

kT/C-Rauschen: Kovarianzmatrixberechnung von instationärem Rauschen in zeitvarianten nichtlinearen Mehrtoeren

Reinhold Noé



UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

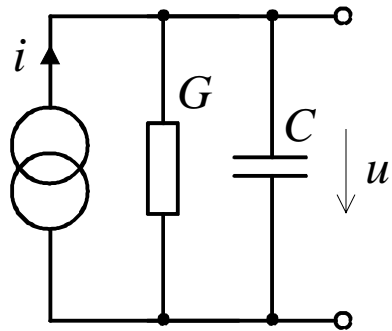
Elektrotechnik und Informationstechnik
Optische Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Dank: Dr. Jörg-Uwe Feldmann, Infineon

Noé, R.: [kT/C noise: Covariance matrix calculation of instationary noise in time-varying systems](#). Int. J. Electron. Commun. (AEÜ), 55(2001)
No. 2, pp. 135-139

Einleitung

Grundsaltung



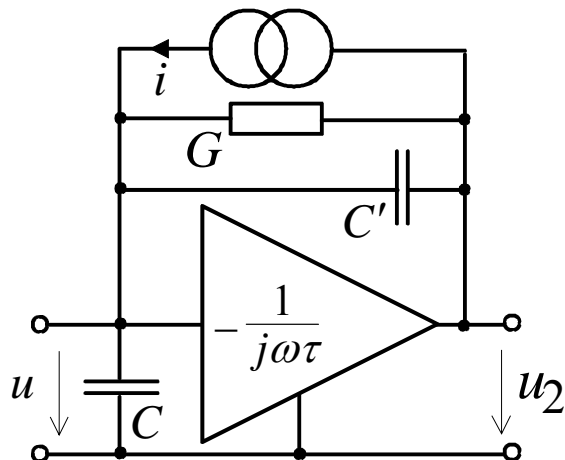
$$S_{ii} = 2kTG$$

$$s_{uu} = \frac{1}{2\pi} \int S_{uu}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \frac{S_{ii}(\omega)}{|Y(\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \frac{2kTG}{G^2 + \omega^2 C^2} d\omega = \frac{kT}{C}$$

$$s_{qq} = s_{uu} \cdot C^2 = kTC$$

- Beispiel: $\sigma_{uu} = \sqrt{s_{uu}} = \sqrt{k \cdot 300 \text{ K} / 1 \text{ pF}} = 64 \mu\text{V}$
- Gilt auch für $G = 0$. Aber wie lange muß $G > 0$ gewesen sein?

Ladungsverstärker, z.B. für kapazitive Sensoren

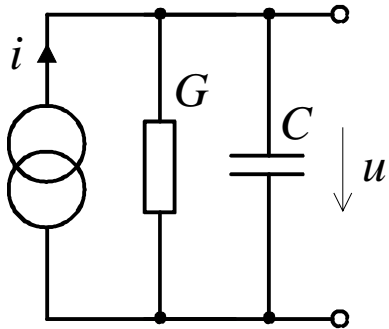


- Zeitvarianter Leitwert G modelliert einen Schalter.
- „Der Integrator sorgt für $u = 0$, und C wird nicht geladen.“

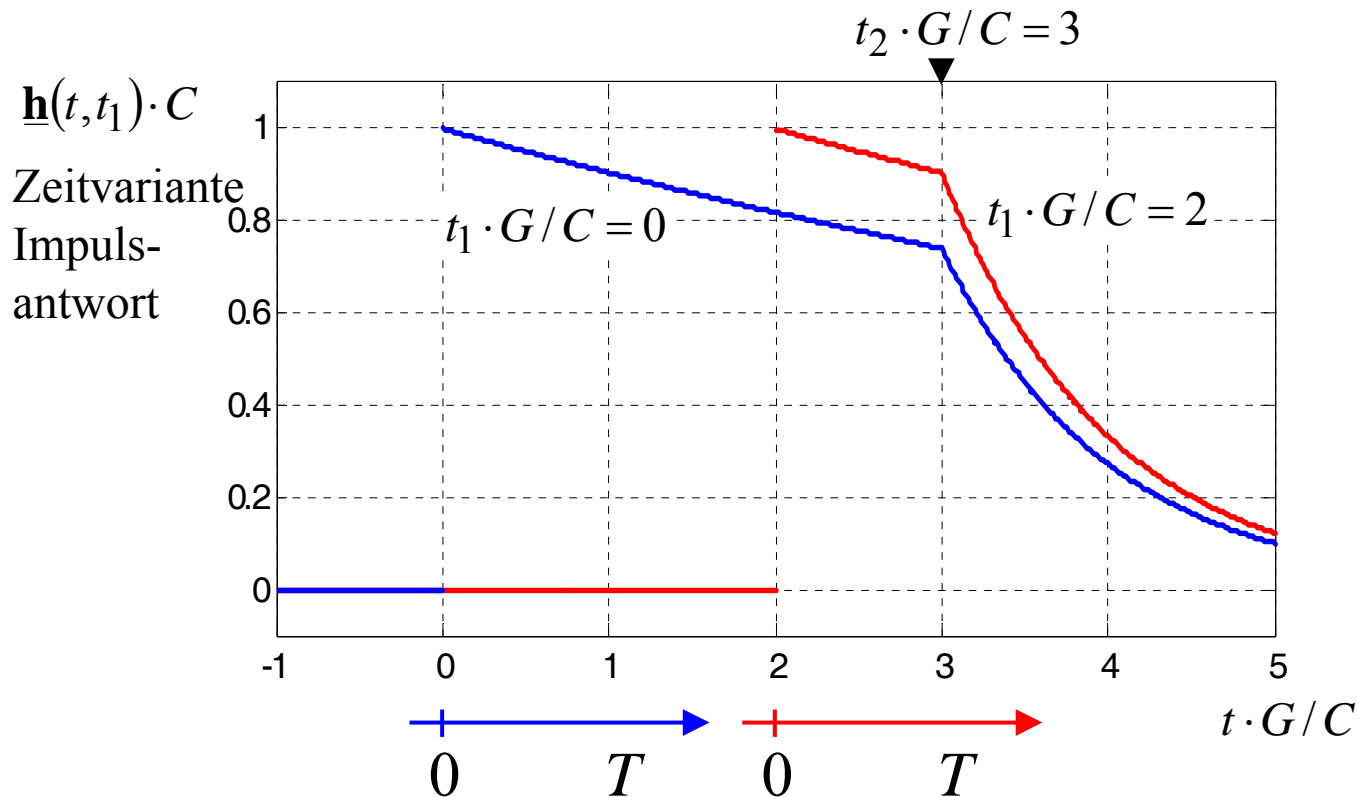
$$s_{qq} \approx kTC'$$

- Stimmt diese Behauptung? Wie klein muß τ sein?
- Instationäre Rauschanalyse beliebiger nichtlinearer zeitvarianter Schaltkreise im Zeitbereich?

Lineare zeitvariante Systeme



- Für $t < t_2$ sei der Leitwert nur $1/10$ seines Nominalwerts G .
- Antwort (Wirkung) zum Zeitpunkt t auf Stromimpuls (Ursache) hängt natürlich von dessen Zeitpunkt t_1 ab, aber ...
- ... hier nicht nur von der Altersvariablen $T = t - t_1$!



- Für kompliziertere Eingangssignale erhalten wir das Ausgangssignal durch das bei linearen Systemen zulässige Superpositionsprinzip!

$$\mathbf{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t, t_1) \mathbf{v}(t_1) dt_1$$

Signale in linearen Mehrtoeren

t_1 = Zeitpunkt der Ursache; t = Zeitpunkt der Wirkung; $T = t - t_1$ = Altersvariable; kausal: $T \geq 0$

Typ	zeitinvariant	zeitvariant
Zeitbereich (nichtkausal/ kausal)	$\mathbf{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty/t} \mathbf{h}(t - t_1) \mathbf{v}(t_1) dt_1$	$\mathbf{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty/t} \mathbf{h}(t, t_1) \mathbf{v}(t_1) dt_1 = \int_{-\infty/0}^{\infty} \mathbf{h}(t, t - T) \mathbf{v}(t - T) dT$
Fouriertrans- formation (nichtkausal/ kausal)	$\mathbf{H}(\omega) = \int_{-\infty/0}^{\infty} \mathbf{h}(T) e^{-j\omega T} dT$ $\mathbf{h}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega) e^{j\omega T} d\omega$	$\mathbf{H}(\omega, t) = \int_{-\infty/0}^{\infty} \mathbf{h}(t, t - T) e^{-j\omega T} dT$ $\mathbf{h}(t, t - T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, t) e^{j\omega T} d\omega$
Ausgangs- signal	$\mathbf{w}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$\mathbf{w}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega$
Spektrum	$\mathbf{W}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{V}(\omega)$	$\mathbf{W}(\omega, t) = \mathbf{H}(\omega, t) \mathbf{V}(\omega)$
aus Zeitsignal	$\mathbf{W}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}(t) e^{-j\omega t} dt$	Berechnung von $\mathbf{W}(\omega, t)$ aus $\mathbf{w}(t)$ ist nicht möglich.

Stationäre und instationäre Zufallsgrößen

$\langle \cdot \rangle$ = Scharmittelwert

Typ	stationäre Zufallsgrößen, zeitinvariante Mehrfore	instationäre Zufallsgrößen, zeitvariante Mehrfore
Korrelations- funktionsmatrix	$\mathbf{s}_{vv}(\tau) = \langle \mathbf{v}(t)\mathbf{v}^+(t-\tau) \rangle$	$\mathbf{s}_{vv}(\tau, t) = \langle \mathbf{v}(t+\tau/2)\mathbf{v}^+(t-\tau/2) \rangle$
für Ausgangs- signal	$\mathbf{s}_{ww}(\tau) = \langle \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^+(t-\tau) \rangle =$ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(-t_1)\mathbf{s}_{vv}(t_2)\mathbf{h}^+(t_2-t_1-\tau)dt_2dt_1$	$\mathbf{s}_{ww}(\tau, t) = \langle \mathbf{w}(t+\tau/2)\mathbf{w}^+(t-\tau/2) \rangle =$ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbf{h}(t+\tau/2, t_1+t_2/2)\mathbf{s}_{vv}(t_2, t_1) \right. \\ \left. \cdot \mathbf{h}^+(t-\tau/2, t_1-t_2/2) \right) dt_1dt_2$
Fourier- transformation	$\mathbf{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$ $\mathbf{s}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$	$\mathbf{S}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(\tau, t)e^{-j\omega\tau}d\tau$ $\mathbf{s}(\tau, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega, t)e^{j\omega\tau}d\omega$
Ausgangs- spektrum	$\mathbf{S}_{ww}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{S}_{vv}(\omega)\mathbf{H}^+(\omega)$	

Spezialfall weißes Rauschen

Für eine passive, zeitinvariante Leitwertmatrix

$$\mathbf{Y}(\omega) \text{ gilt } \mathbf{S}_{ii}(\omega) = kT(\mathbf{Y}(\omega) + \mathbf{Y}^+(\omega)).$$

Spezialfall: $\mathbf{S}_{vv}(\omega, t)$ hängt nicht von ω ab.

$$\Rightarrow \mathbf{s}_{vv}(\tau, t) = \delta(\tau)\mathbf{S}_{vv}(t) \text{ Weißes Rauschen}$$

$\mathbf{S}_{vv}(t)$ Weißes, instationäres
Korrelationsspektrum (Matrix)

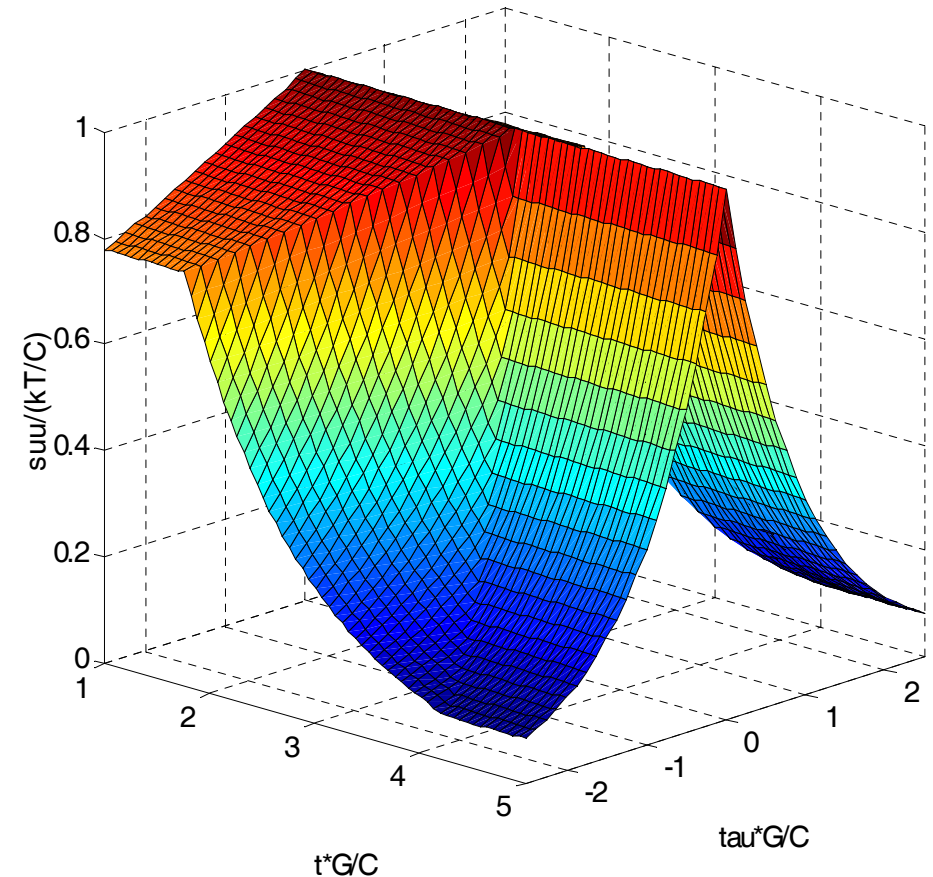
Korrelationsfunktionsmatrix:

$$\mathbf{s}_{ww}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_1)\mathbf{S}_{vv}(t_1)\mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_1)dt_1$$

Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{s}_{ww}(t) \equiv \mathbf{s}_{ww}(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t, t_1)\mathbf{S}_{vv}(t_1)\mathbf{h}^+(t, t_1)dt_1$$

Problem: Zeitvariante Impulsantwortmatrix muß für alle t, t_1 bekannt sein. Normalerweise ist aber überhaupt keine Impulsantwort bekannt!



Instationäre Korrelationsfunktion der Spannung an einer Kapazität mit parallelgeschaltetem zeitvariantem Leitwert (gemäß Folie 3)

Vorübergehende Zeitinvarianz

Bei zeitinvarianter Impulsantwort gilt für die Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{s}_{ww}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t-t_1) \mathbf{S}_{vv}(t_1) \mathbf{h}^+(t-t_1) dt_1$$

In der Regel wird dabei auch das Rauschen stationär sein.

Wenn Schalten instantan erfolgt, gilt das in bestimmten Zeitintervallen. Falls die Schalter zwischen t' und t in ihrer Position bleiben, gilt in kausalen Systemen:

$$\mathbf{s}_{ww}(t) = \int_{t'}^t \mathbf{h}(t-t_1) \mathbf{S}_{vv}(t_1) \mathbf{h}^+(t-t_1) dt_1 + \mathbf{s}_{ww}(t'+0)$$

Aufeinanderfolgende Integration über mehrere solche Zeitintervalle ist möglich, falls das Schalten die Kovarianzmatrix nicht ändert:

$$\mathbf{s}_{ww}(t'+0) = \mathbf{s}_{ww}(t'-0)$$

Rauschberechnung in zeitdiskreter Zustandsmaschine

Zeitdiskretisierung: $t = n\delta t$

Zustandsgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n & \text{Eingangssignalvektor} & \mathbf{x}_n & \text{Zustandsvektor} \\ \mathbf{w}_n &= \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{D}_n \mathbf{v}_n & \mathbf{w}_n & \text{Ausgangssignalvektor} & n & \text{zeitlicher Index} \end{aligned}$$

Zustandsvektor \mathbf{x}_n hängt nur von vergangenen Eingangssignalvektoren \mathbf{v}_m ($m < n$) ab.

Da das Rauschen weiß sei, sind \mathbf{v}_n und \mathbf{v}_m ($m < n$) unkorreliert, ebenso \mathbf{v}_n und \mathbf{x}_n .

$$\Rightarrow \mathbf{s}_{xx,n+1} = \left\langle \mathbf{x}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^+ \right\rangle = \mathbf{A}_n \mathbf{s}_{xx,n} \mathbf{A}_n^+ + \mathbf{B}_n \mathbf{s}_{vv,n} \mathbf{B}_n^+$$

$$\mathbf{s}_{ww,n} = \left\langle \mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^+ \right\rangle = \mathbf{C}_n \mathbf{s}_{xx,n} \mathbf{C}_n^+ + \mathbf{D}_n \mathbf{s}_{vv,n} \mathbf{D}_n^+$$

$$\text{Diskrete Zeitschritte } \delta t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_{vv,n} = \delta t^{-1} \mathbf{S}_{vv,n}$$

Rauschberechnung in Schaltkreissimulator

Gesucht: Kovarianzmatrizen von Ladung $\mathbf{s}_{qq,n}$ und Spannung $\mathbf{s}_{uu,n}$

Spannungsabhängige Kapazitäten: $\mathbf{q}_n = \hat{\mathbf{Q}}_n(\mathbf{u}_n)$ $\hat{\mathbf{Q}}_n$ ist eine nichtlineare und zeitvariante Funktion.
 \mathbf{u}_n enthält alle Knotenspannungen.

Ladungsvektor \mathbf{q}_n enthält nur die unabhängigen Ladungen; ihre Anzahl ist ggf. kleiner als die der Kapazitäten..

Knotenladungsvektor (alle Ladungen) = Inzidenzmatrix \mathbf{K}_n mal \mathbf{q}_n .

Inzidenzmatrix \mathbf{K}_n enthält 1, wo eine unabhängige Ladung (Spalte) eine Knotenladung (Zeile) ist. Falls die unabhängige Ladung (Spalte) nicht gegenüber Masse, sondern gegenüber einem anderen Knoten (weitere Zeile) definiert ist, steht dort -1 . (Beispiel: Kondensator zwischen 2 Knoten; Knotenladungen sind 1mal bzw. -1 mal Kondensatorladung.)

Knotenströme: $\mathbf{i}_n = \hat{\mathbf{I}}_n(\mathbf{u}_n) + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_n$ $\hat{\mathbf{I}}_n$ ist eine nichtlineare und zeitvariante Funktion.

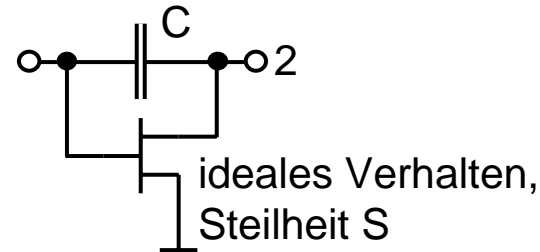
$\dot{\mathbf{q}}_n$ Vektor unabhängiger Ströme, die in die Kapazitäten fließen

\mathbf{i}_n Knotenstromvektor

Implizite Notation: $\mathbf{q}_n = \hat{\mathbf{Q}}_n(\mathbf{u}_n)$ kann nicht invertiert werden, nicht einmal im linearen Fall!

Transientenberechnung mit impliziter Notation

Schaltungsbeispiel mit Kapazitätsinsel 1
ohne kapazitiven Pfad nach Masse:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}(u_1, u_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \dot{q} \\ \hat{\mathbf{Q}}(u_1, u_2) \end{bmatrix}$$

\mathbf{K}_n →

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ S & 0 & -1 \\ C & -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Lösung nach u_1, u_2, \dot{q} ist immer möglich!

Das gilt natürlich auch im linearen Fall (Systemmatrix invertierbar)!

Nach Erhalt von \dot{q} läßt sich ein neues q berechnen und die Gleichungen werden erneut gelöst, usw..

Inhomogene Lösung im linearen Fall

Linearisierung im Arbeitspunkt, zu jedem Zeitpunkt der Transientensimulation:

$$\hat{\mathbf{Q}}_n(\mathbf{u}_n) = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_n \quad \hat{\mathbf{I}}_n(\mathbf{u}_n) = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_n$$

Die Variablen sind jetzt Kleinsignalgrößen, insbesondere Rauschen.

Inhomogene Lösung ist Superposition:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n,q} + \mathbf{u}_{n,i} \quad \dot{\mathbf{q}}_n = \dot{\mathbf{q}}_{n,q} + \dot{\mathbf{q}}_{n,i}$$

Homogene Lösung (Index q) nur durch Ladungen bedingt, ohne Ströme:

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_{n,q} + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_{n,q}$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_{n,q}$$

Spezielle Lösung (Index i) nur durch Ströme bedingt, ohne Ladungen:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_{n,i} + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_{n,i}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_{n,i}$$

Differenzial:
$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n}{\delta t}$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = (\mathbf{q}_n + \delta t \dot{\mathbf{q}}_{n,q}) + \delta t \dot{\mathbf{q}}_{n,i}$$

Hängt nur
von i_h ab
($h < n$)!

Hängt
nur von
 i_n ab!

Wir brauchen diese Darstellung, weil diese beiden Terme unkorreliert sind!

Zeitabhängige Kovarianzmatrixberechnung (1)

$$\mathbf{s}_{qq,n+1} = \langle \mathbf{q}_{n+1} \mathbf{q}_{n+1}^+ \rangle = T_q + T_i \quad T_q = \langle (\mathbf{q}_n + \delta t \dot{\mathbf{q}}_{n,q}) (\mathbf{q}_n + \delta t \dot{\mathbf{q}}_{n,q})^+ \rangle \quad T_i = \delta t^2 \langle \dot{\mathbf{q}}_{n,i} \dot{\mathbf{q}}_{n,i}^+ \rangle$$

Lösung für T_q : $\mathbf{s}_{qq,n} = \langle \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^+ \rangle$ ist bekannt.

$\mathbf{q}_n = [\mathbf{q}_{n,j}] \mathbf{r}_{n,q}$ Ladungsvektor (Länge k ; $j = 1 \dots k$) wird dargestellt als Summe von k Termen.

$[\mathbf{q}_{n,j}] = [\mathbf{q}_{n,1}, \mathbf{q}_{n,2}, \dots, \mathbf{q}_{n,k}]$ Matrix, bestehend aus festen Ladungsvektoren

$\mathbf{r}_{n,q} = [r_{n,q,1}, r_{n,q,2}, \dots, r_{n,q,k}]^+$ Statistisch unabhängige, mittelwertfreie Zufallsgrößen, $\sigma^2 = 1$.

$\langle \mathbf{r}_{n,q} \mathbf{r}_{n,q}^+ \rangle = \mathbf{1}$ $\mathbf{s}_{qq,n} = \langle [\mathbf{q}_{n,j}] \mathbf{r}_{n,q} \mathbf{r}_{n,q}^+ [\mathbf{q}_{n,j}]^+ \rangle = [\mathbf{q}_{n,j}] [\mathbf{q}_{n,j}]^+$ hermitesch, positiv semidefinit

$\mathbf{s}_{qq,n} = \mathbf{A}_q \text{diag}(\lambda_{q,j}) \mathbf{A}_q^+$ \mathbf{A}_q orthogonal $\lambda_{q,j} \geq 0$ Vergleich: $[\mathbf{q}_{n,j}] = \mathbf{A}_q \text{diag}(\sqrt{\lambda_{q,j}})$

Für jedes $\mathbf{q}_{n,j}$ wird mit Hilfe von $\mathbf{0} = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_{n,q} + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_{n,q}$ ein $\dot{\mathbf{q}}_{n,q,j}$ berechnet, und so erhält man $\dot{\mathbf{q}}_{n,q} = [\dot{\mathbf{q}}_{n,q,j}] \mathbf{r}_{n,q}$.

Einsetzen liefert: $T_q = ([\mathbf{q}_{n,j}] + \delta t [\dot{\mathbf{q}}_{n,q,j}])([\mathbf{q}_{n,j}] + \delta t [\dot{\mathbf{q}}_{n,q,j}])^+$

Zeitabhängige Kovarianzmatrixberechnung (2)

$$\mathbf{s}_{qq,n+1} = \langle \mathbf{q}_{n+1} \mathbf{q}_{n+1}^+ \rangle = T_q + T_i \quad T_q = \langle (\mathbf{q}_n + \delta t \dot{\mathbf{q}}_{n,q}) (\mathbf{q}_n + \delta t \dot{\mathbf{q}}_{n,q})^+ \rangle \quad T_i = \delta t^2 \langle \dot{\mathbf{q}}_{n,i} \dot{\mathbf{q}}_{n,i}^+ \rangle$$

Lösung für T_i : $\mathbf{s}_{ii,n} = \langle \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n^+ \rangle = \delta t^{-1} \mathbf{S}_{ii,n}$ ist bekannt.

$\mathbf{i}_n = [\mathbf{i}_{n,l}] \mathbf{r}_{n,i}$ Stromvektor (Länge m ; $l = 1 \dots m$) wird dargestellt als Summe von m Termen.

$[\mathbf{i}_{n,l}] = [\mathbf{i}_{n,1}, \mathbf{i}_{n,2}, \dots, \mathbf{i}_{n,m}]$ Matrix, bestehend aus festen Stromvektoren

$\mathbf{r}_{n,i} = [r_{n,i,1}, r_{n,i,2}, \dots, r_{n,i,m}]^+$ Statistisch unabhängige, mittelwertfreie Zufallsgrößen, $\sigma^2 = 1$.

$\langle \mathbf{r}_{n,i} \mathbf{r}_{n,i}^+ \rangle = \mathbf{1}$ $\mathbf{s}_{ii,n} = \langle [\mathbf{i}_{n,l}] \mathbf{r}_{n,i} \mathbf{r}_{n,i}^+ [\mathbf{i}_{n,l}]^+ \rangle = [\mathbf{i}_{n,l}] [\mathbf{i}_{n,l}]^+$ hermitesch, positiv semidefinit

$\mathbf{s}_{ii,n} = \mathbf{A}_i \text{diag}(\lambda_{i,l}) \mathbf{A}_i^+$ \mathbf{A}_i orthogonal $\lambda_{i,l} \geq 0$ Vergleich: $[\mathbf{i}_{n,l}] = \mathbf{A}_i \text{diag}(\sqrt{\lambda_{i,l}})$

Für jedes $\mathbf{i}_{n,l}$ wird mit Hilfe von $\mathbf{i}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_{n,i} + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_{n,i}$ ein $\dot{\mathbf{q}}_{n,i,l}$ berechnet, und so erhält man $\dot{\mathbf{q}}_{n,i} = [\dot{\mathbf{q}}_{n,i,l}] \mathbf{r}_{n,i}$.

Einsetzen liefert: $T_i = \delta t^2 [\dot{\mathbf{q}}_{n,i,l}] [\dot{\mathbf{q}}_{n,i,l}]^+$

Zeitabhängige Kovarianzmatrixberechnung (3)

$$[\mathbf{u}_{n,q,j}] = [\mathbf{u}_{n,q,1}, \mathbf{u}_{n,q,2}, \dots, \mathbf{u}_{n,q,k}] \quad \text{Spannungsvektoren passend zu } [\mathbf{q}_{n,j}] \quad \text{und} \quad [\dot{\mathbf{q}}_{n,q,j}]$$

$$[\mathbf{u}_{n,i,l}] = [\mathbf{u}_{n,i,1}, \mathbf{u}_{n,i,2}, \dots, \mathbf{u}_{n,i,m}] \quad \text{Spannungsvektoren passend zu } [\mathbf{i}_{n,l}] \quad \text{und} \quad [\dot{\mathbf{q}}_{n,i,l}]$$

Kovarianzmatrizen der Spannungen:

$$\mathbf{s}_{uu,q,n} = \left\langle [\mathbf{u}_{n,q,j}] \mathbf{r}_{n,q} \mathbf{r}_{n,q}^+ [\mathbf{u}_{n,q,j}]^+ \right\rangle = [\mathbf{u}_{n,q,j}] [\mathbf{u}_{n,q,j}]^+$$

$$\mathbf{s}_{uu,i,n} = \left\langle [\mathbf{u}_{n,i,l}] \mathbf{r}_{n,i} \mathbf{r}_{n,i}^+ [\mathbf{u}_{n,i,l}]^+ \right\rangle = [\mathbf{u}_{n,i,l}] [\mathbf{u}_{n,i,l}]^+$$

$$\mathbf{s}_{uu,n} = \mathbf{s}_{uu,q,n} + \mathbf{s}_{uu,i,n}$$

Nur $\mathbf{s}_{qq,n}$ und $\mathbf{s}_{uu,q,n}$ betreffen kT/C-Rauschen und haben Tiefpaßcharakter!

$\mathbf{s}_{uu,i,n}$ ist weißes Rauschen.

Spezialfall: Unabhängige Knotenladungen

Unabhängige Ladungen werden gleich Knotenladungen gewählt $\Rightarrow \mathbf{K}_n = \mathbf{1}$

\mathbf{C}_n ist symmetrisch und invertierbar.

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_{n,i} \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n,q} + \mathbf{u}_{n,i}$$

$$\mathbf{u}_{n,i} = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n,q}$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_n \quad \mathbf{i}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_n$$

Auf jeden Fall erhält man:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \left(\mathbf{1} - \delta t \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n^{-1} \right) \mathbf{q}_n + \delta t \mathbf{i}_n$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{q}_n$$

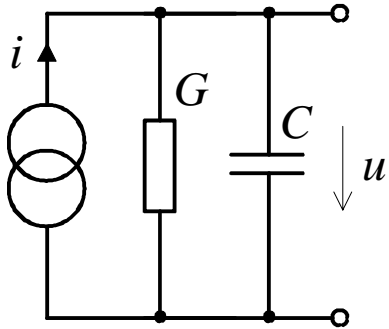
$$\mathbf{s}_{qq,n+1} = \left(\mathbf{1} - \delta t \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n^{-1} \right) \mathbf{s}_{qq,n} \left(\mathbf{1} - \delta t \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n^{-1} \right)^+ + \delta t^2 \mathbf{s}_{ii,n}$$

$$\mathbf{s}_{uu,n} = \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{s}_{qq,n} \mathbf{C}_n^{-1+}$$

Diese Gleichungen sind schon von der zeitdiskreten Zustandsmaschine bekannt.

Sie können nur bei invertierbaren \mathbf{C}_n angewendet werden!

Zeitverhalten der kT/C-Rauschvarianz



Zeitinvariantes System sei zum Zeitpunkt $t = 0$ ladungsfrei.

$$q_{n+1} = (1 - \delta t G / C) q_n + \delta t i_n$$

$$u_n = q_n / C$$

$$s_{qq,n+1} = (1 - \delta t G / C)^2 s_{qq,n} + \delta t^2 s_{ii,n}$$

$$s_{uu,n} = s_{qq,n} / C^2$$

$\delta t \rightarrow 0$

$$\dot{s}_{qq,n} = \frac{s_{qq,n+1} - s_{qq,n}}{\delta t} = -2G/C s_{qq,n} + \delta t s_{ii,n}$$

$$s_{ii} = \frac{S_{ii}}{\delta t} = \frac{2kTG}{\delta t}$$

Endwert:

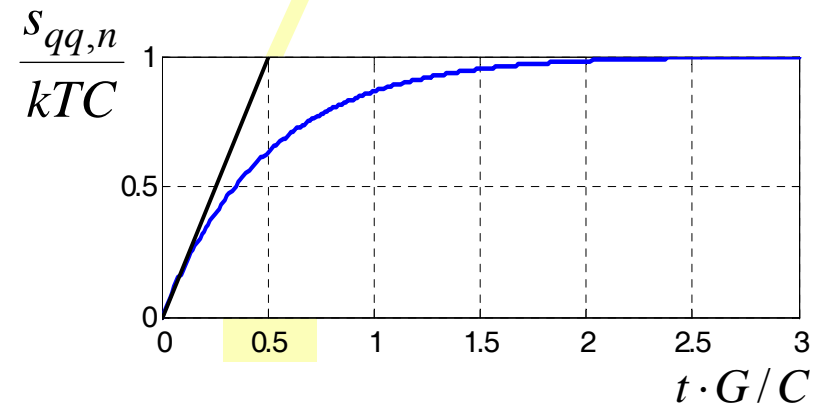
$$\dot{s}_{qq,n} = 0 \Rightarrow s_{qq,n} = kTC \quad s_{uu,n} = kT/C$$

1 / Zeitkonstante

Sprungantwort:

$$s_{qq,n} = (1 - e^{-2G/C(n\delta t)}) kTC$$

$$= (1 - e^{-2G/Ct}) kTC$$



Ladungsverstärker, Auswertung im Frequenzbereich

Instantanes Ausschalten (Wegnehmen von G) ändert nicht die Kondensatorspannungen. Doch ein Relaxationsprozeß nach dem Ausschalten kann sie ändern. Deshalb wird die Ladung am Eingangsknoten als gesuchte Größe gewählt.

$$q = \int (i + G(u_2 - u)) dt = (C + C')u - C'u_2$$

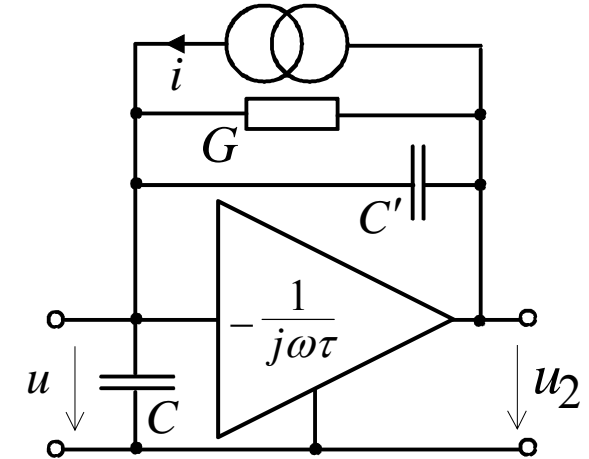
Übertragungsfunktion von Strom zu Eingangsknotenladung:

$$H(\omega) = \frac{Q}{I} = \frac{C' + j\omega\tau(C' + C)}{G + j\omega(G\tau + C') + (j\omega)^2\tau(C' + C)}$$

Auswertung im Frequenzbereich:

$$s_{qq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{ii} d\omega = kTC_{eff} \quad C_{eff} = C' + \frac{G\tau C}{G\tau + C'}$$

Für $\frac{1}{G\tau} \gg \frac{1}{C'} \left(\frac{C}{C'} - 1 \right)$ gilt $s_{qq} = kTC'$.



$$u_2 = -\frac{1}{\tau} \int u dt$$

$$S_{ii} = 2kTG$$

Ladungsverstärker, Auswertung im Zeitbereich

$$i = G(u - u_2) + (C + C')\dot{u} - C'\dot{u}_2 \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G \\ \tau^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$0 = \tau^{-1}u + \dot{u}_2$$

$$q = (C + C')u - C'u_2$$

$$S_{ii} = 2kTG$$

$$\begin{bmatrix} q \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C + C' & -C' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix}$$

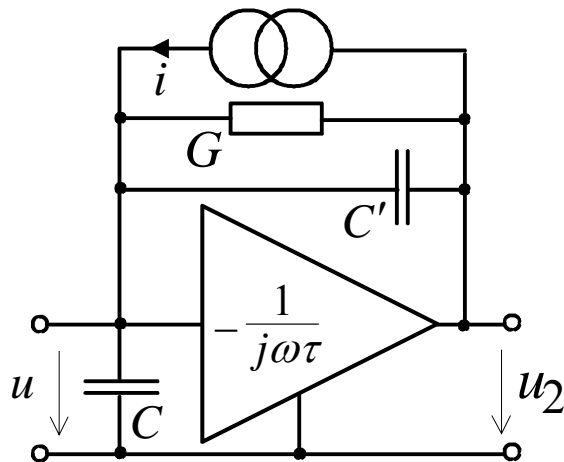
Formal ist das identisch mit:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{q}}_n$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{S}_{ii,n} = \begin{bmatrix} 2kTG & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

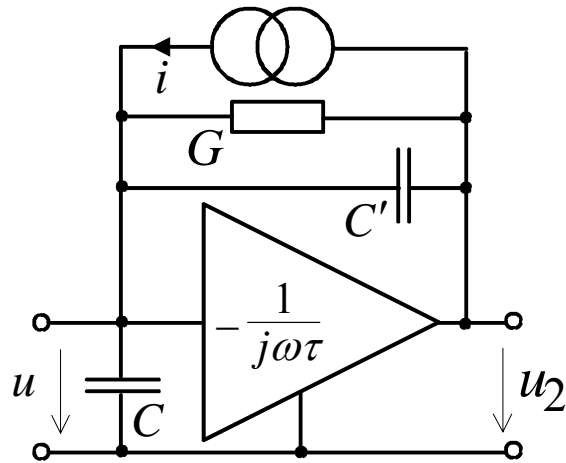
$$s_{ii,n} = \frac{\mathbf{S}_{ii,n}}{\delta t}$$



Gesuchtes Endergebnis:

$$s_{qq,n}(1,1)/kT = C_{eff}$$

Transientenanalyse der Signale



$$C = 10^{-12} \text{ F}$$

$$C' = 10^{-13} \text{ F}$$

$$G = 10^{-4} \text{ S}$$

$$\tau = 2 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

$$G\tau = 2 \cdot 10^{-15} \text{ F}$$

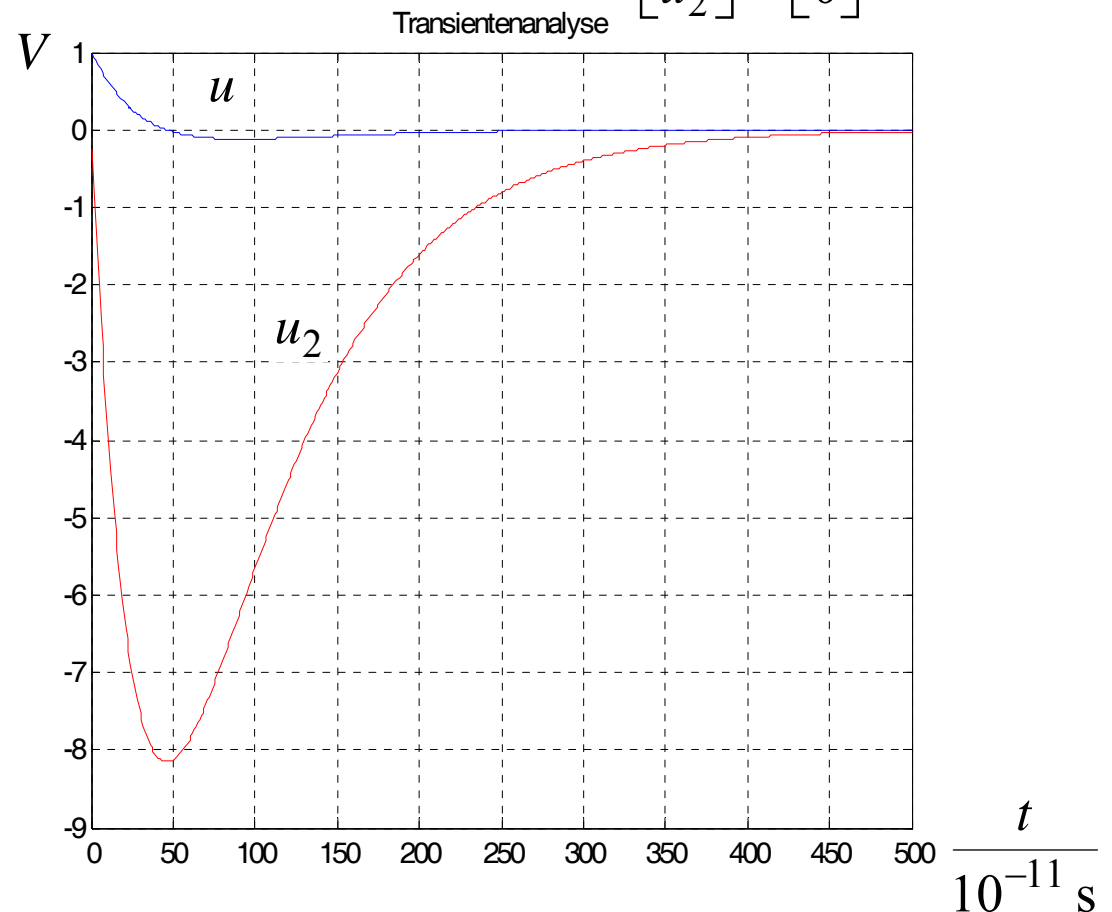
$$\delta t = 10^{-11} \text{ s}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

Integrationschema: wahlweise
1. oder 2. Ordnung

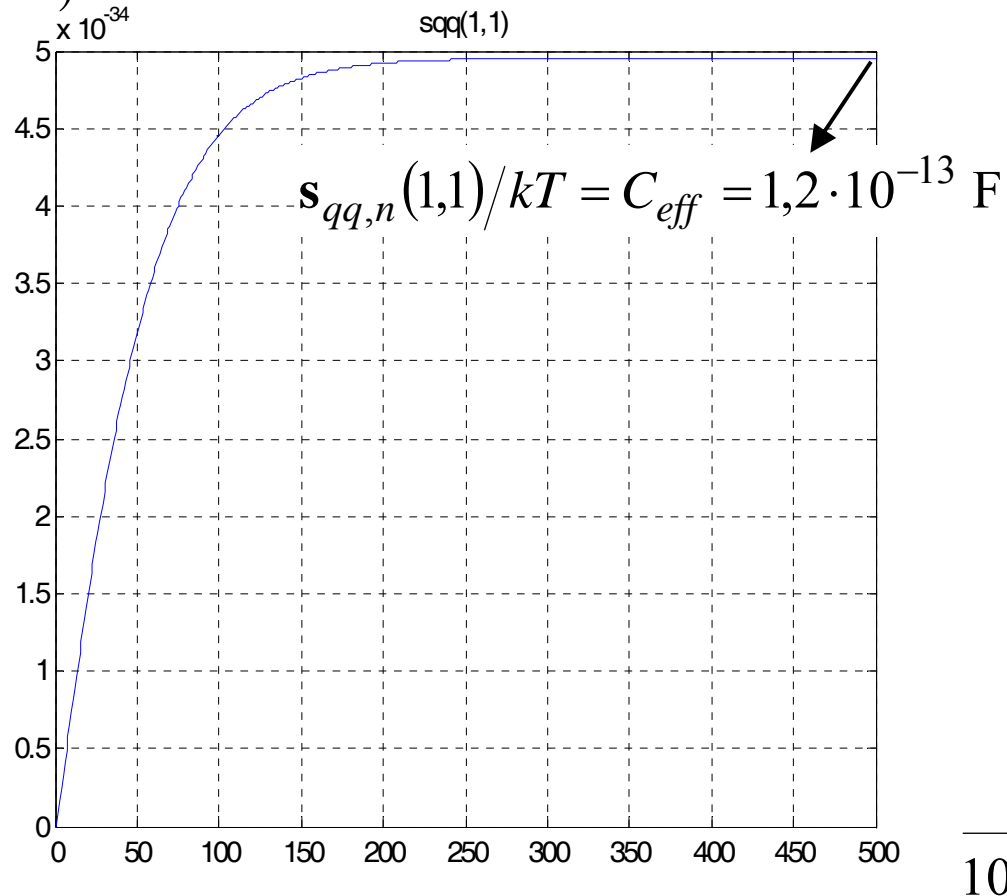
(Transientenanalyse ist hier verzichtbar,
weil das System ohnehin linear ist.)

Relaxation nach Start mit $\begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ V}$:

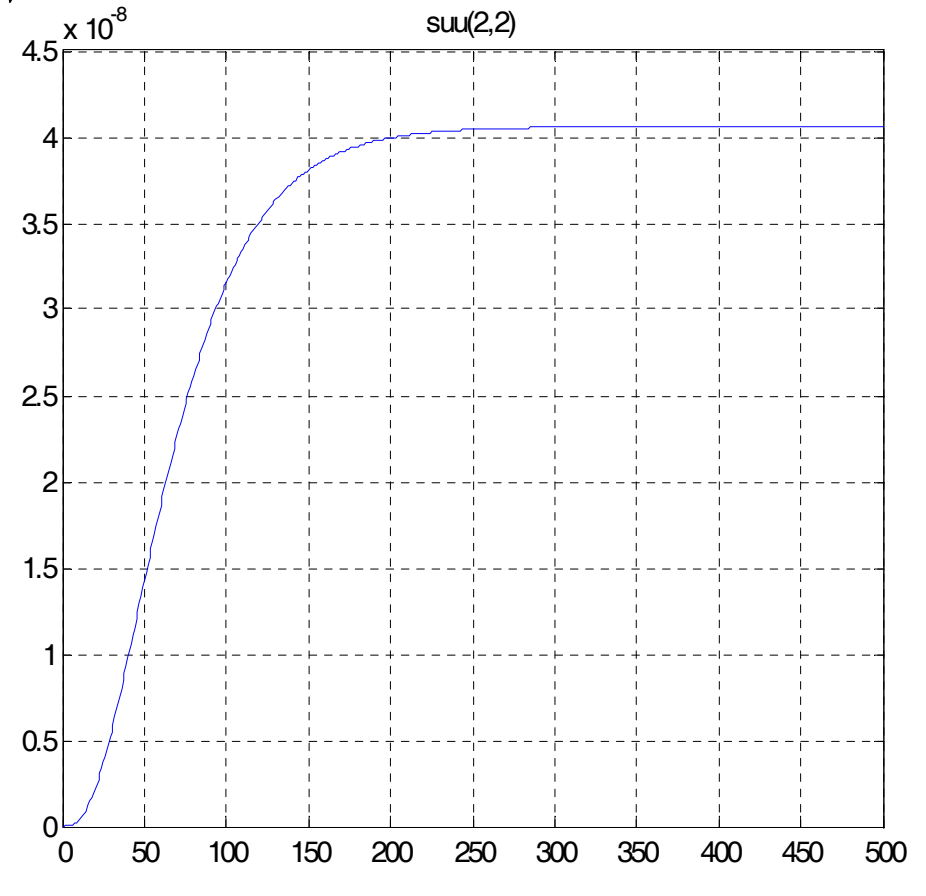


Transientenanalyse der Rauschvarianzen

$(As)^2$ Eingangsknotenladungsvarianz

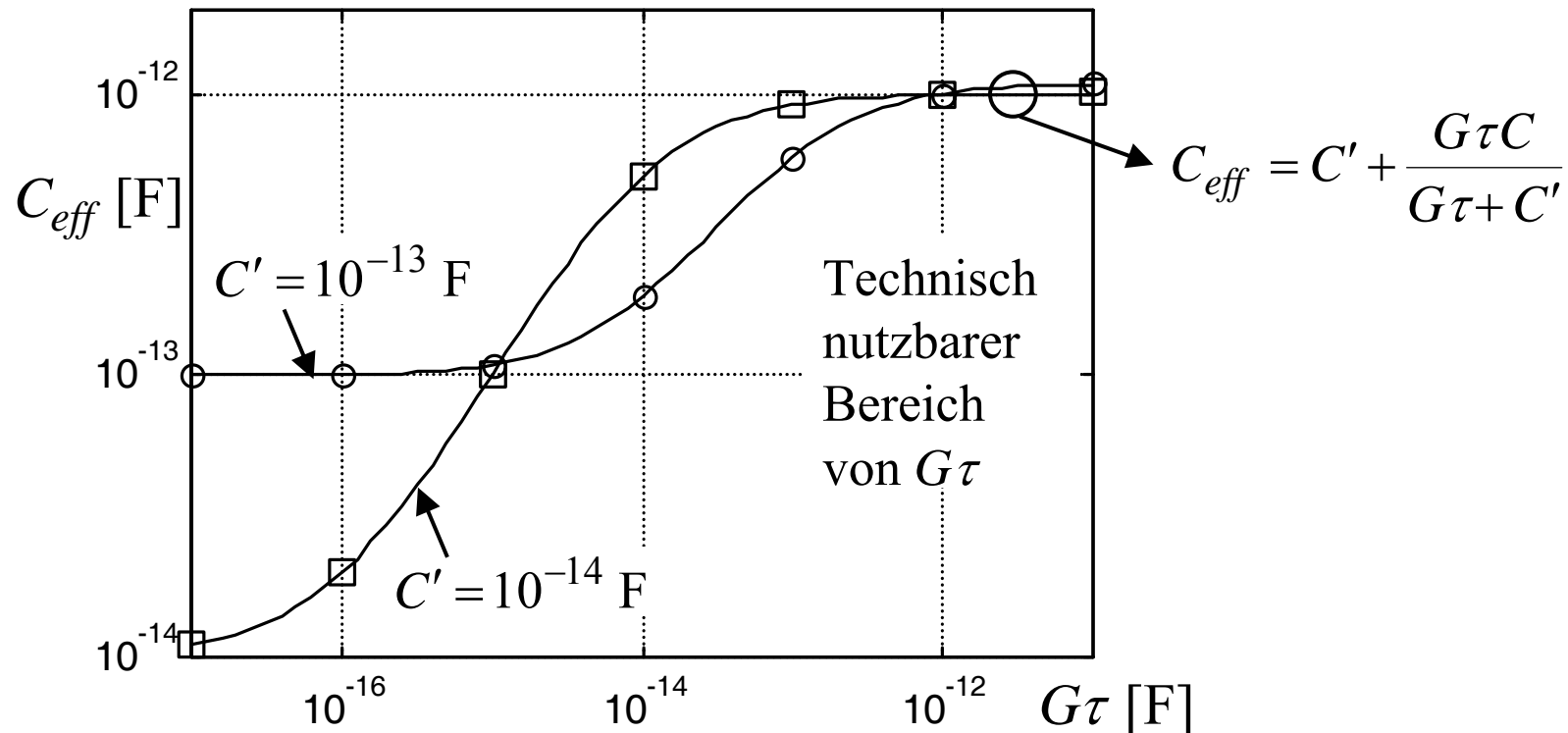


V^2 Ausgangsspannungsvarianz



- Ausgangsspannungsvarianz wächst langsamer als Eingangsknotenladungsvarianz.
- Funktioniert auch für $C = 0$! $\Rightarrow C_{eff} = 10^{-13}$ F = C'

Ergebnisvergleich in Frequenz- und Zeitbereich



- Die effektive Eingangskapazität ist deutlich größer als erhofft! $C_{eff} > C'$ ($C_{eff} \gg C' ?$)
- Frequenzbereich (—) und Zeitbereich (\square , \circ) liefern dieselben Ergebnisse!
- Rauschanalyse (Kovarianzmatrixberechnung) im Zeitbereich erlaubt die Rauschminimierung durch schaltungstechnische Maßnahmen!

Zusammenfassung

- Allgemeine Methode zur Kovarianzmatrixberechnung von instationärem Rauschen in zeitvarianten, auch nichtlinearen Mehrtoeren
- Rauschberechnung kann parallel zur Transientenanalyse in herkömmlichem Schaltkreissimulator erfolgen. Implizite Notation ist ausreichend.
- Minimierung von kT/C -Rauschen durch schaltungstechnische Maßnahmen wird möglich.

Herleitungen (1)

$$\mathbf{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t, t_1) \mathbf{v}(t_1) dt_1$$

$$t_1 = t - \tau \quad \tau = t - t_1 \quad \mathbf{h}(t, t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, t) e^{j\omega(t-t_1)} d\omega$$

$$\mathbf{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, t) e^{j\omega(t-t_1)} d\omega \mathbf{v}(t_1) dt_1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, t) \mathbf{V}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Herleitungen (2)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{ww}(\tau, t) &= \left\langle \mathbf{w}(t + \tau/2) \mathbf{w}^+(t - \tau/2) \right\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_3) \mathbf{v}(t_3) dt_3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}^+(t_4) \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_4) dt_4 \right\rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_3) \left\langle \mathbf{v}(t_3) \mathbf{v}^+(t_4) \right\rangle \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_4) dt_3 dt_4 \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_1 + t_2/2) \left\langle \mathbf{v}(t_1 + t_2/2) \mathbf{v}^+(t_1 - t_2/2) \right\rangle \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_1 - t_2/2) dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_1 + t_2/2) \mathbf{s}_{vv}(t_2, t_1) \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_1 - t_2/2) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

Bei Zeitinvarianz und Stationarität ist t beliebig, z.B. $t = 0$:

$$\mathbf{s}_{ww}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau/2 - t_1 - t_2/2) \mathbf{s}_{vv}(t_2) \mathbf{h}^+(-\tau/2 - t_1 + t_2/2) dt_1 dt_2$$

Herleitungen (3)

Stationäres Eingangssignal : $\mathbf{s}_{vv}(t_2, t_1) \equiv \mathbf{s}_{vv}(t_2)$

$$\mathbf{s}_{ww}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_1 + t_2/2) \mathbf{s}_{vv}(t_2) \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_1 - t_2/2) dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t_1 + t_2/2) \mathbf{S}_{vv}(\omega) \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t_1 - t_2/2) e^{j\omega t_2} dt_1 dt_2 d\omega$$

$$t_1 - t_2/2 = t - \tau/2 - t_3 \quad t_1 + t_2/2 = t + \tau/2 - t_4 \quad t_1 = t - (t_3 + t_4)/2 \quad t_2 = \tau + t_3 - t_4$$

$\mathbf{s}_{ww}(\tau, t)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t + \tau/2, t + \tau/2 - t_4) e^{-j\omega t_4} dt_4 \mathbf{S}_{vv}(\omega) \mathbf{h}^+(t - \tau/2, t - \tau/2 - t_3) e^{j\omega t_3} dt_3 e^{j\omega \tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, t + \tau/2) \mathbf{S}_{vv}(\omega) \mathbf{H}^+(\omega, t - \tau/2) e^{j\omega \tau} d\omega$$

Zeitinvarianz : $\mathbf{S}_{ww}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{S}_{vv}(\omega) \mathbf{H}^+(\omega)$