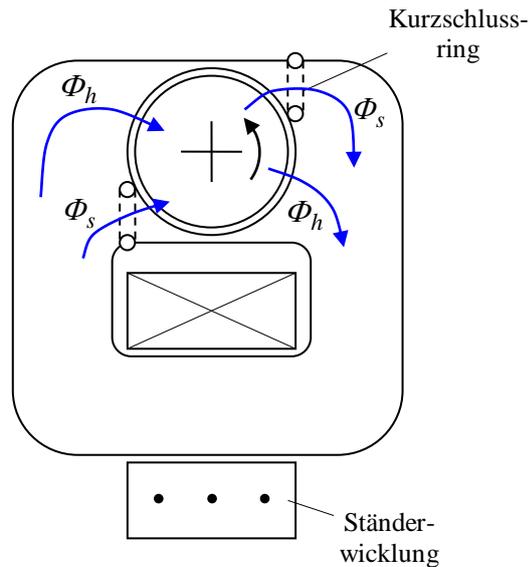


Bild 8-18: Wechselstrom-Asynchronmotor mit Spaltpol (Spaltpolmotor)

8.6.2 Kondensatormotor

Der Kondensatormotor ist ebenfalls ein WS-Asynchronmotor. Anders als der Spaltpolmotor besitzt jener zwei orthogonal angeordnete Ständerwicklungen, wobei die sogenannte *Hilfswicklung* über einen Kondensator gespeist wird, um einen Phasenvorhalt gegenüber der und somit ein Drehfeld zu erzeugen. Haupt- und Hilfswicklungen sind häufig unterschiedlich bemessen. Ggf. wird die Hilfswicklung nur während des Anlaufs zugeschaltet oder nach dem Anlauf auf einen kleineren Kondensator umgeschaltet.

Es ist auch denkbar, einen normalen Drehstrommotor mit Hilfe eines Kondensators am Wechselspannungsnetz zu betreiben. Dies bezeichnet man als *Steinmetz-Schaltung*.

Da das Drehfeld beim Kondensatormotor über ein *LC*- und nicht wie beim Spaltpolmotor über ein verlustbehaftetes *RL*-Glied aufgebaut wird, besitzt der Kondensatormotor einen besseren Wirkungsgrad. Er findet sich deshalb im oberen Leistungsbereich der Wechselstrommotoren bis etwa 1-2 kW. Bei höheren Leistungen kommen ohnehin fast ausschließlich Drehstrommotoren zum Einsatz.

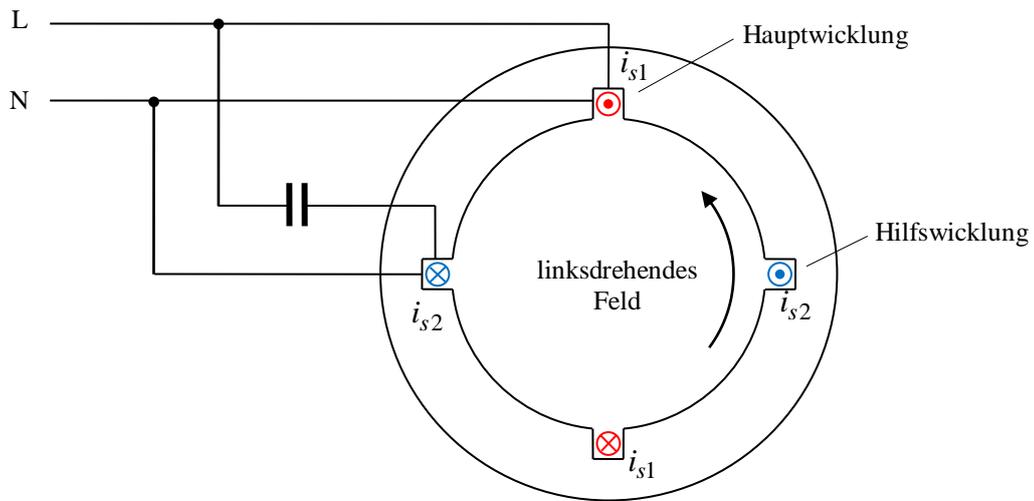


Bild 8-19: Kondensator-Wechselstrom-Asynchronmotor

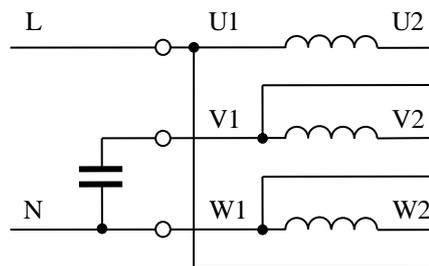


Bild 8-20: Steinmetzschaltung zum Anschluss eines Drehstrommotors an Wechselspannung

9 Synchronmaschinen

Drehstrom-Synchronmaschinen besitzen im Stator ein dreiphasiges Wicklungssystem ähnlich wie Asynchronmotoren. Dieses Wicklungssystem erzeugt ein umlaufendes Drehfeld. Der Rotor wird durch ein Gleichfeld magnetisiert. Dieses kann durch einen Permanentmagneten⁸ oder aber über eine Erregerwicklung (Fremderregung) bewerkstelligt werden. Bei fremderregten Maschinen wird der Erregerstrom i_E über Schleifringe zugeführt.

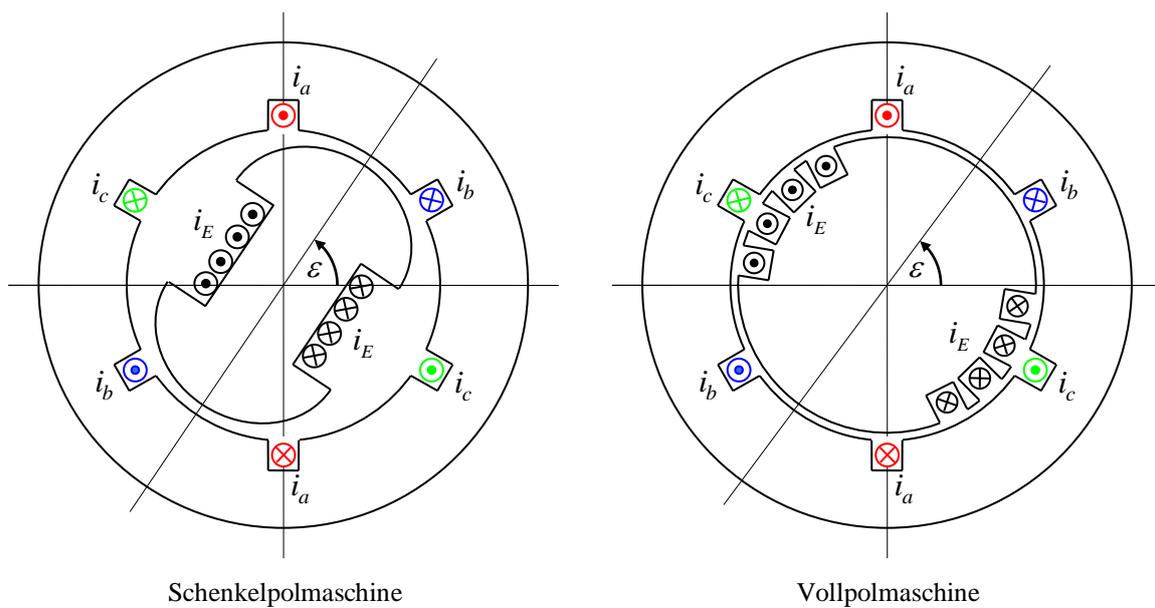


Bild 9-1: Bauformen fremderregter Synchronmaschinen
hier dargestellt jeweils mit Polpaarzahl $p = 1$

Es gibt zwei unterschiedliche Bauformen fremderregter Synchronmaschinen: die Schenkelpolmaschine und die Vollpolmaschine. Die Schenkelpolmaschine zeichnet sich durch ausgeprägte Rotorpole aus, während bei der Vollpolmaschine die Nuten für die Erregerwicklung in einen rotationssymmetrischen Rotor hineingefräst werden. Da der Rotor bei synchronem Betrieb die umlaufende Ständergrundwelle als Gleichfeld wahrnimmt, spielen Wirbelströme keine so große Rolle, so dass die Fertigung aus massivem Material möglich ist.

Die rotationssymmetrische Rotorstruktur äußert sich auch im elektrischen Verhalten: Bei der Vollpolmaschine sind die Ständerinduktivitäten in allen Wicklungen unabhängig von der Rotorstellung konstant, während diese bei der Schenkelpolmaschine aufgrund der unterschiedlichen magnetischen Reluktanz in Richtung des Rotorpols und senkrecht dazu abhängig von der Rotorstellung schwanken. Auf dieses Detail wird im Folgenden jedoch nicht eingegangen.

Vollpol-Synchronmaschinen finden sich insbesondere als Generatoren in Kraftwerken, die dort von Gas- oder Dampfturbinen angetrieben werden. Dabei spielt auch die notwendige mechanische Steifigkeit der einige Meter langen Rotorstruktur eine wichtige Rolle. Typische Leistungen liegen im Bereich von einigen 100 MVA bis hin zu den weltweit größten

⁸ Auf Permanentmagnet-Synchronmotoren wird hier nicht weiter eingegangen. Interessierte seien auf die Lehrveranstaltung *Geregelte Drehstromantriebe* verwiesen, wo dieser Motortyp ausführlich diskutiert wird.

elektrischen Maschinen mit Leistungen von etwa 1,5-1,7 GVA und Wirkungsgraden von ca. 99%.

Als Motoren werden fremderregte Drehstrom-Synchronmaschinen vorrangig im Bereich größerer Leistungen oberhalb einiger MVA eingesetzt. Hier trifft man in der Regel die Schenkelpolausführung an.

Eine Synchronmaschine als Generator wird meist direkt an das Stromnetz angeschlossen, dagegen werden Synchronmotoren heute in aller Regel frequenzvariabel über Umrichter gespeist.

Im Folgenden soll nur auf das stationäre Verhalten eingegangen und hierfür ein Ersatzschaltbild entwickelt werden. Es werde angenommen, dass der von der Erregerwicklung erzeugte magnetische Fluss Ψ_p die Ständerwicklung durchsetzt. Dreht sich nun der Rotor mit der mechanischen Winkelgeschwindigkeit ω_{me} , induziert dies nach dem Faradayschen Induktionsgesetz in den Ständerwicklungen ein Drehspannungssystem, welches mit der Frequenz $\omega = p\omega_{me}$ oszilliert bzw. umläuft. Hierbei ist p die schon von den Asynchronmotoren bekannte Polpaarzahl:

$$\underline{U}_p = j\omega\underline{\Psi}_p \quad (9.1)$$

Bei dieser Schreibweise machen wir von der komplexen Darstellung symmetrischer stationärer Drehstromsysteme Gebrauch. Durch die Winkel der komplexen Zeiger \underline{U}_p bzw. $\underline{\Phi}_p$ kann eine Anfangsstellung ausgedrückt werden. Die Spannung \underline{U}_p wird *innere Spannung*, *EMK* oder auch *Polradspannung* genannt.

Die Ständerwicklungen besitzen darüber hinaus eine Induktivität und einen Innenwiderstand. Diese Komponenten führen direkt zum Ersatzschaltbild:

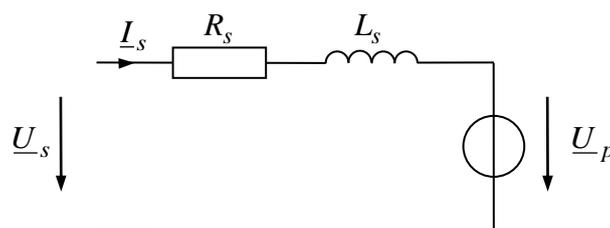


Bild 9-2: Stationäres Ersatzschaltbild der Drehstrom-Synchronmaschine

Hierbei wird angenommen, dass ω auch die Frequenz der äußeren Spannung \underline{U} ist, die Maschine sich also *synchron* dreht. Das führt zu

$$\underline{U}_s = (R_s + jX_s)\underline{I}_s + \underline{U}_p \quad \text{mit} \quad X_s = \omega L_s \quad (9.2)$$

bzw.

$$\underline{I}_s = \frac{U_s - U_p}{R_s + jX_s} \quad (9.3)$$

Die Größe $X_s = \omega L_s$ heißt synchrone Reaktanz.

Die Betrachtung soll noch weiter vereinfacht werden, indem der Ständerwiderstand vernachlässigt wird, was insbesondere für sehr große Generatoren nur zu kleinen Fehlern führt.

$$\underline{I}_s = \frac{U_s - U_p}{jX_s} = \frac{U_s}{jX_s} - \frac{U_p}{jX_s} = \underline{I}_{k0} - \underline{I}_k \quad (9.4)$$

In der obigen Gleichung können die neu eingeführten Größen \underline{I}_{k0} und \underline{I}_k als Abkürzungssymbole verstanden werden. Diese sind aber auch technisch zu interpretieren: \underline{I}_k ist der *Kurzschlussstrom*; also der Strom, der sich einstellt, wenn die erregte, rotierende Maschine an ihren Stator клемmen kurzgeschlossen wird. Dagegen stellt sich der Strom \underline{I}_{k0} ein, wenn eine nicht erregte oder stehende Maschine, die also keine Polradspannung induziert, an eine äußere Spannung angeschlossen wird. Dies bezeichnet man als *inneren Kurzschluss*.

Unter Annahme einer linearen Magnetisierung durch den Erregerstrom

$$\Psi_p = L_E I_E \quad (9.5)$$

finden wir für den Effektivwert des Kurzschlussstroms I_k :

$$I_k = \frac{U_p}{X_s} = \frac{\omega \Psi_p}{\omega L_s} = \frac{L_E}{L_s} I_E \quad (9.6)$$

Demnach ist I_k als der über ein Induktivitätsverhältnis umgerechnete Erregerstrom I_E zu verstehen. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen Erregerstrom und magnetischen Fluss aufgrund der Sättigung des Eisens ist dieser Zusammenhang stark nichtlinear.

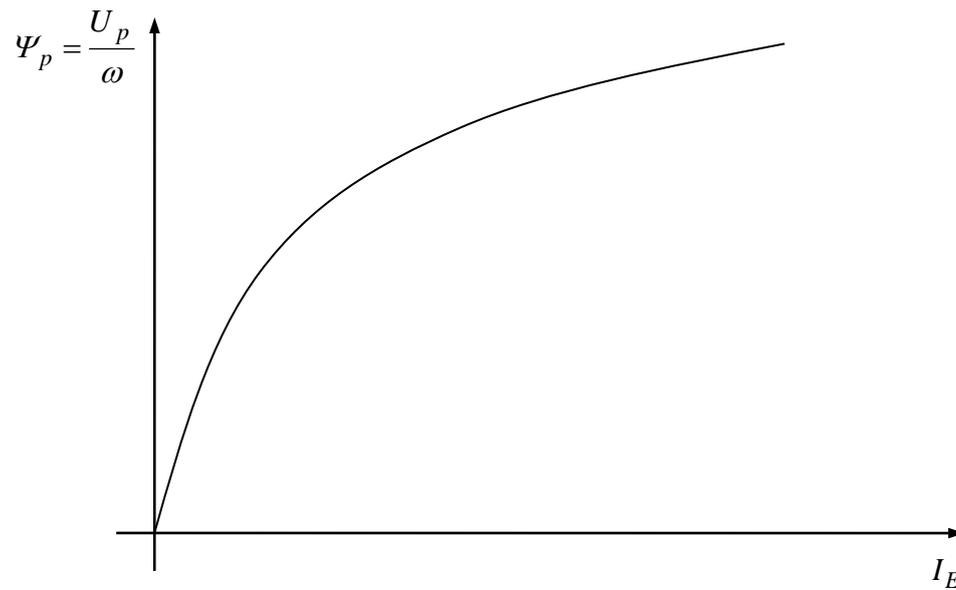


Bild 9-3: Erregerfluss bzw. Polradspannung in Abhängigkeit des Erregerstroms

Für die Entwicklung des stationären Zeigerdiagramms führen wir den Winkel ϑ zwischen den Zeigern der äußeren Spannung \underline{U}_s und der Polradspannung \underline{U}_p ein. Ein positiver Winkel soll bedeuten, dass die Polradspannung gegenüber der äußeren Spannung nacheilt, wie es für den motorischen Betrieb typisch ist, wie sich weiter unten zeigen wird. Dies führt unmittelbar zum Zeigerdiagramm.

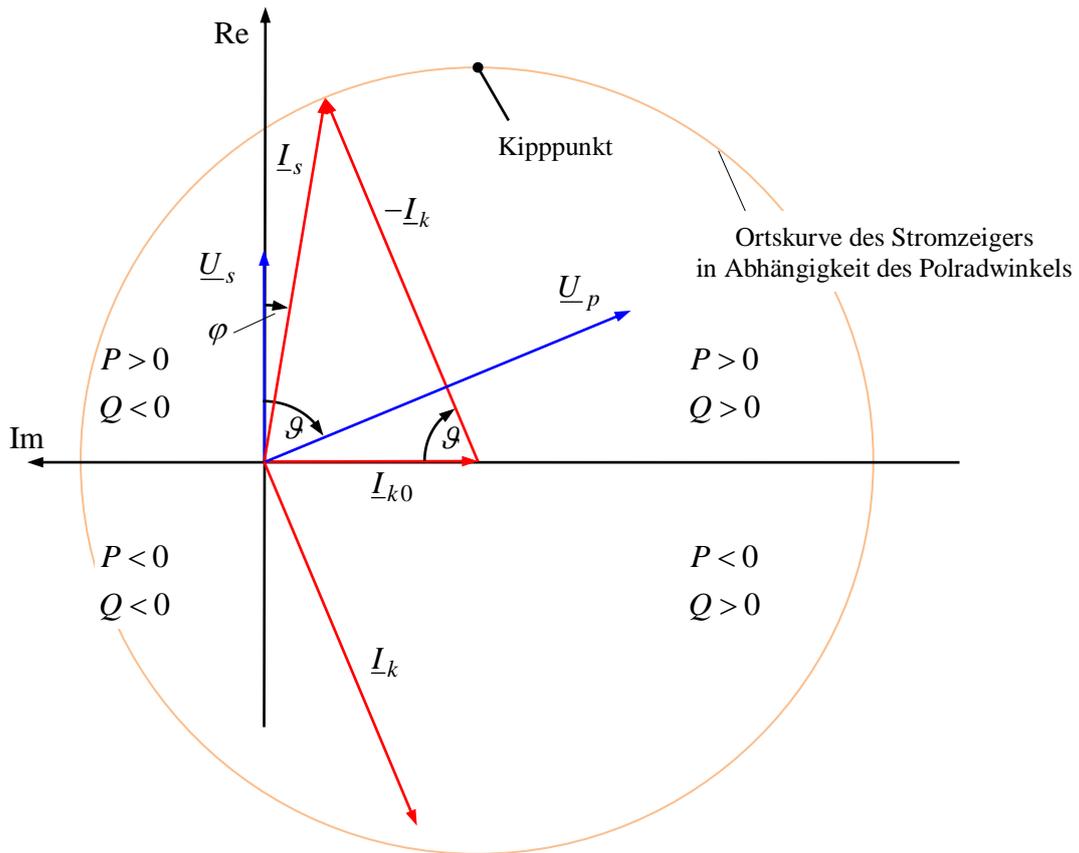


Bild 9-4: Stationäres Zeigerdiagramm und Stromortskurve der Synchronmaschine
Die Vorzeichen von P und Q beziehen sich auf die Lage des Ständerstromzeigers \underline{I}_s

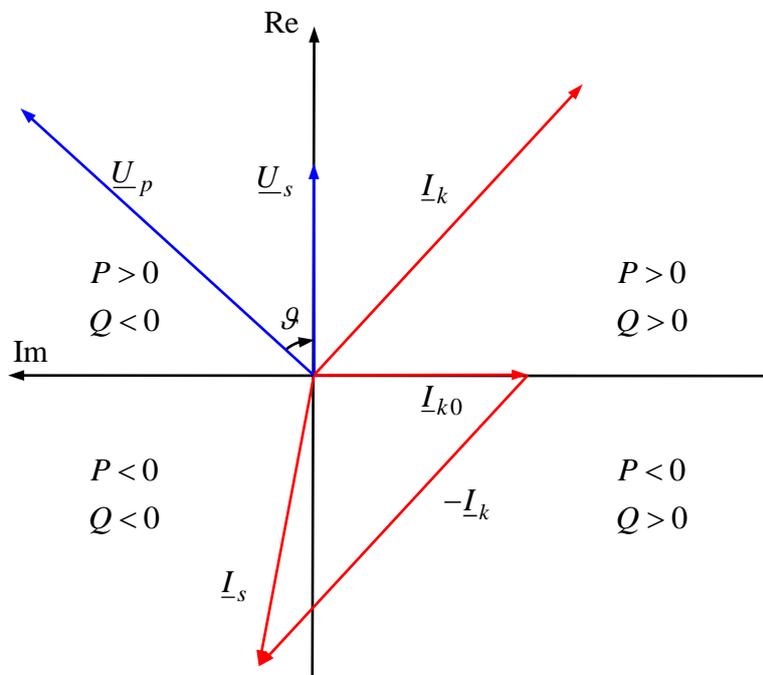


Bild 9-5: Zeigerdiagramm für Wirk- und Blindleistungsabgabe

Aus dem Zeigerdiagramm lassen sich die Wirk- und die Blindleistung ablesen:

$$P = 3 \operatorname{Re}[\underline{U}_s \underline{I}_s^*] = 3 U_s I_s \cos \varphi = 3 U_s I_k \sin \vartheta = 3 \frac{U_s U_p}{X_s} \sin \vartheta \quad (9.7)$$

$$Q = 3 \operatorname{Im}[\underline{U}_s \underline{I}_s^*] = 3 U_s I_s \sin \varphi = 3 U_s [I_{k0} - I_k \cos \vartheta] = 3 \frac{U_s^2 - U_s U_p \cos \vartheta}{X_s} \quad (9.8)$$

Bei entsprechenden Polradwinkeln und Polradspannungen sind alle Vorzeichenkombinationen von Wirk- und Blindleistung möglich. Der motorische Betrieb ist durch positive Polradwinkel ϑ , der generatorische Betrieb durch negative Winkel charakterisiert. Durch Veränderung der Polradspannung kann aber auch das Vorzeichen der Blindleistung verändert werden. Stellt man die Polradspannung

$$U_p = \frac{U_s}{\cos \vartheta} \quad (9.9)$$

ein, arbeitet die Maschine blindleistungsfrei, also mit Leistungsfaktor 1 bzw. $\varphi = 0$. Durch eine größere Polradspannung wird negative, also kapazitive Blindleistung erzeugt. Hiervon macht man in Kraftwerken Gebrauch, um den induktiven Blindleistungsbedarf der Übertragungsleitungen, der Transformatoren und der Verbraucher zu kompensieren. Dieser Betrieb heißt *übererregt*. Der Generator zeigt dann kapazitives Verhalten; er *liefert induktive Blindleistung*. Als *untererregt* wird der Betriebszustand bezeichnet, bei dem die Maschine *induktive Blindleistung aufnimmt*.

Die für eine beliebige Situation von Wirk- und Blindleistung notwendige Polradspannung lässt sich wie folgt bestimmen. Die Gleichungen (9.7), (9.8) werden zunächst in folgende Form gebracht,

$$\begin{aligned} U_p \sin \vartheta &= \frac{P X_s}{3 U_s} \\ -U_p \cos \vartheta &= \frac{Q X_s}{3 U_s} - U_s \end{aligned}$$

und sodann quadriert, addiert und die Wurzel gezogen, woraus sich die notwendige Polradspannung ergibt:

$$U_p = \sqrt{\left(\frac{P X_s}{3 U_s}\right)^2 + \left(U_s - \frac{Q X_s}{3 U_s}\right)^2} \quad (9.10)$$

Da Verluste vernachlässigt wurden, ist die mechanische Leistung gleich der elektrischen Wirkleistung und das Drehmoment resultiert demnach zu

$$T = \frac{P}{\omega_{me}} = \frac{pP}{\omega} = \frac{3p U_s U_p}{\omega X_s} \sin \vartheta = T_k \sin \vartheta \quad (9.11)$$

mit dem Kippdrehmoment

$$T_k = \frac{3p}{\omega X_s} U_s U_p = \frac{3pL_E}{\omega L_s} U_s I_E \quad (9.12)$$

welches beim Polradwinkel von $\vartheta = 90^\circ$ erreicht wird. Bei größerem Winkel nimmt das Drehmoment wieder ab, die Maschine kippt und fällt außer Tritt. Für den normalen Betrieb ist daher eine Sicherheitsmarge einzukalkulieren.

10 Thermisches Verhalten

Energieumformung und -wandlung mit leistungselektronischen Komponenten und elektro-mechanischen Wandlern erreichen teilweise beachtliche Wirkungsgrade von 90-99%. Die entstehenden Verluste müssen dennoch als Wärme abgeführt werden, da sonst Schäden verursacht werden können. Folgende Komponenten antriebstechnischer Systeme sind gegenüber hohen Temperaturen besonders empfindlich:

- Die Sperrschichttemperatur von Silizium-Leistungshalbleitern darf 130-150°C in der Regel nicht überschreiten. Neue Halbleiter auf Basis von Silizium-Karbid (SiC) erlauben zwar maximale Temperaturen von 200-300°C bei gleichzeitig etwa 3-facher Wärmeleitfähigkeit. Jedoch sind diese Elemente deutlich teurer als Silizium-Halbleiter und erst eingeschränkt verfügbar. SiC-Dioden werden aber bereits zunehmend eingesetzt.
- In Motoren darf die Isolation der Wicklungen (Isolierlack, Harz und Bandagen)– je nach Isolationsklasse (s. Anhang 12.5) nicht heißer als 100-180°C werden. Die Isolation wird durch Übertemperatur ggf. nicht sofort zerstört, aber geschädigt, so dass sich die Lebensdauer verkürzt.
- Permanentmagnete werden abhängig vom Magnetmaterial und der aktuellen magnetischen Beanspruchung oberhalb von 120-180°C entmagnetisiert.

Ein hoher Wirkungsgrad ist demnach nicht nur wegen der Energiekosten, sondern auch bezüglich des nötigen Kühlaufwands wünschenswert.

10.1 Grundlagen der Wärmeleitung

Energiebilanz

Als fundamentales physikalisches Prinzip gilt die Erhaltung der Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System (1. Hauptsatz der Thermodynamik). In offenen Systemen wird die gesamte innere Energie E über Zu- und Abfuhrterme bilanziert:

$$\dot{E} = P_{el} - P_{me} - P_{\theta} \quad (10.1)$$

Die Größen P_{el} , P_{me} und P_{θ} sind die elektrische, mechanische und thermische Leistungen, die dem System zugeführt bzw. aus dem System abgeführt werden. Die Wahl der Zählrichtungen in der Bilanzgleichung und unten stehenden Bild ist willkürlich. Die thermische Leistung P_{θ} wird auch als *Wärmestrom* bezeichnet.

Wir nehmen an, dass sich die gesamte innere Energie E in einzelne Anteile separieren lasse, also z. B. in einen elektromagnetischen Anteil E_{el} , in einen mechanischen Teil E_{me} sowie in eine Wärmemenge Q_{θ} :

$$E = E_{el} + E_{me} + Q_{\theta} \quad (10.2)$$

Diese Separation der Gesamtenergie in verschiedene Energieanteile ist keinesfalls ein allgemeines physikalisches Prinzip. Aus dem Blickwinkel der Thermodynamik ist das sogar eine naive, im Allgemeinen nicht haltbare Vorstellung. Die Gastheorie liefert ein bekanntes Gegenbeispiel: Dort ist eine solche Aufspaltung der inneren Energie in einen thermischen und einen mechanischen Anteil prinzipbedingt nicht sinnvoll bzw. möglich. Gerade deshalb können überhaupt Wärmekraftmaschinen konstruiert werden.

Beeinflusst dagegen die Temperatur eines Systems die elektrischen und die mechanischen Eigenschaften *nicht* oder sind ihre Einflüsse vernachlässigbar, gelingt in der Regel auch in der Energiebilanz die angenommene Separation. Dies trifft auf viele der hier betrachteten technischen Systeme zu.

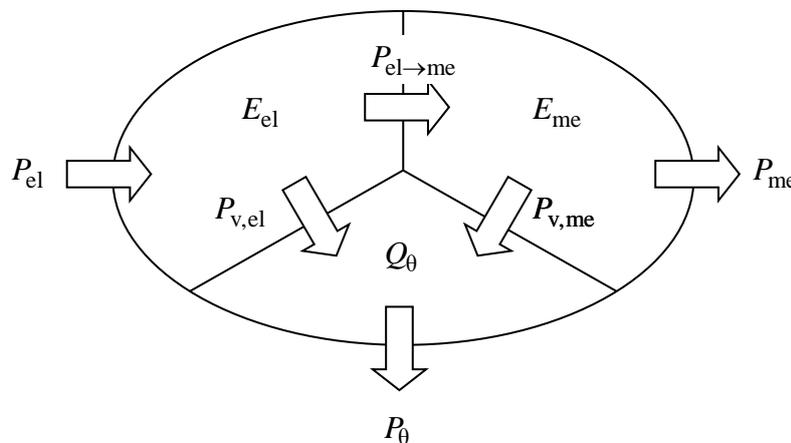


Bild 10-1: Energien und Leistungsflüsse in einem elektromechanischen System

Unter der Annahme einer solchen Separation lassen sich die einzelnen Energieanteile getrennt bilanzieren. Zwischen den Energiearten gibt es innerhalb des Systems Leistungsflüsse, insbesondere tragen die elektrischen und mechanischen Verluste, $P_{v,el}$ und $P_{v,me}$, zur Erhöhung der Wärmemenge bei:

$$\dot{Q}_\theta = P_{v,el} + P_{v,me} - P_\theta = P_v - P_\theta \quad (10.3)$$

Im stationären Zustand müssen demnach die im Innern anfallenden Verluste als Wärmestrom über die Oberfläche abgeführt werden:

$$P_\theta = P_v \quad (10.4)$$

Tauschen mehrere Körper über ihre Oberflächen Wärmeströme aus, so müssen diese aufgrund der Energieerhaltung von gleicher Größe und gegensinniger Orientierung sein.

Wärmekapazität

Führt man einem Körper eine Wärmemenge Q_θ zu, erhöht sich in der Regel seine Temperatur θ ⁹. Der Differenzialquotient von Wärmemenge und Temperatur heißt Wärmekapazität¹⁰:

$$C_\theta = \frac{dQ_\theta}{d\theta} \quad (10.5)$$

Die Wärmekapazität C_θ ist zwar allgemein wiederum von der Temperatur und anderen Variablen wie z. B. dem Druck abhängig, kann aber für viele technische Probleme als Konstante angesehen werden. Wird die Wärmekapazität auf die Masse m bezogen, sprechen wir von der *spezifischen Wärmekapazität*

$$c = \frac{C_\theta}{m} \quad (10.6)$$

Wärmewiderstand

Wird ein Körper an zwei Stellen seiner Oberfläche unterschiedlichen Temperaturen θ_1 , θ_2 ausgesetzt, so wird sich ein Wärmestrom (Leistung) P_θ von der höheren zur niedrigeren Temperatur einstellen, der in vielen Fällen durch das lineare Gesetz

$$P_\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R_\theta} \quad (10.7)$$

beschrieben werden kann. Die Konstante

$$R_\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{P_\theta} \quad (10.8)$$

heißt *Wärmewiderstand*. Für homogene prismatische Körper, die nur über ihre Stirnflächen im Wärmeaustausch mit der Umgebung stehen, lässt sich aus dem Wärmewiderstand der spezifische Wärmewiderstand bestimmen, wobei A die Größe der Stirnfläche und l die Länge des Körpers ist.

$$\rho_\theta = \frac{R_\theta A}{l} \quad (10.9)$$

⁹ Eine Ausnahme sind Phasenübergänge, bei denen Wärmezufuhr oder -abfuhr zu einer Phasenumwandlung führt, ohne dass sich dabei die Temperatur ändert, z.B. beim Schmelzen bzw. Gefrieren von Eis.

¹⁰ In der Thermodynamik bzw. der Technischen Wärmelehre wird zwischen zwei verschiedenen Wärmekapazitäten unterschieden, je nachdem, ob bei der Wärmezufuhr Druck oder Volumen konstant gehalten werden. Hier ist die Wärmekapazität bei konstantem Druck gemeint, wie dies bei flüssigen und festen Stoffen üblich ist.

bzw.

$$R_{\theta} = \frac{\rho_{\theta} l}{A} \quad (10.10)$$

Die Kehrwerte dieser Größen heißen *Wärmeleitwert* $G_{\theta} = 1/R_{\theta}$ und *spezifischer Wärmeleitwert* oder *Wärmeleitzahl* $\lambda_{\theta} = 1/\rho_{\theta}$:

$$G_{\theta} = \frac{P_{\theta}}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{A \lambda_{\theta}}{l} \quad (10.11)$$

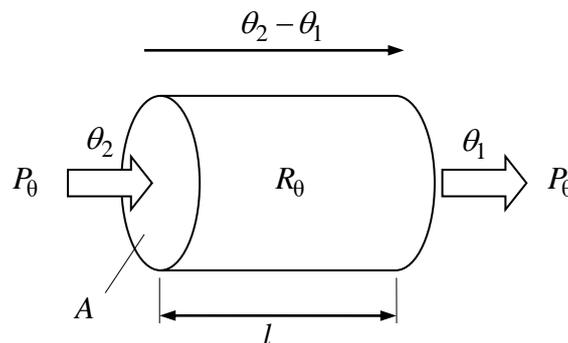


Bild 10-2: Wärmeleitung durch einen homogenen prismatischen Körper

Tabelle einiger spezifischer Wärmekapazitäten und Leitwerte

	c in $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	λ_{θ} in $\frac{\text{W}}{\text{m K}}$
Wasser	4,183	0,58
trockene Luft	1,005	
Steinwolle		0,035-0,04
Kupfer	0,385	401
Eisen	0,444	80,2
Silizium	0,700	148

Obwohl bei Wärmeleitungsproblemen im Allgemeinen das räumliche Kontinuum betrachtet werden muss, welches durch partielle Differenzialgleichungen (sogenannte *verteilte Parameter*) beschrieben wird, lassen sich viele technische Probleme durch Modelle mit *konzentrierten Parametern* (*lumped parameters*) hinlänglich gut beschreiben. Die Elemente eines solchen konzentrierten thermischen Modells können analog zu Elementen elektrischer Kreise betrachtet werden, da die zugrunde liegenden physikalischen Gesetze zueinander homomorph¹¹ sind.

¹¹ Homomorphismus: Strukturerhaltende Abbildung

Neben den Analogien der Gesetzmäßigkeiten der einzelnen Elemente (der konstitutiven Gleichungen) ist noch festzustellen, dass das erste Kirchhoffsche Gesetz, die Knotenregel, beim thermischen Netzwerk aufgrund der Energieerhaltung bzw. der Energiebilanz als Analogon zur Erhaltung bzw. Bilanz der elektrischen Ladung folgt. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz leitet sich im elektrischen Fall aus der Existenz eines elektrostatischen Potentials ab; im thermischen Fall ist dieses Potential die Temperatur.

Die Zuordnung ist also wie folgt:

elektr. Größe	Symbol	Maßeinheit	thermische Größe	Symbol	Maßeinheit
elektrischer Strom	I	A	Wärmestrom	P_θ	W
elektrische Ladung	Q	As	Wärmemenge	Q_θ	J
elektrostatisches Potential	V	V	Temperatur	T, θ^{12}	K, °C
elektrische Spannung	U	V	Temperaturdifferenz	$\Delta\theta$	K
Ohmscher Widerstand	R	Ω	Wärmewiderstand	R_θ	$\frac{\text{K}}{\text{W}}$
Kapazität	C	$\frac{\text{As}}{\text{V}}$	Wärmekapazität	C_θ	$\frac{\text{J}}{\text{K}}$

Die thermische Modellierung und Berechnung kann der Elektrotechniker dann mit den ihm gewohnten Elementen und Rechentechniken durchführen.

¹² Es ist üblich, die thermodynamische Temperatur, also die auf den absoluten Nullpunkt bezogene Temperatur, mit dem Symbol T , die Temperaturen der Celsius-Skala aber mit θ zu bezeichnen. Der Zusammenhang lautet: $T = 273,15 \text{ K} + \theta$. Da es in diesen Betrachtungen ohnehin nur um Temperaturdifferenzen geht und das Symbol T in diesem Skript schon für andere Größen mehrfach verwendet wurde, wird hier durchgehend θ als Symbol für Temperaturen benutzt.

10.2 Betriebsarten

Als Beispiel werde ein thermisches Modell mit einer einzigen Wärmequelle, welche durch ohmsche Verluste gespeist wird, einer Wärmekapazität und einem Wärmewiderstand betrachtet (s. Bild 10-3). Genauere thermische Modelle z.B. von Motoren sind deutlich aufwändiger. Für eine erste einführende Betrachtung ist dennoch ein solch einfaches Modell hilfreich:

Wärmequelle, Wärmeeintrag in Abhängigkeit des elektrischen Stroms:

$$P_v = Ri^2 \quad (10.12)$$

Dynamisches Verhalten der Wärmekapazität, θ_i ist die innere Temperatur des Widerstands:

$$C_\theta \dot{\theta}_i = P_v - P_\theta \quad (10.13)$$

Wärmeableitung zur Umgebung, die Umgebungstemperatur ist θ_u :

$$P_\theta = \frac{\Delta\theta}{R_\theta} = \frac{\theta_i - \theta_u}{R_\theta} \quad (10.14)$$

Die Zusammenhänge lassen sich übersichtlich in einem Ersatzschaltbild darstellen:

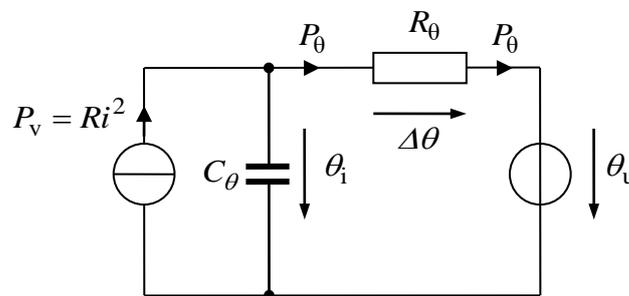


Bild 10-3: Einfaches thermisches Ersatzschaltbild

An diesem einfachen Modell, welches exemplarisch nicht nur für einen ohmschen Widerstand, sondern ganz allgemein für viele andere einfache thermische Vorgänge stehen soll, seien die grundsätzlichen Fragestellungen erläutert:

Bemessung nach Dauerleistung (S1)

Der ohne Unterbrechung andauernde Betrieb mit konstanter Verlustleistung wird als S1 bezeichnet (vgl. Anhang 12.4). In diesem Fall kann man von einem stationären Zustand ausgehen. Die Temperaturen sind nach einiger Zeit eingeschwungen und ändern sich nicht mehr. Die Größe der Wärmekapazität ist für den stationären Zustand ohne Belang. Der Zusammenhang zwischen den Temperaturen und der Verlustleistung ergibt sich nach

$$P_v = P_\theta = \frac{\Delta\theta}{R_\theta} = \frac{\theta_i - \theta_u}{R_\theta} \quad (10.15)$$

Je nach Sichtweise kann man unterschiedliche Entwurfsaufgaben formulieren:

1. Bei vorgegebener Betriebstemperatur θ_i und maximaler Umgebungstemperatur $\theta_{u \max}$ bestimmt sich die maximal zulässige Verlustleistung zu

$$P_{v \max} = \frac{\theta_i - \theta_{u \max}}{R_\theta} = \frac{\Delta\theta_{\max}}{R_\theta} \quad (10.16)$$

Der Betrieb muss so geführt werden, dass dieser Wert nicht überschritten wird

2. Bei vorgegebener Betriebstemperatur θ_i und maximaler Verlustleistung $P_{v \max}$ ist die maximal zulässige Umgebungs- bzw. Kühlmitteltemperatur zu bestimmen:

$$\theta_{u \max} = \theta_i - P_{v \max} R_\theta \quad (10.17)$$

3. Bei vorgegebener Betriebstemperatur θ_i , maximaler Umgebungstemperatur $\theta_{u \max}$ und abzuführender maximaler Verlustleistung $P_{v \max}$ ist der notwendige Wärmewiderstand zu bestimmen. Dieser lässt sich über die Auswahl des Kühlkörpers oder durch Erhöhung der Konvektion (Gebläse) verändern:

$$R_\theta = \frac{\theta_i - \theta_u}{P_{v \max}} = \frac{\Delta\theta}{P_{v \max}} \quad (10.18)$$

Bemessung nach Kurzzeitbetrieb (S2)

Die thermische Zeitkonstante des Systems ist

$$\tau_\theta = R_\theta C_\theta \quad (10.19)$$

Sind die Verlustleistung P_v und die Umgebungstemperatur θ_u zeitlich konstant, entwickelt sich die Temperatur wie bei einem elektrischen RC-Glied nach einer Exponentialfunktion, die man in der Anfangs-Endwert-Darstellung folgendermaßen ansetzen kann. Vorteilhafterweise stellt man die Temperatur als Differenz zur Umgebungstemperatur dar:

$$\Delta\theta(t) = \theta_i(t) - \theta_u = \Delta\theta_0 e^{-\frac{t}{\tau_\theta}} + \Delta\theta_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\theta}} \right) \quad (10.20)$$

Hierbei sind

$$\Delta\theta_0 = \Delta\theta(0) \quad (10.21)$$

der Anfangswert und

$$\Delta\theta_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\theta(t) = P_v R_{\theta} \quad (10.22)$$

der stationäre Endwert der Temperaturdifferenz.

Beim Kurzzeitbetrieb S2 wird angenommen, dass die Anfangstemperatur gleich der Umgebungstemperatur ist, also

$$\Delta\theta_0 = 0$$

Wird nun das Gerät nur für eine Betriebsdauer t_b eingeschaltet, wird die stationäre Endtemperaturdifferenz $\Delta\theta_{\infty}$ nicht erreicht, sondern nur

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta(t_b) = \Delta\theta_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_{\theta}}} \right) \quad (10.23)$$

$$\frac{\Delta\theta_{\max}}{\Delta\theta_{\infty}} = 1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_{\theta}}} \quad (10.24)$$

Löst man nach der Leistung auf, erhält man als maximal mögliche Leistung

$$P_{v \max, S2} = \frac{\Delta\theta_{\max} / R_{\theta}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_{\theta}}}} = \frac{P_{v \max, S1}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_{\theta}}}} \quad (10.25)$$

Man erkennt, dass die maximal mögliche Verlustleistung größer ist als beim Dauerbetrieb. Der mögliche Überlastfaktor

$$\frac{P_{v \max, S2}}{P_{v \max, S1}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_{\theta}}}} \quad (10.26)$$

hängt von der thermischen Zeitkonstante τ_{θ} und der Betriebsdauer t_b ab. Als Faustregel kann man sich merken, dass dies nur dann einen nennenswerten Unterschied ausmacht, wenn die Betriebsdauer kleiner als die dreifache thermische Zeitkonstante ist:

$$t_b < 3\tau_{\theta}$$

Andernfalls handelt es sich quasi um Dauerbetrieb S1 ($e^{-3} = 5\%$).

Beim S2-Betrieb geht man davon aus, dass nach dem Ausschalten bis zum nächsten Einschalten genügend Zeit vergeht, so dass sich das Gerät wieder bis auf die Umgebungstemperatur abkühlen kann. Als Faustregel für die notwendige Betriebspause t_p kann gelten:

$$t_p > 3\tau_\theta$$

Bemessung nach Aussetzbetrieb (S3)

Beim Aussetzbetrieb wird angenommen, dass sich Betriebsphasen der Dauer t_b und Pausen der Dauer t_p periodisch wiederholen. Die Dauer der gesamten Periode sei

$$t_s = t_b + t_p \quad (10.27)$$

Nach dem erstmaligen Einschalten wird die Temperatur ansteigen, sich aber in einer kurzen Pause nicht wieder auf den Anfangswert abkühlen (s. Bild 10-4). Auf diese Weise steigt die mittlere Temperatur über einige Ein- und Ausschaltphasen hinweg an, bis sich ein Gleichgewicht einstellt und sich der Vorgang periodisch wiederholt. Die Temperatur entwickelt sich abschnittsweise nach Exponentialfunktionen. Denkbar ist, dass während des Betriebs und in der Pause unterschiedliche thermische Zeitkonstanten τ_b und τ_p maßgeblich sind, z.B. wenn es sich um einen Motor mit Selbstbelüftung handelt, so dass während des Stillstands keine Konvektion stattfindet und sich Wärmewiderstand als auch die thermische Zeitkonstante erhöhen. Die Bestimmungsgleichungen für die minimale und die maximale Temperatur im periodischen Zustand lauten dann folgendermaßen:

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_{\min} e^{-\frac{t_b}{\tau_b}} + \left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \Delta\theta_\infty \quad (10.28)$$

$$\Delta\theta_{\min} = \Delta\theta_{\max} e^{-\frac{t_p}{\tau_p}} \quad (10.29)$$

Die Elimination von $\Delta\theta_{\min}$ führt zu

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_{\max} e^{-\frac{t_p}{\tau_p}} e^{-\frac{t_b}{\tau_b}} + \left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \Delta\theta_\infty$$

$$\Delta\theta_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}\right) = \left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \Delta\theta_\infty$$

$$\frac{\Delta\theta_{\max}}{\Delta\theta_\infty} = \frac{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}} \quad (10.30)$$

Daraus ergibt sich der zulässige Überlastfaktor für den S3-Betrieb:

$$\frac{P_{v\max,S3}}{P_{v\max,S1}} = \frac{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}} \quad (10.31)$$

Über

$$\Delta\theta_{\min} = e^{-\frac{t_p}{\tau_p}} \frac{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}} \Delta\theta_{\infty} \quad (10.32)$$

gewinnt man außerdem die Temperaturschwankung während einer Arbeitsperiode:

$$\theta_{\max} - \theta_{\min} = \Delta\theta_{\max} - \Delta\theta_{\min} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b}}\right) \left(1 - e^{-\frac{t_p}{\tau_p}}\right)}{1 - e^{-\frac{t_b}{\tau_b} - \frac{t_p}{\tau_p}}} \Delta\theta_{\infty} \quad (10.33)$$

Selbst wenn die maximal zulässige Temperatur eingehalten wird, altern viele elektrotechnische Komponenten aufgrund der thermischen Wechselbelastung. Eine hohe, aber gleich bleibende Temperatur kann bezüglich der Lebensdauer günstiger sein als zahlreiche thermische Wechselbeanspruchungen.

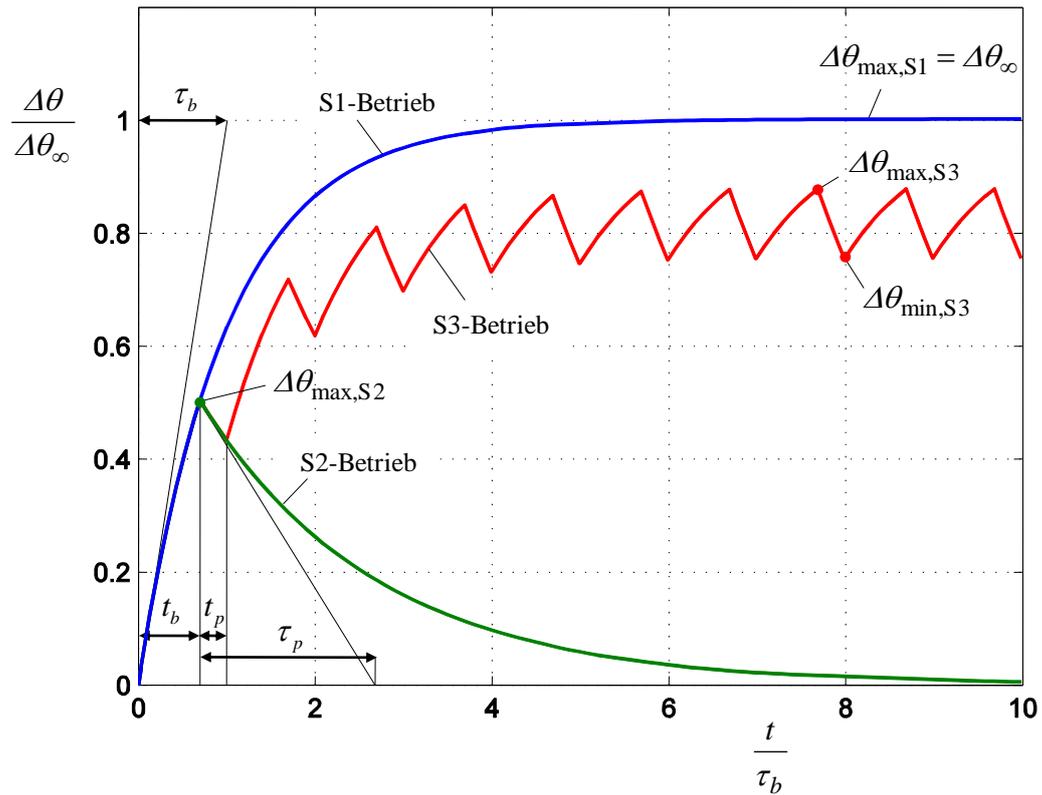


Bild 10-4: S1-, S2- und S3-Betrieb

Temperaturverläufe bei jeweils mit gleichem Wärmeeintrag während der Betriebsphase,
hier: $t_b / \tau_b = 0,7$; $t_p / \tau_b = 0,3$; $\tau_p / \tau_b = 2$

10.3 Detaillierte Wärmeleitungsmodelle

Das im vorangegangenen Abschnitt betrachtete einmaschige Netzwerk taugt nur für die Beschreibung sehr einfacher Zusammenhänge. Häufig kommen aufwändige Netzwerke zum Einsatz, wie die nachfolgenden Bilder zeigen. (Nicht vergessen werden sollte, dass das Wärmeleitungsproblem nach seiner physikalischen Struktur ursprünglich ein sogenanntes Problem mit *verteilten Parametern* ist und eine Modellierung mit konzentrierten Elementen wie es ein Netzwerkmodell ist, nur beschränkte Genauigkeit liefern kann.)

Beliebt sind Kettenleitermodelle in Kettenbruch- oder Partialbruchform:

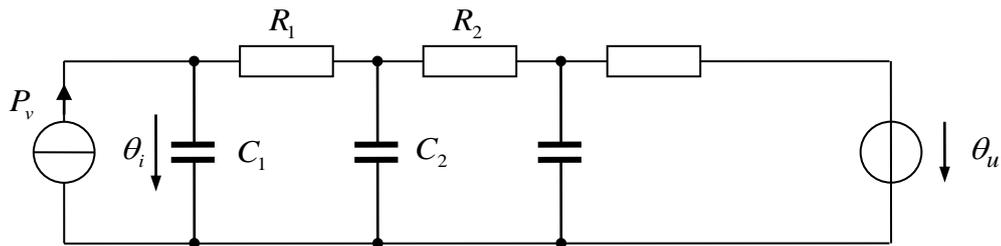


Bild 10-5: Thermisches Kettenbruchmodell (Cauer-Modell)

Das *Kettenbruchmodell* entsteht unmittelbar durch die eindimensionale Modellierung des Wärmeleitungsproblems durch verschiedene Materialschichten, wie z.B. bei leistungselektronischen Modulen die Folge Chip, Substrat, Bodenplatte, Kühlkörper oder Wärmetauscher. Jede Schicht besitzt ihre entsprechende Wärmekapazität. Zwischen den Schichten werden die Wärmewiderstände berücksichtigt. Das Kettenbruchmodell hat den Vorteil der unmittelbaren physikalischen Interpretierbarkeit. Daher können Teilmodelle zwanglos zu einem Gesamtsystem zusammengefügt werden.

Das dynamische Verhalten dieses Netzwerks kann unter der Voraussetzung linearer Elemente durch die *Wärmeimpedanz* beschrieben werden. Die Wärmeimpedanz ist der Quotient von Temperatur und Wärmestrom an den Klemmen der Wärmequelle. Wie im elektrischen Fall führen wir diesen Quotienten im Laplace- bzw. Frequenzbereich ein:

$$Z_{\theta}(s) = \frac{\theta_i(s) - \theta_u}{P_v(s)} \quad (10.34)$$

Nachteilig beim Kettenbruchmodell ist die unhandliche Form der Wärmeimpedanz, die dem Modell seinen Namen gibt. Die Impedanz entwickelt man am besten beginnend vom rechten Rand des Netzwerks durch sukzessive Parallel- und Reihenschaltung der hinzuzufügenden Widerstände und Kapazitäten:

$$\begin{aligned}
 Z_{\theta}(s) &= \frac{1}{sC_1} \parallel \left[R_1 + \frac{1}{sC_2} \parallel \left[R_2 + \frac{1}{sC_3} \parallel \left[\dots + \frac{1}{sC_{N-1}} \parallel \left[R_{N-1} + \frac{1}{sC_N} \right] \right] \right] \right] \\
 &= \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_3 + \frac{1}{\dots}}}}} }
 \end{aligned} \tag{10.35}$$

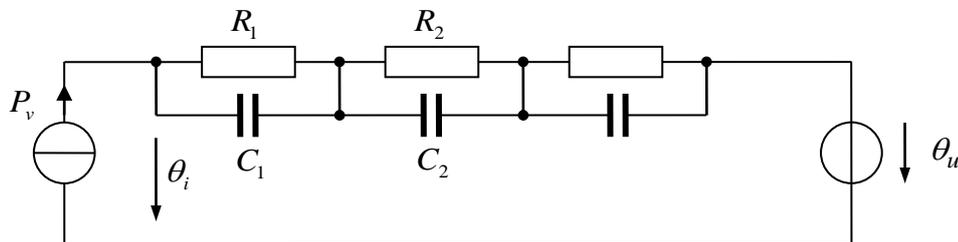


Bild 10-6: Thermisches Partialbruchmodell (Foster-Modell)

Bei der Alternative, dem *Partialbruchmodell*, kann dagegen die Impedanz direkt durch Summation der Teilimpedanzen der einzelnen *RC*-Glieder der Reihenschaltung gefunden werden, wodurch sich auch diese Namensgebung erklärt:

$$Z_{\theta}(s) = \frac{\theta_i(s) - \theta_u}{P_v(s)} = \sum_k Z_k(s) = \sum_k \frac{1}{1/R_k + sC_k} = \sum_k \frac{R_k}{1 + s\tau_k} \tag{10.36}$$

mit den thermischen Zeitkonstanten

$$\tau_k = R_k C_k \tag{10.37}$$

Das Partialbruchmodell hat gegenüber dem Kettenbruchmodell den Vorteil der einfacheren Darstellung der Wärmeimpedanz. Die darin auftretenden Widerstände und Kapazitäten sind aber nicht mehr den einzelnen Schichten direkt physikalisch zuzuordnen.

Beide Modelle können aber ineinander umgerechnet werden. Halbleiterhersteller geben häufig die Parameter des Partialbruchmodells an. Beim Partialbruchmodell kann man außerdem die Sprungantwort im Zeitbereich, also die zeitliche Entwicklung des Temperaturverlaufs beim sprungförmigen Einschalten der Wärmequelle

$$P_v(t) = P_0 \sigma(t) \tag{10.38}$$

unmittelbar angeben: Jeder Partialbruch trägt mit einem exponentiell verlaufenden Übergangsvorgang zur Gesamt-Sprungantwort bei. Für diese Sprungantwort im Zeitbereich wird in der Literatur gern der gleiche Buchstabe wie für die Impedanz benutzt¹³:

$$\frac{\theta(t) - \theta_u}{P_0} = Z_\theta(t) = \sum_k R_k \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right] \quad (10.39)$$

Da die beteiligten Zeitkonstanten τ_k über mehrere Größenordnungen streuen können, empfiehlt sich eine doppelt-logarithmische Darstellung der Sprungantwort. Aus dieser Kurve lassen sich die Parameter für den Kurzzeitbetrieb S2 und natürlich auch für den Dauerbetrieb S1 direkt ablesen, indem man den betreffenden Momentanwert der Sprungantwort mit dem stationären Endwert ins Verhältnis setzt. Z. B. wäre beim IGBT gegenüber der Dauerbelastung eine 5-fache thermische Überlastung für eine Zeitdauer von ca. 10 ms gerade noch zulässig, eine Überlast von 150% könnte für wenig mehr als 100 ms geduldet werden, wobei jeweils vorausgesetzt wird, dass die Anfangstemperatur des Halbleiters vor Beginn der Überlast gleich der Umgebungstemperatur ist. Liegt die Anfangstemperatur höher, ist auch die Überlastfähigkeit entsprechend geringer. Ggf. kann bereits die pulsbreitenmodulierte schaltende Betriebsweise der Leistungshalbleiter zu nennenswerten thermischen Schwankungen führen.

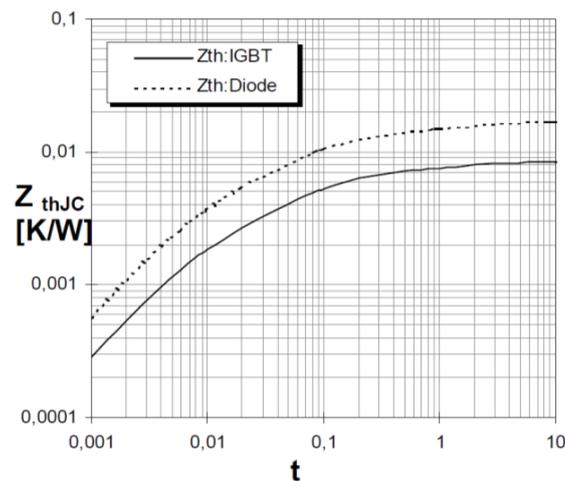


Bild 10-7: Sprungantwort der Sperrschichttemperatur bei einem IGBT-Modul, Zeit in Sekunden (Quelle: Infineon)

Hat man es nicht mit sprungförmigen Änderungen, sondern beliebigen zeitlichen Änderungen des Wärmeeintrages $P_v(t)$ zu tun, erhält man die Temperatur über eine Faltung mit der Impulsantwort. Sofern man weiterhin von der Sprungantwort $Z_\theta(t)$ ausgeht, ist diese also zuvor noch zu differenzieren:

¹³ $Z_\theta(t)$ ist aber nicht die zu $Z_\theta(s)$ korrespondierende Zeitbereichsfunktion, diese wäre die Impulsantwort. Die Sprungantwort ist das Integral der Impulsantwort. In der Literatur wird $Z_\theta(t)$ gelegentlich als Wärmeimpedanzkurve bezeichnet, was aber für die Sprungantwort im Zeitbereich kein glücklicher Begriff ist.

$$\theta(t) - \theta_u = \left(\frac{dZ_\theta}{dt} * P_v \right)(t) \quad (10.40)$$

Bei diesen Formeln wurde die Umgebungstemperatur θ_u als konstant angenommen. Soll auch eine schwankende Umgebungstemperatur berücksichtigt werden, ist außerdem das Übertragungsverhalten von $\theta_u(t)$ zu $\theta_i(t)$ zu berücksichtigen, wobei hierbei vom Cauer-Modell auszugehen ist, da das Foster-Modell dieses Verhalten nicht richtig wiedergibt. Bei diesem würde ein Sprung der Umgebungstemperatur unmittelbar zu einem Sprung der inneren Temperatur führen, was nicht der Realität entspricht.

Bei einer genaueren thermischen Modellierung von Motoren müssen die verschiedenen Wärmequellen, die sich räumlich über die Strukturelemente des Motors verteilen, in der Struktur des thermischen Modells berücksichtigt werden. Im unten gezeigten thermischen Modell eines Asynchronmotors sind die ohmschen Rotorverluste $P_{v,r}$, die ohmschen Statorverluste $P_{v,s}$ sowie zusätzliche Eisenverluste P_{Fe} im Stator durch Ummagnetisierung und Wirbelströme sowie die entsprechenden Wärmeübergangswiderstände und Wärmekapazitäten berücksichtigt.

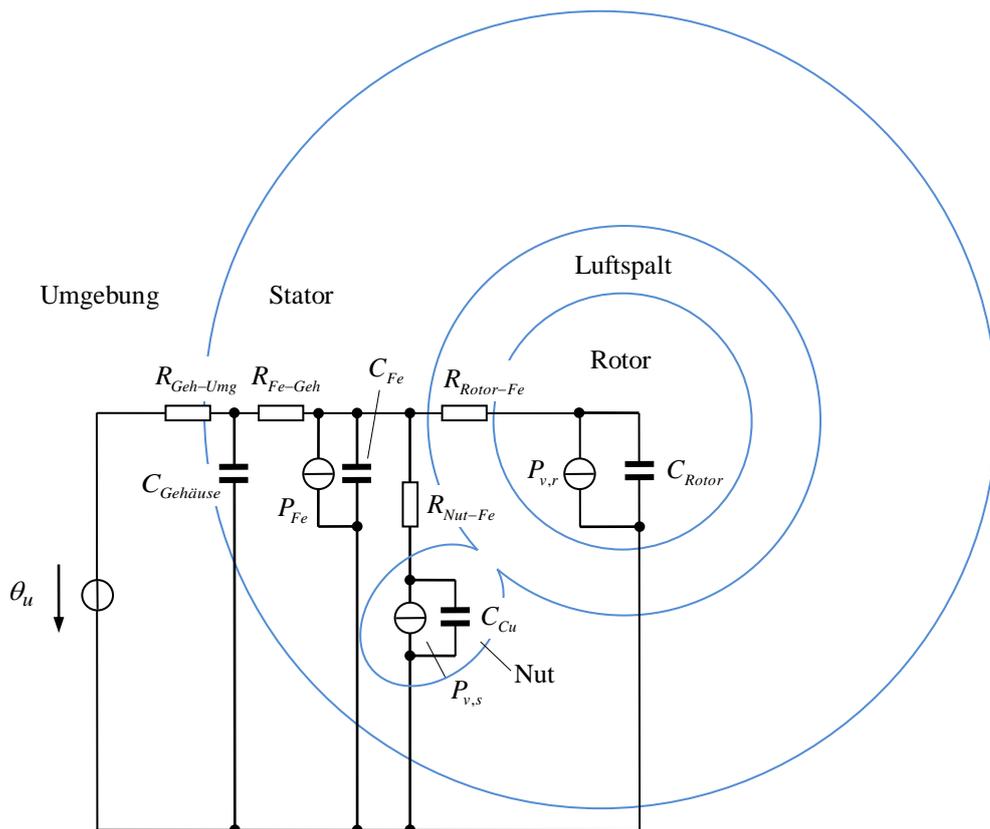


Bild 10-8: Thermisches Modell eines Asynchronmotors

11 Lebensdauer

Die Abschätzung der Lebensdauer energietechnischer Komponenten und Systeme ist eine schwierige, aber wichtige Fragestellung bei der Auslegung von Antrieben und Konvertern. Bei Investitionsgütern wie Industrieanlagen oder Bahnfahrzeugen kann es um Lebensdauern von 20 bis 40 Jahren gehen. Die Besteller lassen sich über die gesetzliche Gewährleistung hinaus von den Lieferanten langjährige Garantien und die Vorhaltung von Ersatzteilen zusichern. Im Automobilbereich geht es um kalendarische Lebensdauern - je nach Markenanspruch - von einigen Jahren und Betriebsdauern von einigen 1000 Stunden¹⁴. Selbst wenn im Konsumbereich nur die gesetzliche Gewährleistung zur Anwendung kommt, können erhebliche wirtschaftliche Schäden entstehen, wenn die zugestandene Lebensdauer nicht erreicht wird. Es kommt also darauf an, die Lebensdauer der Produkte zuverlässig abzuschätzen.

Die Lebensdauer einer Komponente kann durch Ausfall abrupt beendet werden, z. B. aufgrund der im vorangegangenen Kapitel diskutierten Übertemperaturen. Die Vermeidung solcher Zustände führt aber nicht zu einer unbegrenzten Lebensdauer, sondern die Komponenten altern selbst dann, wenn die zulässigen Spezifikationen eingehalten werden.

In antriebstechnischen Komponenten kommen typischerweise folgende Alterungsmechanismen in Betracht:

Motoren

- Langfristige Schädigung der Wicklungsisolation aufgrund thermischer Belastung oder durch ständige Beanspruchung mit steilen Spannungssprüngen. Diese verursachen sogenannte Teilentladungen und schwächen nach und nach die Isolation
- Ermüdungsbrüche der Wicklung, insbesondere der Aluminiumstäbe von Kurzschlussläufer-Asynchronmotoren infolge mechanischer Schwingungen.
- Lagerschäden durch hohe Temperaturen oder nachlassende Schmierung. Darüber hinaus können Lager auch durch *Lagerströme* erodiert werden, wenn aufgrund eines unzureichenden EMV-Konzepts¹⁵ Ausgleichsströme über die Lager fließen.

Umrichter

- Ablösung der Bonddrähte eines Halbleiters, typischerweise durch thermische Wechselbeanspruchung. Da meist mehrere parallele Bonddrähte vorhanden sind, führt die Ablösung eines Drahts noch nicht zum Ausfall, aber zur verstärkten Beanspruchung der verbliebenen, bis sich letztlich auch der letzte Bonddraht löst.
- Delamination des Halbleiters von der Bodenplatte oder der Bodenplatte vom Kühlkörper, ebenfalls durch thermische Wechselbeanspruchung, dadurch Verschlechterung der Kühlung bis hin zum Ausfall
- Der Ausfall von Halbleitern durch Diffusion der Dotierungsatome bei hohen Temperaturen ist gegenüber den ersten beiden Mechanismen bei Leistungshalbleitern von geringerer Bedeutung
- Schädigung der Wicklungsisolation von magnetischen Bauelementen (vgl. Motoren)

¹⁴ Ein Jahr hat 8760 Stunden. Gemessen an der Nutzungsrate ist ein durchschnittliches privates Fahrzeug also eher ein Stehzeug.

¹⁵ EMV: Elektromagnetische Verträglichkeit. Dieser Begriff umreißt das Gebiet der (in der Regel unerwünschten) parasitären elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen den Komponenten. Hauptsächlich geht es um geleitete oder gestrahlte Oberschwingungen. Eine Komponente bzw. ein System wird als elektromagnetisch verträglich bezeichnet, wenn derartige Wechselwirkungen nicht zu Störungen führen. Meist wird dies über die Einhaltung der nach EMV-Normen (z. B. EN 61000) zulässigen Oberschwingungsgrenzwerte nachgewiesen.

- Alterung von Elektrolytkondensatoren durch unerwünschte elektrochemische Reaktionen

Batterien

- Kalendarische Alterung durch elektrochemische Reaktionen, begünstigt durch hohe Temperaturen
- Schädigung durch Wechselbeanspruchungen (Lade-Entlade-Zyklen), wodurch sich die Elektrodenstruktur verändert und zu einem langsamen Anstieg des ohmschen Innenwiderstands führt.

Allgemein

- Korrosion durch Feuchtigkeit, Salze, Säuren
- Verschmutzung durch Staub usw.

Das Ende der Lebensdauer ist natürlich bei einem Funktionsausfall der Komponenten erreicht. Doch wird die Lebensdauer nicht über den Totalausfall, sondern durch das Überschreiten charakteristischer Grenzwerte definiert, selbst wenn die Komponente grundsätzlich noch funktionsfähig ist, z. B.:

- bei Halbleitern die Erhöhung der Durchlassspannung um 20%
- bei Batterien die Erhöhung des Innenwiderstands um 50% oder ein Absinken des verfügbaren Energieinhalts um 30 %

Die Alterungsmechanismen sind vielfältig und analytisch meist nicht oder nur unvollkommen zu beschreiben. Bei vielen Lebensdauermodellen handelt es sich daher um empirisch begründete Ansätze, die je nach Fragestellung bzw. Schädigungsmechanismus zum Einsatz kommen.

Badewannenmodell, Weibull-Verteilung

Trägt man die mittlere Ausfallrate über der Zeit bzw. Betriebsdauer auf, so zeigen viele Bauelemente eine badewannenförmige Kurvenform: Eine anfangs hohe Ausfallrate (die Säuglingssterblichkeit) fällt rasch auf ein meist niedriges Niveau, bis die Ausfallrate nach langer Betriebszeit wieder ansteigt. Typischerweise versuchen heute Hersteller, die Anfangsausfälle durch gutes Qualitätsmanagement gar nicht erst entstehen zu lassen bzw. diese Ausfälle durch Funktionstests noch vor der Auslieferung abzufangen.

Bei diesem Modell wird bereits deutlich, dass man meist nicht oder nur unzureichend in der Lage ist, die Lebensdauer einer individuellen Komponente vorherzusagen, sondern allenfalls im statistischen Sinne für eine Charge. Es geht also im Sinne der Stochastik um Zufallsvariablen, die eine mehr oder weniger breite Streuung um die Erwartungswerte aufweisen.

Für die Modellierung des „rechten Randes der Badewanne“ kann die *Weibull-Verteilung* verwendet werden. Der Wert der Weibull-Verteilungsfunktion $F_W(L)$ gibt den zu erwartenden Anteil der Komponenten an, die eine Lebensdauer kleiner oder gleich L erreichen. Sie lautet

$$F_W(L) = 1 - e^{-\left(\frac{L}{\tau}\right)^k} \quad (11.1)$$

Die Dichtefunktion, also die Ausfallrate (Ausfälle pro Zeiteinheit), ergibt sich bekanntermaßen als Ableitung der Verteilungsfunktion,

$$f_W(L) = \frac{dF_W(L)}{dL} = \frac{k}{\tau} \left(\frac{L}{\tau}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{L}{\tau}\right)^k} \quad (11.2)$$

Hätten alle individuellen Exemplare eine exakt identische Lebensdauer, erhielte die Verteilungsfunktion die Gestalt einer Sprungfunktion, was in der Weibull-Funktion durch den Grenzübergang des Formparameters $k \rightarrow \infty$ erreicht werden kann. Die Varianz der Verteilung nimmt ab mit zunehmendem k . In Bild 11-1 sind die Weibull-Verteilung und die Verteilungsdichte für verschiedene Formparameter k dargestellt. Im untersten Teilbild findet sich die Verteilungsfunktion ein weiteres Mal mit gespreizter Ordinatenachse.

Der Erwartungswert der Lebensdauer bestimmt sich aus der Verteilungsdichte f_W nach

$$E[L] = \int_0^{\infty} f_W(l) l \, dl = \tau \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \approx \tau \quad (11.3)$$

Da die Gammafunktion $\Gamma(1+1/k)$ für große Werte von k durch 1 genähert werden kann, entspricht τ in etwa dem Erwartungswert der Lebensdauer. Für den Erwartungswert der Lebensdauer ist auch der Begriff *Mean Time to Failure* (MTTF) gebräuchlich¹⁶.

Für eine wirtschaftliche Betrachtung ist dieser Wert aber nicht allzu aussagekräftig, da Kosten für Ausfälle innerhalb einer Gewährleistungsfrist oder der projektierten Lebensdauer in aller Regel nicht durch Ersparnisse bei Exemplaren mit längerer Lebensdauer ausgeglichen werden können. Wenn aber die Verteilungsfunktion bekannt ist, kann abgelesen werden, welche Lebensdauer z. B. 95% oder 99% der Komponenten mindestens erreichen. Beispielsweise zeigt Bild 11-1, dass bei einem Formfaktor von $k=3$ ein Ausfall von maximal 1% aller Komponenten nur für eine Zeitdauer von lediglich $0,2\tau$ garantiert werden kann.

¹⁶ Begrifflich ist zwischen *Mittelwert* und *Erwartungswert* zu unterscheiden. Der Mittelwert ist ein Begriff der Statistik, nämlich das arithmetische Mittel der jeweiligen Proben einer Messreihe, welches je nach Stichprobe schwanken kann. Der Erwartungswert ist exakt nur aus einem stochastischen Modell des Prozesses bestimmbar, z.B. aus der Verteilungsfunktion der Zufallsvariable. Anhand von Experimenten kann der Erwartungswert nie exakt bestimmt, sondern nur geschätzt werden: Jeder Mittelwert einer Messreihe liefert einen Schätzwert des Erwartungswertes.

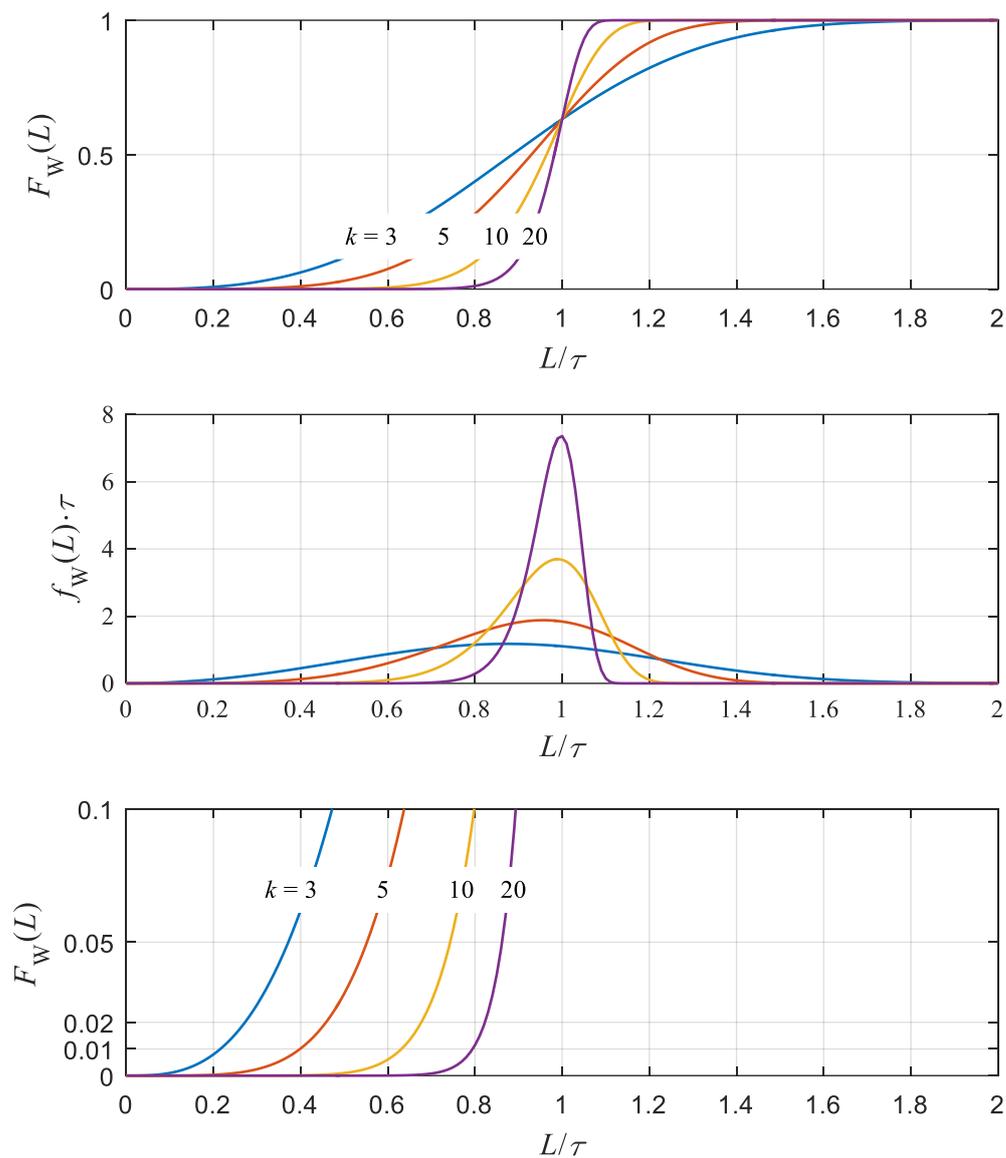


Bild 11-1: Weibull-Verteilungsfunktion und -Verteilungsdichte für verschiedene Werte des Formparameters k

Die Weibull-Verteilung mag für einige Fragestellungen nützlich sein, aber sie berücksichtigt keine Abhängigkeit von anderen wichtigen Parametern, u.a. der Temperatur. Dies kann ggf. das Arrhenius-Modell leisten, welches aber wiederum keinen stochastischen Ansatz beinhaltet.

Arrhenius-Modell

Die *Arrheniusgleichung* der chemischen Reaktionskinetik beschreibt die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen in Abhängigkeit der Temperatur,

$$k = A e^{-\frac{E_A}{k_b T}} \quad (11.4)$$

Hierbei ist k die Reaktionsgeschwindigkeit, T die thermodynamische Temperatur, $k_b = 1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmannkonstante, A die für die jeweilige Reaktion sog. charakteristische Stoßzahl und E_A die Aktivierungsenergie der jeweiligen chemischen Reaktion. Die Aktivierungsenergie kann als Potenzialbarriere verstanden werden, die überwunden werden muss, damit die Reaktion ablaufen kann. Katalysatoren verringern die Potenzialbarriere und steigern somit die Reaktionsgeschwindigkeit (was im Sinne einer langen Lebensdauer aber nicht erwünscht ist).

Gern führt man im Exponenten der Arrheniusgleichung eine Linearisierung um eine Bezugstemperatur T_0 wie folgt durch:

$$\begin{aligned} k &= A e^{-\frac{E_A}{k_b T}} = A e^{-\frac{E_A}{k_b (T_0 + \Delta T)}} = A e^{-\frac{E_A}{k_b T_0 (1 + \Delta T / T_0)}} \approx A e^{-\frac{E_A (1 - \Delta T / T_0)}{k_b T_0}} \\ &= A e^{-\frac{E_A}{k_b T_0}} e^{+\frac{E_A \Delta T}{k_b T_0^2}} = A' e^{c \Delta T} \end{aligned} \quad (11.5)$$

mit

$$A' = A e^{-\frac{E_A}{k_b T_0}}, \quad c = \frac{E_A}{k_b T_0^2} \quad (11.6)$$

Bei vielen chemischen Reaktionen kann für den Bezugspunkt der Linearisierung $T_0 = 300$ K (Raumtemperatur) mit der Faustformel

$$k \approx A' e^{c \Delta T} \approx A' 2^{\Delta T / 10 \text{ K}} \quad (11.7)$$

gerechnet werden, was auf die aus der Chemie bekannte Faustformel hinausläuft, dass sich bei einer Temperaturerhöhung um 10 K die Reaktionsgeschwindigkeit verdoppelt: die sog. *van-'t-Hoff'sche Regel*. Nach kurzer Zwischenrechnung kann die hierzu passende Aktivierungsenergie zu

$$E_A = \frac{k_b T_0^2 \ln 2}{10 \text{ K}} = 8,613 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,538 \text{ eV} \quad (11.8)$$

bestimmt werden. Dieser Wert ist anscheinend für viele Reaktionen eine passable Näherung. Andere Quellen gehen für leistungselektronische Komponenten von $E_A = 0,8 \text{ eV}$ aus. Man beachte, dass die Aktivierungsenergie statt wie hier auf ein einzelnes Molekül oft auch auf ein Mol bezogen angegeben wird. Die Werte können über die Zahl der Moleküle pro Mol, also mit der Avogadrozahl $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ / mol umgerechnet werden.

Die Reaktionsgeschwindigkeit steigt demnach mit der Temperatur. Wenn Alterungsvorgänge auf chemische Reaktionen zurückgehen, resultiert die temperaturabhängige Lebensdauer folglich invers proportional zur Reaktionsgeschwindigkeit:

$$L(T) = L_0 e^{\frac{E_A}{k_b T}} \approx L'_0 e^{-c\Delta T} \quad (11.9)$$

Dieses Modell dient auch der Rechtfertigung, dass Lebensdauertests bei höheren Temperaturen beschleunigt durchgeführt werden können. Allerdings muss zur Umrechnung der Lebensdauer auf die wirklichen Betriebstemperaturen die Aktivierungsenergie E_A bekannt sein. Mangels anderer Kenntnisse kann man hoffen, dass der Wert nach (11.8), also die van-'t-Hoff'sche Regel, auch für die maßgeblichen Reaktionen der Alterung richtig ist. Unter dieser Annahme kann durch eine Temperaturerhöhung um beispielsweise 30 K ein Lebensdauertest um den Faktor 8 beschleunigt werden.

Ist E_A nicht bekannt, könnten die beiden Parameter L_0 und E_A bzw. L'_0 und c der Gleichung (11.9) durch Messreihen bei wenigstens zwei verschiedenen Temperaturen empirisch bestimmen werden.

Das Arrhenius-Modell beschreibt zwar die Temperaturabhängigkeit der Lebensdauer, beinhaltet aber keine stochastische Komponente. Ggf. müssen zur Betrachtung beider Effekte die Modelle kombiniert werden.

Alterung durch Wechselbeanspruchung

Einige Alterungsmechanismen werden durch das Arrhenius-Modell nur sehr unvollkommen beschrieben. Zwar stellt man beispielsweise fest, dass die Alterung leistungselektronischer Module oder von Batterien von der mittleren Temperatur beeinflusst wird, doch wirken sich *wechselnde* thermische Beanspruchungen sogar stärker aus als die mittlere Temperatur. Hierbei stellt sich heraus, dass nicht so sehr die absolute *Zeitdauer*, sondern eher die *Anzahl* der Wechselzyklen für die erreichbare Lebensdauer charakteristisch ist. Die Zahl der erreichbaren Wechselzyklen hängt dabei entscheidend von der Amplitude der Wechselbeanspruchung ab.

In der mechanischen Festigkeitslehre sind solche Kurven, die die erreichbare Zahl von Wechselzyklen in Abhängigkeit der Amplitude der mechanischen Belastung beschreiben, als *Wöhlerkurven* bekannt. Auch bei elektrischen Komponenten sind es letztlich mechanische Spannungs-Dehnungs-Beanspruchungen, die zum Ausfall führen. Kritisch sind insbesondere die Materialgrenzschichten wie Bonddraht-Halbleiter-Verbindungen und die laminierten Verbindungen zwischen Substrat, Bodenplatte und Kühlkörper, da aufgrund unterschiedlicher thermischer Ausdehnungskoeffizienten als Folge von Temperaturänderungen Spannungs-Dehnungs-Beanspruchungen entstehen.

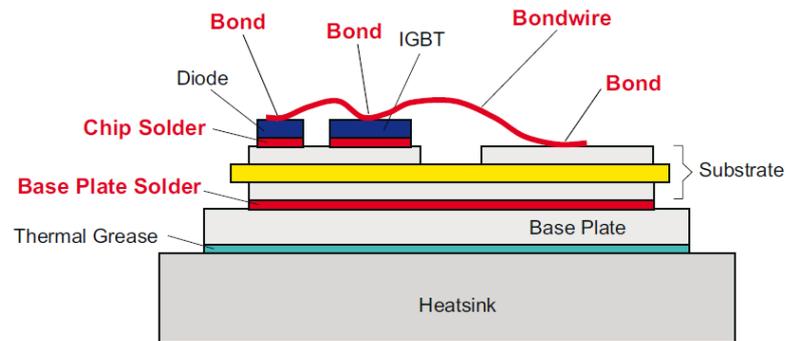


Bild 11-2: Schichtfolge eines IGBT-Moduls
Quelle: Semikron Applikationshandbuch

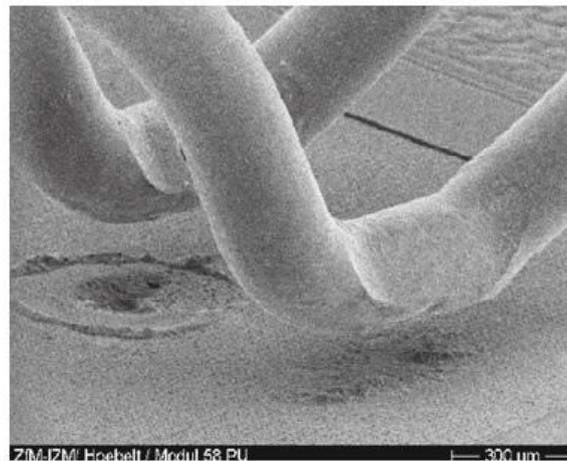


Bild 11-3: Abgelöste Bonddrähte eines IGBT-Moduls,
Quelle: Lutz, Leistungselektronik

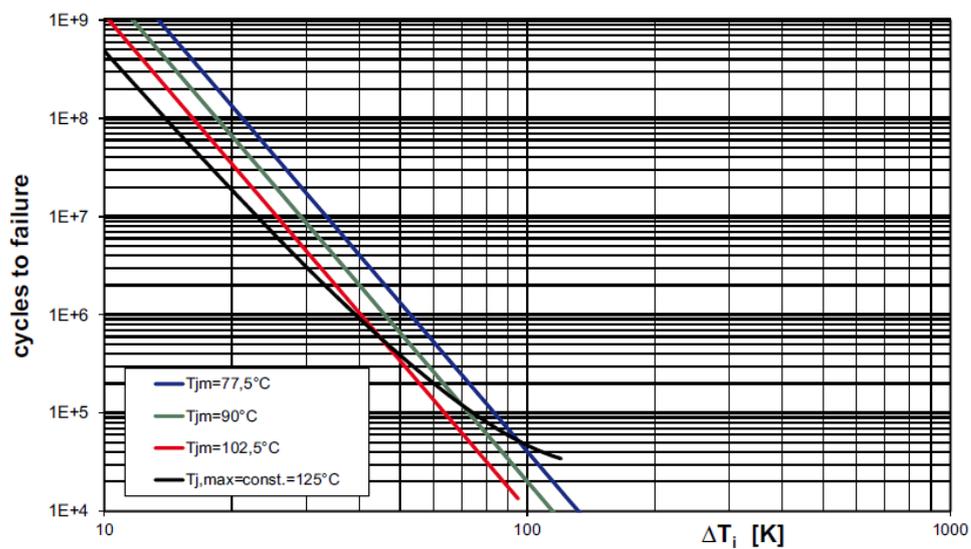


Bild 11-4: Zahl der Zyklen eines IGBT-Moduls in Abhängigkeit des Temperaturhubes für verschiedene mittlere Temperaturen, Quelle: Semikron Applikationshandbuch

Bei Batterien treten Alterungseffekte abhängig von Zahl und Höhe der Lade-Entlade-Zyklen auf. Die zyklische Belastungsgröße ist hierbei der Ladegrad bzw. die Entladungstiefe.

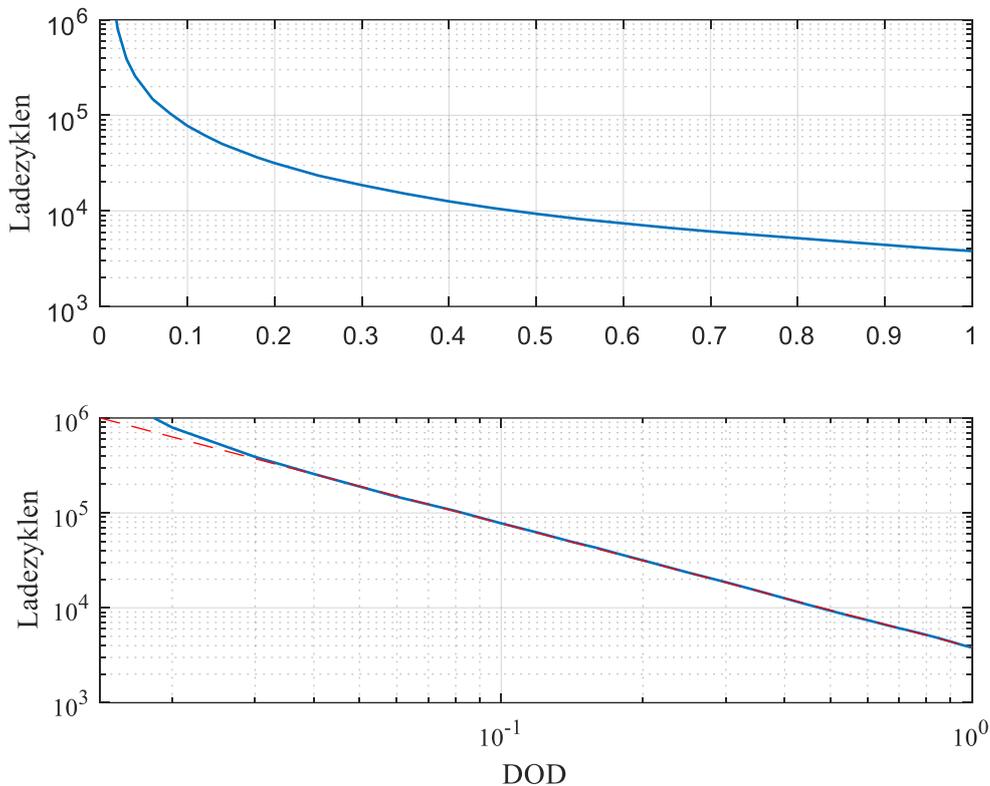


Bild 11-5: Zahl der Zyklen einer Lithium-Ionen-Batterie in Abhängigkeit von der Lade-Entladetiefe DOD, oberes Bild: einfach logarithmische Darstellung, unteres Bild: doppelt-logarithmische Darstellung mit Regressionsgerade
Datenquelle: Saft, Doc. No. 21865-0217-2, Feb. 2017

Bei dieser Modellvorstellung wird die Lebensdauer also nicht als Zeit, sondern als erreichbare Zyklenzahl angegeben,

$$N = N(p) \quad (11.10)$$

wobei hier der allgemein gehaltene Parameter p je nach Problemstellung z.B. als Temperaturhub oder als Lade-Entlade-Tiefe verstanden werden kann. Häufig lässt sich der Zusammenhang zwischen Zyklenzahl und Beanspruchung durch eine sogenannte *Coffin-Manson-Regel* annähern:

$$N(p) \approx N_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-B} \quad (11.11)$$

Der Exponent B wird als *Ermüdungs-* oder *Fatigue-Exponent* bezeichnet. In einer doppelt-logarithmischen Darstellung ergibt sich also zwischen $\log(N/N_0)$ und $\log(p/p_0)$ eine Gerade der Steigung $-B$, vgl. Bild 11-4 und Bild 11-5, unteres Teilbild.

In der Praxis wird aber eine Komponente selten über ihre gesamte Lebensdauer mit der immer gleichen Wechsellast beansprucht, sondern es werden Wechsellasten unterschiedlicher Höhe auftreten. Um die Lebensdauer auch für derartige Fälle abschätzen zu können, nehmen wir an, dass ein einzelner Belastungszyklus der Höhe p einen entsprechenden Bruchteil der Lebensdauer verbraucht bzw. eine anteilige Schädigung von $1/N(p)$ verursacht. Werden nacheinander Wechsellasten verschiedener Amplitude p_i mit jeweiligen Zyklenzahlen n_i aufgebracht, nehmen wir nach der sogenannten *Palmgren-Miner-Regel* an, dass sich die Schädigungen zu einer Gesamtschädigung (damage)

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N(p_i)} \quad (11.12)$$

kumulieren. Mit dem Wert $D=1$ wäre die maximale Schädigung und damit das Ende der Lebensdauer erreicht. Auf diese Weise lässt sich die voraussichtliche Lebensdauer in der Projektierung eines Produkts abschätzen. Dazu müssen aber die konkreten Lastprofile vorab bekannt sein. Z. B. wird der Antrieb einer Straßenbahn in Lissabon oder Stuttgart, wo streckenabhängig erhebliche Steigungen zu überwinden sind, deutlich stärkeren Beanspruchungen ausgesetzt als eine baugleiche Straßenbahn im weitgehend ebenen Hannover.

Der kumulierte Lebensdauerverbrauch ließe sich sogar zur Laufzeit in einer Überwachungseinrichtung mitrechnen, so dass bei Annäherung an die zu erwartende Lebensdauer die betreffende Komponente vorbeugend getauscht werden kann, um einer ungeplanten Betriebsunterbrechung zuvor zu kommen. Derartige Methoden sind dem Bereich der *Zustandsüberwachung* bzw. dem *Condition Monitoring* zuzurechnen.

Schwierig wird dieses Verfahren, wenn die Belastung nicht in Form halbwegs regulärer Zyklen, sondern nach einem komplizierten Lastspiel variiert. Um ein irreguläres Lastspiel in definierte Zyklenzahlen zu zerlegen, wird der sogenannte Regentropfen-Zähl-Algorithmus eingesetzt.

Regentropfen-Zähl-Algorithmus (Rainflow Counting Algorithm)

Das Problem einer adäquaten Lebensdauerbestimmung ergibt sich immer dann, wenn sich Zyklen verschiedener Frequenz und verschiedener Amplitude überlagern oder das Lastspiel völlig irregulär ausfällt. Eine pragmatische Lösung dieses Problem bietet der Regentropfen-Zähl-Algorithmus, der anhand eines Beispiels erklärt werden soll: Im Bild 11-6 ist beispielsweise die Temperatur einer Komponente als Abweichung von einer mittleren Temperatur über der Zeit dargestellt. Wir nehmen an, dass sich dieser Verlauf mit der Periodendauer P wiederholt.

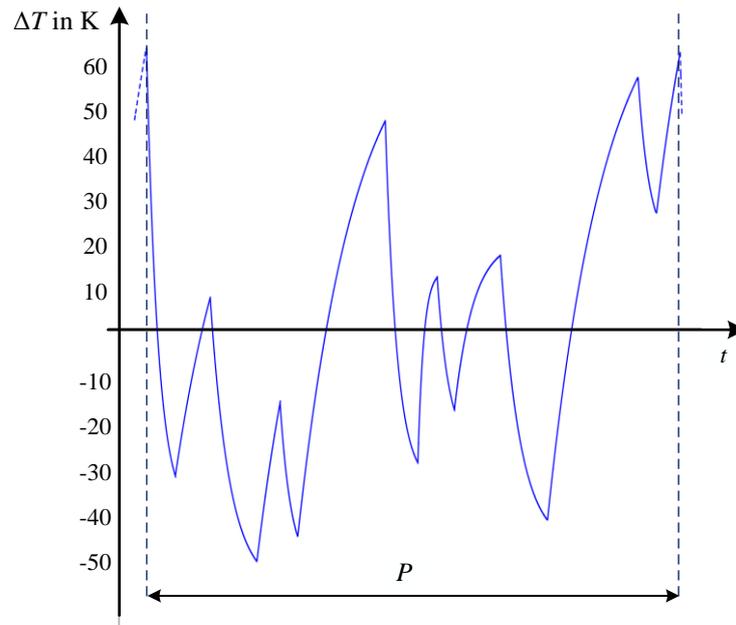


Bild 11-6: Beispiel eines Temperaturverlaufs einer Komponente über der Zeit

Gemäß der Vorstellung, dass nur die Höhe der Belastungen, nicht aber der genaue zeitliche Verlauf maßgeblich ist, wird vom quantitativen Zeitverlauf abstrahiert und dieser auf die lokalen Minima und Maxima reduziert, die der Einfachheit halber durch Rampen verbunden werden, siehe Bild 11-7. Darüber hinaus wird die Zeitachse vertikal angeordnet, um die Vorstellung eines von Regen benetzten Pagodendachs zu beflügeln, was dem Algorithmus seinen Namen verleiht.

Wir stellen nun die Frage, wieviele Regentropfen wir brauchen und welchen Verlauf diese nehmen, um das Pagodendach vollständig zu benetzen.

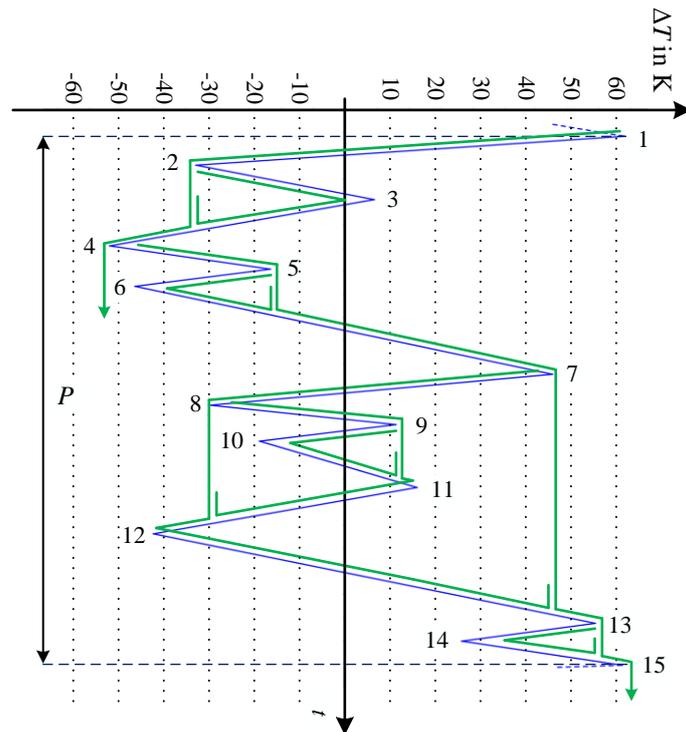


Bild 11-7: Regentropfen-Zähl-Algorithmus

Wir beginnen mit einem Tropfen im Punkt des größten Dachüberstands, hier im Punkt 1. Dieser wird den Weg über 2 nehmen, auf einen tieferen Dachvorsprung fallen, bis er vom Punkt 4 endgültig zu Boden fällt. Der Weg von 1 nach 4 wird als ein halber Zyklus mit der Amplitude 1-4 gezählt. Vom Abtropfpunkt 4 wird nun ein weiterer nun nach rechts laufender Tropfen gestartet, der schließlich bei 15 zu Boden fällt und als halber Zyklus 4-15 gerechnet wird. Da der Zustand 15 der gleiche wie 1 ist, können beide halben Zyklen zusammen auch als voller Zyklus der Amplitude 1-4 verstanden werden. Statt des zweiten Tropfens, der bei 4 startet, könnte man dies auch als Richtungsumkehr des ersten Tropfens bei 4 interpretieren.

Nun sind aber noch verschiedene Dachteile trocken wie z.B. der Teil des Daches zwischen 2 und 3. Wir benötigen einen weiteren Tropfen, der bei 2 beginnend zunächst nach rechts läuft und bei 3 auf dem unteren Dachteil seine Richtung ändert. Den Weg von 2 über 3 zurück nach 2 zählen wir als vollen Zyklus mit der Amplitude 2-3. Diesem Schema folgend werden weitere Tropfen benötigt, die als jeweils als volle Zyklen mit den Amplituden 5-6, 7-12, 8-11, 9-10 und 13-14 gezählt werden.

Als Regel gilt, dass ein Tropfen seine Richtung so lange nicht ändert, bis er auf ein darunter befindliches, schon benetztes Dachteil fallen würde (um dies zu entscheiden, muss ggf. der Verlauf periodisch wiederholt werden). Tritt dies ein, ändert er seine Richtung. Sein Weg endet, sobald der Tropfen einen schon benetzten Bereich erreicht.

Der Sinn dieser Vorgehensweise liegt darin, in einem irregulären Lastspiel zunächst die Beanspruchungen mit großer Amplitude zu identifizieren. Würde man lediglich die Wege zwischen den Umkehrpunkten (jeweils als halbe Zyklen) zählen, also 1-2, 2-3, 3-4 usw., bliebe z.B. die große Belastungsamplitude 1-4 unerkannt, weil sie von den kleineren überlagert wird. Die Berechnung der Lebensdauer fiel dann fälschlicherweise zu günstig aus.

Auf diese Weise bestimmt man die für die Berechnung nach (11.12) notwendigen Zyklenzahlen $n(p_i)$ und kumuliert die Schädigung innerhalb einer Periode P . Damit kann man die Frage beantworten, wieviele derartige Perioden erreicht werden können.

Prinzipiell muss zur Abarbeitung dieses Algorithmus der gesamte Datensatz einer Periode P vorab vorliegen, da man sonst nicht sicher entscheiden kann, ob ein Tropfen wirklich zu Boden fällt bzw. ein tiefer liegendes Dachteil als schon benetzt gilt oder nicht. Mit Hilfe pragmatischer Vernachlässigungen gelingt aber auch eine Laufzeit-Implementierung dieses Algorithmus zum Zwecke einer Zustandsüberwachung.

In der Literatur sind verschiedene Varianten des Algorithmus bekannt, die in Details von der hier vorgestellten Form abweichen.

12 Anhang: Begriffe und Tabellen für elektrische Betriebsmittel

12.1 Spannungsklassen

Spannungsbereich	Begriffe der elektrischen Energietechnik	Spannungsklasse in der Elektroinstallation
< 50 V AC oder < 120 V DC ¹⁾	-	Schutzkleinspannung
< 1 kV	Niederspannung	Niederspannung ²⁾
1-50 kV	Mittelspannung	Hochspannung
50-150 kV	Hochspannung	
> 150 kV	Höchstspannung	

¹⁾Je nach Anwendungsbereich gelten reduzierte Grenzwerte, z.B. in Feuchträumen und in der Automobiltechnik < 60 V DC.

²⁾ In der Automobiltechnik hat sich für diesen Spannungsbereich der Begriff *Hochvolt* eingebürgert.

12.2 Schutzklassen

Schutzklassen elektrischer Betriebsmittel zur Verhinderung der Berührung elektrischer Spannungen nach DIN 40100:

Schutzklasse	Bedeutung
0	kein Schutz
I	mit Schutzleiter (PE-Leiter)
II	doppelte oder verstärkte Isolierung, kein PE-Leiter
III	Gerät mit Schutzkleinspannung, benötigt keinen weiteren Schutz

12.3 Schutzarten

Schutzarten nach DIN EN 60529 mit der Bezeichnung „IPxy“ (IP: internal protection). Die Ziffern *x* und *y* haben folgende Bedeutungen

Ziffer <i>x</i>	Schutz gegen Berühren	Schutz gegen Fremdkörper
0	kein Schutz	kein Schutz
1	Schutz gegen große Körperteile >50mm	gegen große Fremdkörper >50mm
2	>12mm	>12mm
3	>2,5mm	>2,5mm
4	>1mm	>1mm
5	vollständig	gegen Staubablagerung
6	vollständig	gegen Staubeintritt
Ziffer <i>y</i>	Schutz gegen Wasser	
0	kein Schutz	
1	gegen senkrecht fallendes Tropfwasser	
2	gegen schräg fallendes Tropfwasser (15°)	
3	gegen Sprühwasser (60° seitlich)	
4	gegen allseitiges Spritzwasser	
4k*	gegen allseitiges Spritzwasser unter Druck	
5	gegen Strahlwasser	
6	Schutz gegen starkes Strahlwasser	
6k*	starkes Strahlwasser unter erhöhtem Druck	
7	gegen zeitweiliges Untertauchen	
8	gegen dauerndes Untertauchen	
9k*	gegen Hochdruck	

* für Straßenfahrzeuge

12.4 Betriebsarten

Betriebsarten nach IEC 34, Teil 1

S1	Dauerbetrieb
S2	Kurzzeitbetrieb
S3	Aussetzbetrieb ohne Einfluss des Anlaufvorganges
S4	Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufvorganges
S5	Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufvorganges und der elektrischen Bremsung
S6	Durchlaufbetrieb mit Aussetzbelastung
S7	Ununterbrochener Betrieb mit Anlauf und elektrischer Bremsung
S8	Ununterbrochener Betrieb mit periodischer Drehzahländerung
S9	Ununterbrochener Betrieb mit nichtperiodischer Drehzahl- und Momentenänderung

12.5 Isolierstoffklassen für Motoren

Isolierstoffklasse lt. DIN EN 60085	max. Motortemperatur
Y	90°C
A	105°C
E	120°C
B	130°C
F	155°C
H	180°C
N	200°C
R	220°C

12.6 Phasenfolge, Rechts- und Linkslauf

Normgerechte Benennung der Leiter eines Drehstromnetzes: L1, L2, L3. Der Phasenwinkel von L2 ist gegenüber L1 um 120° nacheilend, ebenso L3 gegenüber L2. Nach der neuen Norm DIN VDE 0293-308 werden (seit 2003) die Leiter durch folgende Farben kenntlich gemacht:

L1	braun
L2	schwarz
L3	grau
N	blau
PE	gelb-grün

Bei der älteren Farbkodierung (schwarz/braun/schwarz) für die Leiter L1, L2, L3 ist die Phasenfolge nicht eindeutig erkennbar. Diese Farbkodierung gilt leider nicht international. In anderen Ländern oder in älteren Installationen finden sich andere Farbkodierungen, z.B. gelb/grün/lila.

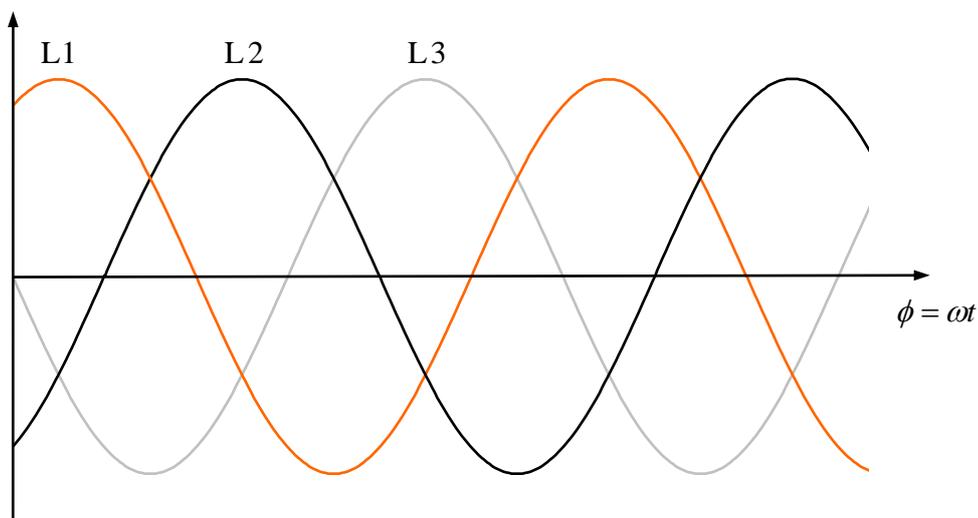


Bild 12-1: Zur Phasenfolge eines Drehstromsystems

Normgerechte Bezeichnung der Wicklungen von Drehstrommotoren: U, V, W. Die Anschlüsse der Wicklungen heißen U1, U2; V1, V2; W1, W2. Häufig wird der Motor bereits intern im Stern geschaltet, so dass nur die Anschlüsse U1, V1, W1 herausgeführt werden.

Definition des *Rechtslaufs*: Beim Anschluss von U1, V1, W1 an L1, L2, L3 (oder einer zyklischen Vertauschung) wird beim Blick *von außen* auf das antriebsseitige Wellenende eines normgerechten Motors sich dieses *rechts* herum drehen. Um Linkslauf zu erreichen, sind zwei der drei Klemmen zu vertauschen.

In Darstellungen mit komplexen Zeigern bevorzugt man dagegen den mathematisch positiven Drehsinn; also linksdrehende Zeiger für den mechanisch rechtsdrehenden Motor. Perspektivisch kann man dies derart interpretieren, dass man hierbei vom *Inneren* des Motors oder vom hinteren Lagerschild in Richtung des antriebsseitigen Wellenendes schaut.

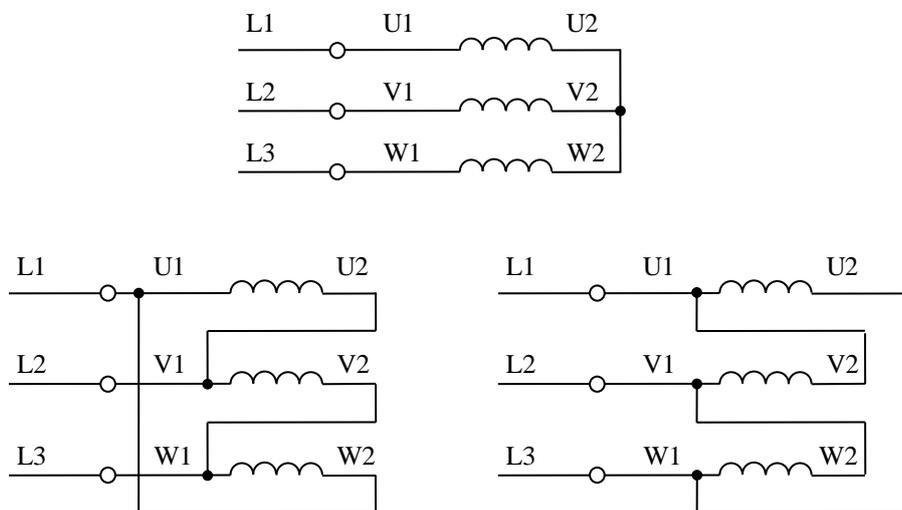


Bild 12-2: Schaltungsarten für rechtsdrehende Drehstrommotoren

13 Größengleichungen vs. Zahlenwertgleichungen

In allen modernen naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen ist mittlerweile die *Größengleichung* Standard. Die darin auftretenden physikalischen oder technischen *Größen* werden durch den *Größenwert* quantisiert. Der Größenwert besteht immer aus einem Produkt einer *Maßzahl* und einer *Maßeinheit*. Durch die Verwendung verschiedener Maßeinheiten für die Messung einer Strecke wie beispielsweise m, mm, km, nautische Meilen oder Zoll¹⁷ verändert sich der Größenwert nicht, da die Umrechnung der Maßeinheit stets mit einer entsprechenden Umrechnung der Maßzahl einhergeht. Größengleichungen sind daher völlig unabhängig von den konkreten Maßeinheiten, in denen die auftretenden Größen vermessen werden sollen.

Im Gegensatz dazu verknüpft die *Zahlenwertgleichung* nur die Maßzahlen, nicht aber die Maßeinheiten. Es muss stets gesondert spezifiziert werden, welche Größen in welchen Maßeinheiten zu messen sind.

Beispiel für eine *Größengleichung*:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n} \quad (13.1)$$

In dieser Gleichung lässt sich beispielsweise die Drehzahl n je nach Geschmack oder Zweckmäßigkeit in 1/s oder 1/min¹⁸ ausdrücken, das Drehmoment in Nm, kNm oder mNm. Die Gleichung selbst bedarf *in keinem der Fälle* einer Veränderung.

Im Gegensatz dazu findet man beispielsweise die *Zahlenwertgleichung*

$$T = \frac{P \cdot 9549}{n} \quad (13.2)$$

mit der Angabe, dass das Drehmoment T in Nm, die Leistung P in kW und die Drehzahl n in 1/min einzusetzen ist. Die Nachteile sind offensichtlich:

- Die notwendige zusätzliche Angabe der Maßeinheiten ist schwerfällig, darf aber keinesfalls entfallen, da sonst schwere Missverständnisse und falsche Ergebnisse resultieren.¹⁹
- Die in Zahlenwertgleichungen immer auftretenden Konstanten verschleiern die physikalische Struktur: Es ist der Gleichung nicht mehr ohne weiteres anzusehen, ob diese einen exakten physikalisch-technischen Zusammenhang beschreibt oder lediglich eine Näherung mit empirischen Konstanten ist.

¹⁷ Größengleichungen bleiben selbst dann unverändert, wenn andere als die im internationalen Maßsystem vorgeschlagenen kohärenten Maßeinheiten (SI-Einheiten) verwendet werden.

¹⁸ Auch wenn die Zahl der Umdrehungen gerne *pro Minute* gemessen wird, hat die Zahl 60 in dieser Größengleichung nichts verloren, wie man es leider fälschlicherweise immer wieder antrifft. Statthaf wäre es, einen Faktor $1 = 60 \text{ s/1 min}$ hinzuzufügen.

¹⁹ Katastrophales Beispiel missverständlicher Maßeinheiten ist der Verlust des *Mars Climate Orbiter* im Jahr 1999, wo *Newton* und *Pound* als Kraftmaßeinheiten verwechselt wurden, was zu einer viel zu starken Kurskorrektur und zum Verlust der Raumsonde führte.

Zahlenwertgleichungen sollen daher nicht mehr verwendet werden.

14 Literatur

Wilfried Hofmann

Elektrische Maschinen

Pearson, 2013

Dierk Schröder

Elektrische Antriebe – Grundlagen

Springer Verlag, 3. Aufl., 2007

Gerhard Müller, Bernd Ponick

Grundlagen elektrischer Maschinen

Wiley-VHC, 9. Auflage, 2006

Gerhard Müller, Bernd Ponick

Theorie elektrischer Maschinen

Wiley-VHC, 4. Auflage

Gerhard Müller

Elektrische Maschinen

VDE-Verlag, 6. Auflage, 1985

Wiley-VHC, 4. Auflage

Klaus Fuest, Peter Döring

Elektrische Maschinen und Antriebe

Vieweg Verlag, 6. Auflage, 2004

Hans-Dieter Stölting, Eberhard Kallenbach

Handbuch Elektrische Kleinantriebe

Hanser Verlag, 3. Auflage, 2006

Rolf Fischer

Elektrische Maschinen

Hanser Verlag, 7. Auflage, 1989

Gerhard Müller

Elektrische Maschinen – Betriebsverhalten rotierender elektrischer Maschinen

VDE-Verlag, 1990

W. Nürnberg,

Die Asynchronmaschine

2. Auflage, Springer, 1962

Hans-Ulrich Giersch, Hans Harhus, Norbert Vogelsang

Elektrische Maschinen – Prüfung, Normung, Leistungselektronik

Teubner, 5. Auflage, 2003