



Mechatronik und elektrische Antriebe

Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Skript zur Vorlesung

Stand vom 18.07.2017

Universität Paderborn

Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik

Inhalt

| 1 | Mecl | natronische Systeme | 5 |
|---|-------------|---|---------|
| 2 | Mag | netische Kreise | 7 |
| | 2.1 | Magnetische Reluktanz | 7 |
| | 2.2 | Energie und Leistung | 8 |
| | 2.3 | Magnetische Werkstoffe | |
| | 2.4 | Permanentmagnete | |
| 3 | Magnetlager | | |
| | 3.1 | Magnetisches Joch | |
| | 3.2 | Anordnung mit zwei Jochen | |
| | 3.3 | Regelung eines Magnetlagers mit Vorspannung durch separate Wicklung | |
| | 3.4 | Magnetic Bearing with Permanent Magnets Magnetlager mit Permanentm | agneten |
| | | 45 | U |
| | 3.5 | Sensorik | |
| | 3.6 | Stromrichter | |
| | 3.7 | Pulsweitenmodulation | 49 |
| | 3.8 | Magnetlager mit Lagerung in zwei Freiheitsgraden | 54 |
| 4 | Gesc | halteter Reluktanz-Motor | 56 |
| | 4.1 | Konstruktiver Aufbau | 56 |
| | 4.2 | Funktionsprinzip | 57 |
| | 4.3 | Dynamisches Verhalten | 63 |
| | 4.4 | Stromrichter | 69 |
| 5 | Schr | ttmotoren | 72 |
| 6 | Gleic | chstrommotor | 74 |
| | 6.1 | Wirkprinzip | 74 |
| | 6.2 | Aufbau | 76 |
| | 6.3 | Kommutator und Ankerwicklungsschemata | 77 |
| | 6.4 | Kommutierung und Wendepolwicklung | 78 |
| | 6.5 | Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung | 79 |
| | 6.6 | Mathematische Modellierung | 80 |
| | 6.7 | Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad | |
| | 6.8 | Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen | 83 |
| | 6.9 | Fremderregter und permanent erregter Motor | |
| | 6.10 | Nebenschlussmotor | 88 |
| | 6.11 | Reihenschlussmotor | 89 |
| | 6.12 | Geregelter Betrieb | 92 |
| | 6.13 | Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen | |
| 7 | Elekt | tronisch kommutierte Motoren | 101 |
| | 7.1 | Funktionsprinzip | 101 |
| | 7.2 | Induzierte Spannungen | 103 |
| | 7.3 | Ersatzschaltbild und Drehmoment | 106 |
| | 7.4 | Stromrichter | 108 |
| | 7.5 | Kommutierung | 109 |
| | 7.6 | Regelung | 112 |
| 8 | Entw | urf von Strom- und Drehzahlregelung | 115 |
| | 8.1 | Reglerentwurf durch Pol-Nullstellen-Kürzung (Betragsoptimum) | 116 |
| | 8.2 | Symmetrisches Optimum | 124 |

Literatur

R. Isermann Mechatronische Systeme Springer Verlag, 1999

J. Pyrhönen, T. Jokinen and V. Hrabovcová Design of Rotating Electrical Machines Wiley & Sons, 2008

D. Schröder Elektrische Antriebe – Grundlagen Springer Verlag, 2. Aufl., 2000

Germar Müller, Bernd Ponick Grundlagen elektrischer Maschinen Wiley-VHC, 9. Auflage, 2006

Germar Müller, Bernd Ponick Theorie elektrischer Maschinen Wiley-VHC, 4. Auflage

H. Goldstein Klassische Mechanik Akademische Verlagsgesellschaft, 1981

D. Hanselman Brushless Permanent Magnet Motor Design The Writer's Collective, 2003

T. J. E. Miller Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives Oxford Science Publications, 1989

D. Schröder Elektrische Antriebe – Grundlagen Springer Verlag, 2. Aufl., 2000

Hans-Dieter Stölting, Eberhard Kallenbach Handbuch Elektrische Kleinantriebe Hanser Verlag, 3. Auflage, 2006

R. Krishnan Electric Motor Drives Prentice Hall, 2001

D. K. Miu Mechatronics – Electromechanics and Contromechanics Springer-Verlag, 1993

G. Schweitzer, A. Traxler, H. Bleuler Magnetlager Springer-Verlag, 1993

G. Schweitzer, E. H. Maslen (eds.) Magnetic Bearings Springer-Verlag 2009 H. Lutz, W. Wendt Taschenbuch der Regelungstechnik Verlag Harri Deutsch, 7. Auflage, 2007

W. Bolton
Bausteine mechatronischer Systeme
Pearson, 3. Auflage 2003
Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme
VDI-Richtlinie VDI 2206 (Entwurf), März 2003

Griechische Buchstaben

| α | Alpha |
|-----------------------|--|
| β | Beta |
| γ | Gamma |
| δ | Delta |
| 3 | Epsilon |
| ζ | Zeta |
| η | Eta |
| θ, ϑ^2 | Theta |
| ι | Iota |
| κ | Kappa |
| λ | Lambda |
| μ | My |
| v | Ny |
| ξ | Xi |
| o^1 | Omikron |
| π | Pi |
| ρ | Rho |
| σ, ς ¹ | Sigma |
| τ | Tau |
| υ | Ypsilon |
| ϕ, ϕ^2 | Phi |
| χ | Chi |
| Ψ | Psi |
| ω | Omega |
| | $ α $ $ β $ $ γ $ $ δ $ $ ε $ $ ζ $ $ η $ $ θ $, $9^2 $ $ ι $ $ κ $ $ λ $ $ μ $ $ v $ $ ξ $ $ o^1 $ $ π $ $ ρ $ $ σ $, $ ζ^1 $ $ τ $ $ v $ $ φ $, $ φ^2 $ $ χ $ $ ψ $ $ ω $ |

¹ Wegen Übereinstimmung mit lateinischen Typen werden diese griechischen Buchstaben meist nicht als mathematische Symbole verwendet, das Schluss-Sigma wird ebenfalls nicht benutzt.

² Die typografische Darstellung dieser Minuskeln variiert je nach Schriftsatz.

1 Mechatronische Systeme



Fig. 1-1: Mechatronik als Integration des Maschinenbaus, der Elektrotechnik und der Informationstechnik¹

Ein System mit Komponenten oder Teilsystemen des Maschinenbaus, der Elektrotechnik und der Informationstechnik, die jeweils für sich separierbare Teilfunktionen wahrnehmen, wird im engeren Sinne noch nicht als mechatronisches System bezeichnet. Wichtiges Kennzeichen mechatronischer Systeme ist vielmehr die Integration:

• Funktionelle Integration: eine *Funktion* wird erst durch das *Zusammenwirken* der Komponenten der drei Bereiche bewirkt

Beispiel: Aktive Schwingungstilgung einer mechanischen Struktur (große Satellitenstruktur mit ausgeklappten Photovoltaikflächen) mit regelungstechnischen Maßnahmen und elektromechanischen Aktoren. Die Komponenten (Aktor, Steuerungssystem, Sensorik, mechanische Struktur) sind ggf. räumlich/konstruktiv separat, die beabsichtigte Funktion kommt aber erst durch das Zusammenwirken aller beteiligten Komponenten zustande

und/oder

¹ Obwohl die ersten Rechenmaschinen und sogar der erste von Zuse gebaute programmierbare Computer mechanischer Natur waren, ist heute die *digitale mechanische* Informationsverarbeitung kaum noch von Bedeutung. Allerdings gibt es in vielen mechanischen Systemen Vorrichtungen, die in gewissem Sinn als (analoge) mechanische Informationsverarbeitung aufgefasst werden können: Z. B. Königswellen, Kurvenscheiben, Zahnriemen und -scheiben, Hebel oder Kurbeln zur Übertragung von Stellungen und Positionen.

• Hohe räumliche bzw. konstruktive Integration

Beispiel: Schreib-Lese-Arm einer Festplatte. Informationstechnische Teile, Aktuator und Mechanik sind konstruktiv und räumlich stark integriert

• Fertigungstechnische Integration: Das mechatronische System wird nicht aus vorgefertigten elektrotechnischen, maschinenbaulichen und informationstechnischen Komponenten assembliert, sondern in einem integrierten Produktionsprozess gefertigt

Ein weiteres Kennzeichen mechatronischer Systeme ist die Verflechtung von Leistungsflüssen und Informationsflüssen.







Fig. 1-3: Power and information flows

2 Magnetische Kreise

2.1 Magnetische Reluktanz

Annahme stückweise homogener Felder (Feldstärke h_k und Flussdichte b_k) in Elementen der Länge l_k und des Querschnitts A_k . Magnetischer Spannungsabfall (Durchflutung):

$$\theta_k = l_k h_k \tag{2.1}$$

Magnetischer Fluss:

$$\phi_k = A_k b_k \tag{2.2}$$

Es gilt bei linearem (passivem) Material

$$b_k = \mu_0 \mu_{rk} h_k \tag{2.3}$$

Damit lässt sich der magnetische Widerstand, die Reluktanz,

$$R_k = \frac{\theta_k}{\phi_k} = \frac{l_k}{\mu_0 \mu_{rk} A_k} \tag{2.4}$$

bzw. die magnetische Leitfähigkeit

$$A_{k} = \frac{1}{R_{k}} = \frac{\mu_{0}\mu_{rk}A_{k}}{l_{k}}$$
(2.5)

definieren. Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt im magnetischen Kreis mit mehreren magnetischen Elementen

$$\sum_{k} \theta_{k} = \theta_{0} = Ni \tag{2.6}$$

$$\phi_k = \phi = \text{const.} \tag{2.7}$$

Berechnung von Fluss und magnetischer Spannung analog zu elektrischen Netzwerken mittels Kirchhoffscher Gesetze. Bei einem einschleifigen Kreis gilt:

$$\phi = \frac{\theta_0}{R_{\Sigma}} = \frac{\theta_0}{\sum_k R_k}$$
(2.8)

Durch Übergang auf den mehrfach verketteten Fluss (mit der Windungszahl N)

$$\psi = N\phi \tag{2.9}$$

lässt sich schreiben:

$$\psi = \frac{N^2}{R_{\Sigma}}i = Li \tag{2.10}$$

mit der Induktivität

$$L = \frac{N^2}{R_{\Sigma}}$$
(2.11)

Maßeinheiten der Größen:

| Größe | Symbol | Maßeinheit |
|--|--------|------------------------------------|
| Elektrische Spannung | и | 1V |
| Magnetische Flussdichte | b | $1 \mathrm{T} = 1 \mathrm{Vs/m^2}$ |
| Magnetischer Fluss | φ | 1 Vs |
| Magnetischer Verkettungsfluss | Ψ | 1Vs |
| Elektrischer Strom | i | 1A |
| Magnetische Feldstärke | h | 1A/m |
| Magnetische Spannung, magnetische Durchflutung ² | 9 | 1A |
| Induktivität | L | $1 \mathrm{H} = 1 \mathrm{Vs/A}$ |
| Magnetischer Leitwert | Λ | $1 \mathrm{H} = 1 \mathrm{Vs/A}$ |
| Reluktanz | R | 1 A/Vs |

2.2 Energie und Leistung

Die *innere magnetische Energie* für ein Element aus linearem Material mit homogenen Feldern in verschiedenen Darstellungen:

² In der Literatur findet man für die magnetische Spannung sehr häufig die Einheit "Ampere-Windungen", was trotz vielfältiger Wiederholungen leider falsch bleibt: Auch wenn die magnetische Spannung durch mehrere Windungen aufgebaut wird, beibt ihre Maßeinheit einfach nur das Ampere, denn die Zahl der Windungen ist eine dimensionslose Zahl und führt zu keiner Veränderung der Maßeinheit. Blieben die Propagandisten dieser Merkwürdigkeit wenigstens in sich konsistent, müssten sie konsequenterweise bei einer induzierten elektrischen Spannung in einer Spule von "Volt-Windungen" sprechen, denn meist tragen ebenfalls mehrere Windungen dazu bei.

$$E_{ki} = \frac{1}{2} b_k h_k A_k l_k = \frac{1}{2\mu_0 \mu_{rk}} b_k^2 A_k l_k = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{rk} h_k^2 A_k l_k$$

$$= \frac{1}{2} \phi_k \theta_k = \frac{1}{2} R_k \phi_k^2 = \frac{1}{2R_k} \theta_k^2$$
(2.12)

Für nichtlineares, aber reversibles Material (d. h. mit eindeutiger Kennlinie, also ohne Hysterese), muss die Energie durch Integration über die nichtlineare Magnetisierungskurve bestimmt werden:

$$E_{ik} = A_k l_k \int_0^b h(\tilde{b}) d\tilde{b}$$
(2.13)

Bei Materialien mit Hysterese liefert das Differenzial

$$\mathrm{d}W = A_k l_k h(b) \mathrm{d}b \tag{2.14}$$

nur die am Material geleistete Arbeit, wobei ein Teil der Arbeit verloren geht (irreversible Magnetisierungsverluste, Fläche der Hystereseschleife), also nicht zur magnetischen Energie beiträgt, sondern den inneren Verlusten zugerechnet werden muss. In diesem Fall ist das Differenzial dW kein totales Differenzial und kann nicht zu einem Energiefunktional integriert werden.

Die Gesamtenergie ergibt sich durch Summation über alle Teile:

$$E_{i} = \sum_{k} E_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{k} \phi_{k} \theta_{k} = \frac{1}{2} \phi \theta_{0} = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} L i^{2} = \frac{1}{2L} \psi^{2}$$
(2.15)

Bei nichtlinearen Materialien folgt

$$E_{i} = \sum_{k} E_{ik} = \int_{0}^{\phi} \theta_{0}(\tilde{\phi}) \,\mathrm{d}\,\tilde{\phi} = \int_{0}^{\psi} I(\tilde{\psi}) \,\mathrm{d}\,\tilde{\psi}$$
(2.16)

Magnetische Anordgungen mit einem kinematischem Freiheitsgrad

Annahme: Die Reluktanz R_{Σ} sei von einem Geometrieparameter, z.B. einer Verschiebung x abhängig

$$R_{\Sigma} = R_{\Sigma}(x) \tag{2.17}$$

z. B. der Luftspalt x = d beim Joch oder später beim Reluktanzmotor der Drehwinkel $x = \varepsilon$. Damit

$$E_i = E_i(i, x) \tag{2.18}$$

oder äquivalent

$$E_i = E_i(\psi, x) \tag{2.19}$$

Leistungsbilanz:

$$\dot{E}_i = p_e - p_d \tag{2.20}$$





Äußere (externe) Leistung:

$$p_e = p_{el} - p_{me} = ui - vF \tag{2.21}$$

mit

$$v = \dot{x} \,. \tag{2.22}$$

Die Vorzeichen ergeben sich aus der willkürlichen Festlegung der Zählrichtung. Für die elektrischen Größen wurde das Verbrauchersystem, für die mechanischen das Erzeugersystem gewählt.

Die innere dissipierte Leistung ist:

$$p_d = Ri^2 \tag{2.23}$$

$$p = p_e - p_d = ui - vF - Ri^2 = u_i i - vF$$
(2.24)

mit der inneren oder induzierten Spannung

$$u_i = u - Ri. \tag{2.25}$$

Totales Differenzial der inneren Energie: Zunächst Festlegung der generalisierten Koordinaten. Alle möglichen Koordinaten oder Verschiebungen sind im Prinzip gleichwertig. Vorteilhafterweise wählt man diejenigen, deren Zeitableitungen als Kovariablen im Leistungsausdruck auftreten, also x und ψ :

$$\dot{E}_{i}(\psi, x) = \dot{\psi} \frac{\partial E_{i}}{\partial \psi} + \dot{x} \frac{\partial E_{i}}{\partial x}$$
(2.26)

Induktionsgesetz:

$$u_i = \dot{\psi} \tag{2.27}$$

Kinematik:

$$v = \dot{x} \tag{2.28}$$

Vergleich mit Leistungsausdruck liefert:

$$i = \frac{\partial E_i}{\partial \psi} \Big|_{x=\text{const.}}$$
 und $F = -\frac{\partial E_i}{\partial x} \Big|_{\psi=\text{const.}}$

Hieraus kann die Kraft bei konstantem Fluss bestimmt werden. Also:

$$\dot{E}_i(\psi, x) = \dot{\psi}i - \dot{x}F \tag{2.29}$$

bzw. als totales Differenzial

$$dE_i(\psi, x) = id\psi - F dx$$
(2.30)

Die Kraft bei konstantem Strom wird aus der Ko- oder Ergänzungsenergie bestimmt, welche sich durch eine Legendre-Transformation aus der inneren Energie ergibt:

$$E_c(i,x) = \psi i - E_i(\psi, x) \tag{2.31}$$



Fig. 2-2: Innere Energie und Koenergie

Die Ergänzungsenergie genügt der Bilanzgleichung

$$\dot{E}_{c}(i,x) = \frac{d}{dt}(\psi i) - \dot{E}_{i}(\psi,x) = \dot{\psi}i + \psi \dot{i} - u_{i}i + vF = \dot{i}\psi + \dot{x}F$$
(2.32)

bzw. als totales Differenzial geschrieben:

$$dE_c = \psi di + F dx \tag{2.33}$$

Mathematisch betrachtet, werden durch die Legendre-Transformation die gewählten generalisierten Koordinaten, also die unabhängigen Variablen des Energiefunktionals, gewechselt. Interpretiert man die Energien geometrisch als Flächen unter der Magnetisierungskurve $\psi = \psi(i)$, ergänzen sich die beiden Energien zum Rechteck. Technisch gesehen stellt der Term ψi die während einer mechanischen Bewegung bei konstant gehaltenem Strom zugeführte elektrische Arbeit dar, die somit bei der Leistungsbilanz berücksichtigt wird.

Aus der obigen Leistungsbilanz identifizieren wir:

$$F = \frac{\partial E_c}{\partial x}\Big|_{i=\text{const.}} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\partial E_c}{\partial i}\Big|_{x=\text{const.}}$$
(2.34)

Bei linearem Materialgesetz sind die innere Energie und die Ergänzungsenergie wertemäßig gleich. Im Fall eines nichtlinearen Materialgesetzes führt die Differenziation $\partial E_i / \partial x \Big|_{i=\text{const.}}$ jedoch im Allgemeinen zum falschen Ergebnis für die Kraft!

Interpretation der Energiebilanz, bzw. des Energiedifferenzials

$$dE_i(\psi, x) = id\psi - Fdx = dW_{el} - dW_{me}$$
(2.35)

Anders als das *totale* Differenzial dE_i sind die rechts stehenden Differenziale

$$\mathrm{d}W_{el} = i\,\mathrm{d}\psi = iu_i\,\mathrm{d}t\tag{2.36}$$

$$\mathrm{d}W_{me} = F\,\mathrm{d}\,x = Fv\,\mathrm{d}\,t \tag{2.37}$$

keine totalen Differenziale, sie sind die Differenziale der an der elektrischen bzw. mechanischen Seite geleisteten *Arbeit* (nicht *Energie*, da kein totales Differenzial!). Um dies in der Bezeichnung zu betonen, wird für nicht-totale Differenziale oft ein durchgestrichenes *d* verwendet: dW_{el} , dW_{me} .

Das Differenzial der mechanischen Arbeit lässt sich unmittelbar durch die Änderung der Ergänzungsenergie ausdrücken:

$$dW_{me} = Fdx = dx \frac{\partial E_c}{\partial x}\Big|_{i=const.} = dE_c\Big|_{i=const.}$$
(2.38)

Diese Differenziale lassen sich grafisch in der Kennlinienschar $\psi = \psi(i, x)$ interpretieren.



Fig. 2-3: Interpretation der Arbeitsdifferenziale



Fig. 2-4: Mechanische und elektrische Arbeiten beim Übergang zwischen zwei Zuständen

Die 2. Ableitungen der Energie

Sind die Energiefunktionale zweifach stetig differenzierbar — was bei technischen Systemen in der Regel der Fall ist — darf die Reihenfolge der Differentialtion vertauscht werden. Aus den gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x \partial \psi} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial \psi \partial x}$$
(2.39)

folgt somit die Reziprozitätsbeziehung

$$\frac{\partial i(\psi, x)}{\partial x} = -\frac{\partial F(\psi, x)}{\partial \psi}$$
(2.40)

Entsprechend folgt aus den gemischten Ableitungen der Koenergie

$$\frac{\partial^2 E_c}{\partial x \partial i} = \frac{\partial^2 E_c}{\partial i \, \partial x} \tag{2.41}$$

die Reziprozitätsbeziehung

$$\frac{\partial \psi(i,x)}{\partial x} = \frac{\partial F(i,x)}{\partial i}$$
(2.42)

Die (differenzielle) *Steifigkeit* der magnetischen Kraft ist die Ableitung der Kraft nach der Verschiebung. Wegen des gewählten Erzeugerzählpfeilsystems auf der Seite der mechanischen Größen wird diese als negative Ableitung definiert. Dann resultiert die Steifigkeit z. B. einer konventionellen Feder wie gewohnt als positive Größe.

Bei konstantem Strom ergibt sich die Steifigkeit des Magnetlagers zu

$$S_{i} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{i=\text{const.}} = -\frac{\partial^{2} E_{c}}{\partial x^{2}}\Big|_{i=\text{const.}}$$
(2.43)

Die Steifigkeit bei konstantem Fluss ist hingegen

$$S_{\psi} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\psi=\text{const.}} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2}\Big|_{\psi=\text{const.}}$$
(2.44)

Die Steifigkeiten S_i und S_{ψ} haben im Allgemeinen unterschiedliche Werte.

Die (differenzielle) Induktivität ergibt sich entsprechend aus

$$L = \frac{\partial \psi}{\partial i} \bigg|_{x = \text{const.}} = \frac{\partial^2 E_c}{\partial i^2} \bigg|_{x = \text{const.}}$$
(2.45)

aber auch aus der inneren Energie über

$$\frac{1}{L} = \frac{\partial i}{\partial \psi} \bigg|_{x=\text{const.}} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial \psi^2} \bigg|_{x=\text{const.}}$$
(2.46)

2.3 Magnetische Werkstoffe



Fig. 2-5: Naives Bohrsches Atommodell zu Erklärung des Drehimpulses bzw. des magnetischen Moments

Die Magnetisierung der Materie hat ihre physikalische Ursache in den magnetischen Momenten der Atome bzw. der daraus zusammengesetzen Moleküle oder Kristallgitter. Im Sinne des naiven Bohrschen Atommodells tragen die Elektronen über den mit ihrer Bahnbewegung verbundenen Bahndrehimpuls \vec{L} hierzu bei. Hinzu kommt der Eigendrehimpuls (*Spin*) \vec{S} des Elektrons, elcher mit der "Bahnbewegung" nichts zu tun hat. Der Betrag des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ kann nach den Gesetzen der Quantenmechanik nur bestimmte Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js annehmen,

$$J = M_j \frac{h}{2\pi} \tag{2.47}$$

wobei M_j ein ganz- oder halbzahliger Wert ist (0, 1/2, 1, 3/2, usw.). Mit dem Drehimpuls ist dann das magnetische Moment

$$M = \frac{e}{m_e} J = M_j \frac{eh}{2\pi m_e}$$
(2.48)

verbunden. Hierbei ist $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ As die Elementarladung und $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg die Masse eines Elektrons.

Zu einem gewissen Teil sind am magnetischen Moment eines Atoms auch die Spins der Atomkerne beteiligt, was bei der Magnetresonanztomographie (MRT) ausgenutzt wird. Die Materialeigenschaften magnetischer Werkstoffe resultieren aber im Wesentlichen aus den Eigenschaften der Elektronenhüllen. Je nach Art der beteiligten Atome und der sich daraus bildenden Kristallgitter orientieren sich die resultierenden magnetischen Gesamtmomente untereinander parallel oder antiparallel bzw. richten sich an einem äußeren Feld aus. Die unterschiedlichen Ausprägungen nennt man wie folgt:

Diamagnetismus: Auch wenn das magnetische Moment im Grundzustand Null ist, werden durch quantenmechanische Wechselwirkung mit dem äußeren Feld Dipole induziert, die dem äußeren Feld entgegenwirken und es abschwächen. Aus makroskopischer Sicht resultiert $\mu_r < 1$. Beispiele: Wasser, Kohlenstoff, Kupfer, Wismut.

Ferromagnetismus: Die magnetischen Momente der Atome in einem Kristallgitter sind in den sogenannten *Weißschen Bezirken* bereits ohne äußeres Feld untereinander parallel ausgerichtet. Die Ausrichtung der Magnetisierung benachbarter Weißscher Bezirke variiert aber mehr oder weniger zufällig, so dass sich die Magnetisierungen in einer summarischen makroskopischen Betrachtung aufheben. Durch ein äußeres Feld verschieben sich die Grenzen benachbarter Weißscher Bezirke, die *Bloch-Wände*. Bezirke mit einer Magnetisierung in Richtung des erregenden äußeren Feldes wachsen rasch an, während die anderen kleiner werden. Mit weiter zunehmendem äußerem Feld ändern die Weißschen Bezirke auch sprungförmig die Richtung ihrer Magnetisierung (*Barkhausen-Sprung*). Im Gegensatz zum Paramagnetismus reagiert das Material sehr stark auf äußere Felder: $\mu_r >> 1$. Dadurch entsteht auch der Effekt der *Remanenz*, dass also eine magnetische Vorzugsrichtung auch nach Wegfall des äußeren Feldes zurückbleibt. Die bekanntesten Vertreter ferromagnetischer Materialien sind Eisen, Kobalt und Nickel.

Ferrimagnetismus: Bei Ferriten sind die Magnetisierungen benachbarter Atome im Kristallgitter jeweils antiparallel ausgerichtet. Sie haben sich daher teilweise auf.

| Material | μ_r | $rac{\hat{b}_{\max}}{\mathrm{T}}$ | $\frac{f_{\max}}{\text{kHz}}$ |
|----------------------------|-------------|------------------------------------|-------------------------------|
| Ferrite (NiZn, MnZn) | 10-2000 | 0,1-0,5 | 10-100000 |
| Dynamobleche (Fe) | 1000-10000 | 1-1,5 | 0,5-20 |
| Permalloy, MuMetall (FeNi) | 10000-50000 | 1 | 0,1-100 |
| Fe-Pulverkerne | 10-100 | 0,5-1,9 | 1000-350000 |
| FeNi-Pulverkerne | 20-300 | 1-1,5 | 100-2000 |
| FeSiAl-Pulverkerne | 25-120 | 1 | 200-10000 |

Tabelle einiger magnetischer Werkstoffe

Die in der Tabelle angegebene maximale Flussdichte \hat{b}_{max} ist keine harte Grenze, die nicht überschritten werden dürfte, sondern lediglich ein Hinweis für eine technisch sinnvolle Bemessung. Oberhalb der maximalen Flussdichte und oberhalb des empfohlenen Frequenzbereichs steigen die Verluste typischerweise sehr stark an.

Die Charakterisierung ferromagnetischer Materialien lediglich durch eine Permeabilitätszahl μ_r ist problematisch, weil ein durch μ_r charakterisierter linearer Zusammenhang zwischen Feldstärke und Flussdichte allenfalls für kleine Feldstärken gilt. Mit steigender Erregung zeigt sich eine zunehmende *Sättigung*. Besser wird das nichtlineare Materialverhalten durch eine Magnetisierungskennlinie beschrieben.



Fig. 2-6: Magnetisierungkennlinie mit Sättigung

Bei der Berechnung magnetischer Kreise mit Elementen aus ferromagnetischem Material kann man durch eine grafische Methode schnell einen Überblick gewinnen. Besteht der magnetische Kreis aus einer Quelle $\theta_0 = Ni$ (magnetische Spannung der elektrischen Wicklung, auch als magnetomotorische Kraft³, magnetomotive force, MMF bezeichnet), dem Widerstand eines Luftspalts R_L und einem Element aus ferromagnetischem Material, so kann die lineare Kennlinie von Quelle und linearem Luftspaltwiderstand zum Schnitt mit der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie des ferromagnetischen Materials gebracht werden. Dafür ist die Materialkennlinie b über h in eine Kennlinie Fluss ϕ über Spannung θ umzurechnen oder umgekehrt die Größen θ_0 und R_L in entsprechende Materialgrößen umzurechnen.



Fig. 2-7: Nichtlinearer magnetischer Kreis

³ Dieser Begriff wird eher im Englischen verwendet, im Deutschen ist er dagegen weniger gebräuchlich.



Fig. 2-8: Schnittpunkt der Kennlinien der magnetischen Quelle mit linearem Innenwiderstand mit der Kennlinie der nichtlinearen Reluktanz

Alternativ: Bildung der gesamten magnetischen Spannung

$$\theta = \theta_L + \theta_{Fe} = R_L \phi + \theta_{Fe}(\phi) \tag{2.49}$$

als neue nichtlineare Kennlinie. Die nichtlineare Kennlinie wird um die Luftspaltgerade geschert:



Fig. 2-9: Gescherte Gesamt-Magnetisierungskennlinie

Neben der Sättigung kann eine mehr oder minder stark ausgeprägte Hysterese auftreten. In diesem Fall gibt es keine *eindeutige* Magnetisierungskennlinie mehr. Vielmehr ist die Relation zwischen Feldstärke und Flussdichte sowohl von der Vorgeschichte als auch von der aktuellen Richtung der Änderung abhängig. Typischerweise untersucht man symmetrische Anregungen mit Variation der Aussteuerung.



Fig. 2-10: Hysterese

- b_r : remanente Flussdichte: Flussdichte bei Feldstärke Null
- h_c : Koerzitivfeldstärke: (negative) Feldstärke bei Flussdichte Null

Die Kurve, die die Umkehrpunkte der aussteuerungsabhängigen Hystereseschleifen verbindet, heißt *Kommutierungskurve*. Der Kurve erstmaliger Magnetisierung aus einem unmagnetisierten Zustand heißt *Neukurve*.

Die Form der Hysterese hängt von der Vorgeschichte ab, die Gestalt ändert sich auch mit der Frequenz. Bei nicht vollständigem Umlauf bzw. bei asymmetrischer Aussteuerung ergeben sich weitere Abweichungen.

Um Materialien mit Hysterese zuverlässig zu entmagnetisieren, werden Wechselfelder mit langsam abnehmender Amplitude aufgeschaltet.



Fig. 2-11:

Wenn es keine *eindeutige* Kennlinie mehr gibt, sind die durch die Magnetisierungskennlinie bzw. Hysterese gebildeten Flächen zwar immer noch als geleistete Arbeiten, aber nicht mehr als innere Energie und Koenergie deutbar. Das Integral der Leistungen wird also vom vorigen Weg abhängig. Das Integral über einen Umlauf

$$W_{V} = \int dw = \int p(t) \, dt = \int u(t)i(t) \, dt = \int \dot{\psi}(t)i(t) \, dt = \int i(\psi) \, d\psi = \int \theta(\phi) \, d\phi \tag{2.50}$$

gibt die Ummagnetisierungs- oder Hystereseverluste an.

Handelt es sich um periodische Vorgänge und ist T die Periodendauer eines Umlaufs, so sind die auf diese Zeit bezogene Verluste als mittlere Verlustleistung interpretierbar:

$$P_V = \frac{W_V}{T} = f \ W_V \tag{2.51}$$

In erster Näherung sind die Verluste also der Frequenz proportional.

$$P_V \sim f \tag{2.52}$$

Für höhere Frequenzen gilt dies nicht mehr, da sich zusätzlich auch die Gestalt der Hysterese frequenzabhängig ändert. Die Verluste können dann überproportional steigen:

$$P_V \sim f^{e_f} \quad , \quad e_f \approx 1...2 \tag{2.53}$$

Für die Abhängigkeit von der Amplitude kann als grobe Näherung angesetzt werden:

$$P_V \sim \hat{b}^{e_b} \; ; \; e_b \approx 2...3$$
 (2.54)

Die Zusammenfassung dieser beiden empirischen Gesetze führt zu der sogenannten Steinmetz-Gleichung

$$P_V = K f^{e_f} \hat{b}^{e_b} \tag{2.55}$$

Die Steinmetz-Gleichung kann beispielsweise dafür benutzt werden, um Verluste, die in einem Materialdatenblatt beispielsweise nur für eine bestimmte Aussteuerung und Frequenz zu finden sind (typischerweise finden sich solche Angaben in der Maßheit W/kg), auf einen anderen Arbeitspunkt umzurechnen.

2.4 Permanentmagnete

Heute werden hauptsächlich Magnetmaterialien aus

- Neodym-Eisen-Bor (*NdFeB*)
- Samarium-Cobalt (*SmCo*) oder
- Ferriten (*BaFeO* oder *SrFeO*)

verwendet. Die ersten beiden Materialien sind Legierungen aus Seltenen Erden (Neodym Nd oder Samarium Sm), welche paramagnetisch sind, und ferromagnetischen Materialien. Sie werden als Selten-Erd-Magneten bezeichnet. NdFeB ist das derzeit leistungsfähigste Magnetmaterial. Die Rohstoffpreise Seltener Erden haben in den letzten Jahren einige Kapriolen geschlagen. Die größten Lagerstätten befinden sich in China.

Permanentmagnete aus Seltenen Erden korrodieren leicht. Sie müssen durch eine Oberflächenbeschichtung geschützt werden. Ferrite werden aufgrund der günstigen Kosten heute immer noch gern verwendet, sofern nicht höchste Energiedichten benötigt werden.

Der Herstellungsprozess von Hochleistungsmagneten ist technologisch sehr anspruchsvoll. Das pulverisierte Magnetmaterial wird bei definierter Temperatur und Dauer in der gewünschten Form gepresst und gesintert (d. h. verbacken, aber nicht vollständig aufgeschmolzen, da eine feinkristalline Struktur angestrebt wird). Nach dem Sintern folgt eine Aufmagnetisierung durch ein starkes äußeres Feld mittels eines starken Elektromagneten.

Qualitativ stellt sich das Materialverhalten von Permanentmagneten ähnlich wie bei ferromagnetischen Materialien als Hysterese dar. Die Form der Hysterese hat allerdings eine andere Form. Im Allgemeinen gilt der Zusammenhang zwischen Flussdichte b, Feldstärke h und Magnetisierung⁴ m

$$b = \mu_0 h + m \tag{2.56}$$

Die Magnetisierung m ist bei Permanentmagneten im üblichen Betriebsbereich völlig gesättigt und dort nahezu konstant,

$$m = m_{sat} = const. \tag{2.57}$$

Das heißt, in diesem Bereich ist die differenzielle relative Permeabilität

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{db}{dh} = 1 \tag{2.58}$$

der Permanentmagnet verhält sich also bezüglich seines magnetischen Widerstands weitgehend wie Luft oder Vakuum.

⁴ Man beachte, dass in der Literatur der Begriff der Magnetisierung nicht einheitlich verwendet wird: Für die hier verwendeten Magnetisierung $m = b - \mu_0 h$ wird gern auch das Symbol *j* benutzt und dies als *magnetische Polarisation* bezeichnet. Als Magnetisierung *m* findet man dann häufig die alternative Definition $m = b/\mu_0 - h$.

Typische Werte der Sättigungsmagnetisierung sind

$$m_{sat} \approx \begin{cases} 1, 2 - 1, 4 \text{ T mit } NdFeB \\ 0, 9 \text{ T mit } SmCo \\ 0, 4 \text{ T mit ferrites} \end{cases}$$

Dann resultiert für die remanente Flussdichte unmittelbar

$$b_r = m_{sat} \tag{2.59}$$

und für die Koerzitivfeldstärke

$$h_c = \frac{m}{\mu_0} \tag{2.60}$$

sofern dieser Punkt noch im reversiblen Bereich liegt.



Fig. 2-12: Typische Magnetisierungskennlinie eines Permanentmagnetmaterials



Fig. 2-13: Reversible und irreversible Entmagnetisierung



Kennlinien verschiedener Permanentmagnetmaterialien für den reversiblen Bereich (Quelle: Vacuumschmelze)

Die Magnetisierungskennlinie ist stark temperaturabhängig, die Magnetisierung nimmt mit steigender Temperatur ab. Wird eine maximale Temperatur nicht überschritten, stellt sich bei Abkühlung die ursprüngliche Magnetisierung wieder her. Allerdings verschiebt sich mit steigender Temperatur auch das "Knie" der irreversiblen Magnetisierung in der Kennlinie immer mehr nach rechts und oben, so dass die Gefahr einer Schädigung wächst.



Fig. 2-14: Temperaturabhängigkeit der Magnetisierungskennlinie



Fig. 2-15: Kennlinien der Flussdichte und Magnetisierung über Feldstärke für ein *NdFeB*-Material in Abhängigkeit von der Temperatur (Quelle: Vacuumschmelze)

Für ein gerades prismatisches Element aus Permanentmagnetmaterial mit dem Querschnitt A_{PM} und der Länge l_{PM} folgt bei angenommenen homogenen Feldern die Kennlinie des magnetischen Flusses über der magnetischen Spannung durch Umskalierung der Materialkennlinie,

$$\phi = A_{PM}b \quad , \quad \theta = l_{PM}h$$

Ebenso lassen sich der Remanenzfluss und die koerzitive magnetische Spannung definieren:

$$\phi_r = A_{PM} b_r$$
, $\theta_c = l_{PM} h_c$.



Fig. 2-16: Kennlinie des magnetischen Flusses über der Spannung für ein Magnetelement

Im reversiblen Bereich der Magnetisierungskennlinie folgt der Zusammenhang zwischen Fluss und magnetischer Spannung

$$\theta = R_{PM} \left(\phi - \phi_r \right) \tag{2.61}$$

oder

$$\phi = \frac{\theta + \theta_c}{R_{PM}} \tag{2.62}$$

Hierbei ist

$$R_{PM} = \frac{\theta_c}{\phi_r} = \frac{l_{PM}}{\mu_0 A_{PM}}$$
(2.63)

der magnetische Widerstand des Magneten. Diese Gleichungen lassen sich als magnetische Ersatzschaltbilder entweder (s. u. Bild a) mit einer Flussquelle und parallelem

Innenwiderstand oder (b) mit Durchflutungsquelle und seriellem Innenwiderstand interpretieren.



Fig. 2-17: Ersatzschaltbilder eines Permanentmagneten

Ersatzmodelle für magnetisierte Materialien in einer lokalen Feldbetrachtung

Gehen wir von den Maxwellschen Gleichungen (in vektorieller Form) aus:

$$\nabla \cdot b = 0 \qquad \qquad \nabla \cdot d = \rho_e$$
$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \qquad \qquad \nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$

Das magnetische Material werde durch die Beziehung

$$\vec{b} = \mu_0 \vec{h} + \vec{m} \tag{2.64}$$

mit der Magnetisierung \vec{m} berücksichtigt. Schreiben wir

$$\vec{h} = \frac{\vec{b}}{\mu_0} - \frac{\vec{m}}{\mu_0} = \vec{h}_0 - \frac{\vec{m}}{\mu_0}$$
(2.65)

Die so eingeführte Größe \vec{h}_0 ist als die magnetische Feldstärke zu verstehen, die sich bei Vorgabe der Flussdichte \vec{b} statt im magnetisierten Material im Vakuum einstellen würde. Wir setzen dies in das Oerstedsche Gesetz ein:

$$\nabla \times \vec{h} = \nabla \times \vec{h}_0 - \nabla \times \frac{\vec{m}}{\mu_0} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$$
(2.66)

Mit

$$\vec{j}_m = \nabla \times \frac{\vec{m}}{\mu_0} \tag{2.67}$$

folgt

$$\nabla \times \vec{h}_0 = \vec{j} + \vec{j}_m + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$$
(2.68)

Das lässt sich so interpretieren, dass das ursprüngliche magnetisierte Material durch Vakuum und einer gedachten zusätzlichen Stromdichte \vec{j}_m ersetzt wird, die aus den Wirbeln der ursprünglichen Magnetisierung berechnet wird. Dies lässt sich sehr anschaulich interpretieren: Nimmt man ein homogen magnetisiertes Material $\vec{m} = const.$ an, ist \vec{j}_m im Innern als auch außerhalb des Materials Null. Auf Oberfläche gibt es aber eine sprungförmige Änderung der Magnetisierung, die über die Differentiation zu einer Ersatz-Flächenstromdichte der Größe m/μ_0 führt. Die Richtung dieser Stromdichte ist senkrecht zur Flächennormalen und zur ursprünglichen Magnetisierung. Dass es sich wirklich um einen zumindest gedanklich physikalisch korrekt interpretierbaren elektrischen Strom handelt, der im stationären Fall quellfrei sein muss, wird durch Überprürfung von der Diverenz

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = -\nabla \cdot \nabla \times \frac{\vec{m}}{\mu_0} = 0 \tag{2.69}$$

bestätigt. Dieser Strom zirkuliert also in der Oberfläche. Man spricht von einem *Mantelstrom*. Die Stärke dieses Mantelstroms kann direkt aus den Materialkennlinien abgelesen werden. Sie ist gleich der koerzitiven Feldstärke. Bei Seltenerdmagneten liegen die Werte in der Größenordnung

$$\frac{m}{\mu_0} = h_c \approx 1000 \text{ kA/m} = 1000 \text{ A/mm}$$
(2.70)

Wollte man also einen Seltenerdmagneten durch eine elektrische Spule ersetzen, kann man natürlich keinen idealen Flächenstrom realisieren, sondern muss eine gewisse Spulendicke in Kauf nehmen. Geht man von einer technisch in Kupfer erreichbaren Stromdichte von 10 A/mm² aus (was bereits gute Kühlung erfordert), führt das also zu einer Spulendicke von 100 mm, um einen derartigen Mantelstrom zu realisieren. Dabei ist der Füllfaktor der Wicklung noch nicht berücksichtigt. Dieser Vergleich zeigt die enorme Stärke moderner Magnetmaterialien. Praktisch können Permanentmagnete mit Abmaßen von nur einigen Millimetern aufgrund der eben abgeschätzen Dicke der Spulen kaum durch solche ersetzt werden.

Statt der Substitution der Magnetisierung durch Ersatzströme ist auch eine andere Ersatzvorstellung möglich. Schreiben wir diesmal die Materialbeziehung als

$$\vec{b} = \mu_0 \vec{h} + \vec{m} = \vec{b}_0 + \vec{m} \tag{2.71}$$

Hier ist \vec{b}_0 die sich zu einem gegebenen Feldstärkefeld \vec{h} im Vakuum einstellende Flussdichte. Wird diese Gleichung nun in die Quellengleichung eingesetzt, folgt

$$0 = \nabla \cdot \vec{b} = \nabla \cdot \vec{b}_0 + \nabla \cdot \vec{m} \tag{2.72}$$

bzw.

$$\nabla \cdot \vec{b}_0 = \rho_m, \tag{2.73}$$

mit einer gedachten magnetischen Ladungsdichte

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{m} \tag{2.74}$$

Bei einem Material mit konstanter Magnetisierung ist im Innern $\nabla \cdot \vec{m} = 0$. Es treten also nur Ersatz-Flächenladungen auf der Oberfläche auf. Die Größe der Flächenladung ergibt sich direkt aus der Magnetisierung \vec{m} . Da das Ersatz-Flussdichtefeld \vec{b}_0 nicht mehr quellenfrei ist, sind die Feldlinien eines stationären Magnetfeldes nun nicht mehr wie gewohnt geschlossen, sondern laufen wie beim elektrostatischen Feld von einer positiven magnetischen Ladung zu einer negativen. Diese Vorstellung hat zwar keine technisch-physikalische Relevanz⁵, kann aber durchaus für die numerische Feldberechung nützlich sein.

Die durch diese Vorstellungen eingeführten Ersatzfelder

$$\vec{h}_0 = \vec{h} - \frac{\vec{m}}{\mu_0} = \frac{b}{\mu_0}$$
 bzw. $\vec{b}_0 = \vec{b} - \vec{m} = \mu_0 \vec{h}$

unterscheiden sich von den ursprünglichen Feldern \vec{h} bzw. \vec{b} nur innerhalb des magnetisierten Materials. Außerhalb des Materials sind sie diesen gleich, da dort $\vec{m} = 0$ gilt.



Fig. 2-18: Äquivalente Ersatzmodelle für magnetisiertes Material

⁵ Einige Theoretiker halten die Existenz magnetischer Einzelladungen für möglich. Bislang konnten diese aber nicht nachgewiesen werden.

Energie

Bei einer Hysterese lassen sich die durch die Magnetisierungskennlinie gebildeten Flächen zwar noch als geleistete Arbeiten interpretieren, aber nicht mehr einfach zu Energien wegunabhängig integrieren, da bei irreversiblen Vorgängen, insbesondere beim vollständigen Umlauf um die Hysterese, die aufgebrachte äußere Arbeit als Ummagnetisierungsverluste verloren gehen. Im reversiblen Bereich der Kennlinie ist die Kennlinie aber eindeutig. Hier kann die Energie identifiziert werden, wobei der Bezugspunkt (die Integrationskonstante) willkürlich gewählt werden kann. Die innere Energie ist

$$E_{i} = \frac{1}{2}(\phi - \phi_{r})\theta = \frac{R_{PM}}{2}(\phi - \phi_{r})^{2}.$$
(2.75)

Für die Koenergie empfiehlt sich eine leicht veränderte Definition

$$E_c = \phi \theta - E_i + \frac{1}{2} \phi_r \theta_c , \qquad (2.76)$$

wobei die zusätzliche Konstante $\phi_r \theta_c / 2$ nur das Bezugsniveau verschiebt, was aber, da stets nur Änderungen oder Ableitungen der Energiefunktionale relevant sind, ohne weiteres möglich ist. Wir erhalten

$$E_c = \phi \theta - E_i + \frac{1}{2} \phi_r \theta_c = \frac{1}{2} (\phi + \phi_r) \theta + \frac{1}{2} \phi_r \theta_c = \frac{1}{2} \phi (\theta + \theta_c), \qquad (2.77)$$

wobei bei der Umformung der Zusammenhang

$$\phi = \phi_r + \frac{\phi_r}{\theta_c} \theta \tag{2.78}$$

benutzt wurde. Die geometrische Interpretion beider Energien zeigt das folgende Bild



Fig. 2-19: Innere Energie und Koenergie bei einem Permanentmagneten

Vergleicht man die Darstellungen dieser Energien mit den obigen Ersatzschaltbildern mit den Varianten (a) und (b), so stellt man fest, dass sich im Ersatzschaltbild mit Flussquelle die innere Energie

$$E_i = \frac{1}{2}(\phi - \phi_r)\theta = \frac{1}{2}\phi_R\theta = \frac{\theta^2}{2R_{PM}}$$
(2.79)

als Energie des fiktiven Parallelwiderstands R_{PM} interpretieren lässt, während sich die Koenergie im Ersatzschaltbild mit Spannungsquelle (b) als Energie des Reihenwiderstands R_{PM} interpretieren lässt:

$$E_{c} = \frac{1}{2}\phi(\theta + \theta_{c}) = \frac{1}{2}\phi\theta_{R} = \frac{1}{2}R_{PM}\phi^{2}$$
(2.80)

Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet

Besteht ein magnetischer Kreis aus einem Permanentmagneten, einem Luftspalt und einem hochpermeablen Kern, kann der Kernwiderstand meist gegenüber denen der Luft und des Permanentmagneten vernachlässigt werden, was zum unten stehenden Ersatzschaltbild führt. Der sich im Kreis einstellende Zustand kann grafisch skizziert werden, wobei zu beachten ist, dass üblicherweise die Kennlinien des Permanentmagneten in Verbraucherzählrichtung gezeichnet werden, so dass für den Luftspalt dann das Erzeugersystem verwendet werden muss, also

$$\theta = -R_L \phi \,, \tag{2.81}$$

so dass die Luftspaltgerade wie gezeichnet resultiert. Diese grafische Konstruktion kann sowohl in einem Diagramm ϕ über θ als auch direkt in der Materialkennlinie des Permanentmagneten über *h* durchgeführt werden. Im ersten Fall werden die Geradensteigungen durch die magnetischen Widerstände bestimmt. Im letzten Fall führt man zuvor zweckmäßigerweise den *Permeanzquotienten*

$$\alpha = \frac{R_{PM}}{R_L} = \frac{A_L l_{PM}}{A_{PM} l_L}, \qquad (2.82)$$

ein, der die Steigung der Luftspaltgeraden im Verhältnis zur Steigung der Materialkennlinie des Permanentmagneten angibt.

Extremfälle:

- Kein Luftspalt, also $\alpha = \infty$: dann ist der Fluss $\phi = \phi_r$ und die magnetische Spannung $\theta = 0$.
- Großer Luftspalt im Verhältnis mit dem Magneten, also $\alpha = 0$: Dann ist $\theta = \theta_c$ und der Fluss $\phi = 0$.



Fig. 2-20: Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet



Fig. 2-21: Ersatzschaltbild eines magnetischen Kreises mit Permanentmagnet und Luftspalt



Fig. 2-22: Schnitt der Kennlinien von Magnet und Luftwiderstand



Fig. 2-23: Schnitt der Materialkennlinien von Magnet und Luft

3 Magnetlager

3.1 Magnetisches Joch



Fig. 3-1: Prinzipbild eines elektromagnetischen Aktors



Fig. 3-2: Mögliche technische Ausführung als linearer Aktor

Anwendung der allgemeinen Gleichungen auf eine Anordnung wie skizziert. Annahme:

$$R_{Fe} \ll R_L, \tag{3.1}$$

was bei

$$l_{Fe} \ll \mu_{rFe} l_L \tag{3.2}$$

gewährleistet ist. Die Magnetische Spannung und somit auch die Energie im Eisen wird vernachlässigt. Die Gesamtluftspaltlänge ist

$$l_L = 2d . (3.3)$$

Die Magnetische Spannung der elektrischen Spule sei

$$\theta_0 = Ni \tag{3.4}$$

Es ergibt sich

$$E_{c}(i,d) = \psi i - \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}\phi\theta_{0} = \frac{1}{2}\frac{\theta_{0}^{2}}{R_{L}} = \frac{N^{2}i^{2}A_{L}\mu_{0}}{4d}$$
(3.5)

$$F(i,d) = \frac{\partial E_c}{\partial d} = -\frac{N^2 i^2 A_L \mu_0}{4d^2} = -\frac{1}{2d} \phi \theta_0 = -\frac{1}{2} 2A_L b_L h_L = -p_L 2A_L$$
(3.6)

mit dem magnetischem Druck

$$p_L = \frac{1}{2} b_L h_L = -\frac{F}{2A_L}$$
(3.7)

Steifigkeit:

$$S_{i}(i,d) = -\frac{\partial F}{\partial d} = -\frac{N^{2}i^{2}A_{L}\mu_{0}}{2d^{3}} = \frac{2F(i,d)}{d} = -\frac{4p_{L}A_{L}}{d} < 0$$
(3.8)

Die Steifigkeit ist negativ, also instabil.

Verkettungsfluss:

$$\psi(i,d) = \frac{N^2 i A_L \mu_0}{2d} \tag{3.9}$$

Induktivität:

$$L(i,d) = \frac{N^2 A_L \mu_0}{2d}$$
(3.10)

3.2 Anordnung mit zwei Jochen



Fig. 3-3: Magnetlager mit zwei Jochen

$$d_1 = d_0 + x d_2 = d_0 - x$$
(3.11)

$$F_1(i_1, x) = -\frac{N^2 i_1^2 A_L \mu_0}{4(d_0 + x)^2}$$
$$F_2(i_2, x) = \frac{N^2 i_2^2 A_L \mu_0}{4(d_0 - x)^2}$$

$$F(i_{1}, i_{2}, x) = F_{1}(i_{1}, x) + F_{2}(i_{2}, x)$$

$$= -\frac{N^{2}A_{L}\mu_{0}}{4} \left[\frac{i_{1}^{2}}{(d_{0} + x)^{2}} - \frac{i_{2}^{2}}{(d_{0} - x)^{2}} \right]$$
(3.12)

$$S_{i}(i_{1},i_{2},x) = -\frac{N^{2}A_{L}\mu_{0}}{2} \left[\frac{i_{1}^{2}}{(d_{0}+x)^{3}} + \frac{i_{2}^{2}}{(d_{0}-x)^{3}} \right] < 0$$
3.3 Regelung eines Magnetlagers mit Vorspannung durch separate Wicklung

Idee: Beaufschlagung beider Spulen mit einem gleichen konstanten Strom I_0 , dem ein Gegentaktanteil Δi überlagert wird:

$$i_1 = I_0 + \Delta i$$

$$i_2 = I_0 - \Delta i$$
(3.13)

Diese Aufteilung der Ströme in einen gemeinsamen konstanten Anteil und einen variierenden Differenzanteil kann auch direkt durch die Wicklungsanordnung bewerkstelligt werden:



Fig. 3-4: Magnetlager mit separaten Wicklungen für Konstantstrom und "Regelungsstrom"

$$F(\Delta i, x) = -\frac{N^2 A_L \mu_0}{4} \left[\frac{(I_0 + \Delta i)^2}{(d_0 + x)^2} - \frac{(I_0 - \Delta i)^2}{(d_0 - x)^2} \right]$$
(3.14)

Linearisierung um den Arbeitspunkt x = 0 und $\Delta i = 0$:

$$F(\Delta i, x) = \Delta i \frac{\partial F}{\partial \Delta i} \Big|_{\substack{\Delta i=0\\x=0}} + x \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\substack{\Delta i=0\\x=0}}$$

$$= -\frac{N^2 A_L \mu_0 I_0}{d_0^2} \Delta i + \frac{N^2 A_L \mu_0 I_0^2}{d_0^3} x = -C \Delta i - S_i x$$
(3.15)

mit

$$C = \frac{N^2 A_L \mu_0 I_0}{d_0^2} \quad \text{und} \quad S_i = -\frac{N^2 A_L \mu_0 I_0^2}{d_0^3}$$
(3.16)

Die Konstante *C* ist ein Strom-Kraft-Übertragungsverhältnis. Bei rotierenden Maschinen wird diese Konstante als *Motorkonstante* bezeichnet.

Der Gesamtfluss für die den Strom *Ai* führende Wicklung ergibt sich zu

$$\psi_{\Delta}(\Delta i, x) = \frac{N^2 (I_0 + \Delta i) A_L \mu_0}{2(d_0 + x)} - \frac{N^2 (I_0 - \Delta i) A_L \mu_0}{2(d_0 - x)}$$
(3.17)

Die Induktivität dieser Spule ist

$$L_{\Delta}(x) = \frac{\partial \psi_{\Delta}}{\partial \Delta i} = N^2 A_L \mu_0 \left[\frac{1}{2(d_0 + x)} + \frac{1}{2(d_0 - x)} \right]$$
(3.18)

Für kleine x ist die Induktivität in 1. Näherung konstant und kann durch den Wert bei x = 0 approximiert werden:

$$L_{\Delta}(0) = \frac{N^2 A_L \mu_0}{d_0}$$
(3.19)

Regelungsidee:

$$\Delta i = Kx \tag{3.20}$$

Resultierende Gesamtsteifigkeit:

$$S = -\frac{dF}{dx} = S_i + KC = \frac{N^2 A_L \mu_0 I_0}{d_0^2} \left(K - \frac{I_0}{d_0} \right)$$
(3.21)

Wird

$$K > K_{\min} = -\frac{S_i}{C} = \frac{I_0}{d_0}$$
(3.22)

gewählt, wird die Gesamtsteifigkeit S positiv.

Genauere Betrachtung des Regelkreisverhaltens: Der Ort x muss durch einen Sensor erfasst werden. Ein realer Sensor hat z.B. Tiefpassverhalten mit Zeitkonstante τ_s :

$$G_{s}(s) = \frac{\hat{x}(s)}{x(s)} = \frac{1}{1 + \tau_{s}s}$$
(3.23)

Der Strom kann nicht ideal eingeprägt werden, Zeitkonstante eines unterlagerten Stromregelkreises τ_i sollte berücksichtigt werden:

$$G_{i}(s) = \frac{\Delta i(s)}{\Delta i^{*}(s)} = \frac{1}{1 + \tau_{i}s}$$
(3.24)



magnetisches Teilsystem

mechanisches Teilsystem



Verhalten der mechanischen Trägheit:

$$G_m(s) = \frac{x(s)}{F(s) - F_d(s)} = \frac{1}{ms^2}$$
(3.25)

Im stationären Fall $\ddot{x} = 0$ gilt also

$$F = F_d \tag{3.26}$$

Die Übertragungsfunktion $G_m(s)$ wird mit Rückkopplung über S_i zusammengefasst:

$$G'_m(s) = \frac{1}{S_i + ms^2}$$
(3.27)

Weiterhin wird zusammengefasst:

$$G_i'(s) = G_i(s)C \tag{3.28}$$

Der Regler wird nach erster Idee als *P*-Regler angesetzt:

$$G_c(s) = \frac{\Delta i^*(s)}{\Delta x(s)} = -K \tag{3.29}$$

bzw. das negative Vorzeichen vom Summenpunkt des mechanischen Teilsystems wird durchgeschoben und ein Regler

$$G'_{c}(s) = -G_{c}(s) = \frac{-\Delta i^{*}(s)}{\Delta x(s)} = K$$
(3.30)

mit der üblichen positiven Verstärkung definiert.

Regelfehler:

$$\Delta x = x^* - x \tag{3.31}$$



Fig. 3-6: Führungsübertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{x(s)}{x^{*}(s)} = \frac{G'_{c}(s)G'_{i}(s)G'_{m}(s)}{1 + G'_{c}(s)G'_{i}(s)G'_{m}(s)G_{s}(s)}$$

= $\frac{G'_{c}(s)G'_{i}(s)G'_{m}(s)}{1 + L(s)}$
= $\frac{(1 + \tau_{s}s)KC}{(S_{i} + ms^{2})(1 + \tau_{s}s)(1 + \tau_{i}s) + KC}$ (3.32)

Störübertragungsfunktion

$$T_{d}(s) = \frac{x(s)}{-F_{d}(s)} = \frac{G'_{m}(s)}{1 + G'_{c}(s)G'_{i}(s)G'_{m}(s)G_{s}(s)}$$

$$= \frac{G'_{m}(s)}{1 + L(s)}$$

$$= \frac{(1 + \tau_{s}s)(1 + \tau_{i}s)}{(S_{i} + ms^{2})(1 + \tau_{s}s)(1 + \tau_{i}s) + KC}$$
(3.33)

Mit der Kreisübertragungsfunktion

$$L(s) = G'_{c}(s)G'_{i}(s)G'_{m}(s)G_{s}(s)$$
(3.34)

Der Kehrwert der Störübertragungsfunktion kann als dynamische Steifigkeit interpretiert werden:

$$S(s) = \frac{-F_d(s)}{x(s)} = \frac{1}{T_d(s)}$$
(3.35)

Die Übertragungsfunktion

$$G'_m(s) = \frac{1}{S_i + ms^2}$$
(3.36)

besitzt die Polstellen

$$s_1 = \sqrt{-\frac{S_i}{m}}, \quad s_2 = -\sqrt{-\frac{S_i}{m}}$$
 (3.37)

Beide Pole sind reell (man beachte $S_i < 0$). Ein Pol liegt in der rechten komplexen Halbebene. Alle anderen Teilübertragungsfunktionen sind dagegen stabil und besitzen Pole mit negativem Realteil.

Aus prinzipiellen Gründen kann ein P-Regler das System nicht stabilisieren.

Regelungstechnische Argumentation: D-Anteil einfügen, um Phase anzuheben (z.B. Analyse mittels Frequenzkennlinien) oder Wurzeln in die linke Halbebene zu ziehen (Wurzelortskurve).

Mechanische Argumentation: Dämpfung einfügen (führt zum gleichen Resultat wie *D*-Anteil). Ein zusätzlicher *I*-Anteil kann eingefügt werden, um einen verschwindenden stationären Regelfehler zu erreichen (unendliche stationäre Steifigkeit). Daher neuer Ansatz mit *PID*-Regler:

$$G'_{c}(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_{n}}\right) \frac{1 + sT_{v}}{1 + sT_{r}} = K \frac{(1 + sT_{n})(1 + sT_{v})}{sT_{n}(1 + sT_{r})}$$
(3.38)

Die Übertragungsfunktion des PI-Reglers wurde nun durch einen differenzieren Anteil $1+sT_v$ mit Vorhaltzeit T_v ergänzt. Außerdem wurde berücksichtigt, dass ein realistischer Differenzierer nur eine beschränkte Bandbreite besitzt, die durch den zusätzlichen Tiefpass $1/(1+sT_r)$ repräsentiert wird.

Skizze des Regelungsentwurfs im Frequenzbereich: Ein Pol der Kreisübertragungsfunktion L(s) hat positiven Realteil (Beitrag vom $G'_m(s)$). Falls ein *I*-Anteil im Regler vorgesehen wird, liegt ein weiterer Pol auf der imaginären Achse. Die Nyquistortkurve $1 + L(j\omega)$ muss daher (für positive ω) eine Umschlingung von $+3\pi/2$ aufweisen, wenn der geschlossene Kreis stabil sein soll. Ohne integralen Anteil, also bei einem *PD*-Regler, muss die Umschlingung nur $+\pi$ sein. Im Fall des *PD*-Reglers lässt sich sofort eine Mindestreglerverstärkung angeben, da die Umschlingung von $+\pi$ nur zu Stande kommen kann, wenn der Anfangspunkt der Ortskurve die Bedingung

$$L(0) < -1 \tag{3.39}$$

erfüllt. Daraus folgt

$$\frac{KC}{S_i} < -1 \tag{3.40}$$

bzw.

$$K > K_{\min} = -\frac{S_i}{C} \tag{3.41}$$

Man beachte wieder $S_i < 0$. Dieses Ergebnis deckt sich mit der obigen Überlegung zu einer positiven Gesamtsteifigkeit.



Fig. 3-7: Nyquist-Ortskurven

Der Regelungsentwurf ist in Frequenzkennlinien meist übersichtlicher als mit Ortskurven. Vorher empfiehlt sich noch eine Normierung der Teilübertragungsfunktionen und eine Zusammenfassung der Kreisverstärkung in der Reglerverstärkung:

$$G''_{m}(s) = -S_{i}G'_{m}(s) = -\frac{1}{1 + \frac{m}{S_{i}}s^{2}}$$
(3.42)

$$G_c''(s) = -\frac{C}{S_i} G_c'(s)$$
(3.43)

$$K'' = -\frac{C}{S_i} K' \tag{3.44}$$



Fig. 3-8: Frequenzkennlinien zum Regelungsentwurf

Stichworte zum Regelungsentwurf:

- *D*-Anteil hebt die Phase von $L(j\omega)$ im Bereich der Durchtrittsfrequenz ω_c an.
- Vorhaltzeit T_v kann gleich oder in der Nähe von $1/s_1 = -1/s_2$ gewählt werden.
- Reglerverstärkung so wählen und damit Verstärkung von $L(j\omega)$ so weit anheben, dass sich eine gewünschte Bandbreite bzw. Durchtrittsfrequenz ω_c ergibt.
- Nachstellzeit T_n des Reglers möglichst klein wählen, also $1/T_n$ möglichst groß, aber nur soweit, dass die Phase in der Nähe der Durchtrittsfrequenz ω_c nicht zu sehr abgesenkt wird.
- Knickfrequenzen der Sensorik und des Stromstellgliedes $1/\tau_s$, $1/\tau_i$ sowie des realen Differenzierers $1/T_r$ müssen genügend weit oberhalb der angestrebten Durchtrittsfrequenz ω_c liegen. Alle drei Zeitkonstanten zusammen verursachen erhebliche Phasenabsenkung, selbst wenn sie nicht sehr dicht an ω_c liegen.

Genaue Reglerauslegung als Übungsaufgabe!

3.4 Magnetic Bearing with Permanent Magnets Magnetlager mit Permanentmagneten

As we learnt from equations (3.15) and (3.16), a bias magnetisation by a DC current I_0 is necessary in order to get a linearisation with non-zero current-to-force constant C.

However, the magnetisation bias can also be achieved by permanent magnets as the following consideration will show. Wie wir aus den Gleichungen (3.15) und (3.16) gesehen haben, ist eine Vormagnetisierung durch einen Gleichstrom I_0 notwendig, damit in der Linearisierung die Kraft-Strom-Konstante *C* nicht null wird.

Eine Vormagnetisierung kann alternativ aber auch durch Permanentmagnete errreicht werden, wie im Folgenden gezeigt wird.



Fig. 3-9: Magnetic bearing with permanent magnets / Magnetlager mit Permanentmagneten

A principal sketch is shown in the above figure. The upper yoke should be investigated first. In order to represent the permanent magnet in an equivalent magnetic circuit, we use the right-hand-side diagram of Fig. 2-17, augmented by the airgap reluctance and the MMF source $\theta_0 = N\Delta i$. The reluctance of the ferromagnetic core is neglected.

Das Prinzip ist im obigen Bild dargestellt. Zunächst soll nur das obere Joch untersucht werden. Um den Permanentmagneten in einem magnetischen Ersatzschaltbild wiederzugeben, bedienen wir uns der rechten Darstellung aus Fig. 2-17 und ergänzen die Luftspalt-Reluktanz und die Durchflutungsquelle $\theta_0 = N \Delta i$. Die Reluktanz des ferromagnetischen Kerns wird vernachlässigt.



Fig. 3-10: Magnetic ECD of the upper yoke / Magnetisches ESB des oberen Jochs

Now, the circuit comprises two seriesconnected MMF sources. The magnetic flux results as Fluss folgt zu

$$\phi = \frac{\theta_0 + \theta_c}{R_{PM} + R_L(x)} \tag{3.45}$$

with the reluctances

mit den Reluktanzen

$$R_L(x) = \frac{2(d_0 + x)}{\mu_0 A_L} \quad , \quad R_{PM} = \frac{l_{PM}}{\mu_0 A_{PM}} = \frac{l_{PM} A_L}{\mu_0 A_{PM} A_L} = \frac{l'_{PM}}{\mu_0 A_L} \quad . \tag{3.46}$$

In case of different cross sections areas of the permanent magnet and the airgap, it is advantageous to introduce a normalised magnet length l'_{PM} as it is done above.

Für den Fall unterschiedlicher Querschnittsflächen von Magnet und Luftspalt empfiehlt sich die Einführung einer normalisierten Magnetlänge l'_{PM} wie oben erfolgt.

According to (2.80), the co-energy of the Gemäß (2.80) ist die Koenergie des Systems system is

$$E_{c}(x) = \frac{1}{2} \left(R_{PM} + R_{L}(x) \right) \phi^{2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\theta_{0} + \theta_{c} \right)^{2}}{R_{PM} + R_{L}(x)} = \frac{\mu_{0} A_{L}}{2} \frac{\left(N \varDelta i + \theta_{c} \right)^{2}}{2(d_{0} + x) + l'_{PM}} = \frac{\mu_{0} A_{L}}{4} \frac{\left(N \varDelta i + \theta_{c} \right)^{2}}{d'_{0} + x}$$

$$(3.47)$$

mit

with

$$d'_{0} = d_{0} + \frac{1}{2}l'_{PM} = d_{0} + \frac{1}{2}l_{PM}\frac{A_{L}}{A_{PM}}$$
(3.48)

The resulting formula has got exactly the same form as (3.5) with the exception that θ_c takes over the role of bias magnetisation and that the magnet length contributes to the

Die resultierende Formel hat genau die gleiche Form wie (3.5), wobei jetzt θ_c die Rolle der Vormagnetisierung übernimmt und die Magnetlänge bei der gesamten Luftspalt-

total airgap length.

länge zu berücksichtigen ist.

For the System with upper and lower yokes, similar formulae result to those of Section 3.3 as

Für das System mit oberem und unterem Joch ergeben sich ähnliche Formeln zu denen des Abschnitts 3.3:

$$E_{c}(\Delta i, x) = \frac{\mu_{0}A_{L}}{4} \left[\frac{(\theta_{c} + N\Delta i)^{2}}{d_{0}' + x} + \frac{(\theta_{c} - N\Delta i)^{2}}{d_{0}' - x} \right]$$
(3.49)

$$F(\Delta i, x) = \frac{\partial E_c}{\partial x} = -\frac{\mu_0 A_L}{4} \left[\frac{(I_0 + N\Delta i)^2}{(d'_0 + x)^2} - \frac{(I_0 - N\Delta i)^2}{(d'_0 - x)^2} \right]$$
(3.50)

$$S_i(\varDelta i, x) = -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\mu_0 A_L}{2} \left[\frac{(\theta_c + N\varDelta i)^2}{(d'_0 + x)^3} + \frac{(\theta_c + N\varDelta i)^2}{(d'_0 - x)^3} \right]$$
(3.51)

That applies also for the linearisation around Das gilt ebenso für die Linearisierung um the operating point $\Delta i = 0$, x = 0: den Arbeitspunkt $\Delta i = 0$, x = 0:

mit

$$F(\Delta i, x) = \Delta i \frac{\partial F}{\partial \Delta i} \Big|_{\substack{\Delta i=0\\x=0}} + x \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\substack{\Delta i=0\\x=0}} = -C\Delta i - S_i x$$
(3.52)

with

$$C = \frac{A_L \mu_0 \theta_c}{d_0'^2} , \quad S_i = -\frac{A_L \mu_0 \theta_c^2}{d_0'^3}$$
(3.53)

The advantages of a permanent bias magnetisation over a bias current are obvious: There is no need of an electrical supply to feed the bias winding. Additionally, it turns out that a permanent magnet results in a much stronger magnetisation than it is possible with an electric winding of comparable geometric size. Die Vorteile einer Vormagnetisierung durch Permanentmagnete sind offensichtlich: Es wird keine elektrische Stromversorgung für die Vormagnetisierungs-Spule benötigt. Außerdem stellt sich heraus, dass mit einem Permanentmagneten eine viel stärkere Magnetisierung möglich ist als mit einer elektrischen Spule vergleichbarer geometrischer Größe.

3.5 Sensorik

Zur Messung des Abstandes kommen optische oder induktive Messverfahren in Betracht.

Induktive Messverfahren ermitteln über die Veränderung der Induktivität den Abstand. Zweckmäßigerweise ordnet man mehrere Sensoren in einer Brückenschaltung an, um Offsets zu kompensieren. Die Induktivität wird über die Aufschaltung einer Wechselspannung gemessen.

3.6 Stromrichter

Zur Speisung der Wicklungen können prinzipiell linear arbeitende Leistungsverstärker eingesetzt werden. Wegen der prinzipbedingt hohen Verluste linearer Verstärker werden vielmehr schaltend arbeitende Stromrichter eingesetzt. Da der Strom durch eine Wicklung sowohl positiv als auch negativ sein kann und sowohl positive als auch negative Spannungen zur schnellen Anregelung der Ströme benötigt werden, müssen alle 4 Quadranten des Strom-Spannungs-Bereichs vom Stromrichter beherrscht werden.



Fig. 3-11: Benötigter Strom-Spannungsbereich (alle 4 Quadranten)



Fig. 3-12: Prinzipdarstellung des benötigten Stromrichters mit idealen Schaltern (4-Quadranten-Steller)



Fig. 3-13: Stromrichter für Magnetlager (4-Quadranten-Steller)

| S_1 | S_2 | и |
|-------|-------|-----------|
| + | l | $+U_{dc}$ |
| _ | + | $-U_{dc}$ |
| _ | _ | 0 |
| + | + | 0 |

Fig. 3-14: Ausgangsspannung in Abhängigkeit des Schaltzustandes

3.7 Pulsweitenmodulation

Die Pulsweitenmodulation erlaubt es, vorgegebene kontinuierliche Werte

$$s^* \in \left[-1,1\right] \tag{3.54}$$

durch eine wertediskrete Zeitfunktion

$$s(t) \in \{-1; 1\}$$
 (3.55)

so "anzunähern", dass das zeitliche Mittel über einer Schaltperiode T_s gleich dem gewünschten kontinuierlichen Wert ist:

$$\bar{s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} s(t) dt = s^*$$
(3.56)

Das Prinzip zeigen die folgenden Bilder



Fig. 3-15: Realisierung der Pulsweitenmodulation durch Dreiecksmodulationsträger und Komparator



Fig. 3-16: Prinzip der Pulsweitenmodulation

Dieses Prinzip kann angewendet werden, um durch den 4-Quadranten-Steller im zeitlichen Mittel gewünschte wertekontinuierliche Spannungssollwerte zu realisieren. Der gewünschte Spannungssollwert u^* wird zunächst normiert,

$$s^* = \frac{u^*}{U_{dc}}$$
(3.57)

und der Pulsweitenmodulation zugeführt, wobei man vorteilhafterweise für die beiden Schalter des Stellers um 180° versetzte Modulationen einsetzt, weil sich dadurch die effektive Pulsfrequenz der Ausgangsspannung gegenüber der tatsächlichen der einzelnen Schalter verdoppelt als auch die Stufen der Ausgangsspannung halbieren (s. Bild).



Fig. 3-18: Realisierung der PWM für einen 4-Quadranten-Steller

Der 4-Quadranten-Steller ist eine spannungseinprägende Struktur. Für die Magnetlagerregelung wird jedoch eine Stromeinprägung benötigt, die durch eine unterlagerte Stromregelung realisiert wird.



Fig. 3-19: Strukturbild der Stromregelung für einen 4-Quadranten-Steller

Unter Vernachlässigung der pulsfrequenten Anteile in Spannung und Strom kann für eine regelungstechnische Modellbildung im Sinne einer zeitlich lokalen Mittelung

$$u(t) \approx u^*(t) \tag{3.58}$$

angenähert werden, so dass für den regelungstechnischen Entwurf von dem stark vereinfachten folgenden Strukturbild ausgegangen werden kann, in dem von der Pulsweitenmodulation abstrahiert wird⁶.



Fig. 3-20: Strukturbild der Stromregelung für einen 4-Quadranten-Steller

Die Übertragungsfunktion der Stromregelstrecke wird durch die Induktivität L_{Δ} bestimmt. Ggf. findet noch ein Innenwiderstand der Wicklung Berücksichtigung:

⁶ Die ausführliche Begründung für dieses Vorgehen liefert die Methode der *dynamischen Mittelwertmodellierung*, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

$$G_{pi}(s) = \frac{1}{sL_A + R_A} \tag{3.59}$$

Die Führungsübertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G_{i}(s) = \frac{G_{ci}(s)G_{pi}(s)}{1 + G_{ci}(s)G_{pi}(s)}$$
(3.60)

Als Regler könnte ein *PI*- aber auch ein einfacher *P*-Regler zum Einsatz kommen. Letzterer kann zwar keinen Regelfehler von Null garantieren, doch wird ein stationärer Regelfehler durch den integralen Anteil im überlagerten Lageregler ausgeglichen. Mit

$$G_{ci}(s) = K_i \tag{3.61}$$

folgt

$$G_i(s) = \frac{K_i}{K_i + R_\Delta + sL_\Delta} = \frac{V_i}{1 + s\tau_i}$$
(3.62)

mit

$$V_i = rac{1}{1 + R_{\Delta}/K_i}$$
, $au_i = rac{L_{\Delta}}{K_i + R_{\Delta}}$

Für kleinen Innenwiderstand bzw. hohe Reglerverstärkung resultiert das weiter oben angenommene Verzögerungsverhalten des Stromstellglieds.

3.8 Magnetlager mit Lagerung in zwei Freiheitsgraden

Die bisherige eindimensionale Anordnung mit einem Freiheitsgrad kann auch in zwei orthogonalen Raumrichtungen aufgebaut werden, um zwei Freiheitsgrade zu fixieren. Dazu bräuchte man insgesamt 4 Wicklungen, von denen jeweils zwei in Reihe geschaltet werden, sofern man eine magnetische Vorspannung mit Permanentmagneten vorsieht (s. Abschnitt **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**). Man würde demnach zwei Stromrichter für jeden Freiheitsgrad mit insgesamt 8 Transistoren und 8 Dioden benötigen.

Vorteilhaft sind jedoch Anordnungen mit 3 um 120° versetzt angeordneten Wicklungen, die im Stern oder Dreieck geschaltet werden. Der Stromrichteraufwand reduziert sich dadurch auf 6 Transistoren und 6 Dioden, die Zahl elektrischen Anschlüsse und ebenso die Zahl der Wicklungen von 4 auf 3



Fig. 3-21: Verschiedene Konstruktionen magnetischer Lager



Fig. 3-22: Stromrichter für Magnetlager mit drei Wicklungen Ausführung mit IGBT (oben) oder MOSFET (unten)

4 Geschalteter Reluktanz-Motor

4.1 Konstruktiver Aufbau



6/4-SRM

8/6-SRM

Fig. 4-1:

Der Geschaltete Reluktanz-Motor (Switched Reluctance Motor, SRM) zeichnet sich durch eine ausgeprägte Asymmetrie des Rotors aus. Diese führt zu einem stark positionsabhängigen magnetischen Widerstand (Reluktanz). Die Wicklungen des Ständers sind als konzentrierte Polwicklungen ausgeführt, von denen jeweils die gegenüberliegenden Spulen in Reihe oder parallel geschaltet werden. Je Strang findet man also zwei Ständerpole. Der Motor kann mit verschiedenen Zahlen von Ständer- und Rotorpolen ausgeführt werden. Gängige Kombinationen von Ständer- und Rotorpolzahlen sind 6/8, 8/6, 8/10. Aber auch einsträngige 2/2-Maschinen sind möglich.

Die Ströme der einzelnen Stränge werden in der Regel blockförmig und nacheinander angesteuert. Hierbei kommt es auf die Richtung des Stromflusses nicht an, was die erforderliche Stromrichtertopologie vereinfacht.

Das Prinzip des Geschaltete Reluktanz-Motors ist bereits seit 1838 bekannt. Aber erst in den letzten ein, zwei Jahrzehnten konnte sich dieses Motorprinzip breiter etablieren, denn die Ansteuerung und Regelung des Motors ist technisch etwas aufwändiger und konnte früher nicht – zumindest nicht wirtschaftlich vertretbar realisiert werden.

Der Geschaltete Reluktanz-Motor selbst ist kostengünstig zu fertigen. Die Polwicklungen können separat vorgefertigt und dann als fertig gewickelte Spulen über die Pole geschoben werden. Stator und Rotor sind konstruktiv sehr einfach und robust aufgebaut. Daher ist der Motor besonders auch für hohe Drehzahlen geeignet. Wirkungsgrad und Drehmomentausnutzung sind günstig.

Nachteilig sind die Geräusche des Motors, die durch die pulsenden axialen magnetischen Kräfte hervorgerufen werden. Die mechanische Konstruktion beeinflusst die Geräusche

maßgeblich. Der SRM ist für Positionierungsaufgaben mit Genauigkeiten unterhalb einer Polteilung und gleichmäßigen ruhigen Lauf bei kleinen Drehzahlen nicht prädestiniert; zumindest ist eine aufwändige Steuerung und Regelung notwendig, um dies zu beherrschen.

4.2 Funktionsprinzip



Fig. 4-2: Veranschaulichung des Funktionsprinzips eines Switched Reluctance Motors: Die Stränge des Motors werden sukzessive eingeschaltet



Fig. 4-3: Einsträngiger Motor (2/2-SRM)

Für die Untersuchung des Betriebsverhaltens wird zunächst nur ein einzelner Strang betrachtet. Für die Modellierung wird von einem einfachen magnetischen Kreis mit einem nichtlinearen magnetischen Element

$$\phi = \phi_{Fe}(\theta_{Fe})$$
 bzw. $\theta = \theta_{Fe}(\phi)$

und einer linearer Reluktanz des Luftspalts

$$\theta_L = R_L(\varepsilon)\phi \tag{4.1}$$

ausgegangen. Dieser magnetische Luftwiderstand ist von der Position ε abhängig. Für die ausgerichteten Positionen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \pi$ wird der magnetische Widerstand R_L minimal. Die magnetische Spannung der Wicklung ist $\theta_0 = Ni$, wobei N die Gesamtwindungszahl beider beteiligten Wicklungen ist.



Fig. 4-4: Einfaches Reluktanzmodell des einsträngigen SRM

$$Ni = \theta_0 = \theta_L + \theta_{Fe} = R_L(\varepsilon)\phi + \theta_{Fe}(\phi)$$
(4.2)

$$\psi = N\phi \tag{4.3}$$

Die Darstellung des Stroms in Abhängigkeit vom mehrfach verketteten Fluss $\psi = N\phi$ und Winkel ergibt

$$i = i(\psi, \varepsilon) = \frac{R_L(\varepsilon)}{N^2} \psi + \frac{1}{N} \theta_{Fe} \left(\frac{\psi}{N}\right)$$
(4.4)

Wir gehen davon aus, dass daraus durch Umkehrabbildung die Magnetisierungskennlinie

$$\psi = \psi(i, \varepsilon) \tag{4.5}$$

gefunden werden kann. Wie in Kapitel 2.2 entwickelt wurde, kann der Fluss bzw. das Drehmoment auch aus der Koenergie gewonnen werden:

$$\psi(i,\varepsilon) = \frac{\partial E_c}{\partial i}$$
, $T(i,\varepsilon) = \frac{\partial E_c}{\partial \varepsilon}$

Anhand der Magnetisierungskennlinie kann die Funktionsweise des SRM demonstiert werden. Zunächst sei angenommen, dass das Material keine Sättigung zeigt, so dass die Magnetisierungskennlinine eine Gerade ist, deren Steigung, also die Induktivität, von der Winkelposition abhängt.



Fig. 4-5: Zyklus der Energiewandlung des Geschalteten Reluktanz-Motors mit linearem magnetischem Material

Die Energiewandlung wird anhand eines idealisierten Zyklus betrachtet. Dabei werden insbesonders die Arbeitsdifferenziale

$$dW_{el} = id\psi \tag{4.6}$$

und

$$dW_{mech} = T \, d\varepsilon = \frac{\partial E_c}{\partial \varepsilon} \, d\varepsilon \tag{4.7}$$

untersucht, die als Flächen links und unter der Magnetisierungskurve interpretiert werden können (vgl. Abschnitt 2.2). Wir beginnen im

• Zustand 1:
$$i = 0$$
, $\varepsilon = \varepsilon_0$

Der Rotor befindet sich in einer nicht ausgerichteten Position $\varepsilon = \varepsilon_0$. Die Spule ist stromlos. Nun wird der Strom bis auf den Wert $i = i_0$ erhöht. Wir gehen im Gedankenexperiment davon aus, dass sich der Rotor während dieser Aufmagnetisierung nicht bewegt bzw. festgebremt ist. Wir gelangen dann in den

• Zustand 2: $i = i_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

Bis hierhin wurde die elektrische Arbeit

$$W_{el1,2} = \int_{1}^{2} i \, d\psi \tag{4.8}$$

verrichtet, die sich als Dreiecksfläche zwischen der Geraden 1-2 und der ψ -Achse interpretieren lässt. Bei Übergang zwischen Zustand 1 und 2 wurde keinerlei mechanische Arbeit geleistet.

Nun wird der Rotor freigegeben, so dass sich dieser in die ausgerichtete Position drehen kann. Dabei werde der Strom konstant gehalten:

• Zustand 3: $i = i_0$, $\varepsilon = 0$

Der Rotor hat sich unter den Statorpolen ausgerichtet. Bis hierhin wurde die elektrische Arbeit

$$W_{el\max} = W_{el1,3} = \int_{1}^{3} i \, d\psi \tag{4.9}$$

geleistet. Das ist die Fläche zwischen dem Kurvenzug 1-2-3 und der ψ -Achse. Während des Übergangs von der Position 2 in die Position 3 wird die mechanische Arbeit

$$W_{me} = \int_{1}^{3} \frac{\partial E_c}{\partial \varepsilon} d\varepsilon$$
(4.10)

geleistet. Das ist die vom Dreieck 1-2-3 gebildete Fläche, also die Änderung der Fläche unter der Magnetisierungskurve.

Im ausgerichteten Zustand wird der Rotor dann gedanklich wieder festgehalten und dann der Strom ausgeschaltet, so dass wir in den

• Zustand 4: i = 0, $\varepsilon = 0$

gelangen. Während dieser Entmagnetisierung wird die noch in der Spule befindliche innere Energie an die elektrische Einspeisung zurückgegeben:

$$W_{el\,ret} = -\int_{3}^{4} i\,d\psi \tag{4.11}$$

Das ist die Dreiecksfläche zwischen der Geraden 3-4 und der ψ -Achse.

Unter Vernachlässigung von ohmschen und Ummagnetisierungsverlusten gilt in der Gesamtbilanz

.

$$W_{me} = W_{el} = W_{el\,\text{max}} - W_{el\,\text{ret}} \tag{4.12}$$

Da aber von der elektrischen Einspeisung zunächst einmal der Spitzenwert $W_{el \max}$ aufgebracht werden muss, ist es gerechtfertigt, einen Leistungsfaktor ähnlich wie bei Wechsel- oder Drehstromsystemen zu definieren:

$$\gamma = \frac{W_{me}}{W_{el\,\text{max}}} = 1 - \frac{W_{el\,ret}}{W_{el\,\text{max}}} \tag{4.13}$$

Bei linearem Material kann dieser Leistungsfaktor prinzipiell nicht besser als 0,5 sein, wie aus der grafischen Darstellung sofort einsichtig wird:

$$\gamma < 0.5 \tag{4.14}$$

Ein modifizierter Arbeitszyklus wie 1, 2', 3, 4 verspräche zwar einen günstigeren Leistungsfaktor, dieser ist wegen der Überschreitung der Stromgrenze I_{max} nicht möglich. Durch Veränderung des Zyklus auf 1, 2, 3', 4 verbessert sich zwar der Leistungsfaktor, die Ausbeute gewandelter Arbeit je Zyklus unter Ausnutzung eines maximalen Stroms verschlechtert sich jedoch, so dass der Zyklaus 1, 2, 3, 4 tatsächlich die größte Ausnutzung ermöglicht. (Für Teillastbetrieb wäre der Zyklus 1, 2, 3', 4 aber eine mögliche Alternative.)

Der Leistungsfaktor verbessert sich allerdings bei Berücksichtigung der magnetischen Sättigung (s. Bild). Dann sind auch Werte $\gamma > 0.5$ möglich.



Fig. 4-6: Zyklus der Energiewandlung des Geschalteten Reluktanz-Motors mit Berücksichtigung der Eisensättigung

Natürlich soll ein solcher Motor nicht immer volle Leistung übertragen. Teillastbetrieb wird erreicht, indem man entweder die Stromhöhe i_0 und/oder die Ein- und Ausschaltwinkel variiert.



Fig. 4-7: Veränderung der gewandelten Energie bzw. des mittleren Drehmoments über die Stromamplitude oder über die Schaltwinkel

Gewöhnlich schwankt das Drehmoment des geschalteten Reluktanzmotor in einer Periode mehr oder minder stark. Für die Auswirkung auf die mechanische Last ist aber das über eine Periode τ_0 zeitlich gemittelte Drehmoment von Interesse. Eine Periode entspricht beim 2/2-SRM einer halben mechanischen Umdrehung von $180^\circ = \pi$.

$$\overline{T} = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} T(t) dt = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\pi} \frac{T(t)}{\omega(t)} d\varepsilon = \frac{1}{\tau_0 \omega} \int_0^{\pi} T(t) d\varepsilon = \frac{W_{me}}{\pi}$$
(4.15)

Bei dieser Umformung wurde die Winkelgeschwindigkeit aufgrund genügend großer Trägheit als konstant angenommen und vor das Integral gezogen, so dass sich $\tau_0 \omega = \pi$ ergibt. Das verbleibende Integral ist gerade die mechanische Arbeit einer Periode. Das mittlere Drehmoment \overline{T} eines Arbeitstakts ist also bis auf einen Faktor π gleich der mechanischen Arbeit. Man bemerke, dass auch die Maßeinheiten der Größen *Arbeit* und *Drehmoment* zueinander passen.

Bei einem Motor der Rotorpolpaarzahl N_r dreht sich der Rotor während einer vollen elektrischen Periode (alle Statorphasen N_s durchlaufen genau einen Arbeitstakt) dagegen nur um den Winkel $\Delta \varepsilon = \pi / N_r$. Außerdem leistet jeder der N_s Statorstränge bzw. -Polpaare die gleiche Arbeit W_{me} , also

$$\Delta \varepsilon T = N_s W_{me} \tag{4.16}$$

Hieraus bestimmt sich das mittlere Drehmoment eines $2N_s/2N_r$ -Motors also zu

$$\overline{T} = N_s N_r \frac{W_{me}}{\pi} \tag{4.17}$$

Drückt man die Drehfrequenz des Rotors durch die Kommutierungsfrequenz f_K (die Frequenz der Arbeitstakte) aus, erhält man für die mechanische Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\Delta \varepsilon}{N_s / f_T} = \frac{\pi f_K}{N_s N_r}$$
(4.18)

bzw. für die mittlere Leistung

$$\overline{P} = \omega \,\overline{T} = f_K W_{me} \tag{4.19}$$

4.3 Dynamisches Verhalten

Bislang wurde die Energiewandlung des Geschalteten Reluktanz-Motors unter Vernachlässigung der Dynamik betrachtet. Tatsächlich benötigen die Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen Zeit, während der sich der Motor weiterdreht.

Ausgangspunkt ist das Induktionsgesetz

$$\dot{\psi} = u - Ri \tag{4.20}$$

Mit

$$\psi = \psi(i,\varepsilon) \tag{4.21}$$

folgt für die Zeitableitung des Flusses

$$\dot{\psi} = \dot{i}\frac{\partial\psi}{\partial i} + \dot{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}$$
(4.22)

sowie für die Spannung

$$u = Ri + i\frac{\partial\psi}{\partial i} + \dot{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}.$$
(4.23)

Die Auflösung nach der Stromableitung liefert

$$\dot{i} = \frac{u - Ri - \omega \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial \psi}{\partial i}} = \frac{u - Ri - \omega \frac{\partial^2 E_c}{\partial \varepsilon \partial i}}{L(i,\varepsilon)} = \frac{u - Ri - \omega \frac{\partial T}{\partial i}}{L(i,\varepsilon)}, \qquad (4.24)$$

mit

$$\omega = \dot{\varepsilon} \tag{4.25}$$

und der differenziellen Induktivität

$$L(i,\varepsilon) = \frac{\partial \psi}{\partial i} = \frac{\partial^2 E_c}{\partial i^2}$$
(4.26)

Bei konstantem Strom i = I = const. ist die erforderliche Spannung

$$U_0 = RI + \omega \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = RI + \omega \frac{\partial^2 E_c}{\partial \varepsilon \partial i}$$
(4.27)

Im Folgenden wird vereinfachend lineares magnetisches Material mit einer dann konstanten Reluktanz R_{Fe} betrachtet. Die Induktivität ist unter dieser Annahme nicht mehr vom Strom, sondern nur noch vom Winkel abhängig:

.

$$L(\varepsilon) = \frac{N^2}{R_{Fe} + R_L(\varepsilon)}$$
(4.28)

Für den Fluss gilt

$$\psi = L(\varepsilon) i \tag{4.29}$$

Die innere und die Ko-Energie resultieren zu

$$E_i(\psi,\varepsilon) = \frac{\psi^2}{2L(\varepsilon)}, \qquad (4.30)$$

$$E_c(i,\varepsilon) = \frac{1}{2}L(\varepsilon)i^2.$$
(4.31)

Das Drehmoment ist

$$T = \frac{\partial E_c}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} L'(\varepsilon) i^2$$
(4.32)

wobei

$$L'(\varepsilon) = \frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon}.$$
(4.33)

Die Drehmomentbildung ist also maßgeblich auf die winkelabhängige Änderung der Induktivität angewiesen. Vom Vorzeichen des Stroms hängt das Drehmoment dagegen nicht ab. Um das Drehmoment umzukehren und die Maschine generatorisch zu betreiben, muss (bei weiterhin positiver Drehzahl) im Bereich fallender Induktivität gearbeitet werden. Das läuft im Wesentlichen auf den umgekehrten Durchlauf des skizzierten Arbeitszyklus hinaus.



Fig. 4-8: Idealisierte Verläufe der Induktivität und des Stroms über der Position (motorischer Betrieb)



Fig. 4-9: Idealisierte Verläufe der Induktivität und des Stroms über der Position (generatorischer Betrieb)

Anders als der im vorherigen Bild dargestellte idealisierte Stromverlauf lässt sich der Strom aber nicht momentan ein- und ausschalten, sondern er gehorcht der oben entwickelten Differenzialgleichung

$$\dot{i} = \frac{u - Ri - \omega L'(\varepsilon)i}{L(\varepsilon)}.$$
(4.34)

Für konstanten Strom ist die Spannung

$$U_0 = \left(R + \omega L'(\varepsilon)\right)I. \tag{4.35}$$

erforderlich. Diese Gleichungen erinnern an das Verhalten des Ankerkreises eines Gleichstrommotors. Auch dort haben wir einen ohmschen und einen induktiven Spannungsabfall sowie eine drehzahlabhängige EMK als Gegenspannung.

Abhängig von der Drehzahl sollen nun im Folgenden die zeitlichen Verläufe für den Arbeitszyklus qualitativ skizziert werden. Hierbei wird die speisende elektrische Energieversorgung als ideal steuerbare Quelle betrachtet, wobei allerdings eine Spannungsbegrenzung $-U_{\text{max}} < u(t) < U_{\text{max}}$ berücksichtigt werden soll.



Fig. 4-10: Verläufe bei kleiner Drehzahl

Bei kleiner Drehzahl wird der Strom bei kleinster Induktivität ein- und in der ausgerichteten Position wieder ausgeschaltet. Um den Strom möglichst schnell ein- und wieder auszuschalten, werden die maximal und minimal verfügbaren Spannungen verwendet. Der Stromanstieg ist steiler als der Abfall beim Ausschalten, weil in der ausgerichteten Position die Induktivität größer ist als beim Einschalten. Wird Anstieg und Abfall des Strom in den Bereichen mit näherungsweiser konstanter Induktivität bewerkstelligt, entspricht die gewandelte Energie dem aus der Idealisierung erwarteten Wert (s. linkes Teilbild).



Fig. 4-11: Verläufe bei mittlerer Drehzahl

Bei etwas größerer Drehzahl verringert die drehzahlabhängige Gegenspannung den Stromanstieg. Außerdem fällt dieser in der Darstellung über dem Drehwinkel zusätzlich flacher aus, weil der Winkelbereich schneller durchlaufen wird. Die Gegenspannung hilft allerdings bei der Entmagnetisierung. Aufgrund der stärker verschliffenen Stromform werden Ein- und Ausschaltwinkel zweckmäßigerweise gegenüber den geometrisch idealen Positionen vorgezogen, um das Drehmoment schnellstmöglich aufzubauen bzw. um den Strom zu Null zu bringen, bevor die Induktivität wieder kleiner wird und ein negatives Drehmoment erzeugt werden würde. Der zunehmende Verschliff des Stromverlaufs lässt das maximal erreichbare Drehmoment gegenüber dem idealisierten Verlauf spürbar abfallen.



Fig. 4-12: Verläufe bei hoher Drehzahl

Bei hoher Drehzahl müssen Ein- und Ausschaltwinkel weit vorgezogen werden. Die Gegenspannung ist nun so groß, dass der vorherige Stromscheitelwert trotz maximaler Spannungsaufschaltung nicht mehr erreicht wird. Die Drehmomentausbeute wird deutlich kleiner. In Näherung kann von einem umgekehrt zur Drehzahl abfallenden Drehmoment ausgegangen werden.



Fig. 4-13: Maximales Drehmoment und maximale Leistung in Abhängigkeit von der Drehzahl

4.4 Stromrichter

Das Drehmoment eines Geschalteten Reluktanz-Motors ist vom Vorzeichen des Stroms nicht abhängig. Der Stromrichter kann daher von vornherein auf nur eine Stromrichtung ausgelegt werden. Allerdings werden beide Spannungspolaritäten benötigt, da die Stränge durch negative Spannung schnell entmagnetisiert werden müssen. Der Stromrichter muss demnach ein 2-Quadranten-Steller sein.



Fig. 4-14: Benötigter Strom-Spannungs-Bereich für einen Strang eines SRM

Der benötigte Stromrichter kann aus dem 4-Quadranten-Steller (s. Abschnitt 3.6) abgeleitet werden, wobei alle für die gewählte Stromrichtung überflüssigen Transistoren und Dioden gestrichen werden. Dadurch entsteht der 2-Quadranten-Steller des folgenden Bildes, welcher auch als asymmetrische Halbbrücke bezeichnet wird.



Fig. 4-15: 2 Quadranten-Steller (Halbbrücke) als Stromrichter zur Speisung eines Strangs eines Geschalteten Reluktanz-Motors



Fig. 4-16: Stromrichter zur Speisung eines dreisträngigen Geschalteten Reluktanz-Motors

Die Wicklungen des Geschalteten Reluktanz-Motors müssen einzeln mit beiden Anschlüssen aus dem Motor herausgeführt werden und dürfen nicht wie bei Drehstrommotoren oder beim Magnetlager im Stern oder Dreieck geschaltet werden. Der Aufwand an Verbindungsleitungen ist daher höher als bei Drehstrommotoren. Der Stromrichter des dreisträngigen Geschalteten Reluktanz-Motors gleicht von der Zahl der notwendigen Transistoren und Dioden denen für Drehstrommotoren. Da die Stromrichtertopologie eine andere ist, können Standard-Module der Drehstromtechnik leider nicht verwendet werden können.

Die Spannung an einer Wicklung ergibt sich abhängig von den Zuständen der Transistoren nach folgender Tabelle. Bei den mit * gekennzeichneten Zuständen sind nur Dioden im Strompfad leitend. Daher resultieren die angegebenen Spannungen nur unter der Annahme, dass tatsächlich ein Strom fließt, also $i_k > 0$. Erlischt der Strom, wird die Spannung von der Last selbst bestimmt.

| T_{1k} | T_{2k} | u_k |
|----------|----------|-------------|
| aus | aus | $-u_{dc} *$ |
| aus | ein | 0 * |
| ein | aus | 0 * |
| ein | ein | $+u_{dc}$ |

Durch eine Pulsweitenmodulation oder durch direkte Strom-Schaltregelung werden die Transistoren geeignet getaktet. Die Pulsweitenmodulation kann direkt aus Abschnitt 3.7 übernommen werden.

5 Schrittmotoren

Schrittmotoren zeichnen sich dadurch aus, dass sie in aller Regel ohne Positionsgeber betrieben werden. Vielmehr soll durch eine geeignete elektrische Ansteuerung (häufig durch blockförmige Ströme) sichergestellt werden, dass sich der Motor um einen genau definierten Winkel weiterdreht bzw. bei linearen Motoren um eine Strecke weiterbewegt, so dass sich durch Mitzählen der elektrischen Impulse die Position ergibt.

Als Schrittmotoren können Geschaltete Reluktanz-Motoren oder bürstenlose, elektronisch kommutierte Permanent-Magnet-Motoren eingesetzt werden. Beide Arten von Motoren erzeugen im stromlosen Zustand jedoch kein oder nur ein geringes Haltedrehmoment bzw. eine Haltekraft. Nach dem Abschalten des Stroms kann sich daher der Motor bewegen. Seine Position ist beim nächsten Wiedereinschalten unbekannt. Für Anwenddungen, bei denen der Motor im ausgeschalteten Zustand seine Position nicht verändern soll, werden so genannte Hybrid-Motoren, die das Reluktanz-Prinzip mit Permanentmagneten kombinieren, eingesetzt.

Das Bild Fig. 5-1 zeigt als Beispiel einen linearen zweiphasigen Schrittmotor. Die einfachste Betriebsart ist die Einprägung blockförmiger Ströme, womit der Motor mit einer der Polteilung oder eines Bruchteils der Polteilung des passiven Teils entsprechenden Genauigkeit positioniert werden kann. Durch Überlappung der Ströme bzw. durch sinusförmige Speisung gelingt eine feinere oder sogar kontinuierliche Positionierung innerhalb einer Polteilung.



Fig. 5-1: Linearer hybrider Schrittmotor


Fig. 5-2: Hybrider Schrittmotor







6.1 Wirkprinzip





Kraftwirkung auf den stromdurchflossenen Leiter (Lorentzkraft):

$$F = i_L bl \tag{6.1}$$

l: Länge des Leiters

⁷ Die folgenden Seiten sind zum Teil lediglich eine Wiederholung des Stoffes aus den Grundlagen der Elektrotechnik B. Dieser Stoff ist Basis für weiterführende Betrachtungen und wird in diesem Skript nur der Vollständigkeit halber noch einmal wiedergegeben.



Fig. 6-3: Drehmoment auf Leiterschleife

Drehmoment (torque):

$$T_L = 2F\frac{d}{2} = Fd = i_L b d l \tag{6.2}$$

Induzierte Spannung in der Leiterschleife, entweder aus Induktionsgesetz:

$$u_L = \dot{\psi}_L = 2b\frac{d}{2}\omega l = b\,d\,l\,\omega \tag{6.3}$$

oder aus der Leistungsbilanz:

$$p_{el} = p_{mech} \tag{6.4}$$

$$u_L i_L = T_L \omega = i_L b d l \omega \tag{6.5}$$

$$u_L = b \, d \, l \, \omega \tag{6.6}$$

Der Term

$$\phi_0 = b \, d \, l \tag{6.7}$$

lässt sich als der magnetische Fluss deuten, der die Leiterschleife bei senkrechter Ausrichtung und bei homogener Flussdichte durchdringen würde. Hiermit:

$$u_L = \phi_0 \, \omega \tag{6.8}$$

$$T_L = \phi_0 \, i_L \tag{6.9}$$

6.2 Aufbau



Fig. 6-4: Schnittskizze eines Gleichstrommotors



Fig. 6-5: Gleichstrommotor mit zwei Polpaaren, p = 2

6.3 Kommutator und Ankerwicklungsschemata



Fig. 6-7: Wicklungsschema des Ankers Wellenwicklung , hier für p = 2, Zahl der parallelen Zweige 2a = 2

6.4 Kommutierung und Wendepolwicklung

Stichworte:

Kurzschluss der zu kommutierenden Leiterschleife durch den Kommutator.

Kurzgeschlossene Leiterschleife friert den Fluss ein:

$$\psi_L = u_L = 0 \implies \psi_L = const.$$
 (6.10)

Daher vor dem Kurzschluss dafür sorgen, dass Leiterschleife frei vom Fluss des Ankerfeldes wird -> Einführung der Wendepolwicklung -> dadurch natürliche Stromkommutierung

Magnetische Durchflutung der Wendepolwicklung muss derjenigen der Ankerstromwicklung entsprechen.



Fig. 6-8: Gleichstrommotor mit Erreger-, Anker-, Wendepol-, Kompound- und Kompensationswicklung

6.5 Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung

Stichworte:

Ankerfeld verursacht Feldverzerrung in den Erregerpolen. Bei linearem Material wäre dies kein Nachteil. Die einseitige magnetische Sättigung im Erregerpol führt jedoch zur Erhöhung des gesamten magnetischen Widerstands im Erregerkreis und somit zur Schwächung des Erregerflusses.

Gegenmaßnahmen

- Erhöhung der magnetischen Spannung im magnetischen Erregerkreis durch Kompoundwicklung, welche vom Ankerstrom durchflossen wird
- Einführung der Kompensationswicklung zur Kompensation der Ankerrückwirkung, ebenfalls vom Ankerstrom durchflossen.

6.6 Mathematische Modellierung

Bezeichnungen:

- T_L Drehmoment einer Leiterschleife
- *T* gesamtes Drehmoment des Ankers (Luftspaltdrehmoment)
- N_A Zahl der Anker-Leiterschleifen
- N_E Gesamtzahl aller Erregerwindungen
- 2*a* Zahl der parallelen Ankerstromzweige
- p Polpaarzahl
- α Polbedeckung, Verhältnis der aktiven Polflächen zur Ankeroberfläche
- ϕ_E Erregerfluss
- b_E Erregerflussdichte
- *l* aktive Länge des Ankers
- *d* Ankerdurchmesser
- δ Luftspalt
- A_{pol} Polfläche

Resultierendes auf den Anker wirkendes Drehmoment:

$$T = N_A T_L \alpha = N_A \phi_0 \alpha i_L = N_A b_E d l \alpha i_L$$
(6.11)

Ankerstrom i_A teilt sich auf 2a Zweige auf:

$$i_L = \frac{1}{2a} i_A \tag{6.12}$$

$$\phi_E = b_E A_{pol} = \frac{\pi \, d \, l \, \alpha}{2p} b_E \tag{6.13}$$

Damit:

$$T = \frac{p N_A}{a \pi} \phi_E i_A = c \phi_E i_A = \psi'_E i_A \tag{6.14}$$

wobei

$$c = \frac{p N_A}{a \pi}$$
, $\psi'_E = c \phi_E$

Die induzierte Spannung (elektromotorische Kraft, EMK) folgt wieder aus der Leistungsbilanz,

$$u_i = c \phi_E \,\omega = \psi'_E \,\omega, \tag{6.15}$$

oder alternativ durch Summation der induzierten Spannungen der in Reihe geschalteten Leiterschleifen.

Spannungsgleichung des Ankerkreises unter Berücksichtigung des Ankerwiderstands R_A , der Ankerinduktivität L_A und des Bürstenspannungsabfalls u_B :

$$u_{A} = u_{i} + L_{A} i_{A}^{*} + R_{A} i_{A} + 2u_{B}$$
(6.16)

Mit guter Genauigkeit kann der Bürstenspannungsabfall u_B also eine konstante, vom Ankerstrom unabhängige Spannung von etwa 1 V angesetzt werden.

Erregerstromkreis:

$$u_E = L_E i_E^{\&} + R_E i_E \tag{6.17}$$

Beachte: Im Allgemeinen sind zwischen zwei Wicklungen Gegeninduktivitäten zu berücksichtigen. Die Flüsse von Erreger- und Ankerwicklung sind aber durch die zueinander senkrechte Anordnung nicht miteinander verkettet, so dass die Gegeninduktivität zwischen diesen Wicklungen Null ist.

Magnetischer Kreis der Erregung:

Magnetische Leitfähigkeit des Erregerkreises

$$\Lambda_E = \frac{1}{R_{magE}} = \frac{\mu_0 A_{Pol}}{2\delta} = \frac{\mu_0}{2\delta} \frac{\alpha \pi dl}{2p} = \frac{\mu_0 \alpha \pi dl}{4p\delta}$$
(6.18)

Induktivität:

$$L_E = \Lambda_E \frac{N_E^2}{p^2} p = \Lambda_E \frac{N_E^2}{p}$$
(6.19)

Erregerfluss:

$$\phi_{E} = \Lambda_{E} \frac{N_{E}}{p} i_{E} = \frac{L_{E}}{N_{E}} i_{E} = \frac{\mu_{0} \,\alpha \,\pi \,d \,l \,N_{E}}{4 \,p^{2} \delta} i_{E}$$
(6.20)

$$\psi'_{E} = c \phi_{E} = \frac{cL_{E}}{N_{E}} i_{E} = L'_{E} i_{E} , \quad L'_{E} = \frac{cL_{E}}{N_{E}} = \frac{\mu_{0} \alpha d l N_{E} N_{A}}{4a p \delta}$$

Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen:

 $T = \psi'_E i_A$ $\psi'_E = L'_E i_E$

$$u_A = \psi'_E \,\omega + L_A \,\dot{i}_A + R_A \,\dot{i}_A + 2u_B \tag{6.21}$$

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E \tag{6.22}$$



Fig. 6-9: Ersatzschaltbilder des Anker- und des Erregerkreises

Dynamisches Verhalten

Das dynamische Verhalten des Anker- bzw. Erregerstroms entspricht dem einer *RL*-Gliedes. die maßgeblichen Anker- und Erregerzeitkonstanten sind

$$au_A = \frac{L_A}{R_A}$$
 und $au_E = \frac{L_E}{R_E}$

6.7 Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad

Elektrische Leistung (Verbraucherzählpfeilsystem):

$$p_{el} = p_{elA} + p_{elE} = u_A i_A + u_E i_E \tag{6.23}$$

Mechanische Leistung (Erzeugerzählpfeilsystem):

$$p_{mech} = \omega T \tag{6.24}$$

Energiebilanz:

$$p_{el} = \dot{w}_A + \dot{w}_E + p_V + p_{mech} \tag{6.25}$$

Verlustleistung:

$$P_V = P_{VA} + P_{VE} = R_E i_E^2 + R_A i_A^2$$
(6.26)

Innere Energien:

$$w_A = \frac{1}{2} L_A i_A^2$$
, $w_E = \frac{1}{2} L_E i_E^2$

Wirkungsgrad des Ankerkreises (Vernachlässigung der Erregerverluste) im stationären Zustand für den motorischen Betrieb:

$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{elA}} = \frac{\omega T}{U_A I_A} = \frac{\omega T}{\left(R_A I_A + \psi'_E \omega\right) I_A} = \frac{\omega T}{\left(R_A \frac{T}{\psi'_E} + \psi'_E \omega\right) \frac{T}{\psi'_E}} = \frac{\omega}{\omega + \frac{R_A}{\psi'_E^2} T} = \frac{1}{1 + \frac{R_A}{\psi'_E^2} \frac{T}{\omega}}$$
(6.27)

6.8 Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen

Man unterscheidet verschiedene Schaltungsarten:

- *Fremderregung*: Erreger- und Ankerkreis werden aus verschiedenen elektrischen Quellen gespeist
- Nebenschluss: Erreger- und Ankerkreis sind parallel geschaltet
- Reihenschluss: Erreger- und Ankerkreis sind in Reihe geschaltet

| Wicklung | Klemmen |
|--|---------|
| Ankerwicklung | A1, A2 |
| Wendepolwicklung | B1, B2 |
| Kompensationswicklung | C1, C2 |
| Erregerwicklung für Reihenschlussschaltung | D1, D2 |
| Erregerwicklung für Nebenschlussschaltung | E1, E2 |
| Erregerwicklung für Fremderregung | F1, F2 |



Fig. 6-10:

6.9 Fremderregter und permanent erregter Motor

Beim fremderregten Betrieb werden Erreger- und Ankerwicklung unabhängig voneinander gespeist. Typischerweise wird der Erregerstrom und damit der Erregerfluss konstant gehalten,

$$i_E = const. \implies \phi_E = const.$$
 bzw. $\psi'_E = const.$, (6.28)

Dies gelingt durch Aufschaltung einer konstanten Erregerspannung u_E allerdings nur unvollkommen, da sich der Strom aufgrund des temperaturabhängigen Widerstands R_E verändern kann. Ggf. wird eine Erregerstromregelung vorgesehen.

Beim permanent erregten Motor wird der Erregerfluss von einem Permanentmagneten erzeugt. Sein Verhalten gleicht dem des fremderregten Motors mit konstantem Erregerstrom.



Fig. 6-11: Fremderregter Gleichstrommotor

Stationäres Strom-Spannungs-Verhalten bei konstanter Drehzahl

$$U_A = \psi'_E \,\omega + R_A \,I_A \tag{6.29}$$



Fig. 6-12: Stationäre Kennlinien von Ankerstrom und -spannung

Stationäres Drehmoment-Drehzahl-Verhalten bei konstanter Spannung

Einsetzen der Drehmomentbeziehung in die Spannungsgleichung:

$$U_A = \frac{R_A}{\psi'_E} T + \omega \psi'_E \tag{6.30}$$

Auflösen nach ω ergibt das stationäre Drehmoment-Drehzahlverhalten für konstante Ankerspannung:

$$\omega = \frac{U_A}{\psi'_E} - \frac{R_A T}{\psi'_E^2} \tag{6.31}$$



Fig. 6-13: Stationäre Kennlinien von Drehmoment und Drehzahl bei konstanter Ankerspannung



Fig. 6-14: Losbrech-Drehmoment und Leerlaufdrehzahl bei konstanter Ankerspannung

Losbrech-Drehmoment und –Ankerstrom ($\omega = 0$):

$$I_{A0} = \frac{U_A}{R_A}, \quad T_0 = \frac{U_A \psi'_E}{R_A}$$

Leerlaufdrehzahl (T = 0 bzw. $I_A = 0$)

$$\omega_0 = \frac{U_A}{\psi'_E} \tag{6.32}$$

Wird der Gleichstrommotor mit konstanter Ankerspannung betrieben, entsteht beim Einschalten aus dem Stillstand heraus ein sehr großer Anlaufstrom, der ggf. den zulässigen Maximalwert überschreitet. Bei kleinen Motoren mit geringer Trägheit, die schnell beschleunigen, kann ein derartiger kurzzeitiger Überstrom ggf. hingenommen werden. Andernfalls muss der Anlaufstrom begrenzt werden. Die klassische Vorgehensweise arbeitet mit Anlaufwiderständen vorgenommen, die mit steigender Drehzahl dann überbrückt werden.



Fig. 6-15: Betrieb mit Vorwiderstand



Fig. 6-16: Anfahren mit Vorwiderständen

6.10 Nebenschlussmotor



Fig. 6-17: Nebenschlussschaltung

$$u_{A} = R_{A}i_{A} + \psi'_{E}\omega + L_{A}\dot{i}_{A} = R_{A}i_{A} + L'_{E}i_{E}\omega + L_{A}\dot{i}_{A}$$
(6.33)

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \tag{6.34}$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \tag{6.35}$$

Nebenschluss:

$$u=u_A=u_E \ , \quad i=i_A+i_E$$

Stationäres Verhalten:

$$I_E = \frac{U}{R_E} \tag{6.36}$$

$$I_{A} = \frac{U - L'_{E}I_{E}\omega}{R_{A}} = \frac{U - L'_{E}U/R_{E}\omega}{R_{A}} = \frac{1 - L'_{E}/R_{E}\omega}{R_{A}}U$$
(6.37)

$$I = I_E + I_A = \left[\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} - \frac{L'_E \omega}{R_A R_E}\right] U$$
(6.38)

$$T = L'_E I_E I_A = L'_E \frac{1 - L'_E / R_E \omega}{R_A R_E} U^2$$
(6.39)

6.11 Reihenschlussmotor

$$u_{A} = R_{A}i_{A} + \psi'_{E} \omega + L_{A}\dot{i}_{A} = R_{A}i_{A} + L'_{E}i_{E} \omega + L_{A}\dot{i}_{A}$$
(6.40)

$$u_E = R_E i_E + L_E i_E \tag{6.41}$$

$$T = \psi'_E i_A = L'_E i_E i_A \tag{6.42}$$



Fig. 6-18: Reihenschlussschaltung

Reihenschluss:

$$u = u_A + u_E , \quad i = i_A = i_E$$

$$R = R_A + R_E , \quad L = L_A + L_E$$

$$u = Ri + L'_E i \omega + L\dot{i}$$

$$u = (R + L'_E \omega)i + L\dot{i}$$

$$u = R'(\omega)i + L\dot{i}$$
(6.43)

Drehzahlabhängiger effektiver Widerstand:

$$R'(\omega) = R + L'_E \,\omega \tag{6.44}$$

$$T = \psi'_E i = L'_E i^2 \tag{6.45}$$

Quadratische Abhängigkeit des Drehmoments vom Strom, Änderung des Vorzeichens ist nur durch Wechsel der Verschaltung von Erreger- und Ankerwicklung möglich, $i = i_A = -i_E$.

Daher kann ein Reihenschlussmotor auch mit Wechselspannung gespeist werden. Sinusförmige Speisung mit der Frequenz ω_{el} , Schreibweise mit komplexen Effektivwertzeigern:

$$\underline{U} = R'(\omega) \,\underline{I} + j\omega_{el} L \underline{I} \tag{6.46}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R'(\omega) + j\omega_{el}L}$$
(6.47)

Das Drehmoment pulsiert mit $2\omega_{el}$. Drehmomentmittelwert:

$$\overline{T} = L'_E \overline{i^2} = L'_E I^2 = \frac{L'_E U^2}{R'^2(\omega) + \omega_{e'}^2 L^2}$$
(6.48)

Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik:

$$\left(R^{\prime 2}(\omega) + \omega_{el}^2 L^2\right)\overline{T} = L_E^{\prime} U^2$$
(6.49)

$$\left(\left(R + L'_E \omega\right)^2 + \omega_{el}^2 L^2\right) \overline{T} = L'_E U^2$$
(6.50)

Wird der Reihenschlussmotor mit konstanter Spannung betrieben und dabei mechanisch entlastet, $T \rightarrow 0$, wächst die Drehzahl über alle Grenzen, $\omega \rightarrow \infty$ (s. Bild).



Fig. 6-19: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Spannungen *U* bei Gleichspannungsspeisung



Fig. 6-20: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für GS-Speisung und verschiedene Frequenzen bei WS-Speisung, die Höhe der Spannungen *U* ist für alle Kurven konstant



Fig. 6-21: Strom-Spannungs-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Drehzahlen

Um gezielt einen bestimmten Betriebspunkt bezüglich Drehmoment und Drehzahl einstellen zu können, bedarf es veränderbarer Speisespannungen. Im Fall von Wechsel- oder Drehspannung kann eine steuerbare Thyristorbrücke zum Einsatz kommen. Steht eine Gleichspannung als Energieversorgung zur Verfügung, werden Gleichstromsteller eingesetzt. Die Art des Gleichstromstellers hängt von der gewünschten Betriebsart des Motors ab. Soll der Motor nur in einer Richtung motorisch betrieben werden, reicht ein einfacher Tiefsetzsteller aus. Sind beide Drehrichtungen und beide Drehmomentrichtungen (motorischer und generatorischer Betrieb) zu beherrschen, muss für die Ankerspeisung ein 4-Quadranten-Steller verwendet werden. Für den Erregerkreis ist jeweils ein einfacher Tiefsetzsteller ausreichend. Die Speisung mit linear arbeitenden Endstufen kommt wegen der hohen Verluste nicht in Betracht.



Fig. 6-22: Speisung des Ankerkreises durch einen Tiefsetzsteller



Fig. 6-23: Speisung des Ankerkreises durch einen 4-Quadranten-Steller

Bei einfachen Drehzahlregelungen wirkt der Drehzahlregler direkt auf die Ankerspannung. Es empfiehlt sich jedoch eine Vorsteuerung oder Kompensation der EMK, so dass sich, wie man im Bild des regelungstechnischen Modells sieht, die Wirkungswege der Rückführung der EMK im Streckenmodell und die EMK-Vorsteuerung des Reglers gegenseitig kompensieren, siehe Fig. 6-25. Man erhält damit eine Ersatz-Regelstrecke, die nur noch aus einem PT_1 -Glied und einem Integrierer besteht, Fig. 6-26. Für diese Struktur kann der Regler nach der Methode des Symmetrischen Optimums (Abschnitt 8.2) entworfen werden. Dort sieht man aber, dass die erreichbare Bandbreite des geschlossenen Regelkreises zwar in gewissem Rahmen verändert werden kann, dass diese in jedem Fall aber unterhalb der Knickfrequenz der Regelstrecke liegt. Die maßgebliche Strecken-Zeitkonstante ist aber hier die Ankerzeitkonstante $\tau_A = L_A / R_A$. Bei kleinen Zeitkonstanten oder geringen dynamischen Anforderungen an die Regelung kann dennoch diese Art der Regelung ausreichen. Bei höheren Anforderungen, insbesondere bei größeren Maschinen, bei denen typischerweise die Ankerzeitkonstante groß ist, stößt man aber schnell an die prinzipiellen Grenzen dieser Art der Regelung.



Fig. 6-24: Einschleifige Drehzahlregelung (ohne unterlagerte Ankerstromregelung)







Fig. 6-26: Einschleifige Drehzahlregelung: resultierendes regelungstechnisches Modell

Ein weiterer Nachteil der einschleifigen Drehzahl-Regelung ist, dass der Ankerstrom nicht direkt kontrolliert wird. Der Ankerstrom ist eine kritische Größe, da bei Überschreitung der zulässigen Werte Schäden durch Erhitzung aufgrund der Stromwärmeverluste entstehen können. Der Motor hat meist größere thermische Zeitkonstanten, so dass eine Überschreitung des zulässigen Nennstroms sogar um ein Vielfaches für eine gewisse Zeit (meist im Bereich einiger Sekunden) geduldet werden kann. Weit kritischer ist aber die speisende Leistungselektronik, die Überströme nur für sehr kurze Zeiten verträgt, da die thermischen Zeitkonstanten der inneren Halbleiter-Struktur äußerst kurz sind (ggf. nur einige Millisekunden). Aus diesem Grund wird häufig gar keine kurzzeitige Überschreitung des maximalen Stroms zugelassen. Eine Regelung, mit der keine definierte Beschränkung des Stromes möglich ist, ist daher kritisch.

Eine Kontrollmöglichkeit des Stromes bietet dagegen eine Regelungsstruktur mit unterlagerter Stromregelung, die außerdem von Regelungsdynamik deutliche Vorteile bietet.

Die Regelung wird nun kaskadiert aufgebaut. Der innere Stromregler hat die Aufgabe, den Strom auf den gewünschten Sollwert zu regeln, dessen Sollwert vom äußeren Drehzahlregler vorgegeben wird. Das Ankerstrom und Drehmoment zueinander proportional sind, kann man die innere Regelung auch als Drehmoment-Regelung interpretieren. Wie bei der einschleifigen Regelung empfiehlt sich auch hier eine EMK-Vorsteuerung, siehe Fig. 6-27, Fig. 6-28, Fig. 6-29.



Fig. 6-27: Drehzahlregelung mit unterlagerter Ankerstromregelung







Fig. 6-29: Vereinfachtes regelungstechnisches Modell

Beim Regelungsentwurf wird nun zunächst die innere Ankerstromregelung entworfen. Die Streckenzeitkonstante ist auch hier wieder die Ankerzeitkonstante, aber diese Teil-Regelstrecke enthält – anders als weiter oben beim einschleifigen Drehzahlregler – keinen Integrator. Ggf. könnte man in dieser Regelschleife noch eine weitere schnelle Zeitkonstante ergänzen, die Einflüsse der Reglerabtastung oder Messwandler-Zeitkonstanten berücksichtigt. Dies wäre nach den Bezeichnungen des Regelerentwurfs nach dem Betragsoptimums (Abschnitt 8.1) dann die schnelle Streckenzeitkonstante τ_{σ} . Die Ankerzeitkonstante τ_{A} spielt jetzt nur die Rolle der langsamen Streckenzeitkonstante τ_{σ} . Die erreichbare Reglerbandbreite orientiert sich nun an der kleinen Zeitkonstante τ_{σ} , während die Ankerzeitkonstante, zumindest für das Führungsverhalten, gar keine Rolle spielt. Die erreichbare Dynamik des Stromregelkreises ist damit um Größenordnungen besser als die Dynamik der einschleifigen Regelung.

Auch die Drehzahlregelung profitiert von der höheren Dynamik der Stromregelung, da auch diese jetzt weit dynamischer entworfen werden kann als bei der einschleifigen Struktur. Zu diesem Zweck wird der unterlagerte geschlossene Stromregelkreis $G_T(s)$ (siehe Fig. 6-29) durch ein Verzögerungsglied modelliert, dessen Zeitkonstante im Allgemeinen deutlich kleiner als die Ankerzeitkonstante sein wird. Der Drehzahlregler kann damit wieder mit Hilfe des Symmetrischen Optimums entworfen werden, jetzt aber mit weit besseren Kennwerten.

Die oben angesprochene Überwachung des Strommaximalwerts wird in dieser kaskadierten Struktur durch eine Begrenzung des Stromsollwerts, also des Ausgangs des Drehzahlreglers, ausgeführt wie in Fig. 6-27 gezeigt. Zwar kann es durch Regelfehler Abweichungen zwischen Strom-Ist- und -Sollwert geben. Ist aber der Stromregler sehr gut ausgelegt, werden diese Abweichungen gering sein, so dass durch die Begrenzung des Sollwerts (mit kleinen Sicherheitabschlägen) auch der Istwert den vorgegebenen Betriebsbereich einhalten wird.

Im Folgenden sind die Zusammenhänge im Regelkreis zusammengefasst:

Differenzialgleichung für den Ankerstrom und Drehzahl:

$$L_{A}\dot{i}_{A} = u_{A} - R_{A}i_{A} - u_{i} = u_{A} - R_{A}i_{A} - \omega\psi'_{E}$$
(6.51)

$$J\dot{\omega} = T - T_L \tag{6.52}$$

Laplace-Transformierte:

$$sL_A i_A = u_A(s) - R_A i_A(s) - u_i(s)$$
 (6.53)

$$sJ\omega(s) = T(s) - T_L(s) \tag{6.54}$$

Übertragungsfunktionen:

Übertragungsfunktion des elektrischen Teilsystems (Ankeradmittanz):

$$G_A(s) = Y_A(s) = \frac{i_A(s)}{u_A(s) - u_i(s)} = \frac{1}{R_A + sL_A}$$
(6.55)

Drehmoment-Führungsübertragungsfunktion

$$G_T(s) = \frac{T(s)}{T^*(s)} = \frac{G_{ci}(s)G_A(s)}{1 + G_{ci}(s)G_A(s)}$$
(6.56)

Übertragungsfunktion des mechanischen Teilsystems:

$$G_{me}(s) = \frac{\omega_A(s)}{T(s) - T_L(s)} = \frac{1}{sJ}$$
(6.57)

Drehzahl-Führungsübertragungsfunktion

$$G_{\omega}(s) = \frac{G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s)G_T(s)G_{me}(s)}$$
(6.58)

Störübertragungsfunktion

$$G_{T_{L}}(s) = \frac{G_{me}(s)}{1 + G_{co}(s)G_{T}(s)G_{me}(s)}$$
(6.59)

6.13 Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen

Die stationären Gleichungen für den fremderregten Motor lauten

$$u_A = R_A i_A(s) + \omega \psi'_E \tag{6.60}$$

$$T = \psi'_E i_A \tag{6.61}$$

Das Drehmoment ist (bei konstantem Erregerfluss) durch die Stromgrenze des Motors bzw. des speisenden Umrichters

$$|i_A| \leq I_{\max}$$

begrenzt,

$$T_{\max} = \psi'_E I_{\max}$$
, $T_{\min} = \psi'_E I_{\max}$.

Auch die vom speisenden Umrichter gelieferte Spannung ist begrenzt:

$$\left|u_{A}\right| \le U_{\max} \,. \tag{6.62}$$

Wird der Erregerfluss konstant gehalten (was beim Permanentmagnet-Gleichstrommotor ohnehin der Fall ist), erreicht die Spannung bei der Drehzahl

$$\omega_{1} = \frac{U_{\max} - R_{A} i_{A}}{\psi'_{E}} = \frac{U_{\max}}{\psi'_{E}} - \frac{R_{A}}{\psi'_{E}^{2}} T = \omega_{0} - \frac{R_{A}}{\psi'_{E}^{2}} T$$
(6.63)

ihre Begrenzung. Die Drehzahl kann darüber hinaus bei gleichbleibendem Fluss nicht weiter gesteigert werden. Die Drehzahl ω_0 ist die Leerlaufdrehzahl, die als ungefähre Abschätzung der Drehzahlgrenze dienen kann. Die exakte Grenzdrehzahl ω_1 hängt aber nicht nur vom Erregerfluss, sondern auch vom Ankerstrom bzw. vom Drehmoment ab. Bei Betrieb mit maximalen Strom $i_A = \pm I_{\text{max}}$ resultieren für den motorischen und generatorischen Fall die Grenzdrehzahlen

$$\omega_{1mot} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\psi'_E} , \quad \omega_{1gen} = \frac{U_{\max} + R_A I_{\max}}{\psi'_E}$$

Höhere Drehzahlen sind jedoch möglich, wenn der Erregerfluss verringert (geschwächt) wird. Der Fluss muss umgekehrt proportional zur Drehzahl reduziert werden,

$$\psi'_E = \frac{U_{\max} - R_A I_A}{\omega} \approx \frac{U_{\max}}{\omega}, \qquad (6.64)$$

um die Spannungsbegrenzung einzuhalten. Dazu bedarf es natürlich einer steuerbaren Erregerspeisung (bei permanent erregten Gleichstrommotoren ist das natürlich nicht möglich). Das verfügbare Drehmoment reduziert sich nun umkehrt proportional zur Drehzahl,

$$T_{\max} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega}$$
(6.65)

bzw. für generatorischen Betrieb

$$T_{\min} = \frac{U_{\max} + R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega}$$
(6.66)

Die verfügbare mechanische Leistung

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = (U_{\max} - R_A I_{\max}) I_{\max} \approx U_{\max} I_{\max}$$
(6.67)

konstant. Dieser Bereich wird *Flussschwächbereich* bzw. *Konstant-Leistungs-Bereich* genannt. Im unteren Drehzahlbereich $|\omega| < \omega_1$, wo die Ankerspannung nicht ihre Grenze erreicht, ist die verfügbare Leistung dagegen proportional zur Drehzahl

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = \omega \psi'_E I_{\max} \tag{6.68}$$

bzw.

$$P_{\min} = \omega T_{\min} = -\omega \psi'_E I_{\max} \,. \tag{6.69}$$

Dieser Bereich heißt Anker-Stellbereich oder Spannungs-Stellbereich bzw. Konstant-Drehmoment-Bereich. Der Flussschwächbereich wird häufig als dimensionsloses Verhältnis der Drehzahl ω_1 zur maximalen Drehzahl ω_{max} , welche in der Regel aus mechanischen Grenzen resultiert, angegeben.



Fig. 6-30: Verläufe von verfügbarem Drehmoment und verfügbarer Leistung über der Drehzahl

7 Elektronisch kommutierte Motoren

7.1 Funktionsprinzip

Elektronisch kommutierte Motoren gleichen in ihrem Funktionsprinzip konventionellen permanent erregten Gleichstrommotoren. Wie bei diesen gibt es einen Anker und eine Erregung mittels eines Permanentmagnets. Statt der mechanischen Kommutierung werden die Ankerwicklungen jedoch elektronisch umgeschaltet. Um die Zuführungen zum elektronischen Kommutator zu bewerkstelligen, wird beim elektronisch kommutierten Motor der Anker nicht drehend, sondern als der feststehende Teil des Motors (Stator) ausgeführt. Der Erreger, also die Permanentmagneten, werden im Läufer (Rotor) angeordnet. Das Konstruktionsprinzip mit innen liegendem Rotor ist zwar das das am weitesten verbreiteste, es gibt aber auch Ausführungen mit Außenläufer.

Je nach Hersteller werden elektronisch kommutierte Motoren als BLDC-Motoren (*brushless* DC oder deutsch *bürstenlos*) bzw. als EC-Motoren (*electronically commutated, elektronisch kommutiert*) bezeichnet.



Fig. 7-1: Gleichstrommotor mit rotierendem Erreger und stehendem Anker

Die Vorteile elektronisch kommutierter Motoren gegenüber mechanisch kommutierten sind Folgende:

•

- Durch den außenliegenden Anker kann dieser besser gekühlt werden als der innen liegende Anker des konventionellen Gleichstrommotors. Durch diese bessere Kühlung ist eine kompaktere Konstruktion möglich.
- Der mechanische Kommutator nimmt ca. 1/3 der Baulänge eines Gleichstrommotors in Anspruch. Ein elektronisch kommutierter Motor ist deshalb wesentlich kürzer.
- Der Verschleiß der Bürsten entfällt. Ein elektronisch kommutierter Motor ist praktisch wartungsfrei.

(Noch) stehen diesen Vorteilen allerdings die etwas höheren Kosten für die elektronische Kommutierung gegenüber, welche allerdings einige zusätzliche funktionelle Vorteile mit sich bringt.

Während man beim mechanisch kommutierten Motor eine Vielzahl von Ankerteilwicklungen und Kommutatorkontakten (häufig einige Zehn) vorfindet, findet man beim elektronisch kommutierten Motoren meist nur drei Ankerwicklungen vor, obwohl das Funktionsprinzip nicht auf diese Zahl beschränkt ist. Anders als bei klassischen Gleichstrommotoren werden diese Ankerwicklungen nicht ringförmig, sondern im Stern geschaltet.



Fig. 7-2: Prinzipbild des elektronisch kommutierten Motors

Jeder der Anschlüsse der Ankerwicklungen *a*, *b*, *c* kann über den Kommutator mit dem positiven oder dem negativen Potential der Speisespannung verbunden werden oder offen bleiben. Der Ankerstrom i_A durchfließt also immer zwei der drei Ankerwicklungen, die dritte bleibt stromlos. Mittels der Schaltfunktionen

$$s_a, s_b, s_c \in \{-1;0;+1\},\$$

wobei der Wert "0" die offene Schalterstellung repräsentieren möge, lassen sich die Zusammenhänge zwischen Ankerstrom bzw. -spannung und den Stranggrößen wie folgt darstellen:

$$i_{A} = \frac{1}{2} \sum_{k=a,b,c} s_{k} i_{k}$$
(7.1)

$$u_A = \sum_{k=a,b,c} s_k u_k \tag{7.2}$$



Fig. 7-3: Zur induzierten Spannung in einer einzelnen Ankerwindung ε : Stellungswinkel des Rotors gegenüber dem Stator α : Rotorfeste Koordinate zur Beschreibung des Rotorfeldes



Fig. 7-4: Zuordnung der Windungen zu den drei Wicklungen (Die Punkte und Kreuze sind hier nicht als tatsächliche Stromflussrichtung, sondern nur als Zählrichtungen zu verstehen)



Fig. 7-5: Konstruktion der induzierten Spannung einer Leiterschleife und einer Wicklung

 e_b

 e_{bc}

 e_a









Fig. 7-7: Ersatzschaltbild mit Ankerinduktivität und Ersatzspannungsquellen

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{bmatrix}$$
(7.3)

mit

7.3

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}$$
(7.4)

und der Induktivitätsmatrix

$$L = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix}$$
(7.5)

Die Hauptinduktivität M gibt die Flussverkettung zwischen zwei Wicklungen an, sie ist negativ: M < 0. Aufgrund der Symmetrie der dreiphasigen Wicklungen kann höchstens die Hälfte des magnetischen Flusses einer Wicklung mit einer der anderen beiden verkettet sein. Hierbei ist allerdings ein umgekehrtes Vorzeichen zu berücksichtigen. Für die Hauptinduktivität gilt demnach die Abschätzung

$$-M \le \frac{1}{2}L\tag{7.6}$$

Wird vom Kommutierungsvorgang abgesehen, ist immer einer der drei Ströme i_a, i_b, i_c Null. Also wird das dynamische Verhalten im verbleibenden Strompfad z.B. im Fall

$$i_c = 0, \quad i_A = i_a = -i_b, \quad u_A = u_a - u_b$$
 (7.7)

beschrieben durch

$$u_a = Ri_a + L\dot{i}_a + M\dot{i}_b + e_a \tag{7.8}$$

$$u_{b} = Ri_{b} + L\dot{i}_{b} + M\dot{i}_{a} + e_{b}$$
(7.9)

$$u_A = u_{ab} = u_a - u_b$$

= $2Ri_A + 2L\dot{i}_A - 2M\dot{i}_A + e_{ab}$
= $R_A\dot{i}_A + L_A\dot{i}_A + e_A$ (7.10)

Der wirksame Ankerwiderstand und die wirksame Ankerinduktivität resultieren also zu

$$R_A = 2R, \quad L_A = 2L - 2M$$

sowie die induzierte Spannung (die Erklärung von ψ_p ergibt sich aus dem Bild weiter oben) zu

$$e_A = 2\frac{2}{\pi}\psi_p\omega = \frac{4}{\pi}\psi_p\omega = \psi'_p\omega \qquad (7.11)$$



Fig. 7-8: Resultierendes Ersatzschaltbild für den Ankerkreis

Das Drehmoment kann über die Leistungsbilanz gewonnen werden (die mechanische Leistung ist gleich der an den Ersatz-Spannungsquellen e_a , e_b , e_c anfallenden elektrischen Leistung):

$$P_{me} = \omega_{me}T = \sum_{k=a,b,c} i_k e_k \tag{7.12}$$

Unter der Annahme, dass stets einer der drei Ströme gleich Null ist und die anderen beiden entgegengesetzt gleich sind (und den Ankerstrom i_A führen), folgt (*p* ist die Polpaarzahl)

$$\omega_{me}T = \frac{\omega}{p}T = 2i_A \frac{2\psi_p}{\pi}\omega$$
(7.13)

$$T = \frac{4}{\pi} p \psi_p i_A = p \psi'_p i_A \tag{7.14}$$

7.4 Stromrichter

Um den elektronisch kommutierten Motor mit variabler Spannung zu speisen, kann genauso wie beim mechanisch kommutierten Gleichstrommotor ein Tiefsetzsteller verwendet werden. Wie dort ist auch hier keine gesonderte Stellerdrossel notwendig, da die Ankerinduktivität bzw. die Induktivitäten der drei Stränge diese Aufgabe mit übernehmen. Ein Schaltbild des Tiefsetzstellers in Kombination mit dem elektronisch kommutierten Motor zeigt das nachfolgende Bild, was aber nicht als reale Schaltbild, sondern nur als Zwischenschritt begriffen werden möge. In dieser Konfiguration arbeitet der elektronische Kommutator genauso wie das mechanische Vorbild polend, d.h. während einer Periode wechselt dieser Schalter nur einmal die Polarität. Demgegenüber arbeitet der Tiefsetzsteller pulsend mit einer in der Regel weit höheren Schaltfrequenz.



Fig. 7-9: Speisung durch einen Tiefsetzsteller

Die Ausführung der beiden Funktionen (pulsender Tiefsetzsteller und polender Kommutator) müssen aber keineswegs durch verschiedene Schalter bewerkstelligt werden. Der bislang nur als polend betrachtete elektronische Kommutator kann die Funktion des Pulsens mit übernehmen, wie im nachfolgenden Bild dargestellt ist. In dieser Struktur ist es aber nicht mehr möglich, Ankerstrom i_A und Ankerspannung u_A genau an einer Stelle der Schaltung messtechnisch zu erfassen.


(polend und pulsend)

Fig. 7-10: Vereinigung der Funktionen Pulsen und Polen in einem dreisträngigen Steller



Fig. 7-11: Realisierung des dreisträngigen Stellers

7.5 Kommutierung

Für die Untersuchung der Kommutierung z. B. zwischen Strang a und b wird angenommen, dass der Strom im dritten unbeteiligten Strang, z. B. also im Strang c näherungsweise konstant bleibt.



Fig. 7-12: Ersatzschaltbild für die Kommutierung

Im Kommutierungskreis wirkt die effektive Kommutierungsinduktivität

$$L_K = 2L - 2M ,$$

die also gleich der effektiven Ankerinduktivität ist. Die ohmschen Widerstände werden bei der Kommutierung vernachlässigt. Während der Kommutierung sucht sich der zu kommutierende Strom bei bereits abgeschaltetem Transistor den Pfad durch die entsprechende Freilaufdiode, so dass als Kommutierungsspannung die negative Spannung des Gleichspannungskreises wirkt. Dies führt zu folgendem Ersatzschaltbild für den Kommutierungsvorgang:



Fig. 7-13: Vereinfachtes Ersatzschaltbild für den Kommutierungskreis

Die Anfangswerte zum Beginn der Kommutierung sind

$$i_a(t_{K1}) = i_A, \ i_b(t_{K1}) = 0$$

Nach abgeschlossener Kommutierung ist

$$i_a(t_{K2}) = 0$$
, $i_b(t_{K2}) = i_A$

Die Differenzialgleichung für den Kommutierungsvorgang lautet

$$L_{K}\dot{i}_{a} = -U_{dc} - e_{ab}$$
(7.15)

Für das dargestellte Beispiel sollte die Kommutierung um den Winkel $\varepsilon_K = -\pi/6$ stattfinden (s. obige Zeitverläufe). Zu diesem Zeitpunkt (und in Näherung in der Umgebung) ist aber die induzierte Spannung $e_{ab} = 0$, so dass nur die äußere Spannung U_{dc} für die Kommutierung maßgeblich ist. Es resultiert die Kommutierungszeit

$$T_{K} = t_{K2} - t_{K1} = \frac{i_{a}(t_{K1})L_{K}}{U_{dc}} = \frac{i_{A}L_{K}}{U_{dc}}$$
(7.16)

Für eine genauere Betrachtung wird der zeitliche Verlauf von e_{ab} im Kommutierungsintervall berücksichtigt:

$$i_{A} = i_{a}(t_{K2}) - i_{a}(t_{K1}) = \int_{t_{K1}}^{t_{K2}} i_{a}(t) dt = -\frac{U_{dc}T_{K}}{L_{K}} - \frac{1}{L_{K}} \int_{t_{K1}}^{t_{K2}} e_{ab}(t) dt$$
(7.17)

Obwohl $e_{ab}(t)$ nicht als Null vorausgesetzt wird, fällt das Integral über $e_{ab}(t)$ weg, sofern der Kommutierungsvorgang genau symmetrisch um den Winkel ε_K ausgelöst wird. Die Zeitverläufe der Ströme ändern sich zwar durch Berücksichtigung von $e_{ab}(t)$, nicht aber die Kommutierungszeit.

Der letzte Term ist aber gerade Null, so dass sich zwar der Verlauf der Ströme während der Kommutierung verändert, nicht aber die Kommutierungszeit. Dies setzt aber einen entsprechenden Winkelvorhalt voraus. Die Kommutierung muss zum Winkel

$$\varepsilon_{K1} = \varepsilon_K - \varDelta \varepsilon_K \tag{7.18}$$

ausgelöst werden, damit sie symmetrisch zum Winkel ε_K abläuft und zum Winkel

$$\varepsilon_{K2} = \varepsilon_K + \Delta \varepsilon_K \tag{7.19}$$

abgeschlossen ist. Dieser Winkelvorhalt berechnet sich zu

$$\Delta \varepsilon_{\kappa} = \frac{T_{\kappa}}{2} \omega = \frac{i_{A} L_{\kappa} \omega}{2 U_{dc}}$$
(7.20)

Ein größerer Winkelvorhalt als dieser Wert kann dazu dienen, sich die induzierte Spannung zur Unterstützung der Kommutierung zu Nutze zu machen, so dass sich die Kommutierungszeit sogar verkürzt. Dies kann bei großen Drehzahlen sinnvoll sein, wenn es gilt, die Kommutierung während eines nicht zu großen Winkelintervalls durchzuführen. Eine verzögert ausglöste Kommutierung verlängert die Kommutierungszeit und wirkt sich insbesondere bei hohen Drehzahlen ungünstig aus.



Fig. 7-14: Zeitverläufe bei der Kommutierung (Normalbetrieb)

Anders als beim mechanisch kommutierten Gleichstrommotor, bei dem der zu kommutierende Strom nur über Kommutatorkontakte und Bürsten fließt, aber an den äußeren Ankerklemmen nicht sichtbar ist, fließt beim elektronisch kommutierten Motor dieser Strom über den speisenden DC-Kreis.

7.6 Regelung



Fig. 7-15: Drehzahlregelung mit unterlagerter Stromregelung und PWM



Fig. 7-16: Drehzahlregelung mit unterlagerter Strom-Schaltregelung

Die Bildung des Ankerstroms i_A kann abhängig vom Stellungswinkel ε durch vorzeichengerechte Auswahl des passenden Strangstroms i_a , i_b , i_c nach folgender Tabelle vorgenommen werden.

| ε | s _a | s _b | s _c | $i_A =$ |
|---------------------------------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| $-30^\circ < \varepsilon < 30^\circ$ | 0 | +1 | -1 | $i_b = -i_c$ |
| $30^\circ < \varepsilon < 90^\circ$ | -1 | +1 | 0 | $i_b = -i_a$ |
| $90^\circ < \varepsilon < 150^\circ$ | -1 | 0 | +1 | $i_c = -i_a$ |
| $150^\circ < \varepsilon < 210^\circ$ | 0 | -1 | +1 | $i_c = -i_b$ |
| $210^\circ < \varepsilon < 270^\circ$ | +1 | -1 | 0 | $i_a = -i_b$ |
| $270^\circ < \varepsilon < 330^\circ$ | +1 | 0 | -1 | $i_a = -i_c$ |

Tabelle für die Kommutatorschalterstellungen und für den maßgeblichen Ankerstrom

Wird eine Rückspeisung ausgeschlossen, ist also der Ankerstrom stets positiv, kann der Ankerstrom unabhängig von der Winkelstellung über die Beziehung

$$i_A = \frac{1}{2} \sum_{k=a,b,c} \left| i_k \right|$$

bestimmt werden, was recht einfach zu realisieren ist.



Fig. 7-17: Vereinfachte Drehzahlregelung ohne unterlagerte Stromregelung und EMK-Vorsteuerung

8 Entwurf von Strom- und Drehzahlregelung

In verschiedenen Zusammenhängen wie beim Magnetlager, beim Geschalteten Reluktanzmotor, beim Gleichstrommotor, auch bei seiner elektronisch kommutierten Variante, sind unterlagerte Stromregelungen zu entwerfen, die alle eine sehr ähnliche Struktur besitzen, und jeweils nach Standardverfahren entworfen werden können. Ähnliches trifft auf die Drehzahlregelung zu.

Bei einer Stromregelung gehen wir beispielsweise von einer Streckenübertragungsfunktion (der Admittanz) eines *RL*-Gliedes aus:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = G_s(s) = \frac{1}{R+sL} = \frac{1}{R} \frac{1}{1+s\tau_s}$$
(8.1)

Fig. 8-1: Betrachteter Standardregelkreis mit Regelgröße y, Führungsgröße w und Störgröße d

Von weiteren Einflüssen wie der EMK soll hier abgesehen werden. Wir nehmen an, dass diese z. B. zuvor durch eine entsprechende Vorsteuerung im Regler kompensiert wird (im regelungstechnischen Sinn handelt es sich um eine Störgrößenkompensation).

Zusätzlich zum Verhalten des *RL*-Gliedes soll noch eine weitere Zeitkonstante τ_{σ} berücksichtigt werden, die z. B. durch Sensoren oder durch eine Verzögerung des Spannungsstellgliedes verusacht wird. Allgemein soll daher von einer Streckenübertragungsfunktion der Form

$$G_s(s) = V_s \frac{1}{1 + s\tau_s} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma}$$
(8.2)

ausgegangen werden. Hierbei nehmen wir

$$\tau_s > \tau_\sigma \tag{8.3}$$

an. Der Regler wird nun als *PI*-Glied mit der Nachstellzeit T_n und der Verstärkung V_c angesetzt:



$$G_c(s) = V_c \frac{1 + sT_n}{sT_n}$$
(8.4)

Damit ergibt sich die Kreisverstärkung⁸

$$L(s) = G_s(s)G_c(s) = V_s V_c \frac{1}{1 + s\tau_s} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma} \frac{1 + sT_n}{sT_n}$$
(8.5)

8.1 Reglerentwurf durch Pol-Nullstellen-Kürzung (Betragsoptimum)

Wird die Reglernachstellzeit gleich der Streckenzeitkonstanten gewählt,

$$T_n = \tau_s \tag{8.6}$$

kürzt sich in der Kreisverstärkung der betreffende Pol mit der Reglernullstelle und es resultiert

$$L(s) = V_s V_c \frac{1}{sT_n} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma}$$

$$\tag{8.7}$$

Durch Übergang auf die normierte Verstärkung

$$\gamma = \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_s} V_s V_c = \tilde{V}_s V_c \tag{8.8}$$

ergibt sich die Darstellung

$$L(s) = \gamma \frac{1}{s\tau_{\sigma}} \frac{1}{1 + s\tau_{\sigma}}$$
(8.9)

⁸ Obwohl für die Kreisverstärkung der gleiche Buchstabe verwendet wie für die Induktivität, besteht im Folgenden keine Verwechselungsgefahr, da von Induktivitäten im weiterem kein Gebrauch gemacht wird.





Fig. 8-2: Frequenzgänge bei Auslegung nach dem Betragsoptimum in doppelt-logarithmischer Darstellung



Fig. 8-3: Frequenzgang der Kreisübertragungsfunktion *L* über der normierten Frequenz $\Omega = \omega \tau_{\sigma}$ für verschiedene Werte von γ verschiebt sich lediglich der Amplitudengang

,

Die Führungsübertragungsfunktion erhält man zu

$$T_{w}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\gamma}{s\tau_{\sigma}(1 + s\tau_{\sigma}) + \gamma} = \frac{1}{1 + s\frac{\tau_{\sigma}}{\gamma} + s^{2}\frac{\tau_{\sigma}^{2}}{\gamma}}$$
(8.10)

Der Vergleich mit der Standardform eines PT₂-Gliedes,

$$T_{w}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{\tau_{\sigma}}{\gamma} + s\frac{\tau_{\sigma}^{2}}{\gamma}} = \frac{1}{1 + 2d\frac{s}{\omega_{0}} + \frac{s^{2}}{\omega_{0}^{2}}}$$
(8.11)

liefert

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\gamma}}{\tau_\sigma} \tag{8.12}$$

$$d = \frac{1}{2\tau_{\sigma}\omega_0} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \tag{8.13}$$

Vorteilhafterweise bezieht man die Frequenz auf die Zeitkonstante τ_{σ} , also

$$\Omega_0 = \omega_0 \tau_\sigma = \sqrt{\gamma} . \tag{8.14}$$

Der noch freie Verstärkungsparameter γ beinflusst also die Dämpfung d, aber auch die Kennkreisfrequenz ω_0 bzw. Ω_0 des Führungsverhaltens. Man sieht aber, dass der Regelungsentwurf die Kennkreisfrequenz in jedem Fall im Bereich von $1/\tau_{\sigma}$ platziert, was bedeutet, dass die mögliche Dynamik des Systems, die ja durch die Zeitkonstante τ_{σ} begrenzt wird, sehr weit ausgeschöpft wird.

Die resultierenden Frequenzgänge der Führungsübertragungsfunktion sind im folgenden Bild dargestellt. Wie man gut erkennt, gewinnt man eine höhere Bandbreite auf Kosten der Dämpfung bzw. der Resonanzüberhöhung bzw. des Überschwingens im Zeitbereich. Typische Dämpfungswerte wählt man zwischen $1/\sqrt{2}$ und 1, je nachdem, welches Überschwingen man zulassen möchte. Die Wahl

$$\gamma = \frac{1}{2}$$
 bzw. $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

wird als *Betragsoptimum*⁹ bezeichnet.

Die *Bandbreite* des Führungsverhaltens (-3 dB-Grenzfrequenz) lässt sich analytisch bestimmen. Zweckmäßigerweise bezieht man die Frequenz wieder auf die Zeitkonstante τ_{σ} :

$$T_w(j\Omega) = \frac{\gamma}{\gamma + j\Omega - \Omega^2}$$
(8.15)

$$\left|T_{w}(j\Omega_{b})\right|^{2} = \frac{1}{2} \tag{8.16}$$

$$2\gamma^{2} = \left|\gamma + j\Omega_{b} - \Omega_{b}^{2}\right|^{2} = \left(\gamma - \Omega_{b}^{2}\right)^{2} + \Omega_{b}^{2} = \gamma^{2} - 2\gamma\Omega_{b}^{2} + \Omega_{b}^{4} + \Omega_{b}^{2}$$
(8.17)

$$(1 - 2\gamma)\Omega_b^2 + \Omega_b^4 - \gamma^2 = 0$$
(8.18)

$$\Omega_{b}^{2} = \gamma - \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\gamma - \frac{1}{2}\right]^{2} + \gamma^{2}}$$
(8.19)

⁹ Zum Hintergrund und zur Motivation der Namengebung sei auf die ausführliche Literatur verwiesen, siehe z. B. Lutz, Wendt: Taschenbuch der Regelungstechnik.

$$\Omega_b = \sqrt{\gamma - \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\gamma - \frac{1}{2}\right]^2 + \gamma^2}}$$
(8.20)

Für die Standardauslegung $\gamma = 1/2$ ergibt sich beispielsweise die Bandbreite $\Omega_b = 1/\sqrt{2}$.



Fig. 8-4: Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion T_w über der normierten Frequenz $\Omega = \omega \tau_\sigma$ für verschiedene Werte von γ ,



Fig. 8-5: Antwort der Regelgröße y(t) auf einen Sollwertsprung $w(t) = \sigma(t)$ (Folgeverhalten)

Das Betragsoptimum ist ein relativ einfaches Entwurfsverfahren, welches Regler mit guter Führungsdynamik liefert. Zu beachten ist aber auch das Störverhalten. Die Übertragungsfunktion von einer Störung am Streckeneingang d zur Regelgröße ist y

$$T_d(s) = \frac{G_s(s)}{1 + L(s)} = V_s \frac{s\tau_\sigma}{\left(s\tau_\sigma(1 + s\tau_\sigma) + \gamma\right)\left(1 + s\tau_s\right)} = \widetilde{V_s} \frac{s\tau_s}{\left(s\tau_\sigma(1 + s\tau_\sigma) + \gamma\right)\left(1 + s\tau_s\right)}$$
(8.21)

bzw. mit der bezogenen Frequenz ausgedrückt:

$$T_d(j\Omega) = V_s \frac{j\Omega}{\left(-\Omega^2 + j\Omega + \gamma\right) \left(1 + j\Omega\tau_s / \tau_\sigma\right)}$$
(8.22)

Wie man sieht, tritt die im Führungsverhalten gekürzte Polstelle $s = -1/\tau_s$ im Störverhalten weiterhin auf. Insbesondere, wenn τ_s groß gegenüber τ_{σ} ist, bedeutet das, dass ggf. vorhandene Störungen nur langsam ausgeregelt werden. Wie das Bild der Störgrößensprungantwort zeigt, wird selbst bei großer Reglerverstärkung der Regelfehler erst durch ein langsames kriechendes Verhalten ausgeregelt. Im Stromregelkreis eines Gleichstrommotors kann beispielsweise eine solche Störung auftreten, wenn die EMK durch die Vorsteuerung nicht oder nicht exakt kompensiert wird (vgl. Abschnitt 6.12). Beim Betrieb mit konstanter oder langsam veränderlicher Drehzahl ist eine solche langsame Störausregelung hinnehmbar. Werden aber sehr schnelle Drehzahländerungen ausgeführt, so dass sich auch die EMK als Störgröße sehr schnell ändert, sollte eine schnelle Störausregelung angestrebt werden. Das ist mit dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Symmetrischen Optimum besser möglich.



Fig. 8-6: Frequenzgang der Störübertragungsfunktion T_d über der normierten Frequenz $\Omega = \omega \tau_{\sigma}$ mit $\tilde{V}_s = 1$, $\tau_s / \tau_{\sigma} = 10$



Fig. 8-7: Antwort der Regelgröße y(t) auf einen Störgrößensprung $d(t) = \sigma(t)$ mit $\tilde{V}_s = 1$, $\tau_s / \tau_\sigma = 10$

Die Amplitudendurchtrittsfrequenz Ω_c der Kreisverstärkung lässt sich im Übrigen analytisch bestimmen:

$$1 = \left| L(j\Omega_c) \right|^2 = \gamma^2 \frac{1}{\Omega_c^2} \frac{1}{1 + \Omega_c^2}$$
(8.23)

$$\Omega_{c}^{2} (1 + \Omega_{c}^{2}) = \gamma^{2}$$

$$\Omega_{c}^{4} + \Omega_{c}^{2} - \gamma^{2} = 0$$

$$\Omega_{c}^{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^{2}}$$
(8.24)

$$\Omega_{c} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^{2}} - \frac{1}{2}}$$
(8.25)

Das vorangegangene Verfahren legt die Reglernachstellzeit so fest, dass eine Pol-Nullstellen-Kürzung auftritt, mit der ein günstiges Führungsverhalten resultiert. Das Störverhalten wird beim Entwurf nicht beachtet. Soll ein besseres Störverhalten erreicht werden, muss man – unter Beibehaltung des *PI*-Reglertyps – die Reglernachstellzeit anders festlegen. Von der Tendenz her muss diese verringert werden, damit der integrale Anteil schneller reagiert. Besonders einfach gestaltet sich der hier dargestellte Reglerentwurf, wenn man annimmt, dass die langsame Streckenzeitkonstante τ_s der Strecke sehr viel größer als die schnelle Zeitkonstante τ_{σ} und auch größer als die einzustellende Reglernachstellzeit T_n ist: $\tau_s >> \tau_{\sigma}$, T_n . In diesem Fall lässt sich diese Zeitkonstante gänzlich vernachlässigen und das betreffende T_1 -Glied durch einen Integrator approximieren:

$$G_s(s) = V_s \frac{1}{1 + s\tau_s} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma} \approx V_s \frac{1}{s\tau_s} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma} = V_s \frac{\tau_\sigma}{\tau_s} \frac{1}{s\tau_\sigma} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma} = \widetilde{V}_s \frac{1}{s\tau_\sigma(1 + s\tau_\sigma)}$$
(8.26)

Bei der Drehzahlregelung enthält die Regelstrecke ohnehin von vornherein einen Integrierer. Die Kreisübertragungsfunktion lautet nun

$$L(s) = G_c(s)G_s(s) = \widetilde{V}_s V_c \frac{1+sT_n}{sT_n} \frac{1}{s\tau_\sigma} \frac{1}{1+s\tau_\sigma} = \widetilde{V}_s V_c \frac{1}{s^2 T_n \tau_\sigma} \frac{1+sT_n}{1+s\tau_\sigma}$$
(8.27)

Der Regelungsentwurf kann sehr gut mit genäherten Amplitudengängen skizziert werden. Für kleine Frequenzen fällt der Amplitudengang der Kreisverstärkung zunächst mit -40 dB/Dekade. Die Phasendrehung ist dementsprechend etwa -180°. Durch die Knickfrequenz $1/T_n$ wird die Phase angehoben (Nullstelle), durch die folgende Knickfrequenz $1/\tau_{\sigma}$ (Polstelle) aber wieder abgesenkt. Der größte Phasenwinkel wird (bei logarithmischer Achsenskalierung) daher genau zwischen den beiden Knickfrequenzen erreicht. Den größten Phasenrand erhält man also, wenn die Verstärkung so gewählt wird, dass die Amplitudendurchtrittsfrequenz genau an dieser Stelle ω_c platziert wird. Sei also

$$\frac{T_n}{\tau_\sigma} = a^2 \tag{8.28}$$

das Verhältnis von Nachstellzeit und schneller Streckenzeitkonstante, so soll die Amplitudendurchtrittsfrequenz bei

$$\omega_c = \frac{1}{a\tau_\sigma} = \frac{a}{T_n} \tag{8.29}$$

zu liegen kommen. Das Verhältnis *a* lässt sich also durch zwei verschiedne Frequenzverhältnisse interpretieren (vgl. Bild):

$$a = \frac{\omega_c}{1/T_n} = \frac{1/\tau_\sigma}{\omega_c}$$
(8.30)

In Anlehnung an Begriffe der Geometrie wird *a* deshalb als Doppelverhältnis bezeichnet. Bei einer logarithmischen Skalierung der Frequenzachse im Bodediagramm sind also die geometrischen Abstände der Knickfrequenzen $1/\tau_{\sigma}$ und $1/T_n$ von der Durchtrittsfrequenz ω_c genau gleich.

Bei der Durchtrittsfrequenz muss der Betrag der Kreisverstärkung 1 sein,

$$\left|L(j\omega_c)\right| = 1,\tag{8.31}$$

was zur Festlegung der Reglerverstärkung führt:

$$1 = \left| \tilde{V}_{s} V_{c} \frac{1}{-\omega_{c}^{2} T_{n} \tau_{\sigma}} \frac{1 + j\omega_{c} T_{n}}{1 + j\omega_{c} \tau_{\sigma}} \right| = \tilde{V}_{s} V_{c} \left| \frac{1 + ja}{1 + j/a} \right| = \tilde{V}_{s} V_{c} \ a \left| \frac{1 + ja}{a + j} \right| = \tilde{V}_{s} V_{c} \ a$$

$$\tilde{V}_{s} V_{c} = \frac{1}{a} \quad \text{bzw.} \quad V_{c} = \frac{1}{a \tilde{V}_{s}}$$
(8.32)

Damit resultieren Kreis- und Führungsübertragungsfunktionen zu

$$L(s) = \frac{1}{a^3 s^2 \tau_{\sigma}^2} \frac{1 + a^2 s \tau_{\sigma}}{1 + s \tau_{\sigma}}$$
(8.33)

$$T_{w}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1 + a^{2}s\tau_{\sigma}}{1 + a^{2}s\tau_{\sigma} + a^{3}s^{2}\tau_{\sigma}^{2}(1 + s\tau_{\sigma})} = \frac{1 + a^{2}s\tau_{\sigma}}{1 + a^{2}s\tau_{\sigma} + a^{3}s^{2}\tau_{\sigma}^{2} + a^{3}s^{2}\tau_{\sigma}^{2}}$$
(8.34)

Die Reglerübertragungsfunktion lässt sich mit dem Doppelverhältnis a schreiben als

$$G_c(s) = \frac{1}{a\tilde{V}_s} \frac{1 + s\tau_\sigma a^2}{s\tau_\sigma a^2} = \frac{1}{a^3\tilde{V}_s} \frac{1 + s\tau_\sigma a^2}{s\tau_\sigma}$$
(8.35)



Fig. 8-8: Frequenzgänge bei Auslegung nach dem Symmetrischen Optimum in doppelt-logarithmischer Darstellung

(insbesondere durch die von der Phasenreserve abhängige Resonanzüberhöhung werden die tatsächlichen Kurvenformen stark verschliffen, bessere Einsicht in die Konstruktion erlauben die Approximationen durch Geradenstücke (gestrichelt))

Die Bandbreite des Führungsfrequenzganges wird ungefähr durch die Amplitudendurchtrittsfrequenz $\omega_c = 1/a\tau_{\sigma}$ bestimmt, wenn man die Näherung

$$T_{w}(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \approx \begin{cases} L(j\omega) & |L(j\omega)| <<1\\ 1 & |L(j\omega)| >>1 \end{cases}$$
(8.36)

beachtet. Um eine hohe Bandbreite zu erreichen, sollte *a* also möglichst klein gewählt werden. Das geht aber auf Kosten der Phasenreserve und mit einer starken Resonanzüberhöhung einher. Das Ziel einer möglichst großen Durchtrittsfrequenz ω_c sorgt aber tendenziell auch für einen günstigen Störfrequenzgang, denn je größer ω_c und damit $1/T_n$, desto schmaler ist der Frequenzbereich ungünstiger großer Störübertragung zwischen $1/T_n$ und ω_c . Die Störübertragungsfunktion ergibt sich wie folgt:

$$T_d(s) = \frac{G_s(s)}{1 + L(s)} = \frac{T_w(s)}{G_c(s)}$$

$$= a^3 \widetilde{V}_s \frac{s\tau_\sigma}{1 + a^2 s\tau_\sigma + a^3 s^2 \tau_\sigma^2 + a^3 s^2 \tau_\sigma^2}$$
(8.37)

In den nachfolgenden Bildern sind Bodediagramme und Sprungantworten für verschiedene Werte des Verhältnisses *a* dargestellt.







über der normierten Frequenz $\Omega = \omega \tau_{\sigma}$



über der normierten Frequenz $\Omega = \omega \tau_{\sigma}$ mit $\tilde{V}_s = 1$



Fig. 8-12: Antwort der Regelgröße y(t) auf einen Führungssprung $w(t) = \sigma(t)$ (Folgeverhalten)



Fig. 8-13: Antwort der Regelgröße y(t) auf einen Störgrößensprung $d(t) = \sigma(t)$ mit $\tilde{V}_s = 1$

Eine beliebte Standardeinstellung des Symmetrischen Optimums ist a = 2. Damit wird eine Phasenreserve von 37° erreicht. Allerdings ist das Überschwingen bei Führungssprüngen von 43% unbefriedigend. Dieses Überschwingen ist im Wesentlichen der Nullstelle der

Führungsübertragungsfunktion bei $s = 1/(a^2 \tau_{\sigma})$ geschuldet. Durch ein zusätzliches T_1 -Führungsfilter

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + a^2 \tau_\sigma s} = \frac{1}{1 + T_n s}$$
(8.38)

wird im Führungsverhalten die entsprechende Nullstelle gekürzt, wodurch sich das Überschwingen auf 8% reduziert, allerdings auch die Anregelzeit grob verdoppelt (siehe folgendes Bild).

Für a = 3 resultiert der Spezialfall eines reellen Dreifachpols der Führungs- und Störübertragungsfunktion bei $s = 1/(3\tau_{\sigma})$. Mit Führungsfilter zeigt die Führungssprung-Antwort in diesem Fall keinerlei Überschwingen.



Fig. 8-14: Regelkreis mit Führungsfilter



Fig. 8-15: Antwort der Regelgröße y(t) auf einen Führungssprung $w(t) = \sigma(t)$ mit zusätzlichem T_1 -Führungsfilter (Folgeverhalten)

Das Symmetrische Optimum wurde hier nur für den Fall eines integrierenden Streckenanteils dargestellt, wobei dies, wie eingangs ausgeführt, als Näherung für eine Strecke mit zwei stark unterschiedlichen Zeitkonstanten $\tau_{\sigma} \ll \tau_s$ (wie beim Betragsoptimum vorausgesetzt) dienen kann. In der Literatur wird aber auch der Fall ohne eine solche Näherung behandelt.

Das Störverhalten des Symmetrischen Optimums ist für große Verhältnisse von Streckenzeitkonstanten τ_s / τ_σ günstiger als beim Betragsoptimum, da die langsame Streckenzeitkonstante nicht durch die Reglernachstellzeit kompensiert, sondern eine kürzere Nachstellzeit eingestellt wird. Bezüglich des Führungsverhaltens schneidet das Betragsoptimum besser ab.