Mechatronik und elektrische Antriebe

Mechatronics and Electrical Drives

Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Skript zur Vorlesung / Lecture Notes

Stand/Edition: 2018-05-18

Universität Paderborn

Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik
Power Electronics and Electrical Drives

Dieses Skript ist vornehmlich für die Studenten der Universität Paderborn als vorlesungsbegleitende Unterlage gedacht. Über das Internet steht es auch anderen Interessierten zur Verfügung. In jedem Fall ist nur die private, individuelle, nicht-kommerzielle Nutzung gestattet. Insbesondere ist nicht gestattet, das Skript oder dessen Bestandteile weiter zu verbreiten, zu vervielfältigen oder für andere Zwecke zu nutzen. Ausnahmen bedürfen der Genehmigung des Verfassers. Der Verfasser ist für Hinweise auf Fehler oder Unzulänglichkeiten dankbar.

These lecture notes are primarily dedicated to the students of the University of Paderborn. It is also available to other persons on the internet. In any case, only private, individual, non-commercial use is allowed. In particular, it is not allowed to distribute, to copy the lecture notes or parts of it or to use it for other means. Exceptions have to be agreed by the author. The author would appreciate any comment on errors or incompleteness.

Inhalt

1 Mechatronische Systeme
Mechatronic Systems ... 6
2 Energiebilanz
Energy Balance ... 10
2.1 Energiebilanz Elektromechanischer Wandler
Energy Balance of Electromechanical Converters ... 10
2.2 Energiebilanz bei Elektromagnetische Aktoren
Energy Balance with Electromagnetic Actuators ... 12
2.3 Die Ko- oder Ergänzungsenergie
The Co-Energy ... 16
2.4 Die zweiten Ableitungen der Energie
The Second-Order Derivatives of the Energy ... 21
3 Magnetische Kreise
Magnetic Circuits ... 23
3.1 Electromagnetische Energiedichte
Electromagnetic Energy Density ... 23
3.2 Magnetische Netzwerke
Magnetic Networks ... 24
3.3 Magnetische Werkstoffe
Magnetic Materials ... 30
3.4 Permanentmagnete
Permanent Magnets ... 39
4 Magnetlager
Magnetic Bearing ... 55
4.1 Magnetisches Joch
Magnetic Yoke ... 55
4.2 Anordnung mit zwei Jochen
Construction with two Yokes ... 57
4.3 Regelung eines Magnetlagers mit Vorspannung durch separate Wicklung
Control of a Magnetic Bearing with Bias Excitation by a Separate Winding ... 58
4.4 Magnetlager mit Permanentmagneten
Magnetic Bearing with Permanent Magnets ... 68
4.5 Sensorik
Sensors ... 71
4.6 Stromrichter
Converters ... 71
4.7 Pulsweitenmodulation
Pulse Width Modulation ... 73
4.8 Magnetlager mit Lagerung in zwei Freiheitsgraden
Magnetic Bearing with Two Degrees of Freedom ... 79
5 Geschalteter Reluktanz-Motor
Switched Reluctance Motor ... 81
5.1 Konstruktiver Aufbau
Construction ... 81
5.2 Funktionsprinzip
Functional principle ... 83
5.3 Dynamisches Verhalten
Dynamic Behavior ... 90

5.4 Stromrichter 98
6 Schrittmotoren
Stepping Motors 102
7 Gleichstrommotor
DC-Motor 104
7.1 Wirkprinzip
Action Principle 104
7.2 Aufbau
Construction 106
7.3 Kommutator und Ankerwicklungsschemata
Commutator and Armature Winding Schemes 108
7.4 Kommutierung und Wendepolwicklung
Commutation and Commutator Winding 109
7.5 Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung
Armature reaction, Compensation and Compound Windings 111
7.6 Mathematische Modellierung
Mathematical Modeling 112
7.7 Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad
Electrical and Mechanical Power, Efficiency 115
7.8 Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen
Circuit Types, Terminal Designations and Circuit Symbols 116
7.9 Fremderregter und permanent erregter Motor
Separately and Permanently Excited Motor 117
7.10 Nebenschlussmotor
Shunt Motor 122
7.11 Reihenschlussmotor
Series Motor 123
7.12 Geregelter Betrieb
Controlled Operation 127
7.13 Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen
Operation at the Limits of Current and Voltages 135
8 Elektronisch kommutierte Motoren
Electronically Commutated Motors 139
8.1 Funktionsprinzip
Functional Principle 139
8.2 Induzierte Spannungen
Induced Voltages 142
8.3 Ersatzschaltbild und Drehmoment
Equivalent Circuit Diagram and Torque 146
8.4 Stromrichter
Converter 148
8.5 Kommutierung
Commutation 151
8.6 Regelung
Control 155
9 Entwurf von Strom- und Drehzahlregelung
Design of Current and Speed Control 158
9.1 Reglerentwurf durch Pol-Nullstellen-Kürzung
Controller Design with Pole-Zero-Cancellation 159
9.2 Symmetrisches Optimum
Symmetrical Optimum 169

Literatur
References

R. Isermann
Mechatronische Systeme
Springer Verlag, 1999

J. Pyrhönen, T. Jokinen and V. Hrabovcová
Design of Rotating Electrical Machines
Wiley & Sons, 2008

D. Schröder
Elektrische Antriebe – Grundlagen
Springer Verlag, 2. Aufl., 2000

Germar Müller, Bernd Ponick
Grundlagen elektrischer Maschinen
Wiley-VHC, 9. Auflage, 2006

Germar Müller, Bernd Ponick
Theorie elektrischer Maschinen
Wiley-VHC, 4. Auflage

H. Goldstein
Klassische Mechanik
Akademische Verlagsgesellschaft, 1981

D. Hanselman
Brushless Permanent Magnet Motor Design
The Writer's Collective, 2003

T. J. E. Miller
Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives
Oxford Science Publications, 1989

D. Schröder
Elektrische Antriebe – Grundlagen
Springer Verlag, 2. Aufl., 2000

Hans-Dieter Stölting, Eberhard Kallenbach
Handbuch Elektrische Kleinantriebe
Hanser Verlag, 3. Auflage, 2006

R. Krishnan
Electric Motor Drives
Prentice Hall, 2001

D. K. Miu
Mechatronics – Electromechanics and Contromechanics
Springer-Verlag, 1993

G. Schweitzer, A. Traxler, H. Bleuler
Magnetlager
Springer-Verlag, 1993

G. Schweitzer, E. H. Maslen (eds.)
Magnetic Bearings
Springer-Verlag 2009

H. Lutz, W. Wendt
Taschenbuch der Regelungstechnik
Verlag Harri Deutsch, 7. Auflage, 2007

W. Bolton
Bausteine mechatronischer Systeme
Pearson, 3. Auflage 2003
Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme
VDI-Richtlinie VDI 2206 (Entwurf), März 2003

Griechische Buchstaben
Greek Letters

Majuskel	Minuskel	Name
Α[1]	α	Alpha
Β[1]	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
Ε[1]	ε	Epsilon
Ζ[1]	ζ	Zeta
Η[1]	η	Eta
Θ	θ, ϑ[2]	Theta
Ι[1]	ι	Iota
Κ[1]	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
Μ[1]	μ	My
Ν[1]	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
Ο[1]	ο[1]	Omikron
Π	π	Pi
Ρ[1]	ρ	Rho
Σ	σ, ς[1]	Sigma
Τ[1]	τ	Tau
Υ[1]	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ[2]	Phi
Χ[1]	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

[1] Wegen Übereinstimmung mit lateinischen Typen werden diese griechischen Buchstaben nicht als mathematische Symbole verwendet. Das Schluss-Sigma ς wird auch nicht benutzt.

[1] Since these letters are equal to Latin letters, they are not used as mathematical symbols. The end-sigma ς is also not used.

[2] Die typografische Darstellung dieser Minuskeln variiert je nach Schriftsatz.

[2] The typographic shape of these letters may vary depending on the fonts.

1 Mechatronische Systeme
Mechatronic Systems

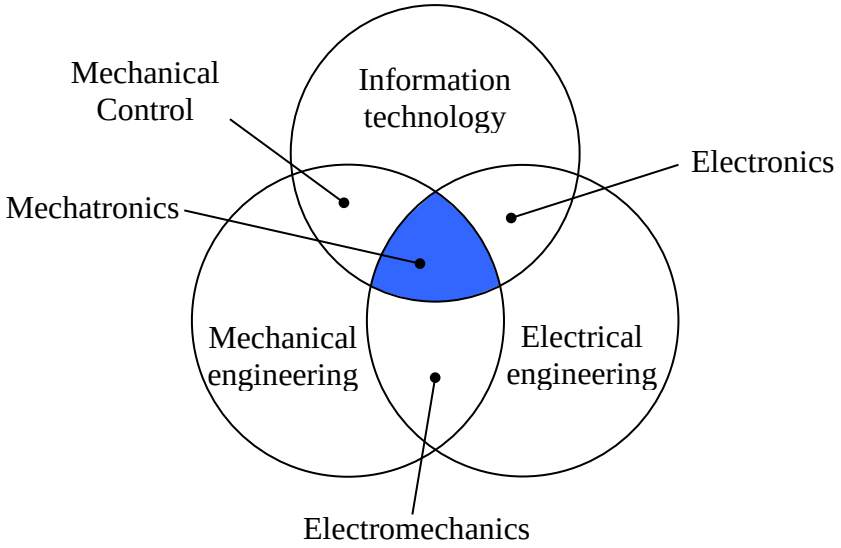


Fig. 1-1:
Mechatronik als Integration des Maschinenbaus, der Elektrotechnik und der Informationstechnik[1]

Mechatronics as integration of mechanical and electrical engineering and information technology [2]

Der Begriff *Mechatronik* entstand Ende der 60er Jahre als Wortschöpfung durch die Zusammenziehung von *Mechanik* und *Elektronik*.

The term *mechatronic* was created as neologism as a contraction from *mechanics* and *electronics* at the end of the 60th.

In einem mechatronischen System sind elektrische, mechanische und informationsverarbeitende Komponenten oder Teilsysteme anzutreffen. Das bloße Vorhandensein

In a mechatronic system we will find electrical, mechanical, and information processing components or subsystes. The pure existance of such components which

[1] Obwohl die ersten Rechenmaschinen und sogar der erste von Zuse gebaute programmierbare Computer mechanischer Natur waren, ist heute die *digitale mechanische* Informationsverarbeitung kaum noch von Bedeutung. Allerdings gibt es in vielen mechanischen Systemen Vorrichtungen, die in gewissem Sinn als (analoge) mechanische Informationsverarbeitung aufgefasst werden können: Z. B. Königswellen, Kurvenscheiben, Zahnriemen und -scheiben, Hebel oder Kurbeln zur Übertragung von Stellungen und Positionen.

[2] Though the first calculators and even the first universally programmable computer built by the German engineer *Zuse* were mechanical machines, digital mechanical information processing does not play any role today. However, there are construction elements in mechanical systems which can be seen to some extent as (analogue) mechanical information processing as, e.g., main shafts, cam disks, toothed belts and pitches, levers, cranks in order to transmit information of positions.

solcher Komponenten, die jeweils für sich separierbare Teilfunktionen wahrnehmen, ist jedoch noch kein hinreichendes Kriterium für ein mechatronisches System. Wichtiges Kennzeichen ist vielmehr die *Integration* dieser Komponenten, wobei verschiedene Sichtweisen in Betracht kommen:

execute separate function, however, is not sufficient characteristic of a mechatronic system. Important property is rather the *integration* of these components, where different points of view can be taken:

Funktionelle Integration

Eine *Funktion* wird erst durch Zusammenwirken der verschiedenen Komponenten bewirkt.

Beispiel: Aktive Unterdrückung von mechanischen Schwingungen durch regelungstechnische Maßnahmen. Die beabsichtigte Funktion kommt erst durch das Zusammenwirken der Komponenten Sensor, Regler und Aktor zustande. Anwendung findet die Schwingungstilgung in ganz unterschiedlichen Bereichen wie bei Strukturschwingungen von Sattelliten mit großen Photovoltaikflächen oder bei Torsionsschwingungen von Antriebswellen rotierender Maschinen.

Functional integration

A *function* is established only by the interaction of the different components.

Example: Active cancellation of mechanical oscillations by means of closed-loop control. The intended function can only be realised by interaction of the components sensor, controller, and actor. Such approach is met in rather different areas, e.g. with structural oscillations of satellites with large photovoltaic panels or torsional oscillations of shafts of rotating machines.

Räumliche bzw. konstruktive Integration

Beispiel: Schreib-Lese-Arm einer Festplatte. Informationstechnische Teile, Aktuator und Mechanik sind konstruktiv und räumlich stark integriert

Spatial or constructive integration

Example: Movable read/write head of a hard disk drive. Information processing components, actuator and mechanical parts are highly spatially integrated.

Fertigungstechnische Integration

Das mechatronische System wird nicht aus vorgefertigten elektrotechnischen, mechanischen und informationstechnischen Teilen assembliert, sondern in einem integrierten Produktionsprozess gefertigt

Integrated manufactoring

The mechatronic system is not assembled with prefrabricated electrical, mechanical and information processing parts, but produced in an integrated production process.

Weiteres Kennzeichen mechatronischer Systeme ist die Verflechtung von *Leistungs*- und *Informationsflüssen*.

Further characteristics of mechatronic systems are the entangled *flows of power* and *information*.

Willkürliche Auswahl weiterer mechatronischer Systeme: CD-Laufwerk, bürstenloser Gleichstrommotor, elektrische Kurvenscheiben, Anti-Blockier-System, Magnet-

Random collection of further mechatronic systems: CD drive, electrical cam disks, anti-blocking system, magnetic bearing, acceleration sensor, servo-assisted steering etc.

lager, Beschleunigungssensor, Servolenkung usw.

In diesem Sinne der funktionellen Integration ist ein auch elektrischer Antrieb wie in Fig. 1-2 gezeigt ein mechatronisches System. Es besteht aus einem Motor als elektromechanischem Energiewandler, darüber hinaus einhält es einen leistungselektronischen Umrichter, Sensoren und eine Regelung (Informationsverarbeitung). Erst durch das Zusammenspiel aller dieser Komponenten wird die beabsichtigte Funktion realisiert. Insbesondere bei kleinen Antrieben kann eine konstruktive Integration hinzukommen. Hierbei sind Umrichter, Sensoren und Regelung komplett in einem Gehäuse zusammen mit dem Motor integriert.

In the sense of functional integration, also an electrical drive as shown in Fig. 1-2 is a mechatronic system. It comprises a motor as electromechanical energy converter, a power electronic converter, and sensors and control (information processing components). The final function is only be realised by the cooperation of all these components. Particularly with small drives, there could exist also a constructional integration. In such a case, converter, sensors and controls are integrated into the same housing together with the motor.

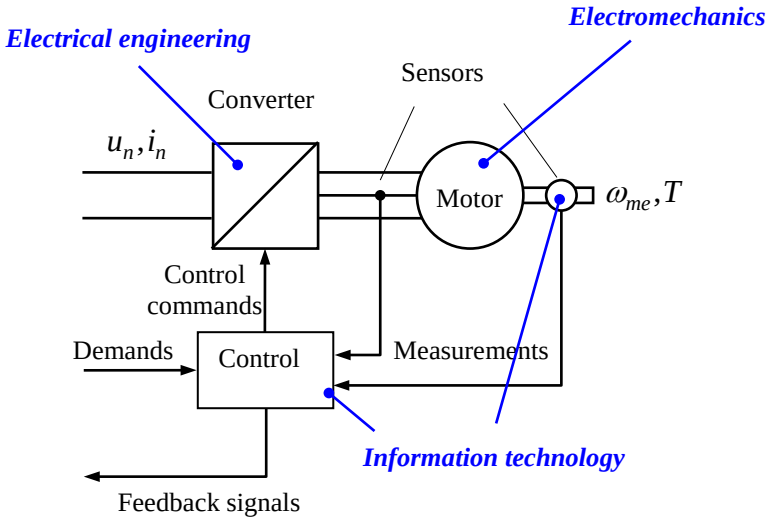


Fig. 1-2:
Grundstruktur des elektrischen Antriebs, der Antrieb als mechatronisches System

Basic structure of an electric drive, the drive as mechatronic system

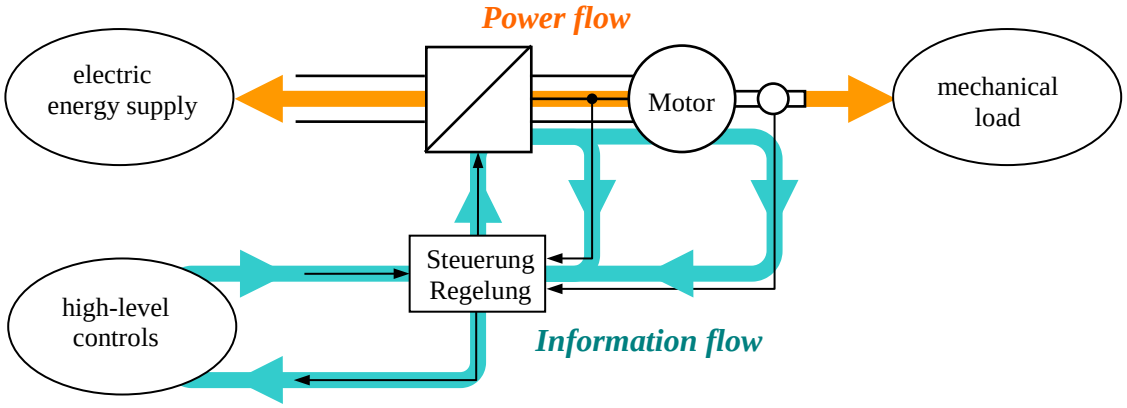


Fig. 1-3:
Energie- und Informationsflüsse Flows of power and information

2 Energiebilanz
Energy Balance

2.1 Energiebilanz Elektromechanischer Wandler
Energy Balance of Electromechanical Converters

Eine Methode, die Wechselwirkungen zwischen den mechanischen und den elektrischen Größen eines mechatronischen Systems zu ergründen, basiert auf der Analyse der im System enthaltenen Energie und der zu- und abgeführten Leistungen.

A method to investigate the interactions between the mechanical and the electrical quantities of a mechatronic system is based on the analysis of the system's energy and the power supplied to and drained from the system.

Für ein abgeschlossenes System postuliert das fundamentale erste Gesetz der Thermodynamik die *Energieerhaltung*. Bei technischen Problemstellungen haben wir es aber regelmäßig mit offenen Systemen zu tun. Deren Energieinhalt ist nicht konstant, sondern wird mit der Umgebung ausgetauscht.

For a closed system the fundamental first law of thermodynamics postulates the *conservation of energy*. With technical problems, we face regularly open systems. Their energy content is not constant but is being exchanged with the environment.

Betrachten wir dazu ein abstraktes elektromechanisches System wie in Fig. 2-1 mit einem elektrischen und einem mechanischen Tor.

Consider an abstract electromechanical system as shown in Fig. 2-1 with an electrical and a mechanical port.

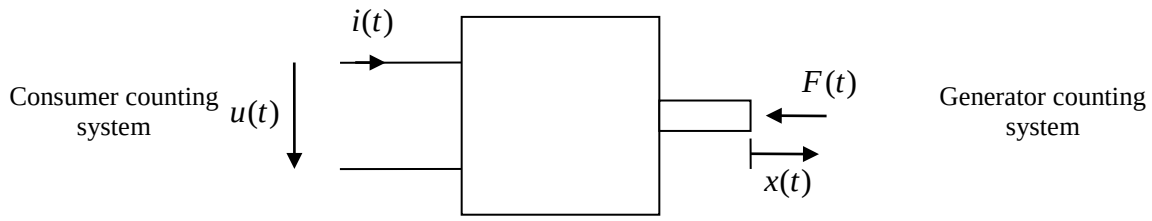


Fig. 2-1:
Elektrisch und mechanisch freigeschnittenes allgemeines elektromechanisches Zweitor

A general electrically and mechanically cut-free electromechanic two-port

Das System wurde im Bild von der elektrischen und mechanischen Umgebung freigeschnitten, die nur noch durch die Schnitt- oder Austauschgrößen repräsentiert wird: auf der elektrischen Seite durch die Spannung u und den Strom i, auf der mechanischen Seite durch die Verschiebung x und die Kraft F.

In the figure, the electrical and the mechanical environment has been cut away. The environment is now represented only by exchange quantities, on the electrical side by voltage u and current i, on the mechanical side by displacement x and force.

Wann immer solche Schnittgrößen eingeführt werden, muss die Zählrichtung

Whenever introducing such exchange quantities, their counting directions have to

festgelegt werden, was in Fig. 2-1 durch die Zählpfeile zum Ausdruck gebracht wird. Diese Pfeile zeigen nur an, was als positiv zu verstehen ist, nicht etwa, dass die betreffende Größe tatsächlich positiv sei.

be defined what is indicated in Fig. 2-1 by the counting arrows. The arrow indicates only what is to be understood positive, it does not imply that the quantity were actually positive.

Die Wahl der Zählrichtungen ist lediglich eine Sache der Definition, sie können willkürlich festgelegt werden. Auf der elektrischen Seite wurden hier aber die Zählpfeile von Spannung und Strom gleichsinnig, d.h. beide von einem zum anderen Anschluss zeigend, eingeführt. Diese Art bezeichnet man als *Verbraucher-Zählpfeilsystem*. Als Folge ist die elektrische Leistung

The choice of the counting arrow directions is only a question of definition, they could be chosen freely. However, on the electrical side both voltage and current arrows have the same direction, both pointing from one terminal to the other. This kind is called *consumer counting system*. As a result, the electrical power

$$p_{\mathrm{el}} = ui \tag{2.1}$$

die Leistung, die *von der Umgebung an das System* abgegeben wird. Auch hier legt dies nur fest, was als positiv zu verstehen ist, nicht etwa, dass die Leistung wirklich positiv sei.

is to be understood as power supplied *from the environment to the system*. Again, this defines only what is to be understood as positiv, it does not mean that the power really flows from the environment to the system.

Auf der mechanischen Seite wurden die Zählpfeile entgegengesetzt ausgerichtet, was man als *Erzeuger-Zählpfeilsystem* bezeichnet. In diesem Fall ist die mechanische Leistung

On the mechanical side, the counting arrows are chosen in different directions, which is called *generator counting system*. As a result, the mechanical power calculated from

$$p_{\mathrm{me}} = vF = \dot{x}F \tag{2.2}$$

die Leistung, die *vom System an die Umgebung* geliefert wird. Diese Definitionen sind keinesfalls obligatorisch, jeder mag die Zählpfeile nach seinem Ermessen wählen, muss dann aber in sich konsistent bleiben.

is the power provided *from the system to the environment*. However, these definitions are not binding. Anybody may choose his own way, but must keep consistency subsequently.

Beide Leistungsterme fassen wir zur äußeren (externen) Leistung zusammen:

Both power terms are taken together as external power:

$$p_{\mathrm{e}} = p_{\mathrm{el}} - p_{\mathrm{me}} = ui - vF \tag{2.3}$$

Verstehen wir unter dem System nur die elektromechanischen Vorgänge, muss immerhin der Leistungsaustausch mit der thermischen Domäne berücksichtigt werden, nämlich die Dissipationsleistung p_{d}, die als weiterer Abflussterm des elektromechanischen Systems auftritt.

If we understand the system only as electromechanical processes, we have to consider at least a power exchange with the thermal domain, i.e. the dissipation power p_{d} which appears as another drain of the electromechanical system.

Postulieren wir nun, dass das System die innere Energie E_i enthalte, muss diese nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik der *Bilanzgleichung*

The system is now postulated to contain an internal energy E_i. According to the first law of thermodynmamics, the energy must obey the *balance equation*

$$\dot{E}_\mathrm{i} = p_\mathrm{e} - p_\mathrm{d} = p_\mathrm{el} - p_\mathrm{me} - p_\mathrm{d} \tag{2.4}$$

gehorchen. Ganz allgemein muss die innere Energie eine *Zustandsfunktion* sein. Das bedeutet: Für das System gibt es einen Satz von *Zustandsgrößen* $x_i(t)$, die den aktuellen Zustand des Systems vollständig beschreiben. Eine Zustandsfunktion ist eine Funktion dieser Zustandsgrößen, womit ihr Wert eindeutig über die Zustandsgrößen bestimmt wird:

Generally, the internal energy has to be a *state function*. This means: For the system there exist a set of *state variables* $x_i(t)$ which completely describe the current state of the system. A state function is now a function of these state variables. Thus, its value of the state function is uniquely defined by the state variables.

$$E_\mathrm{i}(t) = E_\mathrm{i}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \,. \tag{2.5}$$

Für die Zeitableitung ergibt sich also nach den Ableitungsregeln

Due to derivation rules, the time derivative results as

$$\dot{E}_\mathrm{i}(t) = \dot{x}_1 \frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial x_2} + ... + \dot{x}_n \frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial x_n} \tag{2.6}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie die Zustandsgrößen $x_i(t)$ gefunden werden können. Bei dem System in Fig. 2-1 ist offensichtlich eine dieser Zustandsgrößen die Verschiebung, z. B. $x_1 = x$. Die Identifikation weiterer Zustandsgrößen ist jedoch ohne näheren Einblick in das System nicht möglich. Deshalb beschränken wir uns in Folge auf elektromagnetische Aktoren.

Now, the question rises how the state variables $x_i(t)$ can be found. With the system of Fig. 2-1 the displacement is obviously one of theses state variables, e. g. $x_1 = x$. The identification of further state variables, however, is not possible without more insight into the system. That is why we focus hereafter on electromagnetic actuators.

2.2 Energiebilanz bei Elektromagnetische Aktoren Energy Balance with Electromagnetic Actuators

Nehmen wir an, der Aktor basiere auf einem magnetischen Prinzip wie in Fig. 2-2 gezeigt. Man kann sich leicht vorstellen, dass diese Anordnung abhängig von Stromstärke und Position eine Kraft auf den Stößel ausübt, wobei dieser aus einem magnetischen Material bestehen möge. Diese Kraft werden wir später erörtern. An dieser Stelle sei zunächst angenommen, dass der eigentlich bewegliche Stößel in einer Stellung x mechanisch arretiert werde. In diesem Fall

Let us assume the actuator is based on a magnetic principle as shown in Fig. 2-2. One can easily imagine that this construction generates a magnetic force on the pusher, which is assumed to consist of magnetic material. However, the force is to be debated later. At this point we temporarily assume the pusher to be locked at a certain mechanical displacement x. In this case the actuator behaves with regard to its electrical behaviour simply as a coil with iron core.

stellt der Aktor bezüglich seines elektrischen Verhaltens eine Spule mit Eisenkern dar.

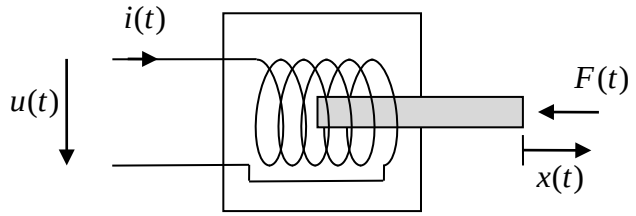


Fig. 2-2:
Elektromagnetischer Aktor — Electromagnetic actuator

Das Verhalten einer Spule wird durch das Faradaysche Induktionsgesetz beschrieben, die induzierte Spannung ist gleich der Änderung des magnetischen Verkettungsflusses:

The behaviour of a coil is described by Faraday's induction law, i.e. the induced voltage equals the change rate of the linked magnetic flux:

$$u_\mathrm{i} = \dot{\psi} \tag{2.7}$$

Um zur Klemmenspannung zu gelangen, muss außerdem der ohmsche Spannungsabfall berücksichtigt werden:

In order to get the terminal voltage, the ohmic voltage drop has to be considered,

$$u = u_\mathrm{i} + Ri\,. \tag{2.8}$$

Beim mechanisch blockiertem Aktor, also bei der Spule, entfällt in der Energiebilanz (2.4) wegen $\dot{v} = 0$ die mechanische Leistung,

With the mechanically blocked actuator, i.e. with the coil, there is no mechanical power in the energy balance (2.4) due to $\dot{v} = 0$,

$$\dot{E}_\mathrm{i} = p_\mathrm{el} - p_\mathrm{d} \tag{2.9}$$

Darüber hinaus ist beim ohmschen Widerstand die Dissipationsleistung wohlbekannt:

Furthermore, with an ohmic resistive behaviour the dissipated power is well known,

$$p_\mathrm{d} = Ri^2 \tag{2.10}$$

Alles zusammen führt also zu

All together will lead us to

$$\dot{E}_\mathrm{i} = ui - Ri^2 = (u_\mathrm{i} + Ri)i - Ri^2 = \dot{\psi}\, i \tag{2.11}$$

Im Falle linearen Materials ist der Fluss proportional zum Strom,

In case of linear material behaviour, the flux is proportional to the current,

$$\psi = Li \tag{2.12}$$

Die Proportionalitätskonstante L heißt *Induktivität*. Damit wird (2.11) zu:

The proportionality constant L is called *inductance*. Then, (2.11) becomes:

$$\dot{E}_\mathrm{i} = L\dot{i}\,i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right), \quad E_\mathrm{i} = \frac{1}{2}Li^2 \tag{2.13}$$

Das bedeutet, wir können die Zeitableitung der inneren Energie integrieren und die Energie direkt angeben. Das Ergebnis ist wohlbekannt. Wir müssen aber berücksichtigen, dass für jede feste Position x eine anderer Induktivitätswert resultiert. Die Energie scheint demnach eine Funktion des Stroms und der Verschiebung zu sein, sie kann aber auch mithilfe von (2.12) als Funktion des Flusses und der Verschiebung ausgedrückt werden:

This means, we can integrate the time derivative of the internal energy and determine directly the internal energy. The result is well known. However, we have to consider that for any fixed position x a different value of the inductance results. Thus, the energy seems to be a function of the current and the displace, however, it is possible to express the energy with help of (2.12) as function of the flux and the displacement:

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2}L(x)\,i^2 = \frac{\psi^2}{2L(x)} = \frac{1}{2}\psi\,i \tag{2.14}$$

Das kann man derart interpretieren, dass entweder Verschiebung und Strom (x,i) oder aber die Verschiebung und der magnetische Fluss (x,ψ) die gesuchten Zustandsvariablen sind. Die Erörterung dieser Frage soll aber noch etwas aufgeschoben werden.

This fact can be interpreted in the sense that either displacement and current or displacement and magnetic flux are the state variables we are searching for. The debate of this question, however, should be postponed for a short while.

Da magnetische Materialien mehr oder minder stark sättigen, ist die Vorstellung einer linearen Beziehung zwischen Fluss und Strom allenfalls für einen kleinen Arbeitsbereich haltbar. Allgemein müssen wir von einem deutlich nichtlinearen Zusammenhang ausgehen. Die Funktion des magnetischen Flusses in Abhängigkeit des Stroms heißt *Magnetisierungskennlinie*:

Since magnetic materials saturate more or less, the idea of linear relation between flux and current is valid at best only for a small operation range. In general, we have to take into account a distinct nonlinear relation. The function of the magnetic flux versus current is called *magnetisation curve*:

$$\psi = \psi(x,i) \tag{2.15}$$

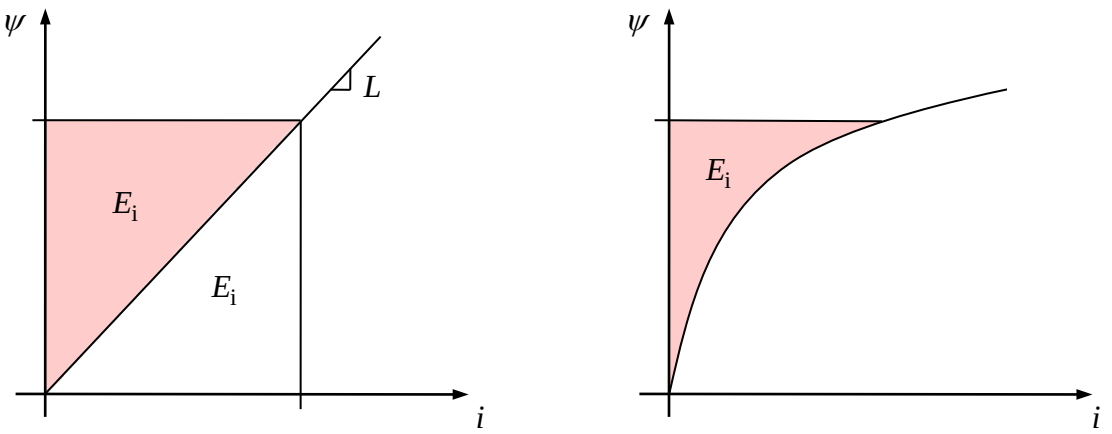
Diese hängt hier zusätzlich von der Verschiebung ab, wobei auch dieser Zusammenhang im Allgemeinen nichtlinear ist. Trotz dieser Nichtlinearität gelingt es weiterhin, die Integration zu bewältigen. Dazu multiplizieren wir formell die Gleichung (2.11) mit dem Zeitdifferenzial $\mathrm{d}t$ und bilden Integrale auf beiden Seiten der Gleichung:

Here, the function depends also on the displacement. Also, this relation is nonlinear in general. Despite the nonlinearity, we can accomplish the integration anyway. To do so, we multiply formally equation (2.11) with the time differential $\mathrm{d}t$ and build integrals on both sides of the equations:

$$E_\mathrm{i} = \int \mathrm{d}E_\mathrm{i} = \int i \, \mathrm{d}\psi \tag{2.16}$$

Kennen wir die Beziehung zwischen Strom und Fluss (2.15), ist prinzipiell auch die Umkehrfunktion von (2.15) darstellbar, so dass das Integral (2.16) bestimmt werden kann. Weiterhin gehen wir davon aus, dass die Verschiebung x zwar einen beliebigen, aber festen Wert annimmt. Grafisch ist dies anhand der Magnetisierungskennlinie in Fig. 2-3 rechts dargestellt. Da ψ die unabhängige Integrationsvariable ist und diese Achse vertikal angeordnet ist, ist das Integral nicht gleich der Fläche unter der Magnetisierungskennlinie, sondern links von dieser. Im linearen Fall macht dies keinen Unterschied, da die Dreiecksflächen unter und links der Magnetisierungskurve, die in diesem Fall eine Gerade ist, gleich sind, Fig. 2-3 links.

If we know the relation between current and flux (2.15), in principal also the inverse function to (2.15) can be determined so that we are able to carry out the integration (2.16). We are still assuming that the displacement x takes a random, but constant value. Graphically, this is shown with the help of the magnetisation curve in Fig. 2-3, right-hand diagram. Since ψ is the independent integration variable and this axis is arranged in a vertical direction, the integral is not the area below the curve as usual, but the area left of the curve. In the linear case this does not make any difference, since the triangular areas below and left of the magnetisation curve, which a straight line in this case, are equal, Fig. 2-3, left-hand diagram.



lineares Verhalten
linear behaviour

nichtlineare Magnetisierungskennlinie
nonlinear magnetisation curve

Fig. 2-3:
Innere Energie für den linearen Fall und für eine nichtlineare Magnetisierungskennlinie

Internal energy for the linear case and for a nonlinear magnetisation curve

Kehren wir jetzt zur Frage zurück, ob (i, x) oder (ψ, x) der Satz der gesuchten Zustandsgrößen ist. Tatsächlich sind beide Möglichkeiten äquivalent, da der Fluss über die Magentisierungskennlinie in den Strom umgerechnet werden kann und umgekehrt. Beide Systeme beschreiben den Zustand des Aktors vollständig. Auch (2.14) gibt keinen Hinweis gibt, ob i oder ψ zu bevorzugen ist. In (2.14) hingegen tritt als unabhängige

Let us return now to the question whether (i, x) or (ψ, x) is the set of state variables sought after. Actually, both possibilities are equivalent, because the flux can be converted with the help of the magnetisation curve to the current and vice versa. Both systems describe the system's state completely. Also, (2.14) does not disclose any hint whether i or ψ is to be preferred. In (2.14), however, ψ appears as independent integration

Integrationsvariable ψ auf. Das kann darauf hindeuten, dass ψ Vorteile mit sich bringen könnte, weshalb wir vom Zustandsgrößensatz (ψ, x) ausgehen und auch die innere Energie als Funktion von diesen beiden Variablen verstehen wollen.

variable. This can be taken as hint that ψ could bring some advantages so that we choose the state variable set (ψ, x) and understand also the internal energy as function of these variables.

Geben wir nun die Vorstellung einer fixierten Verschiebung wieder auf und erlauben nun eine beliebige Bewegung. Für Zeitableitung der Energie folgt nun allgemein

At this point we quit the imagination of a fixed displacement and allow any random movement. The time derivative of the energy follows as

$$\dot{E}_\mathrm{i}(\psi, x) = \dot{\psi}\frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial \psi} + \dot{x}\frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial x} = p_\mathrm{el} - p_\mathrm{me} - p_\mathrm{d} = -\dot{x}F + \dot{\psi}i \tag{2.17}$$

Da diese Beziehung für beliebige $\dot{x}$ und $\dot{\psi}$ gelten muss, müssen die Terme vor diesen Zeitableitungen auf beiden Seiten gleich sein. Es muss folglich gelten:

As this relation has to hold for any random $\dot{x}$ and $\dot{\psi}$, the terms before these time derivatives must be equal. Thus, it follows:

$$i = \left.\frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial \psi}\right|_{x=\mathrm{const.}} \quad \text{und} \quad F = -\left.\frac{\partial E_\mathrm{i}}{\partial x}\right|_{\psi=\mathrm{const.}} \tag{2.18}$$

Hätte man die innere Energie als Funktion von (i, x) angesetzt, würde bei der Zeitableitung $\dot{E}_\mathrm{i}(i, x)$ ein Term $\dot{i}$ auftreten. Dies wäre zwar nicht falsch ist, doch könnte keine einfache Beziehung mit dem rechts in (2.18) auftretenden Leistungsterm mit $\dot{\psi}$ hergestellt werden. Daher sind die Zustandsgrößen (ψ, x) zu bevorzugen, die deshalb auch als *natürliche Zustandsgrößen* bezeichnet werden.

If we had taken the internal energy as a function of (i, x), then a term with $\dot{i}$ would arise from the time derivative $\dot{E}_\mathrm{i}(i, x)$. This would not be false, but we would not be able to identify a simple relation with power termin on the right-hand side of (2.18) with $\dot{\psi}$. Thus, the state variables (ψ, x) are to be preferred. They are called *natural state variables*.

Man beachte, dass wir mit (2.18) ein Ergebnis für die Kraft erreicht haben, ohne dass wir an irgendeiner Stelle die Kraftgesetze von Lorentz oder Maxwell verwendet hätten. Dies sollte deutlich machen, wie leistungsfähig die Methode der Energiebilanz ist.

Please note that we accomplished with (2.18) a result for the force although we had not used at any point the force formulae of Lorentz or Maxwell. This should make clear how powerful the tool of energy balance is.

2.3 Die Ko- oder Ergänzungsenergie The Co-Energy

Bei der inneren Energie hat sich der Fluss als Zustandsgröße gegenüber dem Strom als vorteilhaft herausgestellt. Für verschiedene praktische Problemstellung wäre es aber doch wünschenswert, den Systemzustand

With the internal energy, the flux has turned out as favorite state variable rather than the current. For a number of practical problems, however, it would be desirable to characterise the system state directly with the

statt durch den Fluss direkt mit dem Strom zu beschreiben. Formal lässt sich dies durch die *Legendre-Transformation* bewerkstelligen, die einen Variablentausch bewirkt. Diese Transformation definiert eine neue Größe, die *Ko-* oder *Ergänzungsenergie*, die wir nun als Funktion von Strom und Verschiebung verstehen, wie folgt:

current instead of the flux. Formally, this can be done with the the *Legendre transform*, which results in a change of the variables. This transform defines a new quantity, the *co-energy*, which is to be understood as function of current and displacement as follows:

$$E_{\mathrm{c}}(i,x) = \psi\, i - E_{\mathrm{i}}(\psi, x) \tag{2.19}$$

Eine graphische Veranschaulichung zeigt Fig. 2-4.

A graphical visualisation is shown in Fig. 2-4.

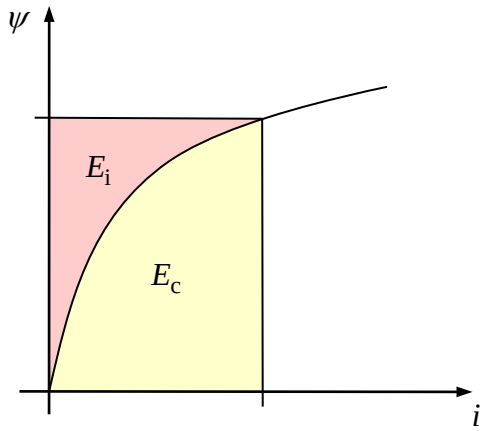


Fig. 2-4:
Innere Energie und Koenergie

Internal energy and co-energy

Untersuchen wir die Zeitableitung der Ergänzungsenergie unter Zuhilfenahme von (2.17):

Let us investigate the time derivative of the co-energy with the help of (2.17):

$$\dot{E}_{\mathrm{c}}(i,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi\, i\right) - \dot{E}_{\mathrm{i}}(\psi, x) = \dot{\psi}\, i + \psi\, \dot{i} + \dot{x}\, F - \dot{\psi}\, i = \dot{i}\,\psi + \dot{x} F \tag{2.20}$$

Dies kann als Bilanzgleichung der Ergänzungsenergie verstanden werden. Auch hier können wir durch Vergleich der Zeitableitungen die folgenden Beziehungen gewinnen:

This can be understood as balance equation of the co-energy. Also here, the comparison of the time derivatives delivers the following relations:

$$F = \left.\frac{\partial E_c}{\partial x}\right|_{i=\mathrm{const.}} \quad \text{und} \quad \psi = \left.\frac{\partial E_c}{\partial i}\right|_{x=\mathrm{const.}} \tag{2.21}$$

Bei linearem Verhalten zwischen Strom und Fluss sind die innere Energie und die Ergänzungsenergie wertemäßig gleich, vgl.

With linear behaviour between current and flux, internal energy and co-energy are of the same values, compare (2.14) and the left-

(2.14) und das linke Diagramm in Fig. 2-3. Im Fall eines nichtlinearen Materialgesetzes führt die Differenziation $\partial E_\mathrm{i} / \partial x|_i$ jedoch im Allgemeinen zum falschen Ergebnis für die Kraft!

hand diagram of Fig. 2-3. However, in case of nonlinear behavior, the derivative $\partial E_\mathrm{i} / \partial x|_i$ generally would yield the wrong result for the force!

Für die weitere Diskussion gehen wir von den Zeitableitungen auf Differenziale über, indem wir formell die Bilanzgleichungen (2.17) und (2.20) mit dem Zeitdifferenzial $\mathrm{d}t$ multiplizieren. Es folgt

For the further discussion we change from time derivatives to differentials by multiplying formally the balance equations (2.17) and (2.20) with the time differential $\mathrm{d}t$. It follows

$$\mathrm{d}E_\mathrm{i} = i\,\mathrm{d}\psi - F\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}W_\mathrm{el} - \mathrm{d}W_\mathrm{me} \tag{2.22}$$

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \psi\,\mathrm{d}i + F\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}W_\mathrm{ec} + \mathrm{d}W_\mathrm{me} \tag{2.23}$$

Die Terme auf den rechten Seiten der Gleichungen sind die Differenziale der mechanischen und der elektrischen *Arbeit*. Bei der Ergänzungsenergie tritt allerdings ein neuartiges abstraktes elektrisches Arbeitsdifferenzial $\mathrm{d}W_\mathrm{ec} = \psi\,\mathrm{d}i$ auf.

The terms on the right-hand side of the equation are the differentials of the mechanical and electrical *work*. With the co-energy, however, there appears a new abstract electrical work differential $\mathrm{d}W_\mathrm{ec} = \psi\,\mathrm{d}i$.

Anders als die *totalen Differenziale* der inneren Energie und der Koenergie sind die Arbeitsdifferenziale $\mathrm{d}W_\mathrm{el}$, $\mathrm{d}W_\mathrm{me}$, $\mathrm{d}W_\mathrm{ec}$ *nicht total* oder *unvollständig*, was mathematisch bedeutet, dass nur die Energien E_i und E_c Zustandsfunktionen sind. Die Arbeitsdifferenziale hingegegen können zwar auch zu elektrischer Arbeit W_el bzw. mechanischer Arbeit W_me aufintegriert werden, diese Ergebnisse sind aber *keine* Zustandsfunktionen, sondern hängen vom speziellen Integrationspfad ab. Dies ist auch der Grund, zwischen den Begriffen *Arbeit* und *Energie* zu unterscheiden.

Unlike the total differentials of the internal energy and of the co-energy the work differentials $\mathrm{d}W_\mathrm{el}$, $\mathrm{d}W_\mathrm{me}$, $\mathrm{d}W_\mathrm{ec}$ are *not total* or *uncomplete*. In a mathematical sense this means that only the energies E_i und E_c are functions of the state variables. The work differentials can be integrated to the electrical work W_el or mechanical work W_me, respectively. These results, however, are not states functions, but depend on the particular integration path. This is the reason to distinguish between the terms *work* and *energy*.

Ein Vorteil der Koenergie zeigt sich in Situationen, in denen der Strom konstant gehalten wird, also $\mathrm{d}i = 0$. Für diesen Fall ist die Koenergieänderung direkt gleich der mechanischen Arbeit:

In case of constant current, $\mathrm{d}i = 0$, the differential of the mechanic work can be expressed by the change of the co-energy,

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c}\big|_{i=\mathrm{const.}} = \mathrm{d}W_\mathrm{me} = F\,\mathrm{d}x \tag{2.24}$$

Diese Situation ist in Fig. 2-5 dargestellt.

This situation ist depicted in Fig. 2-5.

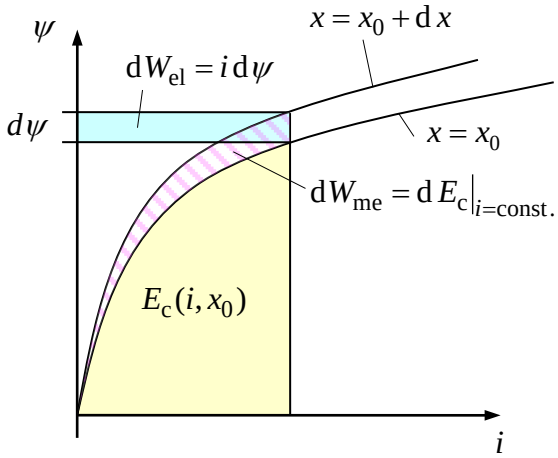


Fig. 2-5:
Interpretation der Arbeitsdifferenziale, $\mathrm{d}x > 0, \mathrm{d}i = 0$

Work differentials, case of $\mathrm{d}x > 0, \mathrm{d}i = 0$

Wird dagegen die Verschiebung konstant gehalten, $\mathrm{d}x = 0$, vgl. Fig. 2-6, folgt

In the other case the displacement is kept constant, $\mathrm{d}x = 0$, see Fig. 2-6, it follows

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}|_{x=\mathrm{const.}} = \mathrm{d}W_{\mathrm{ce}} = \psi\,\mathrm{d}i \tag{2.25}$$

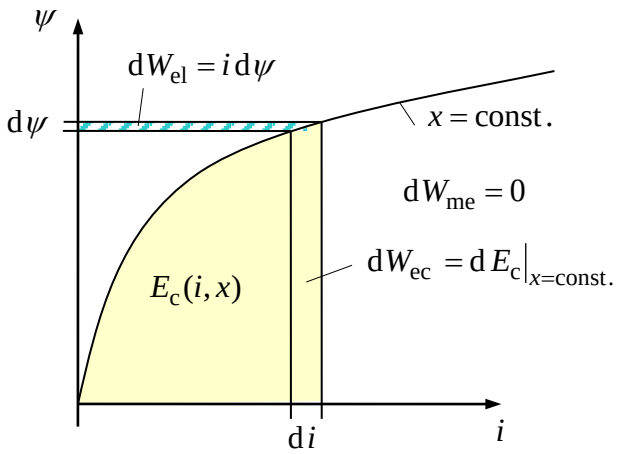


Fig. 2-6:
Interpretation der Arbeitsdifferenziale, $\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}i > 0$

Work differentials, case of $\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}i > 0$

Durch einen Wechsel zwischen diesen beiden infinitesimalen Schritten $\mathrm{d}x \neq 0, \mathrm{d}i = 0$ und $\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}i \neq 0$ lassen sich beliebige Trajektorien im Zustandsraum zusammensetzen, so dass die dabei auftretende elektrische und mechanische Arbeit sehr anschaulich inter-

With an alternating combination of these two infenitesimal steps $\mathrm{d}x \neq 0, \mathrm{d}i = 0$ and $\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}i \neq 0$, any arbitrary trajectory in the state space can be composed, resulting in a very vivid interpretation of the contributing electrical and mechanical work, see Fig. 2-7 and Fig. 2-8.

pretiert werden können, siehe Fig. 2-7 und Fig. 2-8.

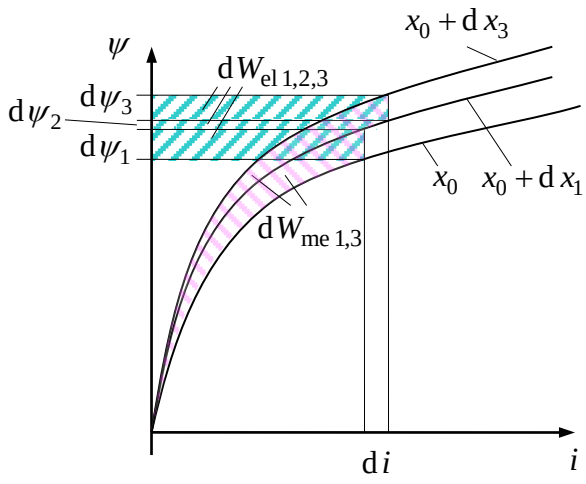


Fig. 2-7:
Zerlegung einer Trajektorie mit gleichzeitiger Veränderung von x, i und ψ in mehrere wechselnde infinitesimale Schritte mit $\mathrm{d}i = 0, \mathrm{d}x > 0$ und $\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}i > 0$

Decomposition of a trajectory with simultaneous changes of x, i, and ψ into several infinitesimal steps alternating between $\mathrm{d}i = 0, \mathrm{d}x > 0$ and $\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}i > 0$

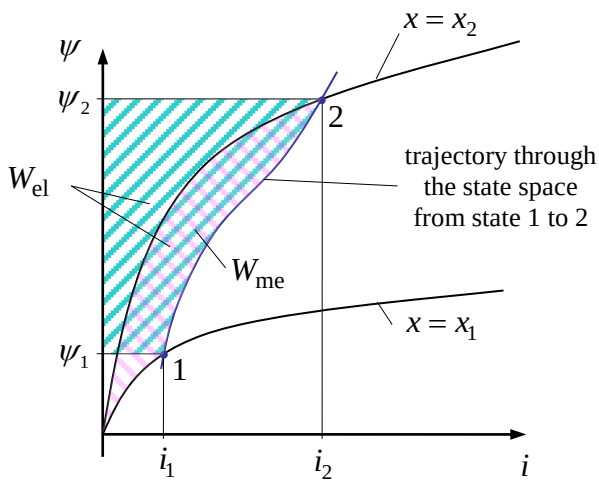


Fig. 2-8:
Mechanische und elektrische Arbeiten beim Übergang zwischen zwei Zuständen

Mechanic and electric works of the transition between two states

2.4 Die zweiten Ableitungen der Energie
The Second-Order Derivatives of the Energy

Sind die Energiefunktionale zweifach stetig differenzierbar — was bei technischen Systemen in der Regel der Fall ist — darf die Reihenfolge der Differentialtion vertauscht werden. Aus den gemischten 2. Ableitungen der Energie,

The energy functionals should be assumed to be two times continuouly differentiable — which is usually the case with common technical system. Then, the sequence of derivations can be exchanged. Thus, the mixed 2nd-order derivatives of the energy

$$\frac{\partial^2 E_\mathrm{i}}{\partial x\,\partial \psi} = \frac{\partial^2 E_\mathrm{i}}{\partial \psi\,\partial x} \tag{2.26}$$

folgt somit die *Reziprozitätsbeziehung*

yield the *reciprocity law*

$$\frac{\partial i(\psi, x)}{\partial x} = -\frac{\partial F(\psi, x)}{\partial \psi} \tag{2.27}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich eine wichtige Schlussfolgerung: Sollten die Ableitungen in (2.26) bzw. (2.27) Null sein, hieße das, die Kraft F hinge gar nicht von der elektromagnetischen Größe ψ und umgekehrt der Strom i nicht von der Verschiebung x ab. Es gäbe es also gar keine Wechselwirkung zwischen den elektromagnetischen und den mechanischen Größen. Das System wäre als Energiewandler bzw. als Aktor unbrauchbar. Ein echter elektromechanischer Wandler zeichnet sich demnach durch diese Bedingung aus:

There is an important conclusion arising from this equation: If the derivatives in in (2.26) or (2.27), resp., were equal zero that then the force F would not depend on the electromagnetic quantity ψ and, vice versa, the current i would not depend on the displacement x. Thus, there would not exist any interaction between the electromagnetic and the mechanical quantities so that the system would be unfeasible as electromechanic converter or actuator. A true electromagnetic converter is thus to be characterised by the condition

$$\frac{\partial^2 E_\mathrm{i}}{\partial x\,\partial \psi} = \frac{\partial^2 E_\mathrm{i}}{\partial \psi\,\partial x} \neq 0 \tag{2.28}$$

Die zweiten gemischten Ableitungen der Koenergie liefern eine weitere Beziehung:

The 2nd-order mixed derivatives of the co-energy yield another relation:

$$\frac{\partial^2 E_\mathrm{c}}{\partial x\,\partial i} = \frac{\partial^2 E_\mathrm{c}}{\partial i\,\partial x} \tag{2.29}$$

Es folgt

It follows

$$\frac{\partial \psi(i, x)}{\partial x} = \frac{\partial F(i, x)}{\partial i} \tag{2.30}$$

Ähnlich zu (2.28) kann auch anhand der gemischten Ableitungen der Koenergie ent-

Similar to (2.28), also the mixed derivatives of the co-energy can be used in order to

schieden werden, ob es sich um einen echten elektromechanischen Wandler handelt.

decide whether the system is a true electromechanical converter.

Die (differenzielle) *Steifigkeit* ist die Ableitung der Kraft nach der Verschiebung. Wegen des gewählten Erzeugerzählpfeilsystems auf der Seite der mechanischen Größen wird diese als negative Ableitung definiert. Dann resultiert die Steifigkeit z. B. einer konventionellen Feder wie gewohnt als positive Größe.

The (differential) *stiffness* is the derivative of the force with respect to the displacement. Due to the chosen generator counting system of the mechanical port, the stiffness is to be defined as negative derivative. This definition corresponds to the common definition of the stiffness of a convential spring as a positive quantity.

Bei konstantem Strom ergibt sich die Steifigkeit des Magnetlagers zu

With constant current, the magnetic stiffness results as

$$S_i = -\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{i=\text{const.}} = -\left.\frac{\partial^2 E_\text{c}}{\partial x^2}\right|_{i=\text{const.}} \tag{2.31}$$

Die Steifigkeit bei konstantem Fluss ist hingegen

However, the stiffness with constant magnetic flux is

$$S_\psi = -\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\psi=\text{const.}} = \left.\frac{\partial^2 E_\text{i}}{\partial x^2}\right|_{\psi=\text{const.}} \tag{2.32}$$

Die Steifigkeiten S_i und S_ψ haben im Allgemeinen unterschiedliche Werte.

Both stiffnesses S_i und S_ψ will have generally different values.

Die differenzielle Induktivität ergibt sich entsprechend aus

Accordingly, the differential inductance is being determined from the co-energy by

$$L = \left.\frac{\partial \psi}{\partial i}\right|_{x=\text{const.}} = \left.\frac{\partial^2 E_\text{c}}{\partial i^2}\right|_{x=\text{const.}} \tag{2.33}$$

aber auch aus der inneren Energie über

Alternatively, that can be done with the internal energy

$$\frac{1}{L} = \left.\frac{\partial i}{\partial \psi}\right|_{x=\text{const.}} = \left.\frac{\partial^2 E_\text{i}}{\partial \psi^2}\right|_{x=\text{const.}} \tag{2.34}$$

3 Magnetische Kreise
Magnetic Circuits

3.1 Electromagnetische Energiedichte
Electromagnetic Energy Density

Im vorangegangenen Kapitel wurde das System ausgehend vom *makroskopischen* Verhalten an den elektrischen Klemmen bzw. an der mechanischen Schnittstelle analysiert. Auf diese Weise konnten die innere Energie und die Ergänzungsenergie ermittelt und aus diesen Größen wichtige Zusammenhänge abgeleitet werden.

In the preceding chapter, the system was analysed based on the *macroscopic* behavior of its electrical terminals and the mechanical port. In this way, the internal energy and the co-energy was determined and important relations could be derived from these quantities.

Alternativ ist es auch möglich, mit einer *lokalen, mikroskopischen* Betrachtung der beteiligten Materialien zu beginnen und beispielsweise die innere Energie daraus abzuleiten.

Alternatively, it is also possible to start with a *local, microsc*opic examination of the involved materials and to derive, for example, the interal energy.

In linearen Materialien lautet die Dichte der elektrischen und magnetischen Energie abhängig von den vektoriellen Feldgrößen $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$

In linear material, the density of the electrical and magnetic energy depending on the vector fields $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ yields as

$$e_\mathrm{i} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}E^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu_\mathrm{r}H^2 \tag{3.1}$$

Im Fall nichtlinearen Verhaltens kann die Energie durch folgende Integration bestimmt werden. Dazu muss das Skalarprodukt zwischen den Feldstärke- und den Flussdichte-Vektoren gebildet werden. Im Fall isotroper Materialien kann dies anhand der Beträge der Vektoren D, E, B, H bewerkstelligt werden (rechter Teil der Formel):

In case of nonlinear behavior, the energy can be determined by the following integration. Generally, the scalar product between the field strength and flux density vectors has to be taken. In case of isotropic materials, this integration can be done using only the absolute values of the vectors D, E, B, H (right-hand side of the formula):

$$e_\mathrm{i} = \int \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{D} + \int \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{B} = \int E\,\mathrm{d}\,D + \int H\,\mathrm{d}\,B \tag{3.2}$$

Eine magnetische bzw. dielektrische Ergänzungsenergie lässt sich ähnlich wie bei der makroskopischen Betrachtung auch lokal einführen:

A magnetic and dielectric co-energy can, similarly to the macroscopic approach, also be defined locally:

$$e_\mathrm{c} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - e_\mathrm{i} \tag{3.3}$$

Die gesamte innere bzw. die Ko-Energie erhält man dann durch Volumenintegration:

The entire internal energy and the co-energy is then determined by a volume integral:

$$E_\mathrm{i} = \int_V e_\mathrm{i}\,\mathrm{d}V \quad , \quad E_\mathrm{c} = \int_V e_\mathrm{c}\,\mathrm{d}V \tag{3.4}$$

3.2 Magnetische Netzwerke
Magnetic Networks

Ein elektromagnetischer Aktor kann beispielsweise wie in Fig. 3-1 aufgebaut sein. Zur detaillierten Analyse kann u.a. eine Feldberechnung mit der Finite-Elemente Methode (FEM) durchgeführt werden. Mit dem berechneten Feld kann dann gemäß (3.8) die Energie und aus dieser weitere Größen wie die Kraft bestimmt werden.

A electromagnetic actor can be constructed, for example, as it is shown in Fig. 3-1. For a detailed analysis, the field could be computed with the help of Finite Element Analysis (FEA). From the computed field, the energy can be determined according to (3.8) and then also further quantities as the force.

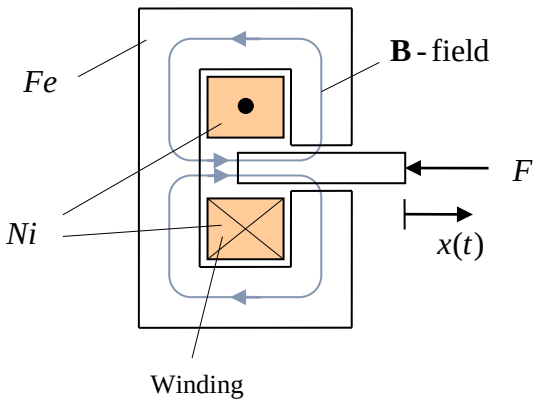


Fig. 3-1:
Skizze eines magnetischen Aktors, zwei Feldlinien sind exemplarisch dargestellt

Sketch of a magnetic actuator, two field lines are shown exemplarily

In vielen Fällen lässt sich statt der Feldberechnung mit aufwändigen FEM-Programmen auch einfache Näherungsrechnung durchführen. Dazu nehmen wir an, das magnetische Feld in einer Anordnung wie in Fig. 3-2 sei in einzelnen Abschnitten näherungsweise homogen. Ein solcher Bereich der Länge l_k und der Querschnittsfläche A_k ist in Fig. 3-2 dargestellt.

In many cases, however, the elaborate FEA computation can be replaced by a simple approximative calculation. For this approach the magnetic field of a stucture as shown in Fig. 3-2 is to be assumed approximatively homogeneous at least as in local pieces. Such an area of length l_k and cross section A_k is shown in Fig. 3-2.

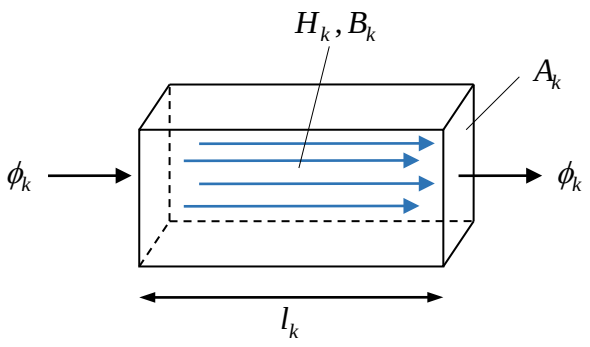


Fig. 3-2:
Element mit homogenem magnetischen Feld

Element with homogeneous magnetic field

Bei linearem Material gilt

With linear material it holds:

$$B_k = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}k} H_k \tag{3.5}$$

Außerdem führen wir den magnetischen Fluss durch dieses Element ein

Further, we introduce the magnetic flux through this element

$$\phi_k = A_k B_k \tag{3.6}$$

und den magnetischen Spannungsabfall an diesem Element

and the magnetic voltage, the MMF, across the element

$$\theta_k = l_k H_k \tag{3.7}$$

Damit lässt sich der *magnetische Widerstand*, die *Reluktanz*,

With that, the *magnetic reluctance* is defined as

$$R_k = \frac{\theta_k}{\phi_k} = \frac{l_k}{\mu_0 \mu_{\mathrm{r}k} A_k} \tag{3.8}$$

bzw. die *magnetische Leitfähigkeit* oder *Permeanz* definieren:

as well as the *magnetic conductivity* or *permeance*

$$\Lambda_k = \frac{1}{R_k} = \frac{\mu_0 \mu_{\mathrm{r}k} A_k}{l_k} \tag{3.9}$$

Da das magnetische Feld quellenfrei ist, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, folgt, dass an Verbindungsstellen zwischen derartigen Elementen die Summe aller Flussbeiträge null sein muss:

As the magnetic field is free of sources, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, it follows that at joints of such elements the sum of all merging fluxes must bei zero:

$$\sum_k \phi_k = 0 \tag{3.10}$$

In Anlehnung an ein elektrisches Netzwerk bezeichen wir diese Verbindungsstellen als *Knoten*. Die Gleichung (3.10) entspricht der *Knotenregel* bzw. dem ersten Kirchhoffschen Gesetz. Statt des elektrischen Stroms tritt hier der magnetische Fluss als *Durchgangs*- oder *Flussgröße* auf.

In the style of electric networks, we call these joints *nodes*. Equation (3.10) corresponds to the *node rule* or the first Kirchhoff's law. Instead of the electric current, the magnetic flux appears as the *flow* or *through variable*.

Der Ørsted-Ampèresche Durchflutungssatz lautet in lokaler bzw. integraler Form (∂A bezeichnet die Kontur der Fläche A)

Ampere's law reads in local and integral form as follows (∂A denotes the contour of the area A)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{A} \tag{3.11}$$

In der Magnetostatik bzw. bei Vorgängen, bei denen die Wellenausbreitung und Diffusionsvorgänge (Skineffekt) keine Rolle spielen, darf die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt werden. Dann ergibt das Feldstärkeumlaufintegral in einer Masche mit Elementen der Art Fig. 3-2

In magnetostatics and in situations where wave propagation and diffusion processes (skin effect) do not play a role, the displacement current can be neglected. Thus, the circulation integral of the field strength yields with elements of the kind of Fig. 3-2

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = \sum_k H_k l_k = \sum_k \theta_k = Ni \tag{3.12}$$

Die Gleichung hat also zunächst *nicht* die Struktur des zweiten Kirchhoffschen Gesetzes, da die Maschensumme der magnetischen Spannungen, die *across-Variablen*, nicht null, sondern gleich der Summe der eingeschlossenen Ströme ist. Wir können die gewünschte Form aber erzwingen, indem wir den Term des elektrischen Stroms der linken Gleichungsseite zuschlägen:

So far, the equation has *not* the structure of the second Kirchhoff's law as the sum of the magnetic voltages, the *across-variables*, is not zero but equals the sum of the encircled electric currents. However, we can force this desired format by placing the term with the electric currents on the left-hand side of the equation:

$$-\theta_0 + \sum_k \theta_k = 0 \ , \quad \theta_0 = Ni \tag{3.13}$$

Dann muss allerdings in der Masche eine zusätzliche magnetische Spannungsquelle θ_0 eingefügt werden.

Then, in the mesh an additional MMF θ_0 source has to be introduced.

Mit dieser Hilfsmaßnahme kann die Anordnung aus Fig. 3-2 durch ein magnetisches Netzwerk beschrieben werden, wobei jetzt die gleichen Regeln wie in einem elektrischen Netzwerk gelten, siehe Fig. 3-3.

With this auxiliary measure, the structure of Fig. 3-2 can be described by a magnetic network, where the same rules apply as in an electric network, see Fig. 3-3.

Die Reluktanz des veränderlichen Luftspalts ist $R_1(x)$. Man beachte, dass das Minuszeichen von $-\theta_0$ durch den umgekehrten Zählpfeil zum Ausdruck gebracht wird. Die Platzierung von θ_0 von innerhalb einer Masche ist willkürlich. Hier wurde die Spannungsquelle so platziert, dass sie in beiden Maschen auftritt, in denen sie berücksichtigt werden muss.

The reluctance of the variable airgap is $R_1(x)$. Please note that the minus sign of $-\theta_0$ is represented by the inverted counting arrow. The placement of θ_0 within a mesh is arbitratry. Here, a place was chosen so that the voltage source appears in both meshes where it has to be considered.

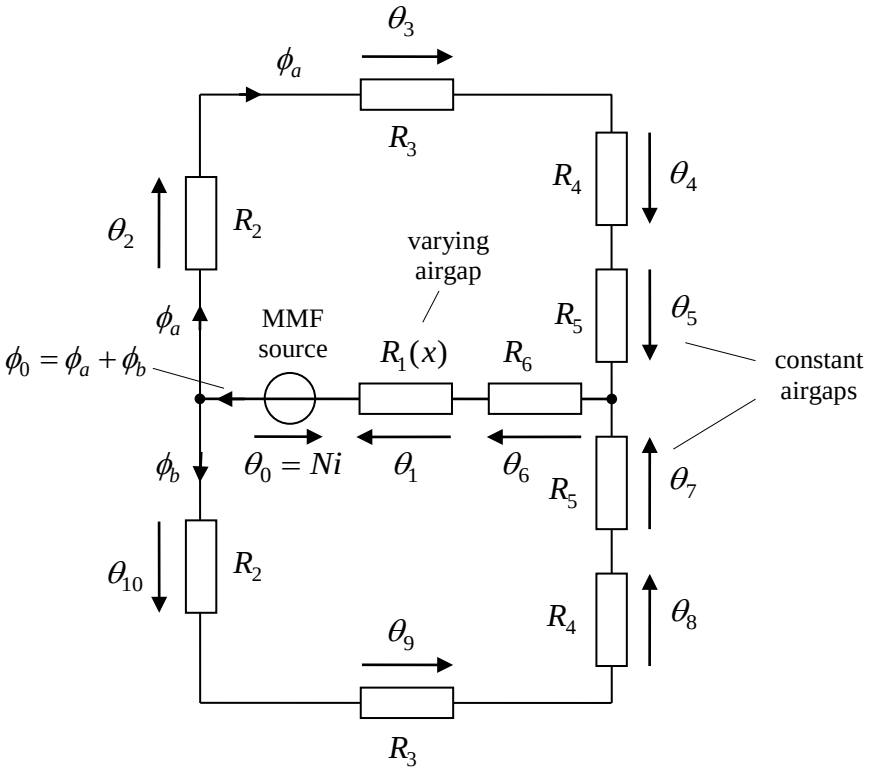


Fig. 3-3:
Magnetisches Netzwerk des Aktors aus Fig. 3-1

Magnetic network of the actuator of Fig. 3-1

Das magnetische Netzwerk kann zum Beispiel zur Berechnung der inneren Energie benutzt werden:

This magnetic network can be used, for example, to compute the internal energy by summing up

$$E_\mathrm{i} = \sum_k E_{\mathrm{i}\,k} \tag{3.14}$$

Im Fall linearer Materialen findet man verschiedene Darstellungen für die innere Energie:

In case of linear materials we can find several representations of the internal energy:

$$\begin{aligned} E_\mathrm{i} &= \sum_k E_{\mathrm{i}\,k} = \frac{1}{2}\sum_k B_k H_k V_k = \frac{1}{2}\sum_k A_k B_k l_k H_k = \frac{1}{2}\sum_k \phi_k \theta_k \\ &= \sum_k \Lambda_k \theta_k^2 = \sum_k \frac{\theta_k^2}{R_k} = \sum_k R_k \phi_k^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Eine wichtige Schlussfolgerung bezüglich der räumlichen Verteilung ergibt sich aus der letzten Darstellungsart der Energie: In den Elementen mit kleiner Reluktanz, typischerweise also solchen aus ferromagnetischem Material, wird fast gar keine Energie gespeichert, sondern dort, wo die Reluktanz groß ist, also z. B. im Luftspalt.

An important conclusion with respect to the spatial distribution results from the last representation of the energy. In elements with small reluctance, typically those made of ferromagnetic material, only litte energy is stored. The energy is mainly stored where the reluctance is large, e. g. within the airgap.

Auch lässt sich die Induktivität der Wicklung mit Hilfe des Netzwerks rasch berechnen:

Also the inductance of the winding can be quickly computed using the network:

$$L(x) = \frac{\psi}{i} = \frac{N\phi_0}{i} = N^2 \frac{\phi_0}{\theta_0} = \frac{N^2}{R_0(x)} \tag{3.16}$$

Hierbei ist R_0 die wirksame Reluktanz des gesamten magnetischen Netzwerks gegenüber der magnetischen Spannungsquelle:

Here, R_0 is the effective reluctance of the whole magnetic network against the magnetic MMF source:

$$\begin{aligned} R_0(x) &= R_1(x) + R_6 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \,||\, (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \\ &= R_1(x) + R_6 + \frac{1}{2}(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dies kann auch wieder zur Darstellung der Energie genutzt werden:

This can again be used to represent the energy:

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2L\psi^2} \tag{3.18}$$

Übersicht über die verwendeten Größen List of used quantities

Größe Quantity	Symbol	Maßeinheit Unit
Elektrische Spannung Electric Voltage	u	1V
Magnetische Flussdichte Magnetic flux density	B	$1\mathrm{T} = 1\mathrm{Vs/m}^2$
Magnetischer Fluss Magnetic flux	ϕ	1Vs
Magnetischer Verkettungsfluss Magnetic flux linkage	ψ	1Vs
Elektrischer Strom Electric current	i	1A
Magnetische Feldstärke Magnetic field strength	H	1A/m
Magnetische Spannung, magnetische Durchflutung Magnetic voltage, MMF [1)]	θ	1A
Induktivität Inductance	L	$1\mathrm{H} = 1\mathrm{Vs/A}$
Magnetischer Leitwert, Permeanz Magnetic conductivity, permeance	Λ	$1\mathrm{H} = 1\mathrm{Vs/A}$
Reluktanz Reluctance	R	1A/Vs
Energiedichte Energy density [2)]	e	$1\mathrm{J/m}^3 = 1\mathrm{N/m}^2$
Energie Energy	E	1J

[1)] In der Literatur findet man für die magnetische Spannung sehr häufig die Einheit „Ampere-Windungen“, was trotz vielfältiger Wiederholungen falsch ist: Auch wenn die magnetische Spannung durch mehrere Windungen aufgebaut wird, beibt ihre Maßeinheit einfach nur das Ampere, denn die Zahl der Windungen ist dimensions- und einheitenlos.

[2)] Die Dimension der Energiedichte enspricht tatsächlich der eines Drucks.

[1)] In literature, one finds often the unit “Ampere-turns“, which is, though often repeated, wrong. Even if the magnetomomotive force (MMF) is generated by several turns, the unit of the MMF is still only Ampere, because the number of turns is a pure number without physical dimension and unit.

[2)] The dimension of the energy density is in fact the same as of a pressure.

3.3 Magnetische Werkstoffe
Magnetic Materials

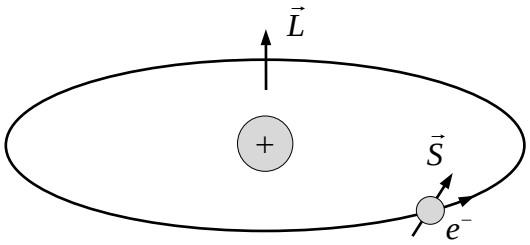


Fig. 3-4:
Naives Bohrsches Atommodell zu Erklärung des Drehimpulses bzw. des magnetischen Moments

Naïve Bohr's atomic model in order to explain the angular momentum and the magnetic momentum

Die Magnetisierung der Materie hat ihre physikalische Ursache in den magnetischen Momenten der Atome bzw. der daraus zusammengesetzen Moleküle oder Kristallgitter. Im Sinne des naiven Bohrschen Atommodells tragen die Elektronen über den mit ihrer Bahnbewegung verbundenen Bahndrehimpuls $\vec{L}$ hierzu bei. Hinzu kommt der Eigendrehimpuls (*Spin*) $\vec{S}$ des Elektrons, welcher mit der „Bahnbewegung" nichts zu tun hat. Der Betrag des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ kann nach den Gesetzen der Quantenmechanik nur bestimmte Vielfache des *Planckschen Wirkungsquantums* $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js annehmen,

The physical reason of magnetization of matter is the magnetic momentum of atoms, molecules, or crystal lattices. From the viewpoint of the naïve Bohr's atomic model, the electrons generate the magnetic momentum from their orbital angular momentum $\vec{L}$. However, that is completed by the intrinsic angular momentum $\vec{S}$ of the electron, called *spin*, which cannot be explained by Bohr's orbital movement. According to the laws of quantum mechanics, the magnitude of the total angular momentum $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ can only be an multiple of the *Planck's quantum of action* $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js,

$$J = M_j \frac{h}{2\pi} \tag{3.19}$$

wobei M_j ein ganz- oder halbzahliger Wert ist (0, 1/2, 1, 3/2, usw.). Mit dem Drehimpuls ist dann das magnetische Moment

where M_j is an integer or half-integer (0, 1/2, 1, 3/2, usw.). The angular momentum is joined with a magnetic momentum which is

$$M = \frac{e}{m_e} J = M_j \frac{eh}{2\pi\, m_e} \tag{3.20}$$

verbunden. Hierbei ist $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As die Elementarladung und $m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg die Masse eines Elektrons.

Here, $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ As is the elementary charge and $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg is the mass of an electron.

Zu einem gewissen Teil sind am magnetischen Moment eines Atoms auch die Spins

To some extent, also the spins of the atomic nuclei contribute to the total magnetic

der Atomkerne beteiligt, was bei der Magnetresonanztomographie (MRT) ausgenutzt wird. Die Materialeigenschaften magnetischer Werkstoffe resultieren aber im Wesentlichen aus den Eigenschaften der Elektronenhüllen. Je nach Art der beteiligten Atome und der sich daraus bildenden Kristallgitter orientieren sich die resultierenden magnetischen Gesamtmomente untereinander parallel oder antiparallel bzw. richten sich an einem äußeren Feld aus. Die unterschiedlichen Ausprägungen nennt man wie folgt:

momentum of an atom. That effect is being exploited by magnetic resonance imaging (MRI). The common magnetic behavior of matter, however, is determined mainly by the atom's electron shell only. Depending on the type of participating atoms or crystal lattices, the magnetic momenta of neighbouring atoms are interacting so that they may align in parallel or anti-parallel to each other or to an external field. The different types of magnetism are distinguished as follows:

Diamagnetismus: Auch wenn das magnetische Moment im Grundzustand Null ist, werden durch quantenmechanische Wechselwirkung mit dem äußeren Feld Dipole induziert, die dem äußeren Feld entgegenwirken und es abschwächen. Aus makroskopischer Sicht resultiert $\mu_r < 1$. Beispiele: Wasser, Kohlenstoff, Kupfer, Wismut.

Diamagnetism: Even if the magnetic momentum of atoms in the basic state is zero, an external field will excite magnetic dipoles by quantum mechanical interference. The direction of the dipoles is opposite to that of the external field which is then attenuated. From a macroscopic view, it results $\mu_r < 1$. Examples: Water, carbon, copper, bismuth.

Paramagnetismus: Atome und Moleküle mit einem von Null verschiedenen magnetischen Moment richten sich parallel zum äußeren Feld aus und verstärken dieses: $\mu_r > 1$. Akalimetalle und Seltene Erden zeigen paramagnetisches Verhalten.

Paramagnetism: Atoms and molecules with a non-zero magnetic momentum will align in parallel to an external field so that the field is enhanced: $\mu_r > 1$. Alkali metals and rare earths show such paramagnetic behavior.

Ferromagnetismus: Die magnetischen Momente der Atome in einem Kristallgitter sind in den sogenannten *Weissschen Bezirken* bereits ohne äußeres Feld untereinander parallel ausgerichtet. Typischerweise wechselt die magnetische Ausrichtung benachbarter Weissscher Bezirke, so dass sich die Magnetisierungen in einer makroskopischen Betrachtung aufheben. Durch ein äußeres Feld verschieben sich die Grenzen benachbarter Weissscher Bezirke, die *Bloch-Wände*. Bezirke mit einer Magnetisierung in Richtung des erregenden äußeren Feldes wachsen rasch an, während die anderen kleiner werden. Mit weiter zunehmendem äußerem Feld ändern die Weissschen Bezirke auch sprungförmig die Richtung ihrer Magnetisierung (*Barkhausen-Sprung*). Im Gegensatz zum Paramagnetismus reagiert das Material sehr stark auf äußere Felder: $\mu_r >> 1$. Dadurch entsteht auch der Effekt der *Remanenz*, dass also eine magnetische Vorzugsrichtung auch nach Wegfall des

Ferromagnetism: The magnetic momenta of the atoms in a lattice are parallely aligned within the *Weiss domains* already without any external field. Typically, the magnetic orientation of neighbouring Weiss domains varys so that, in total, the magnetization is cancelled out from a macroscopic viewpoint. With an external field, however, the borders of the Weiss domains, called *Bloch walls*, will move. Domains with a magnetization in parallel to the external field will grow rapidly while others are getting smaller. With further increasing external field, a Weiss domain may also abruptly change the direction of its magnetization (*Barkhausen jump*). Unlike paramagnetism, the material reacts extremely strongly to external fields which results in $\mu_r >> 1$. Another effect in ferromagnetic materials is the *residual magnetism (remanence)*, i.e. a magnetization is retained even after the external field is switched off. Best known representatives of ferromagnetic materials are iron, cobalt, and nickel.

äußeren Feldes zurückbleibt. Die bekanntesten Vertreter ferromagnetischer Materialien sind Eisen, Kobalt und Nickel.

Ferrimagnetismus: Bei Ferriten sind die Magnetisierungen benachbarter Atome im Kristallgitter jeweils antiparallel ausgerichtet. Sie haben sich daher teilweise auf.

Ferrimagnetism: Within *ferrites*, the magnetizations of neighboured atoms are aligned anti-parallel so that the magnetisms is partly compensated.

Tabelle einiger magnetischer Werkstoffe **Table of some magnetic materials**

Material	μ_r	$\frac{\hat{B}_{max}}{T}$	$\frac{f_{max}}{kHz}$
Ferrite / Ferrites (*NiZn*, *MnZn*)	10-2000	0,1-0,5	10-100000
Dynamobleche (*Fe*) Dynamo sheets (*Fe*)	1000-10000	1-1,5	0,5-20
Permalloy, MuMetall (*FeNi*)	10000-50000	1	0,1-100
Fe-Pulverkerne *Fe* powder cores	10-100	0,5-1,9	1000-350000
FeNi-Pulverkerne *FeNi* powder cores	20-300	1-1,5	100-2000
FeSiAl-Pulverkerne *FeSiAl* powder cores	25-120	1	200-10000

Die in der Tabelle angegebene maximale Flussdichte $\hat{B}_{max}$ ist keine harte Grenze, die nicht überschritten werden dürfte, sondern lediglich ein Hinweis für eine technisch sinnvolle Bemessung. Oberhalb der maximalen Flussdichte und oberhalb des empfohlenen Frequenzbereichs steigen die Verluste typischerweise sehr stark an.

The maximal flux density $\hat{B}_{max}$ specified in the table is not a hard limit that could not be exceeded. It is only a specification of usual technical rating. However, above the maximal flux density and above the recommended frequency range the losses are expected to increase rapidly.

Die Charakterisierung ferromagnetischer Materialien lediglich durch eine Permeabilitätszahl μ_r ist problematisch, weil ein durch μ_r charakterisierter linearer Zusammenhang zwischen Feldstärke und Flussdichte allenfalls für kleine Feldstärken gilt. Mit

The characterization of ferromagnetic materials only by their permeability μ_r is problematic, because that would give the impression of a linear relationship between field strength and flux density which may be approximately valid only for small values of

steigender Erregung zeigt sich eine zunehmende *Sättigung*. Besser wird das nichtlineare Materialverhalten durch eine Magnetisierungskennlinie beschrieben.

the field strength. With increasing excitation, the material is getting more and more saturated. Thus, it is recommended to describe the material's behavior better with the magnetization characteristic curve rather than by a simple permeability number.

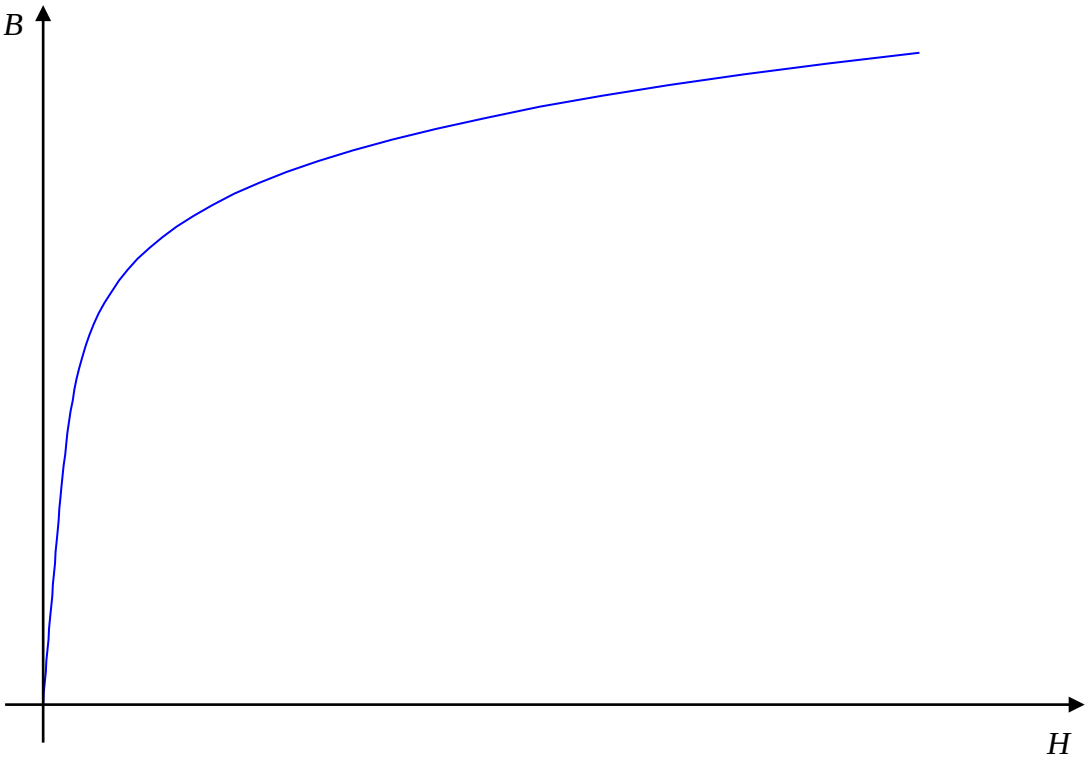


Fig. 3-5:
Magnetisierungkennlinie mit Sättigung

Magnetization characteristics with saturation

Bei der Berechnung magnetischer Kreise mit Elementen aus ferromagnetischem Material kann man durch eine grafische Methode schnell einen Überblick gewinnen. Besteht der magnetische Kreis aus einer Quelle $\theta_0 = Ni$ (magnetische Spannung der elektrischen Wicklung, auch als *magnetomotorische Kraft*[3], *magnetomotive force*, *MMF* bezeichnet), dem Widerstand eines Luftspalts R_L und einem Element aus ferromagnetischem Material, so kann die lineare Kennlinie von Quelle und linearem Luftspaltwiderstand zum Schnitt mit der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie des ferromagnetischen Materials gebracht

A graphical consideration may be appropriate for nonlinear magnetic circuits with ferromagnetic materials. Let the magnetic circuit consists of a magnetomotive (MMF) source $\theta_0 = Ni$, an airgap reluctance R_L, and an ferromagnetic element. The result for flux and MMF can easily be determined by graphical intersection of the linear characteristic of the source with linear airgap and the nonlinear magnetization characteristic. If the material characteristic is given as B vs. H, simply rescaling would transform it to a curve of flux ϕ vs. MMF θ. Alternatively, θ_0 und R_L can be transferred to *B-H-diagram*.

[3] Dieser Begriff wird eher im Englischen verwendet, im Deutschen ist er dagegen weniger gebräuchlich.

werden. Dafür ist die Materialkennlinie B über H in eine Kennlinie Fluss ϕ über Spannung θ umzurechnen oder umgekehrt die Größen θ_0 und R_L in entsprechende Materialgrößen umzurechnen.

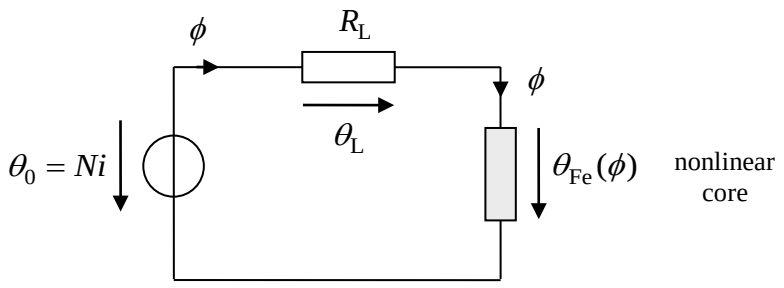


Fig. 3-6:
Nichtlinearer magnetischer Kreis — Nonlinear magnetic circuit

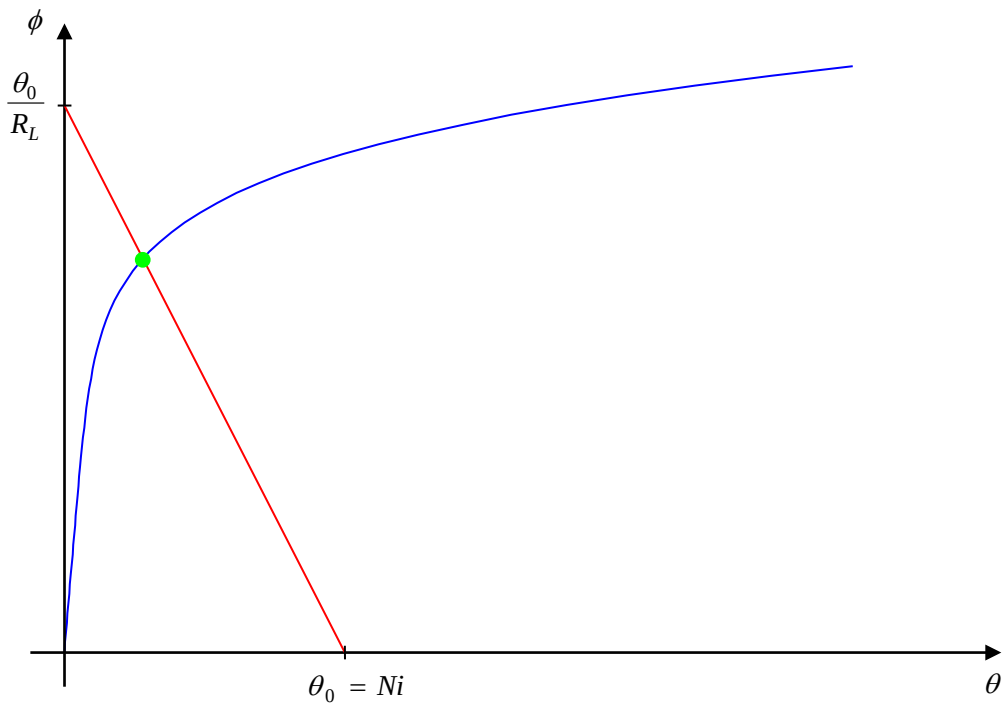


Fig. 3-7:
Schnittpunkt der Kennlinien der magnetischen Quelle mit linearem Innenwiderstand mit der Kennlinie der nichtlinearen Reluktanz

Intersection of the characteristic of the magnetic source with a linear internal resistance and the nonlinear characteristic

Alternativ: Bildung der gesamten magnetischen Spannung

Alternative way: Consider the total magnetomotive force

$$\theta = \theta_{\mathrm{L}} + \theta_{\mathrm{Fe}} = R_{\mathrm{L}}\phi + \theta_{\mathrm{Fe}}(\phi) \tag{3.21}$$

als neue nichtlineare Kennlinie. Die nichtlineare Kennlinie wird um die Luftspaltgerade geschert:

as new nonlinear characteristic. This new curve results from the original magnetization curve by shearing with the airgap line:

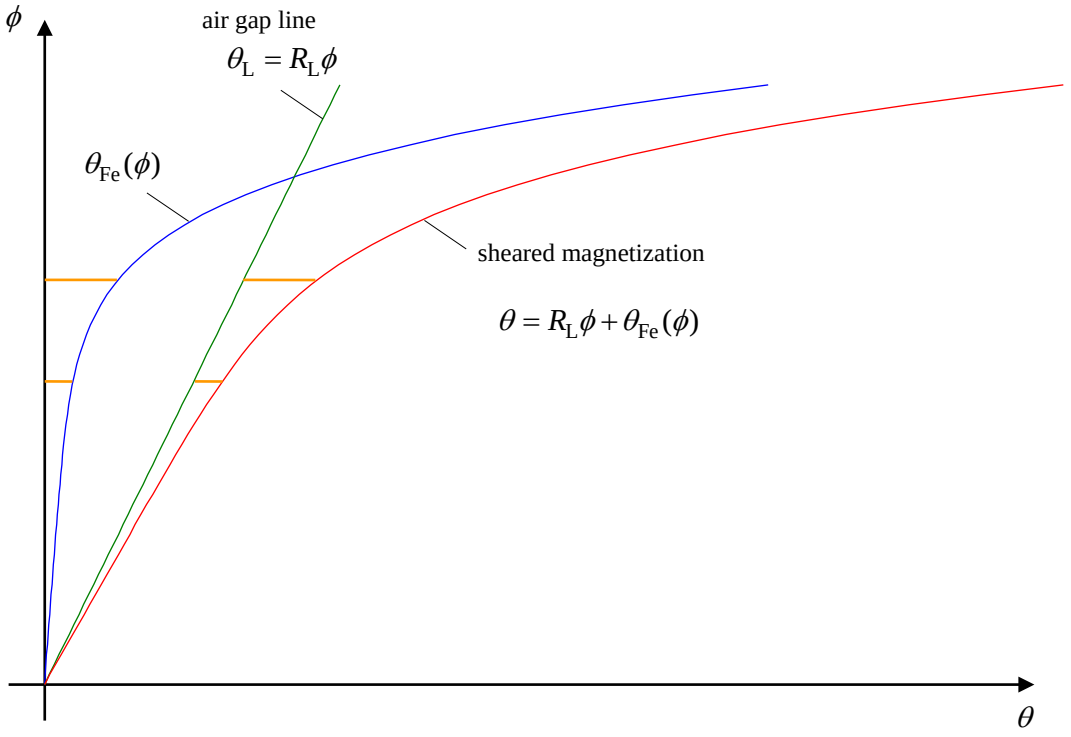


Fig. 3-8:
Gescherte Magnetisierungskennlinie

Sheared magnetization curve

Neben der Sättigung kann eine mehr oder minder stark ausgeprägte Hysterese auftreten. In diesem Fall gibt es keine *eindeutige* Magnetisierungskennlinie mehr. Vielmehr ist die Relation zwischen Feldstärke und Flussdichte sowohl von der Vorgeschichte als auch von der aktuellen Richtung der Änderung abhängig. Typischerweise untersucht man symmetrische Anregungen mit Variation der Aussteuerung.

Besides saturation, a more or less strong hysteresis will be observed. In this case, there is no longer an *unambiguous* magnetization curve, but only a relation between field strength and flux density where the actual values depend on the previous history as well as on the momentary direction of change. Typically, symmetrical cycles are considered.

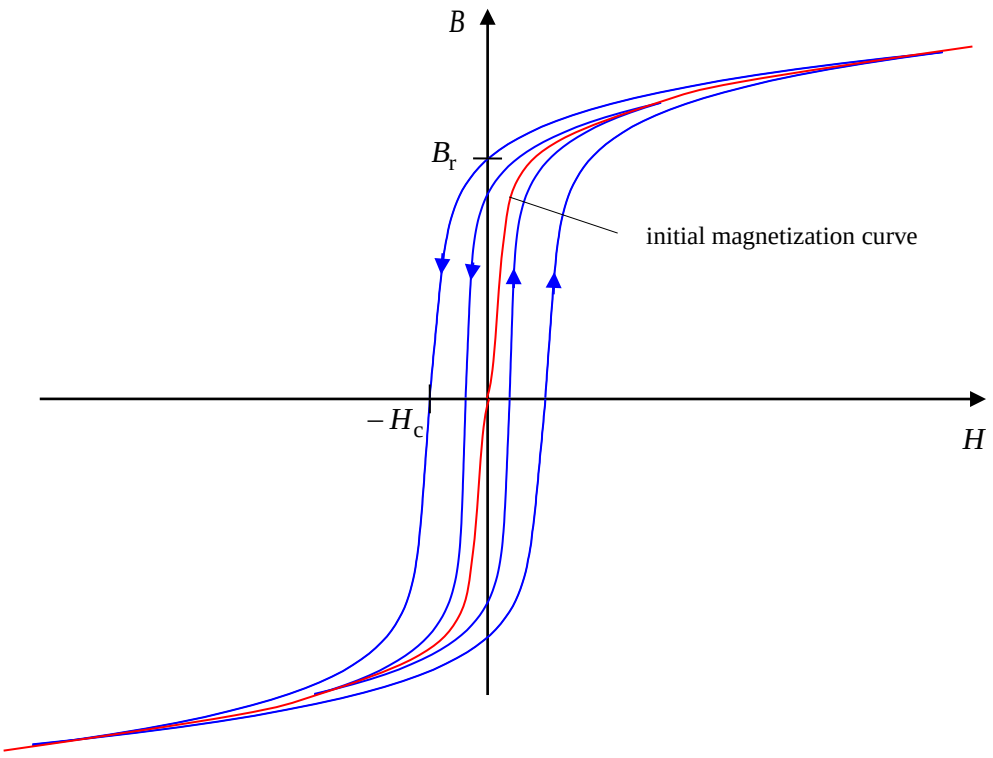


Fig. 3-9:
Hysterese

Hysteresis

B_r: remanente Flussdichte: Flussdichte bei Feldstärke Null

H_c: Koerzitivfeldstärke: (negative) Feldstärke bei Flussdichte Null

Die Kurve, die die Umkehrpunkte der aussteuerungsabhängigen Hystereseschleifen verbindet, heißt *Kommutierungskurve*. Der Kurve erstmaliger Magnetisierung aus einem unmagnetisierten Zustand heißt *Neukurve*.

Die Form der Hysterese hängt von der Vorgeschichte ab, die Gestalt ändert sich auch mit der Frequenz. Bei nicht vollständigem Umlauf bzw. bei asymmetrischer Aussteuerung ergeben sich weitere Abweichungen.

Um Materialien mit Hysterese zuverlässig zu entmagnetisieren, werden Wechselfelder mit langsam abnehmender Amplitude aufgeschaltet.

B_r: remanence flux density, i.e. the flux density at zero field strength

H_c: coercive field strength, i.e. the (negative) field strength at zero flux density

The curve connecting the reversal points of the hysteresis when varying the magnitude is called the *commutation curve*. The curve of the first magnetization starting from an unmagnetized condition is called *initial magnetization curve*.

The shape of the hysteresis depends on the previous history and on frequency. Further variations will result, if the cycle is not complete or asymmetrical.

In order to demagnetize such materials, AC fields with slowly decreasing magnitude are applied.

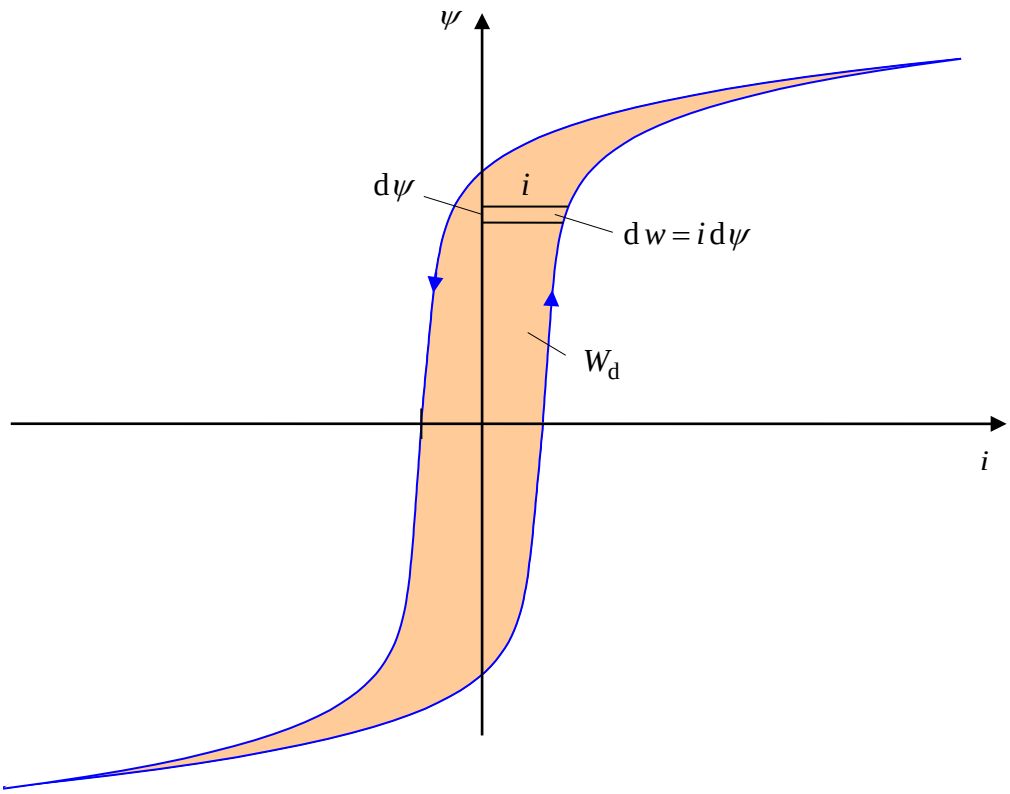


Fig. 3-10:
Magnetische Hysterese — Magnetic hysteresis

Wenn es keine *eindeutige* Kennlinie mehr gibt, sind die durch die Magnetisierungskennlinie bzw. Hysterese gebildeten Flächen zwar immer noch als geleistete Arbeiten, aber nicht mehr als innere Energie und Koenergie deutbar. Das Integral der Leistungen wird also vom vorigen Weg abhängig. Das Integral über einen Umlauf

If there is no longer an unambigious magnetization curve, the areas below or beside the curve can still be interpreted as work supplied to the material, but no longer as internal or co-energy. The work as integral of power is then dependent on the chosen path. The integral along one cycle,

$$W_\mathrm{d} = \int \mathrm{d}\,w = \int p(t)\,\mathrm{d}\,t = \int u(t)i(t)\,\mathrm{d}\,t = \int \dot{\psi}(t)i(t)\,\mathrm{d}\,t = \int i(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int \theta(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi \tag{3.22}$$

gibt die *Ummagnetisierungs-* oder *Hystereseverluste* an.

is the *hysteresis loss*.

Handelt es sich um periodische Vorgänge und ist T die Periodendauer eines Umlaufs, so sind die auf diese Zeit bezogene Verluste als mittlere Verlustleistung interpretierbar:

If the operation is periodic with T as period of one cycle, then the loss relative to time can be taken as a mean power dissipation

$$P_\mathrm{d} = \frac{W_\mathrm{d}}{T} = f\,W_\mathrm{d} \tag{3.23}$$

In erster Näherung sind die Verluste also der Frequenz proportional.

Thus, as a first-order approximization, the power dissipation is proportional to the frequency,

$$P_\mathrm{d} \sim f \tag{3.24}$$

Für höhere Frequenzen gilt dies nicht mehr, da sich zusätzlich auch die Gestalt der Hysterese frequenzabhängig ändert. Die Verluste können dann überproportional steigen:

For higher frequencies, however, this relation will not describe the behavior well, because the shape of the hysteresis will also change. Typically, the losses rise more than linearly:

$$P_\mathrm{d} \sim f^{e_f} \quad , \quad e_f \approx 1...2 \tag{3.25}$$

Für die Abhängigkeit von der Amplitude kann als grobe Näherung angesetzt werden:

An approximative empiric law describing the dependency on the magnitude is

$$P_\mathrm{d} \sim \hat{b}^{e_b} \quad ; \quad e_b \approx 2...3 \tag{3.26}$$

Die Zusammenfassung dieser beiden empirischen Gesetze führt zu der sogenannten *Steinmetz-Gleichung*

Both relations are brought together as the so-called *Steinmetz equation*

$$P_\mathrm{d} = K\, f^{e_f} \hat{b}^{e_b} \tag{3.27}$$

Die Steinmetz-Gleichung kann beispielsweise dafür benutzt werden, um Verluste, die in einem Materialdatenblatt beispielsweise nur für eine bestimmte Aussteuerung und Frequenz zu finden sind (typischerweise finden sich solche Angaben in der Maßheit W/kg), auf einen anderen Arbeitspunkt umzurechnen.

The Steinmetz equation can be used to calculate losses, based on the above coefficients which are given in a datasheet for all other operations points (magnitude of flux density and frequency). Material loss data are usually provided in units of W/kg.

3.4 Permanentmagnete
Permanent Magnets

Heute werden hauptsächlich Magnetmaterialien aus

- Neodym-Eisen-Bor (*NdFeB*)
- Samarium-Cobalt (*SmCo*) oder
- Ferriten (*BaFeO* oder *SrFeO*)

verwendet. Die ersten beiden Materialien sind Legierungen aus Seltenen Erden (Neodym *Nd* oder Samarium *Sm*), welche paramagnetisch sind, und ferromagnetischen Materialien. Sie werden als Selten-Erd-Magneten bezeichnet. *NdFeB* ist das derzeit leistungsfähigste Magnetmaterial. Die Rohstoffpreise Seltener Erden haben in den letzten Jahren einige Kapriolen geschlagen. Die größten Lagerstätten befinden sich in China.

Permanentmagnete aus Seltenen Erden korrodieren leicht. Sie müssen durch eine Oberflächenbeschichtung geschützt werden. Ferrite werden aufgrund der günstigen Kosten heute immer noch gern verwendet, sofern nicht höchste Energiedichten benötigt werden.

Der Herstellungsprozess von Hochleistungsmagneten ist technologisch sehr anspruchsvoll. Das pulverisierte Magnetmaterial wird bei definierter Temperatur und Dauer in der gewünschten Form gepresst und gesintert (d. h. verbacken, aber nicht vollständig aufgeschmolzen, da eine feinkristalline Struktur angestrebt wird). Nach dem Sintern folgt eine Aufmagnetisierung durch ein starkes äußeres Feld mittels eines starken Elektromagneten.

Qualitativ stellt sich das Materialverhalten von Permanentmagneten ähnlich wie bei ferromagnetischen Materialien als Hysterese dar. Die Form der Hysterese hat allerdings eine andere Form. Im Allgemeinen gilt der Zusammenhang zwischen Flussdichte B, Feldstärke H und Magnetisierung[4] M

Today's favoured permanent magnet materials are mainly

- Neodymium-iron-boron (*NdFeB*)
- Samarium-cobalt (*SmCo*) or
- Ferrites (*BaFeO* or *SrFeO*)

The first two materials are alloys from rare earths (neodymium *Nd* or samarium *Sm*) which are paramagnetic by theirselves, and ferromagnetic materials. They are called rare-earth-magnets. Today, *NdFeB* is the best performing magnetic material. The prices for raw material of rare earths have performed some capriols in the last years. The largest mineral deposits are located in China.

Permanent magnets from rare earths corrode rather quickly. Therefore, they must be protected by a surface coating. Ferrites are favoured even now due to their reasonable cost unless highest energy density is required.

The production process of highly performing magnets is very complex. The powdered magnet material is compressed in the desired form and sintered at a well defined temperature and duration. As a result, the powder particles were cemented, but not melted which retains the fine crystalline structure. After sintering the material is magnetized with the help of a strong electromagnet.

In principle, the behavior of permanent magnets is similar to those of ferromagnetic materials with hysteresis. The shape of the hysteresis, however, is rather different. In general, the relation between flux density B,

[4] Man beachte, dass in der Literatur der Begriff der Magnetisierung nicht einheitlich verwendet wird: Für die hier verwendeten Magnetisierung $M = B - \mu_0 H$ wird gern auch das Symbol J benutzt und dies als *magnetische*

magnetic field strength H, and magnetization[5] M is

$$B = \mu_0 H + M \tag{3.28}$$

Die Magnetisierung M ist bei Permanentmagneten im üblichen Betriebsbereich völlig gesättigt und dort nahezu konstant,

With permanent magnets, the magnetization M is during common operation nearly completely saturated and constant,

$$M = M_{\text{sat}} = \text{const}. \tag{3.29}$$

Das heißt, in diesem Bereich ist die differenzielle relative Permeabilität

Then, in such operation area, the differential permeability follows as

$$\mu_{\text{r}} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} = 1 \tag{3.30}$$

der Permanentmagnet verhält sich also bezüglich seines magnetischen Widerstands weitgehend wie Luft oder Vakuum.

i.e., the permanent magnet behaves with respect to its magnetic reluctance like air or vacuum.

Typische Werte der Sättigungsmagnetisierung sind

Typical values of the saturated magnetization are:

$$M_{\text{sat}} \approx \begin{cases} 1{,}2 - 1{,}4\ \text{T mit } NdFeB \\ 0{,}9\ \text{T mit } SmCo \\ 0{,}4\ \text{T mit ferrites} \end{cases}$$

Dann resultiert für die remanente Flussdichte unmittelbar

From this, the remanence flux density results directly as

$$B_{\text{r}} = M_{\text{sat}} \tag{3.31}$$

und für die Koerzitivfeldstärke

and the coercive field strength as

$$H_{\text{c}} = \frac{M_{\text{sat}}}{\mu_0} \tag{3.32}$$

sofern dieser Punkt noch im reversiblen Bereich liegt.

where this point is assumed to lie within the reversible area.

Polarisation bezeichnet. Als Magnetisierung *M* findet man dann häufig die alternative Definition $M = B/\mu_0 - H$.

[5] Please note that in literature the term magnetization is not used uniformly. For the magnetization as used here, $M = B - \mu_0 H$, you will find also the symbol J and the term *magnetic polarization.* As magnetization, the definition $M = B/\mu_0 - H$ is also common.

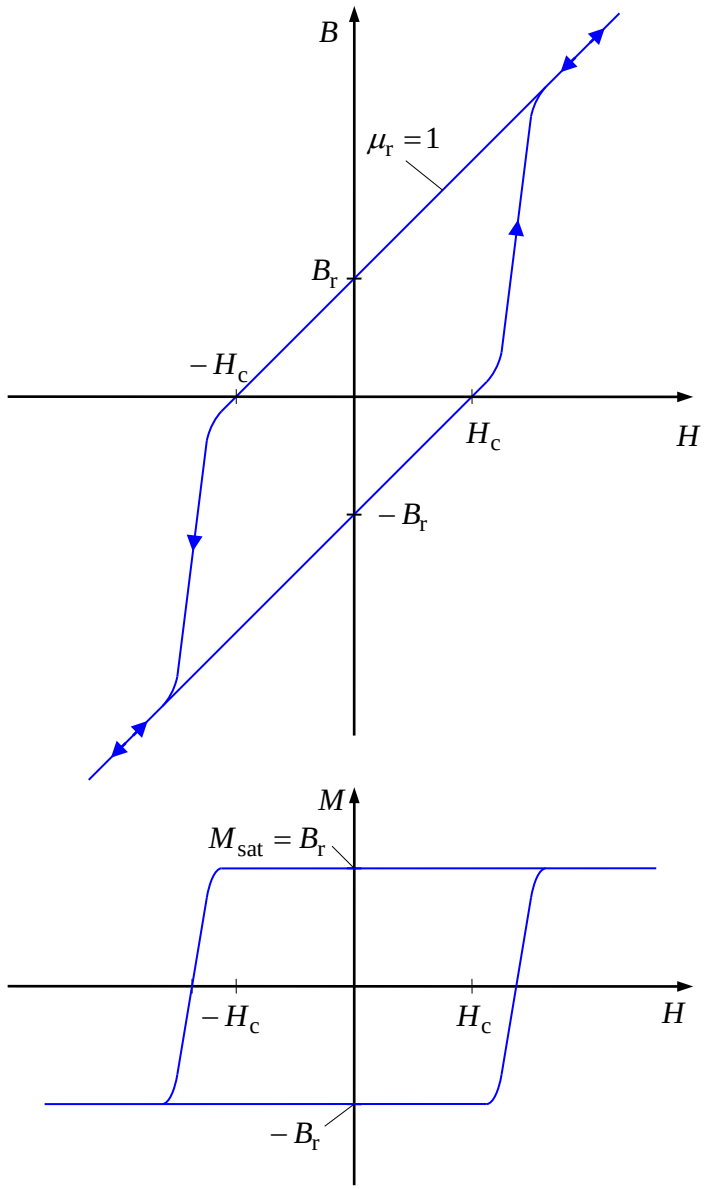


Fig. 3-11:
Typische Magnetisierungskennlinie eines Permanentmagnetmaterials

Typical magnetization curves of a permanent magnet material

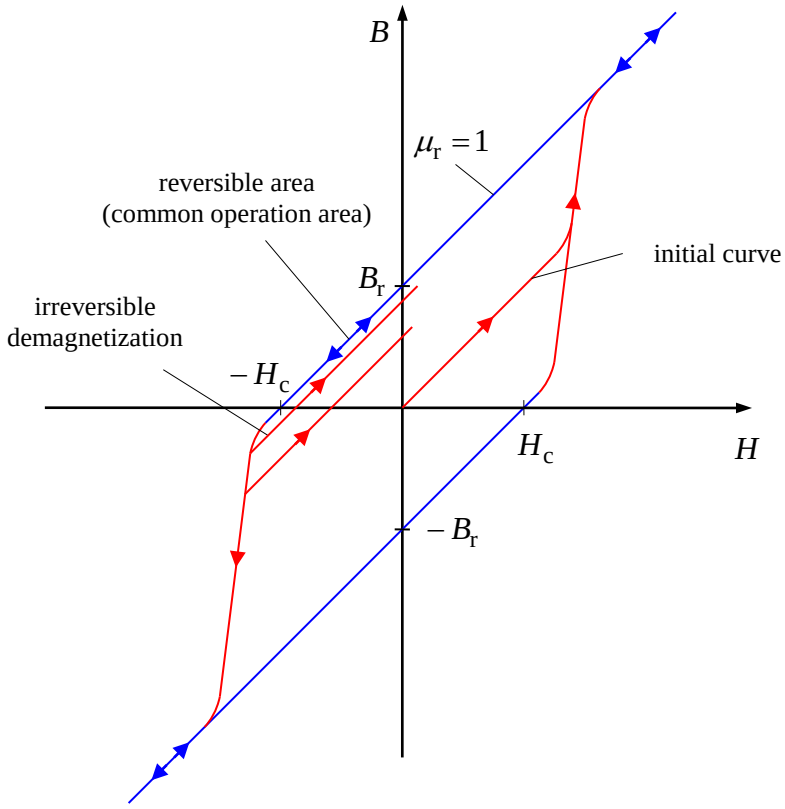


Fig. 3-12:
Reversible und irreversible Entmagnetisierung

Reversible and irreversible demagnetization

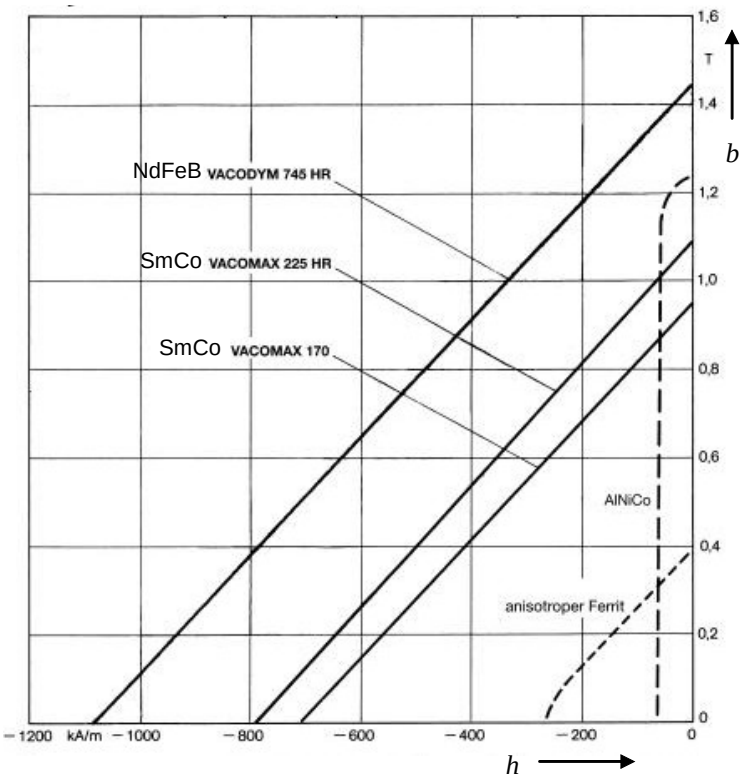


Fig. 3-13:
Kennlinien verschiedener Permanentmagnetmaterialien für den reversiblen Bereich (Quelle: Vacuumschmelze)

Characteristics of various permanent magnet materials within the reversible operation area (source: Vacuumschmelze)

Die Magnetisierungskennlinie ist stark temperaturabhängig, die Magnetisierung nimmt mit steigender Temperatur ab. Wird eine maximale Temperatur nicht überschritten, stellt sich bei Abkühlung die ursprüngliche Magnetisierung wieder her. Allerdings verschiebt sich mit steigender Temperatur auch das „Knie“ der irreversiblen Magnetisierung in der Kennlinie immer mehr nach rechts und oben, so dass die Gefahr einer Schädigung wächst.

The magnetization curve depends considerably on the temperature. The magnetization decreases with increasing temperature. If a maximum temperature is not exceeded, the initial magnetization will return after cooling down. With increasing temperature, however, the “knee” of the irreversible magnetization will be shifted towards right and upwards so that the danger of irreversible demagnetization grows.

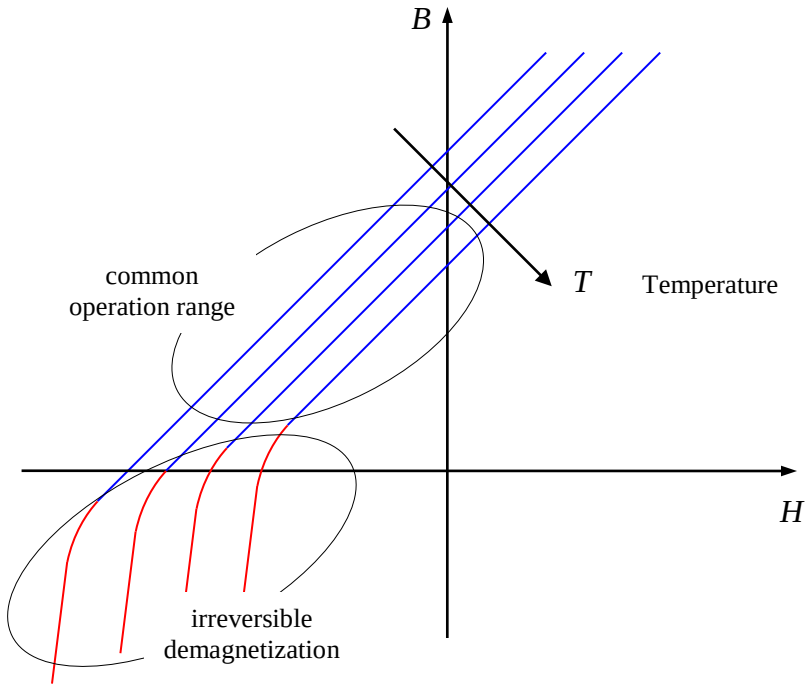


Fig. 3-14:
Temperaturabhängigkeit der Magnetisierungskennlinie

Variation of the magnetization curve vs. temperature

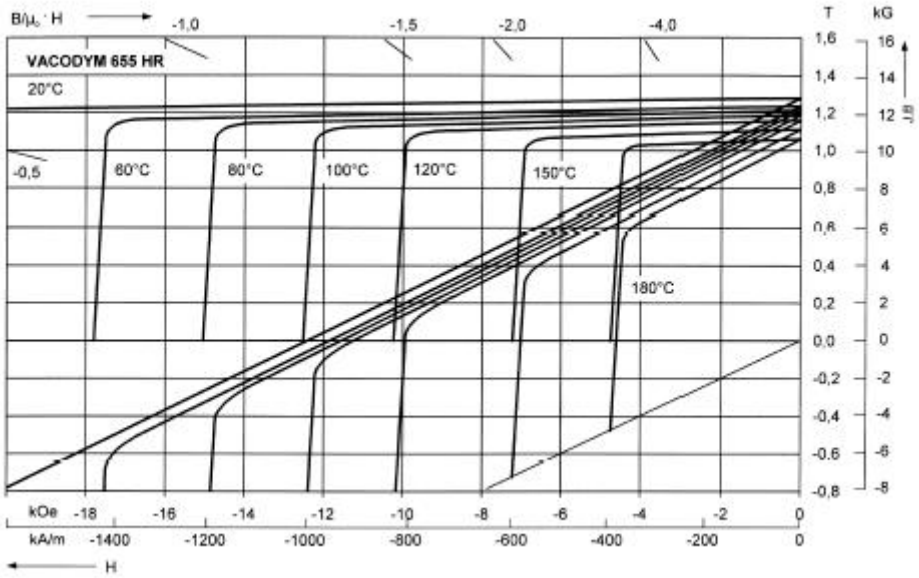


Fig. 3-15:
Kennlinien der Flussdichte und Magnetisierung über Feldstärke für ein *NdFeB*-Material in Abhängigkeit von der Temperatur (Quelle: Vacuumschmelze)

Characteristics of flux density and magnetization vs. field strength of *NdFeB*-material in dependency on the temperature (source: Vacuumschmelze)

Für ein gerades prismatisches Element aus Permanentmagnetmaterial mit dem Querschnitt A_{PM} und der Länge l_{PM} folgt bei angenommenen homogenen Feldern die Kennlinie des magnetischen Flusses über der magnetischen Spannung durch Umskalierung der Materialkennlinie,

Assume homogeneus fields in a straight prismatic element of permanent material of cross section A_{PM} and length l_{PM}. Then flux and magnetomotive force are immediately obtained from flux densitiy and field strength via

$$\phi = A_{\mathrm{PM}} B \quad , \quad \theta = l_{\mathrm{PM}} H$$

Ebenso lassen sich der Remanenzfluss und die koerzitive magnetische Spannung definieren:

Similarly, we can define a remance flux and coercive magnetomotive force as

$$\phi_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{PM}} B_{\mathrm{r}} \quad , \quad \theta_{\mathrm{c}} = l_{\mathrm{PM}} H_{\mathrm{c}} \, .$$

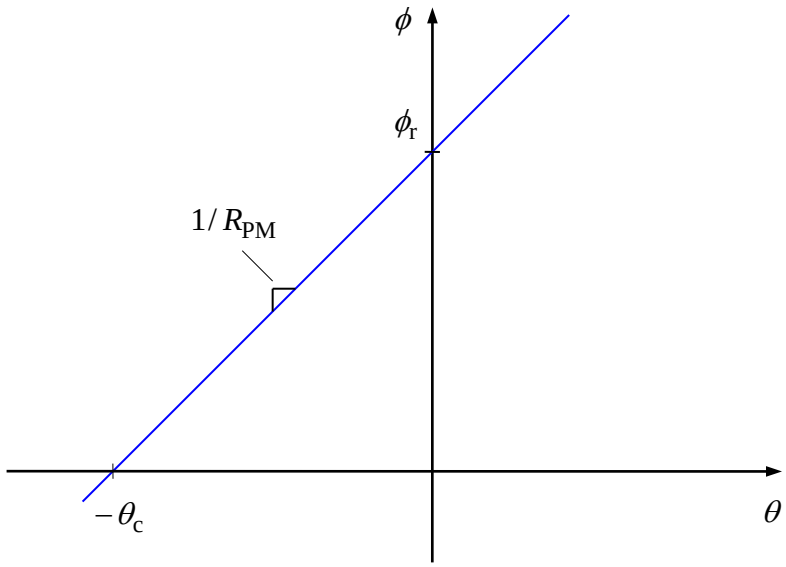


Fig. 3-16:
Kennlinie des magnetischen Flusses über der Spannung für ein Magnetelement

Characteristics of the magnetic flux vs. magnetomotive force for a magnetic element

Im reversiblen Bereich der Magnetisierungskennlinie folgt der Zusammenhang zwischen Fluss und magnetischer Spannung

In the reversible operation area, the relation between flux and magnetomovie force can be written as

$$\theta = R_{\mathrm{PM}} \left(\phi - \phi_{\mathrm{r}} \right) \tag{3.33}$$

oder

or

$$\phi = \frac{\theta + \theta_{\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{PM}}} \tag{3.34}$$

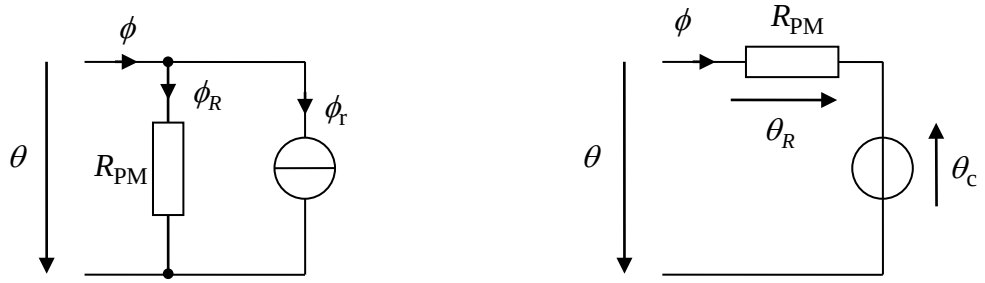
Hierbei ist

Here,

$$R_{\mathrm{PM}} = \frac{\theta_{\mathrm{c}}}{\phi_{\mathrm{r}}} = \frac{l_{\mathrm{PM}}}{\mu_0 A_{\mathrm{P}M}} \tag{3.35}$$

der magnetische Widerstand des Magneten. Diese Gleichungen lassen sich als magnetische Ersatzschaltbilder entweder (s. u. Fig. 2-19 (a)) mit einer Flussquelle und parallelem Innenwiderstand oder (b) mit Durchflutungsquelle und seriellem Innenwiderstand interpretieren.

is the magnetic reluctance of the magnet. These equations can also interpreted as equivalent circuit diagrams, either (Fig. 2-19 (a)) with a flux source and an internal paralleled resistance as shown in the following figure part (a), or with a MMF source with internal resistance in series (b).



(a)
ECD with
flux source

(b)
ECD with
MMF source

Fig. 3-17:
Ersatzschaltbilder eines Permanentmagneten

Equivalent circuit diagrams of a magnet

Ersatzmodelle für magnetisierte Materialien in einer lokalen Feldbetrachtung

Gehen wir von den Maxwellschen Gleichungen in vektorieller Form[6] aus:

Equivalent models for magnetized materials from a local field consideration

Consider Maxwell's equations in vector form[7]:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\mathrm{e}}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Das magnetische Material werde durch die Beziehung

The magnetic material is described by the equation

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \tag{3.36}$$

[6] Fette gerade Symbole bezeichnen Vektoren
[7] Upright bold symbols denote vectors

mit der Magnetisierung $\mathbf{M}$ berücksichtigt. Schreiben wir

with magnetization $\mathbf{M}$. Let us write

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} = \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \tag{3.37}$$

Die so eingeführte Größe $\mathbf{H}_0$ ist als die magnetische Feldstärke zu verstehen, die sich bei Vorgabe der Flussdichte $\mathbf{B}$ statt im magnetisierten Material im Vakuum einstellen würde. Wir setzen dies in das Oerstedsche Gesetz ein:

The new introduced quantity $\mathbf{H}_0$ can be understood as magnetic field strength that results from a given flux density $\mathbf{B}$ if vacuum is assumed instead of magnetized material. Let us insert this representation into Oersted's law:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H}_0 - \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3.38}$$

Mit

With

$$\mathbf{J}_\mathrm{m} = \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \tag{3.39}$$

folgt

it follows

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{J} + \mathbf{J}_\mathrm{m} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3.40}$$

Das lässt sich so interpretieren, dass das ursprüngliche magnetisierte Material durch Vakuum und einer gedachten zusätzlichen Stromdichte $\mathbf{J}_\mathrm{m}$ ersetzt wird, die aus den Wirbeln der ursprünglichen Magnetisierung berechnet wird. Dies lässt sich sehr anschaulich interpretieren: Nimmt man ein homogen magnetisiertes Material $\mathbf{M} = \mathrm{const.}$ an, ist $\mathbf{J}_\mathrm{m}$ im Innern als auch außerhalb des Materials Null. Auf Oberfläche gibt es aber eine sprungförmige Änderung der Magnetisierung, die über die Differentiation zu einer Ersatz-Flächenstromdichte der Größe $\mathbf{M}/\mu_0$ führt. Die Richtung dieser Stromdichte ist senkrecht zur Flächennormalen und zur ursprünglichen Magnetisierung. Dass es sich wirklich um einen zumindest gedanklich physikalisch korrekt interpretierbaren elektrischen Strom handelt, der im stationären Fall quellfrei sein muss, wird durch Überprürfung von der Diverenz

This representation can be understood in such a way that the original magnetized material is being substituted by vacuum and an additional electrical current of density $\mathbf{J}_\mathrm{m}$ that is calculated from the curls of the original magnetization. That is rather demonstrative: If homogeneously magnetised material is considered, $\mathbf{M} = \mathrm{const.}$, then $\mathbf{J}_\mathrm{m}$ is equal zero within the material as well as outside. On the surface, however, there is a step-like change between constant and zero magnetization. Thus, via differentiation, we will get an equivalent surface current density of $\mathbf{M}/\mu_0$. The direction of this current density is orthogonal to the surface normal and also orthogonal to the original magnetization. To verify that this equivalent current is really a physically correct electrical current, the divergence must be zero as it is acknowledged by

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{m}} = -\nabla \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} = \mathbf{0} \tag{3.41}$$

bestätigt. Dieser Strom zirkuliert also in der Oberfläche. Man spricht von einem *Mantelstrom*. Die Stärke dieses Mantelstroms kann direkt aus den Materialkennlinien abgelesen werden. Sie ist gleich der koerzitiven Feldstärke. Bei Seltenerdmagneten liegen die Werte in der Größenordnung

So, the current will circulate within the surface and is called *surface current*. The value of this surface current is the same as the coercive field strength and can be directly obtained from the material characteristics. With rare earth materials it is in the range of

$$\frac{M}{\mu_0} = H_{\mathrm{c}} \approx 1000\ \mathrm{kA/m} = 1000\ \mathrm{A/mm} \tag{3.42}$$

Wollte man also einen Seltenerdmagneten durch eine elektrische Spule ersetzen, kann man natürlich keinen idealen Flächenstrom realisieren, sondern muss eine gewisse Spulendicke in Kauf nehmen. Geht man von einer in Kupfer technisch erreichbaren Stromdichte von $10\ \mathrm{A/mm^2}$ aus (was bereits gute Kühlung erfordert), führt das also zu einer Spulendicke von $100\,\mathrm{mm}$, um einen derartigen Mantelstrom zu realisieren. Dabei ist der Füllfaktor der Wicklung noch nicht berücksichtigt. Dieser Vergleich zeigt die enorme Stärke moderner Magnetmaterialien. Praktisch können Permanentmagnete mit Abmaßen von nur einigen Millimetern aufgrund der eben abgeschätzen Dicke der Spulen kaum durch solche ersetzt werden.

In reality, a surface current can be realized with an electric coil only approximatively, because a coil would require non-zero thickness for its wires. Assuming a technical current density in copper of $10\ \mathrm{A/mm^2}$ (that requires already a good cooling), a thickness of the coil of $100\,\mathrm{mm}$ would result in order to allow the above mentioned current. The filling factor is even not considered in that calculation. This comparison shows the enormous strength of modern magnet materials. In practice, it is nearly impossible to replace magnets of size of some millimeters by realistic electric coils.

Statt der Substitution der Magnetisierung durch Ersatzströme ist auch eine andere Ersatzvorstellung möglich. Schreiben wir diesmal die Materialbeziehung als

Instead of subsitution by equivalent currents it is possible to derive an alternative equivalent representation. Let us write the material relation as

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{M} \tag{3.43}$$

Hier ist $\mathbf{B}_0$ die sich zu einem gegebenen Feldstärkefeld $\mathbf{H}$ im Vakuum einstellende Flussdichte. Wird diese Gleichung nun in die Quellengleichung eingesetzt, folgt

Here, $\mathbf{B}_0$ is the flux density that would result from a field strength $\mathbf{H}$ in vacuum. This equation is inserted into the equation of vanishing magnetic sources:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B}_0 + \nabla \cdot \mathbf{M} \tag{3.44}$$

bzw.

or

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = \rho_{\mathrm{m}}, \tag{3.45}$$

mit einer gedachten magnetischen Ladungsdichte

where can be seen as an equivalent magnetic charge density.

$$\rho_{\mathrm{m}} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \tag{3.46}$$

Bei einem Material mit konstanter Magnetisierung ist im Innern $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. Es treten also nur Ersatz-Flächenladungen auf der Oberfläche auf. Die Größe der Flächenladung ergibt sich direkt aus der Magnetisierung $\mathbf{M}$. Da das Ersatz-Flussdichtefeld $\mathbf{B}_0$ nicht mehr quellenfrei ist, sind die Feldlinien eines stationären Magnetfeldes nun nicht mehr wie gewohnt geschlossen, sondern laufen wie beim elektrostatischen Feld von einer positiven magnetischen Ladung zu einer negativen. Diese Vorstellung hat zwar keine technisch-physikalische Relevanz[8], kann aber durchaus für die numerische Feldberechung nützlich sein. Die durch diese Vorstellungen eingeführten Ersatzfelder

With a material with constant magnetization, $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ holds within the material. So, equivalent magnetic sources will result only on the surface of the material. The magnitude of the charge density results directly from the original magnetization $\mathbf{M}$. Since the equivalent flux density field $\mathbf{B}_0$ is no longer free of magnetic sources, the lines of the stationary field are no longer closed as it is common with the original magnetic field, but starting from a positive magnetic charge and ending in a negative charge. This equivalent model has no technical or physical relevance[9]. However, that method could be benefical for the purpose of numerical field computation. The fields introduced by this equivalent model

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} - \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H}$$

unterscheiden sich von den ursprünglichen Feldern $\mathbf{H}$ bzw. $\mathbf{B}$ nur innerhalb des magnetisierten Materials. Außerhalb des Materials sind sie diesen gleich, da dort $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ gilt.

differ from the original fields $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$, respectively, only within the magnetized material. Outside they equal the original fields, since $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ holds outside of the material.

[8] Einige Theoretiker halten die Existenz magnetischer Einzelladungen für möglich. Bislang konnten diese aber nicht nachgewiesen werden.

[9] Some theorists consider magnetic single charges possibly existent. So far, such particles have not been detected.

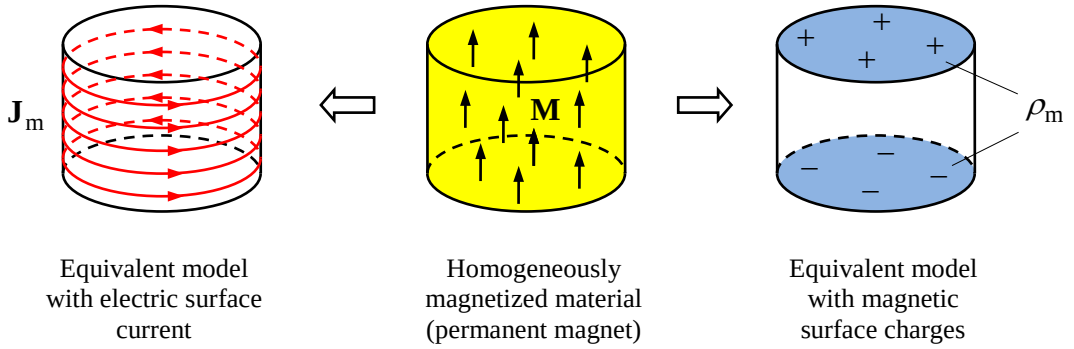


Fig. 3-18:
Äquivalente Ersatzmodelle für magnetisiertes Material

Equivalent models for magnetized material

Energie des Permanentmagneten

Bei einer Hysterese lassen sich die durch die Magnetisierungskennlinie gebildeten Flächen zwar noch als geleistete Arbeiten interpretieren, aber nicht mehr einfach zu Energien wegunabhängig integrieren, da bei irreversiblen Vorgängen, insbesondere beim vollständigen Umlauf um die Hysterese, die aufgebrachte äußere Arbeit als Ummagnetisierungsverluste verloren gehen. Im reversiblen Bereich der Kennlinie ist die Kennlinie aber eindeutig. Hier kann die Energie identifiziert werden, wobei der Bezugspunkt (die Integrationskonstante) willkürlich gewählt werden kann. Die innere Energie ist

Energy of the permanent magnet

With a hysteresis, the areas given by the magnetization curve can be seen as work to or from the system, however, these areas have no longer the meaning of an energy which is the path-independent integral of power. With a complete cycle of the hysteresis, the total work is dissipated as magnetic loss. However, if the consideration is restricted to the reversible part of the magnet, the magnetization curve is unambiguous and the energy can be defined. The reference point, a zero level or integration constant, can be chosen arbitrarily. The inernal energy is then

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2}(\phi - \phi_\mathrm{r})\theta = \frac{R_\mathrm{PM}}{2}(\phi - \phi_\mathrm{r})^2 = \frac{\theta^2}{2R_\mathrm{PM}} \tag{3.47}$$

Für die Koenergie empfiehlt sich eine leicht veränderte Definition

For the co-energy, a modified definiton like

$$E'_\mathrm{c} = \phi\theta - E_\mathrm{i} + \frac{1}{2}\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c} = E_\mathrm{c} + \frac{1}{2}\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c}, \tag{3.48}$$

wobei die zusätzliche Konstante $\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c}/2$ nur das Bezugsniveau verschiebt, was aber ohne weiteres möglich ist, da stets nur Änderungen oder Ableitungen der Energiefunktionale relevant sind.

is more advantageous where an additional constant $\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c}/2$ changes only the reference level, which can be done without consequences since only changes or derivatives of the energy functionals are relevant.

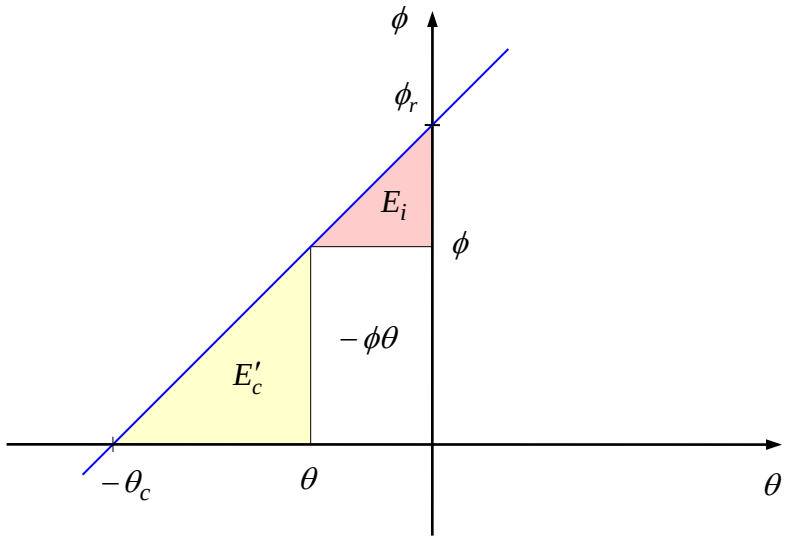


Fig. 3-19:
Innere Energie und Koenergie bei einem Permanentmagneten

Internal energy and co-energy with a permanent magnet

Schreiben wir jetzt (3.48) als

If we arrange now (3.48) like

$$\frac{1}{2}\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c} = E'_\mathrm{c} + E_\mathrm{i} - \phi\theta\,, \tag{3.49}$$

gelingt eine geometrische Interpretation wie in Fig. 3-19 gezeigt: E_i und E'_c können als Flächen zweier Dreiecke verstanden werden, die sich, um die Rechteckfläche $-\phi\theta$ ergänzt, zu einem größeren Dreieck der Fläche $\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c}/2$ zusammenfügen. Bei derartigen geometrischen Interpretationen ist Vorsicht geboten, da geometrische Flächeninhalte immer positiv sind, während algebraische Größen auch negativ sein können. Hier sind aber E_i and E'_c stets positiv und auch $-\phi\theta$ ist für die Beispielsituation positiv. Als Formel ergibt sich für die Koenergie also

we can immediately visualize the relation as shown in Fig. 3-19: E_i and E'_c can be understood as areas of two triangles which merge with the rectangle $-\phi\theta$ to a larger triangle of area $\phi_\mathrm{r}\theta_\mathrm{c}/2$. One must be always careful with such geometric interpretation as in geometry areas count always positive but algebraic quantities may also be negative. However, E_i and E'_c are positive in any case and also $-\phi\theta$ is positive in the shown example. As a formula, the co-energy results then as

$$E'_\mathrm{c} = \frac{1}{2}(\theta+\theta_\mathrm{c})\phi = \frac{1}{2R_\mathrm{PM}}(\theta+\theta_\mathrm{c})^2 = \frac{R_\mathrm{PM}}{2}\phi^2 \tag{3.50}$$

Es ist interessant die Formeln (3.47), (3.50), insbesondere die jeweils letzten Darstellungen, mit den beiden Ersatzschaltbildern aus Fig. 3-17 zu vergleichen. Die innere Energie E_i can verstanden werden als die Energie der Reluktanz R_L des Ersatzschaltbildes mit Flussquelle, Fig. 3-17 (a), während die Koenergy durch die Energie von

It is interesting to compare the formulae, particularly the latter forms in both formulae, with the two circuit diagrams shown in Fig. 3-17. The inner energy E_i can be understood as the energy of the reluctance R_L of the flux-source equivalent circuit diagram, Fig. 3-17 (a), while the co-energy can represented

R_L im Ersatzschaltbild mit Durchflutungsquelle, Fig. 3-17 (b), repräsentiert wird.

as the energy of R_L of the MMF source diagram Fig. 3-17 (b).

Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet

Besteht ein magnetischer Kreis aus einem Permanentmagneten, einem Luftspalt und einem hochpermeablen Kern, kann der Kernwiderstand meist gegenüber denen der Luft und des Permanentmagneten vernachlässigt werden, was zum unten stehenden Ersatzschaltbild führt. Der sich im Kreis einstellende Zustand kann grafisch skizziert werden, wobei zu beachten ist, dass üblicherweise die Kennlinien des Permanentmagneten in Verbraucherzählrichtung gezeichnet werden, so dass für den Luftspalt dann das Erzeugersystem verwendet werden muss, also

Magnetic circuit with permanent magnets

If a magnetic circuit consists of a permanent magnet, an airgap, and a high-permeable core, the reluctance of the core can usually be neglected compared with the reluctance of the airgap and the magnet. This leads to the equivalent circuit shown below. The resulting magnetic condition can be easily sketched graphically. It should be noted that the characteristics of the permament magnet are commonly given in a consumer counting direction so that the counting system of the other part of the circuit, i.e. the airgap should be the generator counting system resulting in a negative sign in the equation

$$\theta = -R_L \phi, \tag{3.51}$$

so dass die Luftspaltgerade wie gezeichnet resultiert. Diese grafische Konstruktion kann sowohl in einem Diagramm ϕ über θ als auch direkt in der Materialkennlinie des Permanentmagneten B über H durchgeführt werden. Im ersten Fall werden die Geradensteigungen durch die magnetischen Widerstände bestimmt. Im letzten Fall führt man zuvor zweckmäßigerweise den *Permeanzquotienten*

then, the airgap line results with a negative slope as depicted in the figure. The graphical construction can be done in a diagram ϕ vs. θ as well as directly in the material's characteristsic curve of the permanent magnet B vs. H. In the first case, the slopes of the lines are given by the magnetic reluctances. In the second case, it is appropriate to introduce first a *permeance ratio*

$$\alpha = \frac{R_{PM}}{R_L} = \frac{A_L l_{PM}}{A_{PM} l_L}, \tag{3.52}$$

in, der die Steigung der Luftspaltgeraden im Verhältnis zur Steigung der Materialkennlinie des Permanentmagneten angibt.

which is the ratio of the reluctances or the ratio of the slopes of the materials' characteristic lines.

Extremfälle:

- Kein Luftspalt, also $\alpha = \infty$: dann ist der Fluss $\phi = \phi_r$ und die magnetische Spannung $\theta = 0$.
- Großer Luftspalt im Verhältnis mit dem Magneten, also $\alpha = 0$: Dann ist $\theta = \theta_c$ und der Fluss $\phi = 0$.

Extreme cases:

- No airgap, i.e. $\alpha = \infty$: Then, the flux is $\phi = \phi_r$ and the magnetomotive force is $\theta = 0$.
- Large airgap compared to the size of the magnet, i.e. $\alpha = 0$: Then, MMF is $\theta = \theta_c$ and the flux $\phi = 0$.

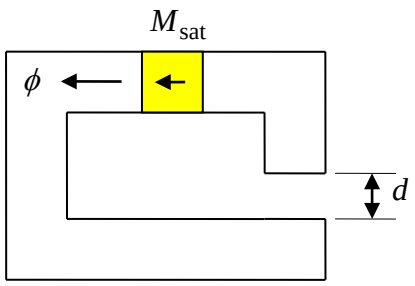


Fig. 3-20:
Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet

Magnetic circuit with permanent magnet

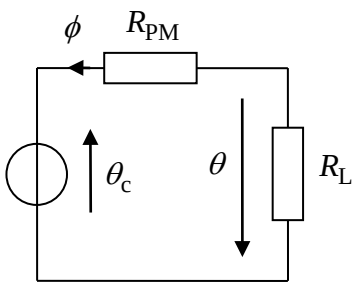


Fig. 3-21:
Ersatzschaltbild eines magnetischen Kreises mit Permanentmagnet und Luftspalt

Equivalent magnetic circuit with permanent magnet and airgap

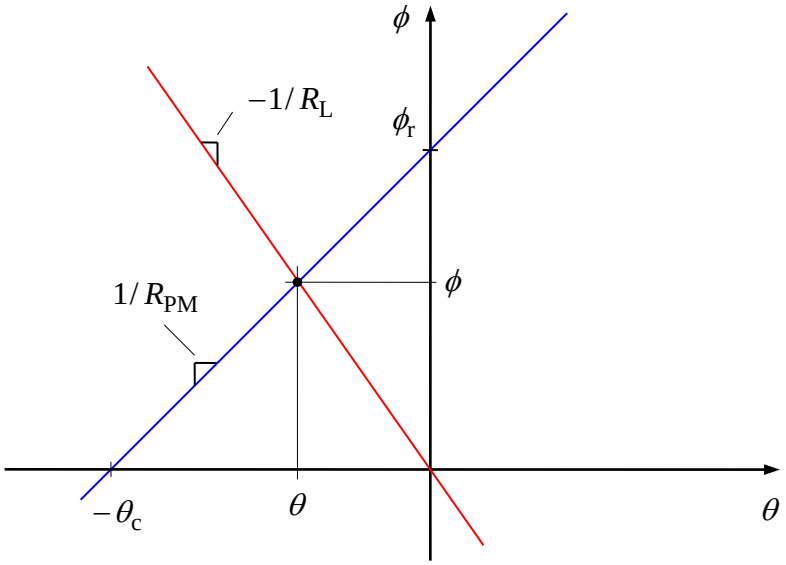


Fig. 3-22:
Schnitt der Kennlinien von Magnet und Luftwiderstand

Intersection of the characteristic lines of magnet and airgap

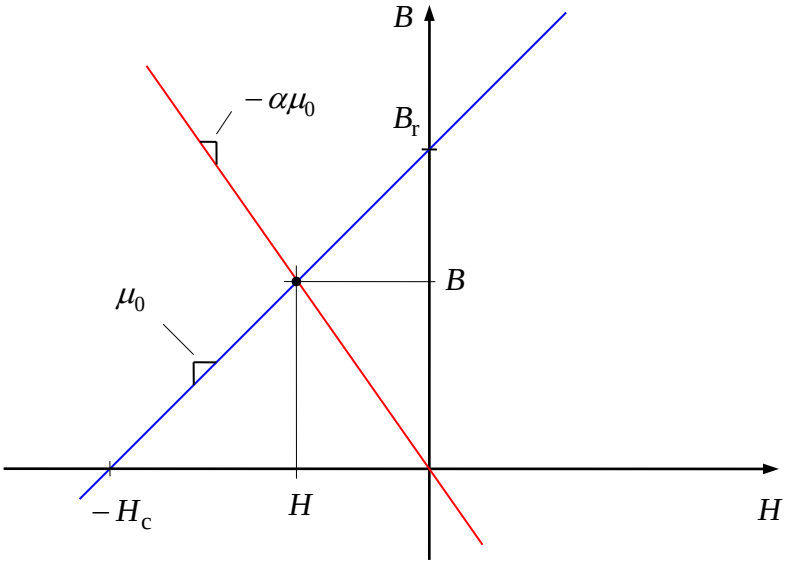


Fig. 3-23:
Schnitt der Materialkennlinien von Magnet und Luft

Intersection of the characteristic curves of magnet and air

4 Magnetlager
Magnetic Bearing

4.1 Magnetisches Joch
Magnetic Yoke

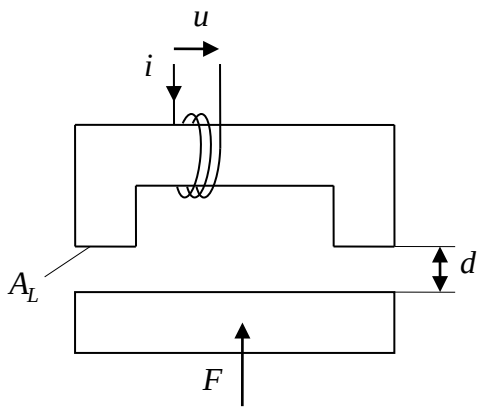


Fig. 4-1:
Prinzipbild eines elektromagnetischen Aktors

Principle diagram of an electromagnetic actuator

Anwendung der allgemeinen Gleichungen auf eine Anordnung wie skizziert. Annahme:

Apply the general equation to a system as represented. Assume

$$R_{\mathrm{Fe}} << R_{\mathrm{L}} \,, \tag{4.1}$$

was bei

which is ensured if

$$l_{\mathrm{Fe}} << \mu_{\mathrm{rFe}} l_{\mathrm{L}} \tag{4.2}$$

gewährleistet ist. Die Magnetische Spannung und somit auch die Energie im Eisen wird vernachlässigt. Die Gesamtluftspaltlänge ist

The magnetomotive force and thus also the energy within the iron core is negleted. The total airgap length is

$$l_{\mathrm{L}} = 2d \,. \tag{4.3}$$

Die Magnetische Spannung der elektrischen Spule sei

The magnetomotive force of the electric coil is

$$\theta_0 = Ni \tag{4.4}$$

Es ergibt sich

It results

$$E_c(i,d) = \psi i - \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}\phi\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{\theta_0{}^2}{R_L} = \frac{N^2 i^2 A_L \mu_0}{4d} \tag{4.5}$$

$$F(i,d) = \frac{\partial E_c}{\partial d} = -\frac{N^2 i^2 A_L \mu_0}{4d^2} = -\frac{1}{2d}\phi\theta_0 = -\frac{1}{2}2A_L b_L h_L = -p_L 2A_L \tag{4.6}$$

mit dem magnetischem Druck

whith the *magnetic pressure*

$$p_L = \frac{1}{2}b_L h_L = -\frac{F}{2A_L} \tag{4.7}$$

Steifigkeit:

Stiffness:

$$S_i(i,d) = -\frac{\partial F}{\partial d} = -\frac{N^2 i^2 A_L \mu_0}{2d^3} = \frac{2F(i,d)}{d} = -\frac{4p_L A_L}{d} < 0 \tag{4.8}$$

Die Steifigkeit ist negativ, also instabil.

The stiffness is negative, i.e. unstable.

Verkettungsfluss:

Flux linkage:

$$\psi(i,d) = \frac{N^2 i A_L \mu_0}{2d} \tag{4.9}$$

Induktivität:

Inductance:

$$L(i,d) = \frac{N^2 A_L \mu_0}{2d} \tag{4.10}$$

4.2 Anordnung mit zwei Jochen
Construction with two Yokes

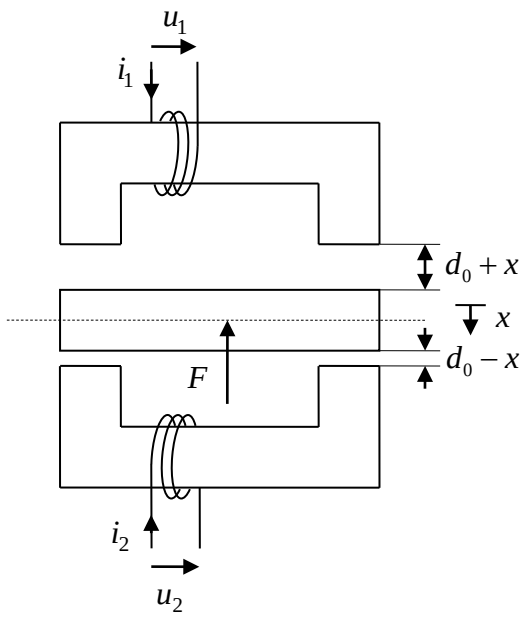


Fig. 4-2:
Magnetlager mit zwei Jochen — Magnetic bearing with two yokes

$$d_1 = d_0 + x$$
$$d_2 = d_0 - x \tag{4.11}$$

$$F_1(i_1, x) = -\frac{N^2 i_1^2 A_L \mu_0}{4\left(d_0 + x\right)^2}$$
$$F_2(i_2, x) = \frac{N^2 i_2^2 A_L \mu_0}{4\left(d_0 - x\right)^2}$$

$$\begin{aligned} F(i_1, i_2, x) &= F_1(i_1, x) + F_2(i_2, x) \\ &= -\frac{N^2 A_L \mu_0}{4}\left[\frac{i_1^2}{\left(d_0 + x\right)^2} - \frac{i_2^2}{\left(d_0 - x\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$S_i(i_1, i_2, x) = -\frac{N^2 A_L \mu_0}{2}\left[\frac{i_1^2}{\left(d_0 + x\right)^3} + \frac{i_2^2}{\left(d_0 - x\right)^3}\right] < 0$$

4.3 Regelung eines Magnetlagers mit Vorspannung durch separate Wicklung Control of a Magnetic Bearing with Bias Excitation by a Separate Winding

Idee: Beaufschlagung beider Spulen mit einem gleichen konstanten Strom I_0, dem ein Gegentaktanteil Δi überlagert wird:

Idea: Apply a bias current I_0 to both coils and superimpose a differential mode current Δi:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_0 + \Delta i \\ i_2 &= I_0 - \Delta i \end{aligned} \tag{4.13}$$

Diese Aufteilung der Ströme in einen gemeinsamen konstanten Anteil und einen variierenden Differenzanteil kann auch direkt durch die Wicklungsanordnung bewerkstelligt werden:

This superposition of a constant common mode DC current and a varying differential mode current can be carried out directly by the winding scheme as shown in the figure:

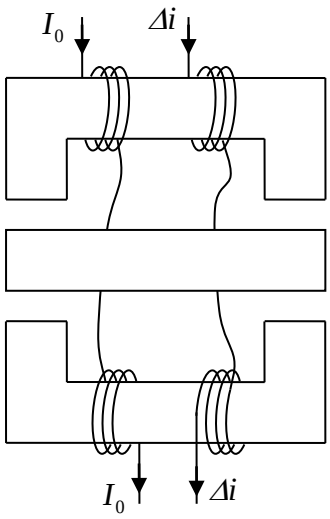


Fig. 4-3:
Magnetlager mit separaten Wicklungen für Konstantstrom und „Regelungsstrom“

Magnetic bearing with separate windings for constant bias current and a “control current”

$$F(\Delta i, x) = -\frac{N^2 A_L \mu_0}{4}\left[\frac{(I_0 + \Delta i)^2}{(d_0 + x)^2} - \frac{(I_0 - \Delta i)^2}{(d_0 - x)^2}\right] \tag{4.14}$$

Linearisierung um den Arbeitspunkt $x = 0$ und $\Delta i = 0$:

Linearization at the operation point $x = 0$ and $\Delta i = 0$:

$$F(\Delta i, x) = \Delta i \left.\frac{\partial F}{\partial \Delta i}\right|_{\substack{\Delta i=0\\ x=0}} + x \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{\Delta i=0\\ x=0}}$$

$$= -\frac{N^2 A_\mathrm{L} \mu_0 I_0}{d_0^2} \Delta i + \frac{N^2 A_\mathrm{L} \mu_0 I_0^2}{d_0^3} x = -C \Delta i - S_i x \tag{4.15}$$

mit

with

$$C = \frac{N^2 A_\mathrm{L} \mu_0 I_0}{d_0^2} \quad \text{und} \quad S_i = -\frac{N^2 A_\mathrm{L} \mu_0 I_0^2}{d_0^3} \tag{4.16}$$

Die Konstante C ist ein Strom-Kraft-Übertragungsverhältnis. Bei rotierenden Maschinen wird diese Konstante als *Motorkonstante* bezeichnet.

The constant C is the force-to-current ratio. With rotating machines this constant is well known as the *motor constant*.

Der Gesamtfluss für die den Strom Δi führende Wicklung ergibt sich zu

The total flux of the winding carrying the current Δi results as

$$\psi_\Delta(\Delta i, x) = \frac{N^2 (I_0 + \Delta i) A_\mathrm{L} \mu_0}{2(d_0 + x)} - \frac{N^2 (I_0 - \Delta i) A_\mathrm{L} \mu_0}{2(d_0 - x)} \tag{4.17}$$

Die Induktivität dieser Spule ist

The inductance of this coil is

$$L_\Delta(x) = \frac{\partial \psi_\Delta}{\partial \Delta i} = N^2 A_\mathrm{L} \mu_0 \left[\frac{1}{2(d_0 + x)} + \frac{1}{2(d_0 - x)} \right] \tag{4.18}$$

Für kleine x ist die Induktivität in 1. Näherung konstant und kann durch den Wert bei $x = 0$ approximiert werden:

For small x, the first-order approximation is simply a constant which is determined by the value at $x = 0$:

$$L_\Delta(0) = \frac{N^2 A_\mathrm{L} \mu_0}{d_0} \tag{4.19}$$

Regelungsidee:

Control idea:

$$\Delta i = Kx \tag{4.20}$$

Resultierende Gesamtsteifigkeit:

Resulting total stiffness:

$$S = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = S_i + KC = \frac{N^2 A_\mathrm{L} \mu_0 I_0}{d_0^2} \left(K - \frac{I_0}{d_0} \right) \tag{4.21}$$

Wird

If it is chosen

$$K > K_{\min} = -\frac{S_i}{C} = \frac{I_0}{d_0} \tag{4.22}$$

gewählt, wird die Gesamtsteifigkeit S positiv.

the total stiffness S results as positive.

Genauere Betrachtung des Regelkreisverhaltens: Der Ort x muss durch einen Sensor erfasst werden. Ein realer Sensor hat z.B. Tiefpassverhalten mit Zeitkonstante τ_s:

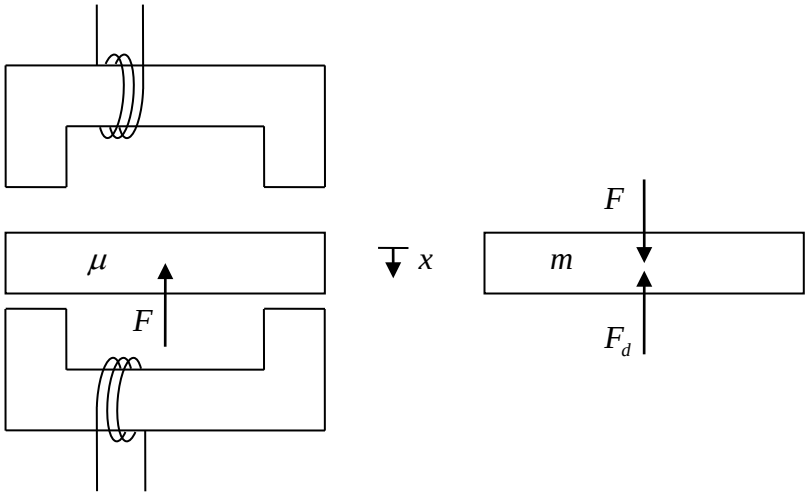
More detailed investigation of the control behavior: The displacement x must be measured by a sensor. A real sensor has a limited bandwidth and can be modeled as a low pass filter with time constant τ_s:

$$G_s(s) = \frac{\hat{x}(s)}{x(s)} = \frac{1}{1+\tau_s s} \tag{4.23}$$

Der Strom kann nicht ideal eingeprägt werden, Zeitkonstante eines unterlagerten Stromregelkreises τ_i sollte berücksichtigt werden:

Similarly, the desired current cannot be impressed momentarily. The transfer behavior between desired current and actual current can also be modelled as low pass with time constant τ_i:

$$G_i(s) = \frac{\Delta i(s)}{\Delta i^*(s)} = \frac{1}{1+\tau_i s} \tag{4.24}$$



magnetics subsystem mechanical subsystem

Fig. 4-4:
Schnittskizze zur gedanklichen Separation der magnetischen und der trägen Materialeigenschaften

Cut-free diagrams in order to separate the magnetic and the inertial behavior of the materials

Verhalten der mechanischen Trägheit:

Behavior of the mechanical inertia:

$$G_m(s) = \frac{x(s)}{F(s) - F_d(s)} = \frac{1}{ms^2} \tag{4.25}$$

Im stationären Fall $\ddot{x} = 0$ gilt also

In steady state, $\ddot{x} = 0$, it follows

$$F = F_d \tag{4.26}$$

Die Übertragungsfunktion $G_m(s)$ wird mit Rückkopplung über S_i zusammengefasst:

The transfer function $G_m(s)$ is to be merged with the feedback via S_i:

$$G'_m(s) = \frac{1}{S_i + ms^2} \tag{4.27}$$

Weiterhin wird zusammengefasst:

Let us introduce also:

$$G'_i(s) = G_i(s)C \tag{4.28}$$

Der Regler wird nach erster Idee als *P*-Regler angesetzt:

As a first approach, a *P*-type controller is used:

$$G_c(s) = \frac{\Delta i^*(s)}{\Delta x(s)} = -K \tag{4.29}$$

bzw. das negative Vorzeichen vom Summenpunkt des mechanischen Teilsystems wird durchgeschoben und ein Regler

The negative sign is due to correct action of the controller. This sign can be compensated with the negative sign before the motor constant C so that the control law can be written as

$$G'_c(s) = -G_c(s) = \frac{-\Delta i^*(s)}{\Delta x(s)} = K \tag{4.30}$$

mit der üblichen positiven Verstärkung definiert.

with a common positive gain.

Regelfehler:

Control error:

$$\Delta x = x^* - x \tag{4.31}$$

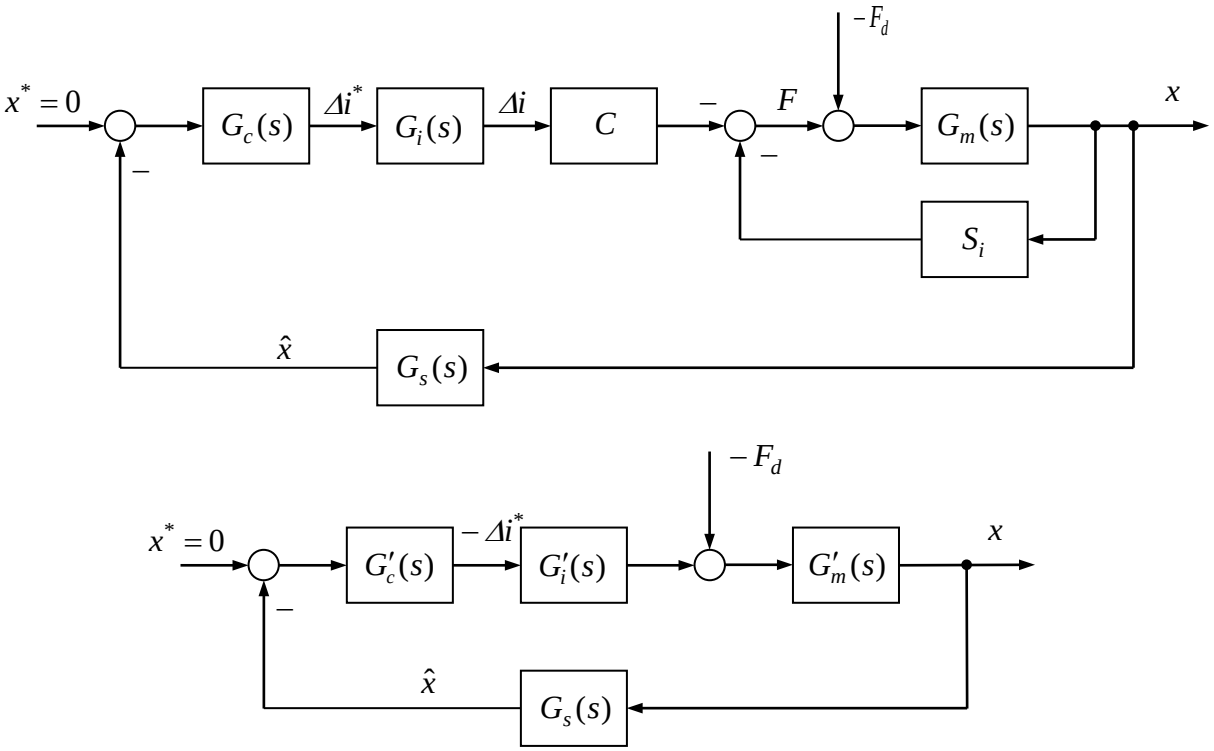


Fig. 4-5:
Führungsübertragungsfunktion: Tracking transfer function:

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{x(s)}{x^*(s)} = \frac{G'_c(s)G'_i(s)G'_m(s)}{1+G'_c(s)G'_i(s)G'_m(s)G_s(s)} \\
&= \frac{G'_c(s)G'_i(s)G'_m(s)}{1+L(s)} \\
&= \frac{(1+\tau_s s)KC}{(S_i+ms^2)(1+\tau_s s)(1+\tau_i s)+KC}
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Störübertragungsfunktion Disturbance transfer function

$$
\begin{aligned}
T_d(s) &= \frac{x(s)}{-F_d(s)} = \frac{G'_m(s)}{1+G'_c(s)G'_i(s)G'_m(s)G_s(s)} \\
&= \frac{G'_m(s)}{1+L(s)} \\
&= \frac{(1+\tau_s s)(1+\tau_i s)}{(S_i+ms^2)(1+\tau_s s)(1+\tau_i s)+KC}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Mit der Kreisübertragungsfunktion where is the loop transfer function.

$$
L(s) = G'_c(s)G'_i(s)G'_m(s)G_s(s) \tag{4.34}
$$

Der Kehrwert der Störübertragungsfunktion kann als dynamische Steifigkeit interpretiert werden:

The reciprocal of the disturbance transfer function can be interpreted as dynamical stiffness:

$$S(s) = \frac{-F_d(s)}{x(s)} = \frac{1}{T_d(s)} \tag{4.35}$$

Die Übertragungsfunktion

The transfer function of the mechanical subsystem

$$G'_m(s) = \frac{1}{S_i + ms^2} \tag{4.36}$$

besitzt die Polstellen

exhibits the poles

$$s_1 = \sqrt{-\frac{S_i}{m}}\,, \quad s_2 = -\sqrt{-\frac{S_i}{m}} \tag{4.37}$$

Beide Pole sind reell (man beachte $S_i < 0$). Ein Pol liegt in der rechten komplexen Halbebene. Alle anderen Teilübertragungsfunktionen sind dagegen stabil und besitzen Pole mit negativem Realteil.

Both poles are real (please note that $S_i < 0$). One pole lies in the right complex half-plane. All other subsystem transfer functions are stable and show poles with negative real parts.

Aus prinzipiellen Gründen kann ein *P*-Regler das System nicht stabilisieren.

Thus, for principle reasons, a *P*-type controller cannot stabilize the system.

Regelungstechnische Argumentation: D-Anteil einfügen, um Phase anzuheben (z.B. Analyse mittels Frequenzkennlinien) oder Wurzeln in die linke Halbebene zu ziehen (Wurzelortskurve).

Control engineering reasoning: D-type compensation is required in order to increase the phase margin (in Bode plot) or to shift the poles to the left half plane (root locus method).

Mechanische Argumentation: Dämpfung einfügen (führt zum gleichen Resultat wie *D*-Anteil). Ein zusätzlicher *I*-Anteil kann eingefügt werden, um einen verschwindenden stationären Regelfehler zu erreichen (unendliche stationäre Steifigkeit). Daher neuer Ansatz mit *PID*-Regler:

Mechanical engineering reasoning: Introduce damping (which is, in the end, the same result as a *D*-type compensator). An additional *I*-action can be introduced in order to ensure a stationary zero control error (i.e. infinite stationary stiffness). Thus, new approach with *PID*-controller:

$$G'_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_n}\right)\frac{1+sT_v}{1+sT_r} = K\,\frac{(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_n\left(1+sT_r\right)} \tag{4.38}$$

Die Übertragungsfunktion des PI-Reglers wurde nun durch einen differenzieren Anteil $1+sT_v$ mit Vorhaltzeit T_v ergänzt. Außerdem wurde berücksichtigt, dass ein realistischer Differenzierer nur eine beschränkte Bandbreite besitzt, die durch den zusätzlichen Tiefpass $1/(1+sT_r)$ repräsentiert wird.

The transfer function of an PI controller is now augmented by an differential action $1+sT_v$ with rate time T_v. It was also considered that a realistic differentiator has only limited bandwith, represented by the additional low pass $1/(1+sT_r)$.

Skizze des Regelungsentwurfs im Frequenzbereich: Ein Pol der Kreisübertragungsfunktion $L(s)$ hat positiven Realteil (Beitrag vom $G_m'(s)$). Falls ein *I*-Anteil im Regler vorgesehen wird, liegt ein weiterer Pol auf der imaginären Achse. Die Nyquistortkurve $1+L(j\omega)$ muss daher (für positive ω) eine Umschlingung von $+3\pi/2$ aufweisen, wenn der geschlossene Kreis stabil sein soll. Ohne integralen Anteil, also bei einem *PD*-Regler, muss die Umschlingung nur $+\pi$ sein. Im Fall des *PD*-Reglers lässt sich sofort eine Mindestreglerverstärkung angeben, da die Umschlingung von $+\pi$ nur zu Stande kommen kann, wenn der Anfangspunkt der Ortskurve die Bedingung

Outline of control design procedure in frequency domain: One pole of the loop gain transfer function $L(s)$ has a positive real part (contribution of $G_m'(s)$). In case of an *I*-action in the controller, an additional pole is located on the imaginary axis. The Nyquist locus curve $1+L(j\omega)$ must then show a wrapping of $+3\pi/2$ (for positive ω) in order to stabilize the closed-loop control. Without integral controller action, i.e. with a *PD*-controller, the wrapping must be only $+\pi$. In case of *PD*-control, the minimum stabilizing controller gain can be directly deduced, because the wrapping of $+\pi$ is only possible, if the starting point of the Nyquist locus satisfies the condition

$$L(0) < -1 \tag{4.39}$$

erfüllt. Daraus folgt

From this follows

$$\frac{KC}{S_i} < -1 \tag{4.40}$$

bzw.

or

$$K > K_{\min} = -\frac{S_i}{C} \tag{4.41}$$

Man beachte wieder $S_i < 0$. Dieses Ergebnis deckt sich mit der obigen Überlegung zu einer positiven Gesamtsteifigkeit.

Please note again $S_i < 0$. This result is consistent with the consideration of a positive total stiffnes.

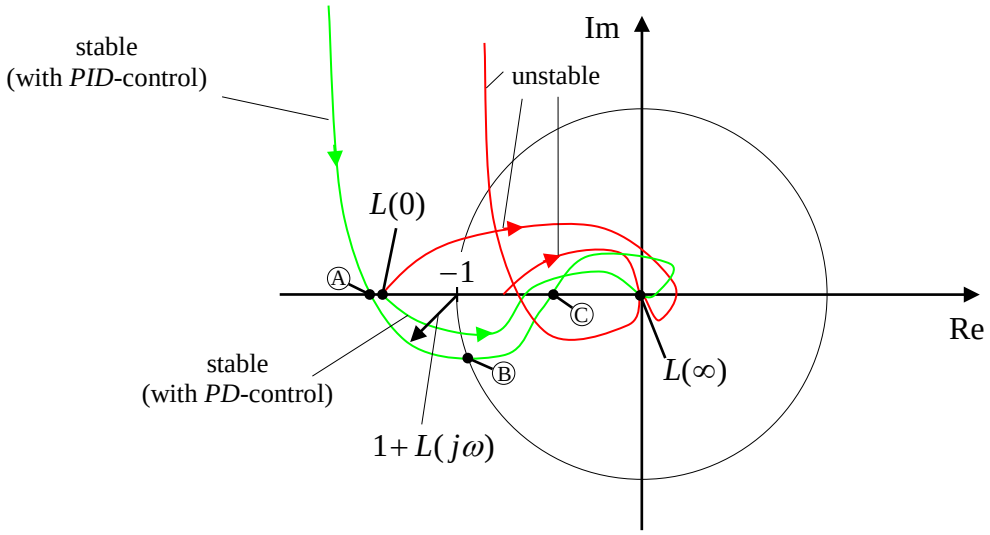


Fig. 4-6:
Nyquist-Ortskurven Nyquist locus curves

Der Regelungsentwurf ist in Frequenzkennlinien meist übersichtlicher als mit Ortskurven. Vorher empfiehlt sich noch eine Normierung der Teilübertragungsfunktionen und eine Zusammenfassung der Kreisverstärkung in der Reglerverstärkung:

With frequency response diagrams (Bode plots) the control design is usually more convenient rather than with Nyquist loci. However, a normalization of the subsystem transfer functions is recommended first:

$$G''_m(s) = -S_i G'_m(s) = -\frac{1}{1+\frac{m}{S_i}s^2} \tag{4.42}$$

$$G''_c(s) = -\frac{C}{S_i} G'_c(s) \tag{4.43}$$

$$K'' = -\frac{C}{S_i} K' \tag{4.44}$$

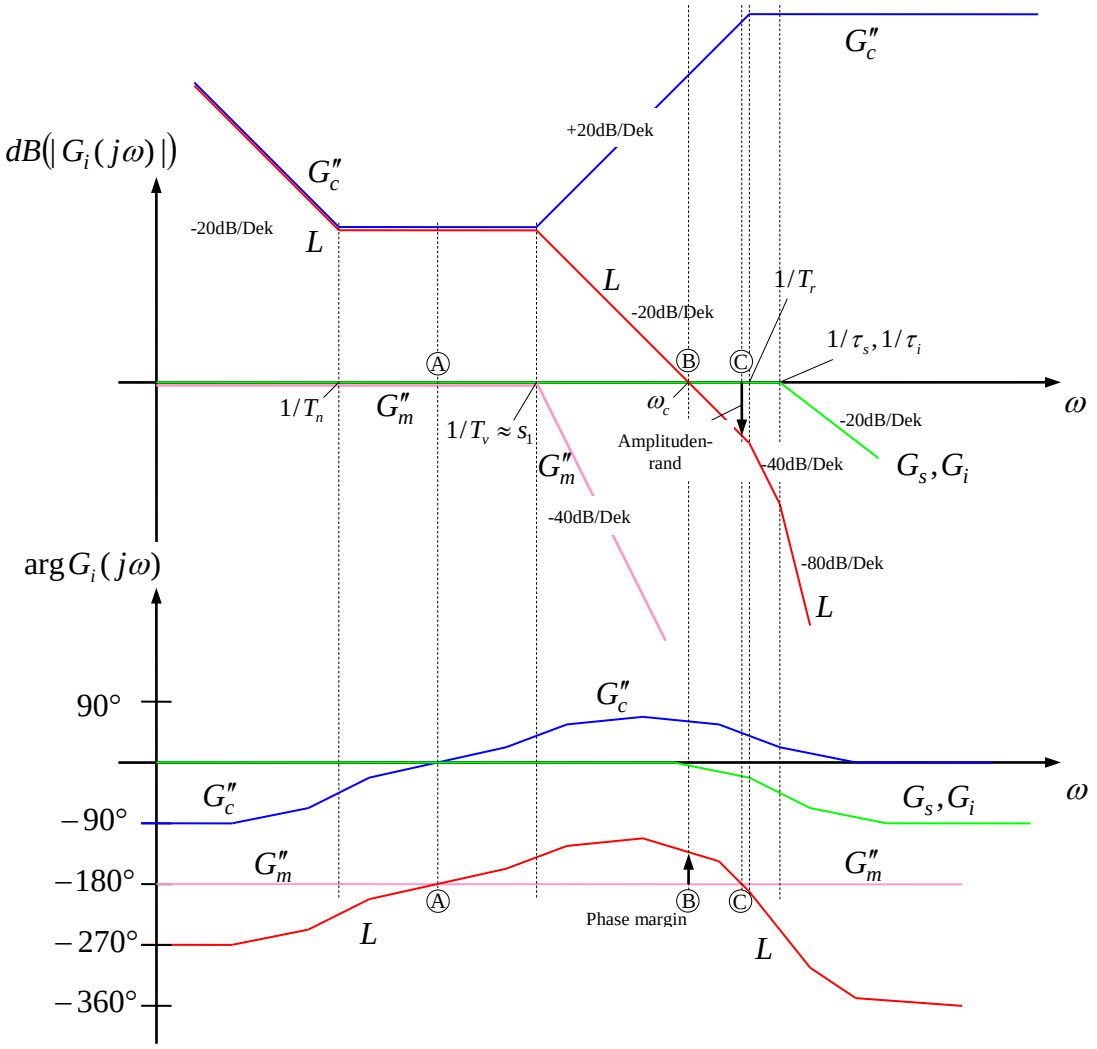


Fig. 4-7:
Frequenzkennlinien zum Regelungsentwurf

Frequency response diagrams for control design

Stichworte zum Regelungsentwurf:

- D-Anteil hebt die Phase von $L(j\omega)$ im Bereich der Durchtrittsfrequenz ω_c an.
- Vorhaltzeit T_v kann gleich oder in der Nähe von $1/s_1 = -1/s_2$ gewählt werden.
- Reglerverstärkung so wählen und damit Verstärkung von $L(j\omega)$ so weit anheben, dass sich eine gewünschte Bandbreite bzw. Durchtrittsfrequenz ω_c ergibt.
- Nachstellzeit T_n des Reglers möglichst klein wählen, also $1/T_n$ möglichst groß, aber nur soweit, dass die

Few notes for control design:

- D-action increases the phase margin of $L(j\omega)$ in the area of the cut-off frequency ω_c.
- Controller rate time T_v can be chosen equal to or in the range of $1/s_1 = -1/s_2$.
- Controller gain and thus overall gain of $L(j\omega)$ is chosen in such a way that the cut-off frequency ω_c (or bandwidth, resp.) results as desired.
- Controller reset time T_n should be chosen as small as possible, i.e. the frequency $1/T_n$ as large as possible,

Phase in der Nähe der Durchtrittsfrequenz ω_c nicht zu sehr abgesenkt wird.

- Knickfrequenzen der Sensorik und des Stromstellgliedes $1/\tau_s, 1/\tau_i$ sowie des realen Differenzierers $1/T_r$ müssen genügend weit oberhalb der angestrebten Durchtrittsfrequenz ω_c liegen. Alle drei Zeitkonstanten zusammen verursachen erhebliche Phasenabsenkung, selbst wenn sie nicht sehr dicht an ω_c liegen.

as far as the phase margin at ω_c is not too much decreased.

- Corner frequencies of the sensor and the current source $1/\tau_s, 1/\tau_i$ and the real differential action $1/T_r$ must be large enough above the desired cut-off frequency ω_c. All three time constants together may cause a considerable decrease of the phase margin, even if they are not that close-by to ω_c.

Genaue Reglerauslegung als Übungsaufgabe!

Detailed control design as exercise!

4.4 Magnetlager mit Permanentmagneten
Magnetic Bearing with Permanent Magnets

Wie wir aus den Gleichungen (4.15) und (4.16) gesehen haben, ist eine Vormagnetisierung durch einen Gleichstrom I_0 notwendig, damit in der Linearisierung die Kraft-Strom-Konstante C nicht null wird.

As we learnt from equations (4.15) and (4.16), a bias magnetisation by a DC current I_0 is necessary in order to get a linearisation with non-zero current-to-force constant C.

Eine Vormagnetisierung kann alternativ aber auch durch Permanentmagnete errreicht werden, wie im Folgenden gezeigt wird.

However, the magnetisation bias can also be achieved by permanent magnets as the following consideration will show.

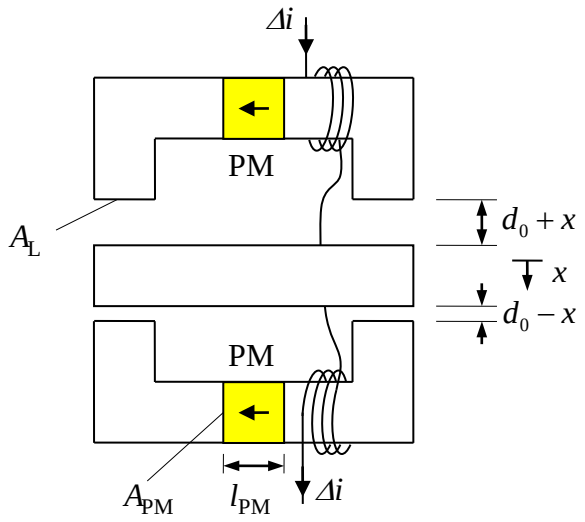


Fig. 4-8:
Magnetlager mit Permanentmagneten

Magnetic bearing with permanent magnets

Das Prinzip ist in Fig. 4-8 dargestellt. Zunächst soll nur das obere Joch untersucht werden. Um den Permanentmagneten in einem magnetischen Ersatzschaltbild wiederzugeben, bedienen wir uns der rechten Darstellung aus Fig. 3-17 (b) und ergänzen die Luftspalt-Reluktanz und die Durchflutungsquelle $\theta_0 = N\Delta i$. Die Reluktanz des ferromagnetischen Kerns wird vernachlässigt.

A principal sketch is shown in Fig. 4-8 above. The upper yoke should be investigated first. In order to represent the permanent magnet in an equivalent magnetic circuit, we use the diagram of Fig. 3-17 (b), augmented by the airgap reluctance and the MMF source $\theta_0 = N\Delta i$. The reluctance of the ferromagnetic core is neglected.

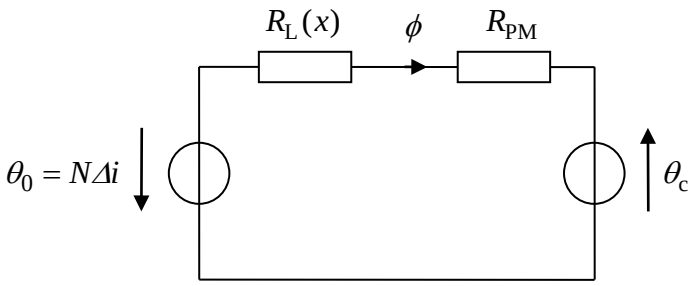


Fig. 4-9:
Magnetisches Ersatzschaltbild des oberen Jochs

Magnetic equivalent circuit diagram of the upper yoke

Nun enthält der magnetische Kreis zwei Durchflutungsquellen in Reihe. Der magnetische Fluss folgt zu

Now, the circuit comprises two series-connected MMF sources. The magnetic flux results as

$$\phi = \frac{\theta_0 + \theta_c}{R_{PM} + R_L(x)} \tag{4.45}$$

mit den Reluktanzen

with the reluctances

$$R_L(x) = \frac{2(d_0 + x)}{\mu_0 A_L} \quad , \quad R_{PM} = \frac{l_{PM}}{\mu_0 A_{PM}} = \frac{l_{PM} A_L}{\mu_0 A_{PM} A_L} = \frac{l'_{PM}}{\mu_0 A_L} \quad . \tag{4.46}$$

Für den Fall unterschiedlicher Querschnittsflächen von Magnet und Luftspalt empfiehlt sich die Einführung einer normalisierten Magnetlänge l'_{PM} wie oben erfolgt.

In case of different cross sections areas of the permanent magnet and the airgap, it is advantageous to introduce a normalised magnet length l'_{PM} as it is done above.

Gemäß (2.80) ist die Koenergie des Systems

According to (2.80), the co-energy of the system is

$$E_c(x) = \frac{1}{2}\left(R_{PM} + R_L(x)\right)\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\theta_0 + \theta_c\right)^2}{R_{PM} + R_L(x)} = \frac{\mu_0 A_L}{2}\frac{\left(N\Delta i + \theta_c\right)^2}{2(d_0 + x) + l'_{PM}} = \frac{\mu_0 A_L}{4}\frac{\left(N\Delta i + \theta_c\right)^2}{d'_0 + x} \quad . \tag{4.47}$$

mit

with

$$d'_0 = d_0 + \frac{1}{2} l'_{PM} = d_0 + \frac{1}{2} l_{PM} \frac{A_L}{A_{PM}} \tag{4.48}$$

Die resultierende Formel hat genau die gleiche Form wie (3.5) wobei jetzt θ_c die

The resulting formula has got exactly the same form as (3.5) with the exception that

Rolle der Vormagnetisierung übernimmt und die Magnetlänge bei der gesamten effektiven Luftspaltlänge zu berücksichtigen ist.

θ_c takes over the role of bias magnetisation and that the magnet length has to be considered in the total effective airgap length.

Für das System mit oberem und unterem Joch ergeben sich ähnliche Formeln zu denen des Abschnitts 4.3:

For the System with upper and lower yokes, similar formulae result to those of Section 4.3 as

$$E_c(\Delta i, x) = \frac{\mu_0 A_\mathrm{L}}{4}\left[\frac{\left(\theta_\mathrm{c} + N\Delta i\right)^2}{d_0' + x} + \frac{\left(\theta_\mathrm{c} - N\Delta i\right)^2}{d_0' - x}\right] \quad . \tag{4.49}$$

$$F(\Delta i, x) = \frac{\partial E_c}{\partial x} = -\frac{\mu_0 A_\mathrm{L}}{4}\left[\frac{\left(\theta_\mathrm{c} + N\Delta i\right)^2}{\left(d_0' + x\right)^2} - \frac{\left(\theta_\mathrm{c} - N\Delta i\right)^2}{\left(d_0' - x\right)^2}\right] \tag{4.50}$$

$$S_i(\Delta i, x) = -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\mu_0 A_\mathrm{L}}{2}\left[\frac{\left(\theta_\mathrm{c} + N\Delta i\right)^2}{\left(d_0' + x\right)^3} + \frac{\left(\theta_\mathrm{c} + N\Delta i\right)^2}{\left(d_0' - x\right)^3}\right] \tag{4.51}$$

Das gilt ebenso für die Linearisierung um den Arbeitspunkt $\Delta i = 0$, $x = 0$:

That applies also for the linearisation around the operating point $\Delta i = 0$, $x = 0$:

$$F(\Delta i, x) = \Delta i \left.\frac{\partial F}{\partial \Delta i}\right|_{\substack{\Delta i = 0 \\ x = 0}} + x \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{\Delta i = 0 \\ x = 0}} = -C\Delta i - S_i x \tag{4.52}$$

mit

with

$$C = \frac{A_\mathrm{L}\mu_0\theta_\mathrm{c}}{d_0'^2} \quad , \quad S_i = -\frac{A_\mathrm{L}\mu_0\theta_\mathrm{c}^2}{d_0'^3} \tag{4.53}$$

Die Vorteile einer Vormagnetisierung durch Permanentmagnete sind offensichtlich: Es wird keine elektrische Stromversorgung für die Vormagnetisierungs-Spule benötigt. Außerdem stellt sich heraus, dass mit einem Permanentmagneten eine viel stärkere Magnetisierung möglich ist als mit einer elektrischen Spule vergleichbarer geometrischer Größe.

The advantages of a permanent bias magnetisation over a bias current are obvious: There is no need of an electrical supply to feed the bias winding. Additionally, it turns out that a permanent magnet results in a much stronger magnetisation than it is possible with an electric winding of comparable geometric size.

4.5 Sensorik
Sensors

Zur Messung des Abstandes kommen optische oder induktive Messverfahren in Betracht.

Induktive Messverfahren ermitteln über die Veränderung der Induktivität den Abstand. Zweckmäßigerweise ordnet man mehrere Sensoren in einer Brückenschaltung an, um Offsets zu kompensieren. Die Induktivität wird über die Aufschaltung einer Wechselspannung gemessen.

In order to measure the displacement optical or inductive measurement principles can be applied.

Inductive measurements utilize the variation of the inductance of a sensor coil depending on the displacement. AC signals are applied to measure the inductance. Usually several sensors are configured in a bridge circuit in order to compensate for offsets.

4.6 Stromrichter
Converters

Zur Speisung der Wicklungen können prinzipiell linear arbeitende Leistungsverstärker eingesetzt werden. Wegen der prinzipbedingt hohen Verluste linearer Verstärker werden vielmehr schaltend arbeitende Stromrichter eingesetzt (Fig. 4-11, Fig. 4-12). Da der Strom durch eine Wicklung sowohl positiv als auch negativ sein kann und sowohl positive als auch negative Spannungen zur schnellen Anregelung der Ströme benötigt werden, müssen alle 4 Quadranten des Strom-Spannungs-Bereichs vom Stromrichter beherrscht werden (siehe Fig. 4-10).

In order to feed the windings of a magnetic bearing with appropriate current, linearly operating power amplifiers could be used. However, due to the high losses of such type of amplifiers, switched-mode converters are usually applied (Fig. 4-11, Fig. 4-12). The current of a winding can be positive as well as negative. As well, both voltage polarities are required in order to control the current dynamically. Thus, all four quadrants in the voltage-current-area have to be governed by the converter, (see Fig. 4-10).

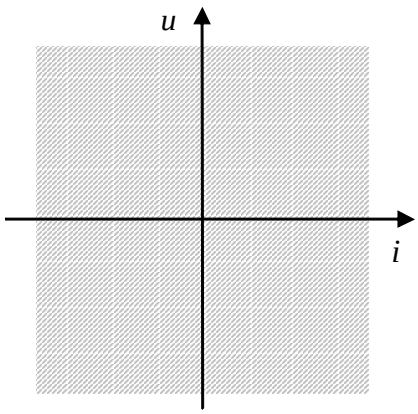


Fig. 4-10:
Benötigter Strom-Spannungsbereich (alle 4 Quadranten)

Required current voltage area (all four quadrants)

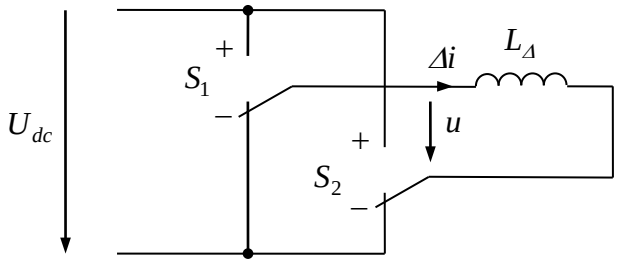


Fig. 4-11:
Prinzipdarstellung des benötigten Stromrichters mit idealen Schaltern (4-Quadranten-Steller)

Principle circuit diagram of the required converter depicted with ideal switches (4-quadrant converter, 4QC)

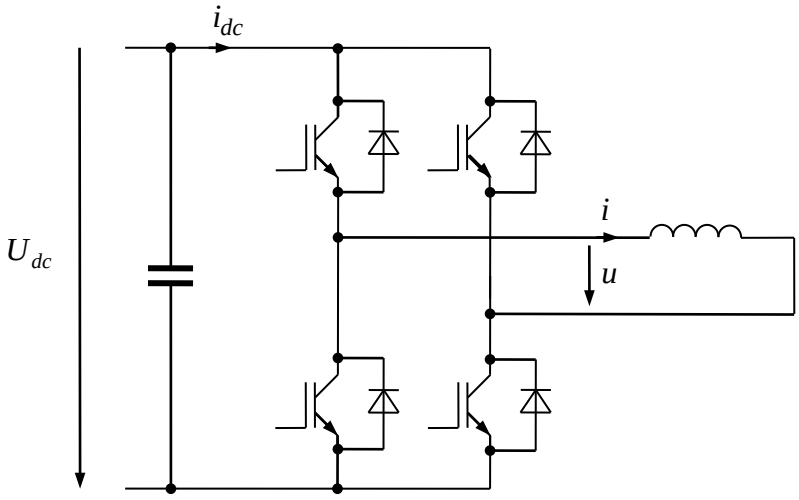


Fig. 4-12:
Stromrichter für Magnetlager: 4-Quadranten-Steller

Converter for the magnetic bearing: The 4-quadrant converter

S_1	S_2	u
+	−	$+U_{dc}$
−	+	$-U_{dc}$
−	−	0
+	+	0

Fig. 4-13:
Ausgangsspannung in Abhängigkeit des Schaltzustandes

Output voltage vs. switching state

4.7 Pulsweitenmodulation
Pulse Width Modulation

Die Pulsweitenmodulation erlaubt es, vorgegebene kontinuierliche Werte

The purpose of the pulse width modulation (PWM) is to approximate a given continuous value

$$s^* \in [-1,1] \tag{4.54}$$

durch eine wertediskrete Zeitfunktion

by a discrete-valued function in time

$$s(t) \in \{-1;1\} \tag{4.55}$$

so „anzunähern“, dass das zeitliche Mittel über einer *Schaltperiode* T_s gleich dem gewünschten kontinuierlichen Wert ist:

so that the average value within a *switching period* T_s is equal to the desired continuous value:

$$\bar{s} = \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} s(t)\,dt = s^* \tag{4.56}$$

Das Prinzip zeigen Fig. 4-14, Fig. 4-15.

The principle is shown in Fig. 4-14, Fig. 4-15.

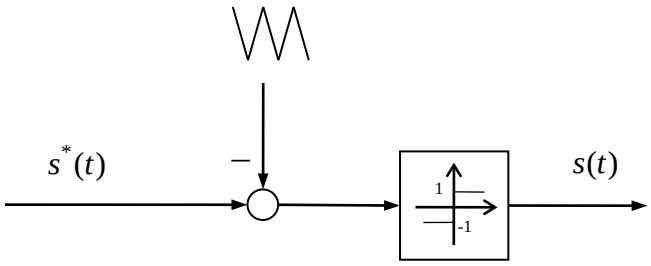


Fig. 4-14:
Realisierung der Pulsweitenmodulation durch Dreiecksmodulationsträger und Komparator

Realization of the pulse width modulation via triangular modulation carrier and a comparator

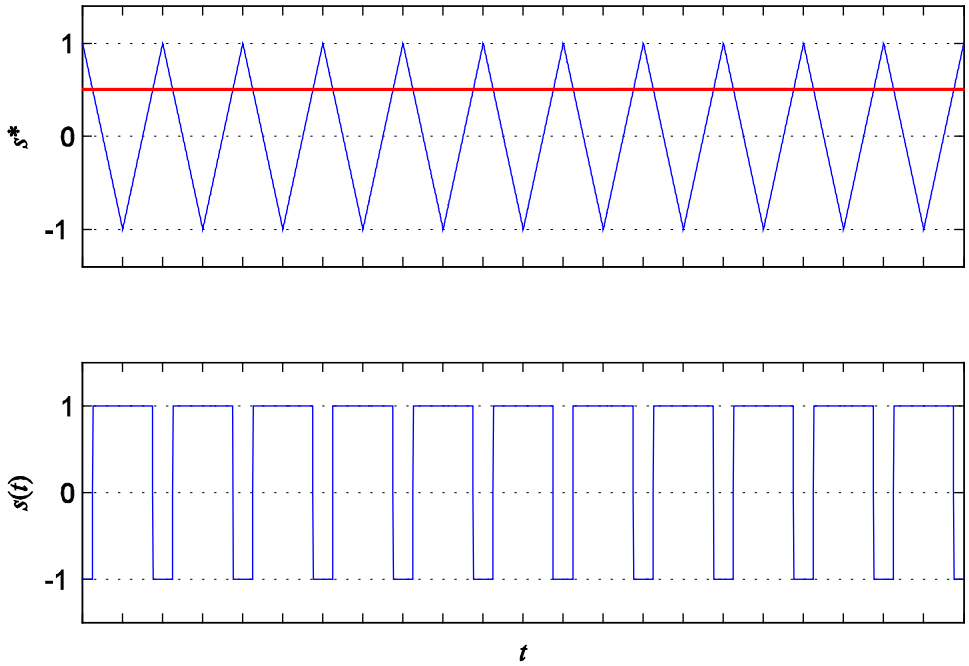


Fig. 4-15:
Prinzip der Pulsweitenmodulation

Principle of the pulse width modulation

Dieses Prinzip kann angewendet werden, um durch den 4-Quadranten-Steller im zeitlichen Mittel gewünschte wertekontinuierliche Spannungssollwerte zu realisieren. Der gewünschte Spannungssollwert u^* wird zunächst normiert,

The PWM is applied in order to realize continuous-valued voltage demands, at least in an averaged consideration, even with the switched-mode 4-quadrant converter. First, the desired voltage reference value u^* is normalized as input to the PWM,

$$s^* = \frac{u^*}{U_{dc}} \tag{4.57}$$

und der Pulsweitenmodulation zugeführt, wobei man vorteilhafterweise für die beiden Schalter des Stellers um 180° versetzte Modulationen einsetzt wie in Fig. 4-16 gezeigt, weil sich dadurch die effektive Pulsfrequenz der Ausgangsspannung gegenüber der tatsächlichen der einzelnen Schalter verdoppelt als auch die Stufen der Ausgangsspannung halbieren.

Best practise is to use for the two switches of the 4QC two modulation carriers with phase shift of 180° as shown in Fig. 4-16. In this manner, the effective pulse frequency is doubled as well as the output voltage steps are divided by half.

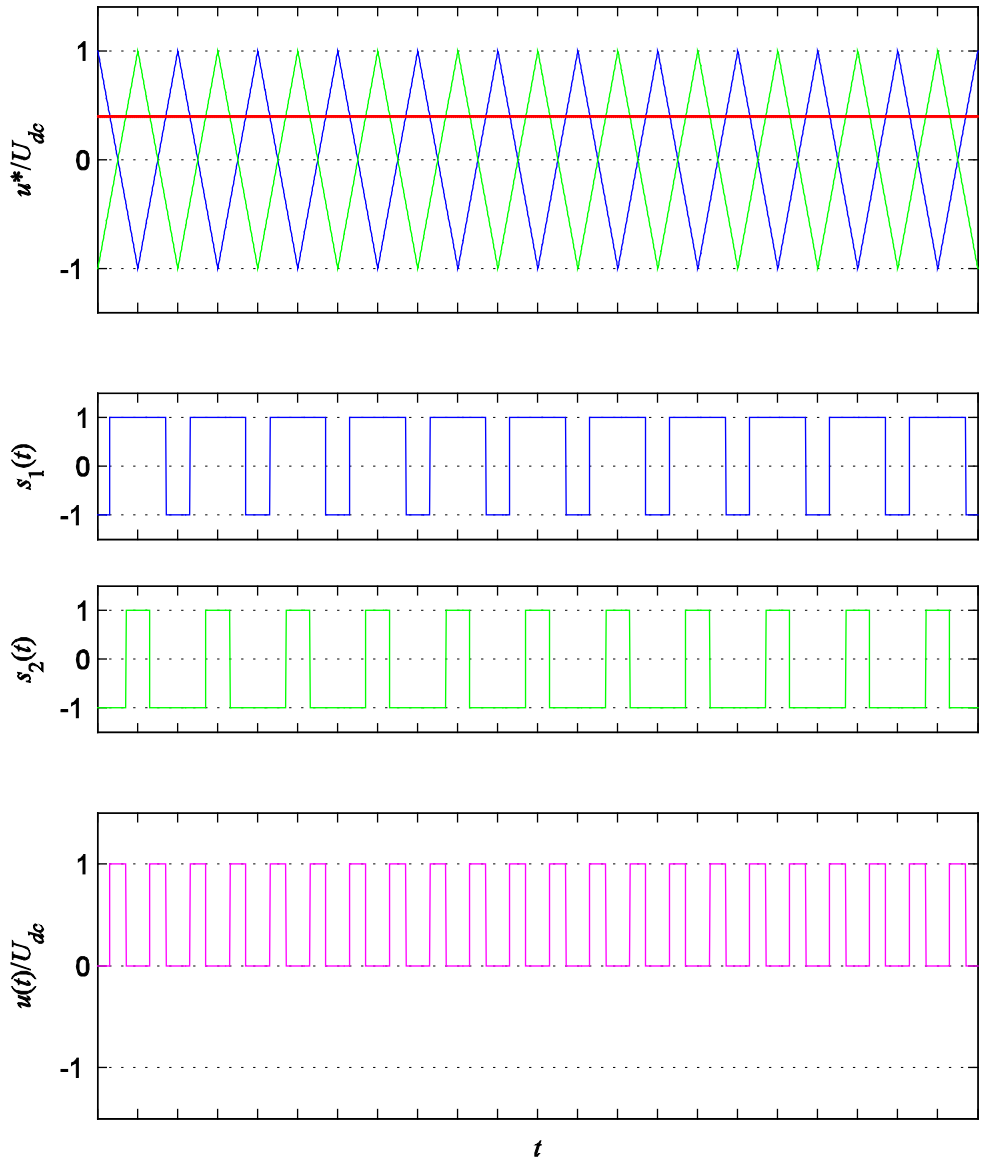


Fig. 4-16:
Pulsweitenmodulation für 4-Quadranten-Steller mit phasenversetzten Modulationsträgern

Pulse width modulation for the 4QC with phase-shifted modulation carriers

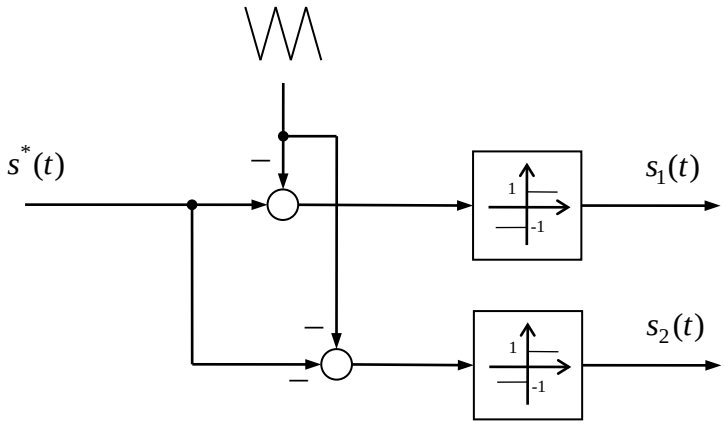


Fig. 4-17:
Realisierung der PWM für einen 4-Quadranten-Steller

Realization of the phase-shifted PWM for 4-quadrant converter

Der 4-Quadranten-Steller ist eine spannungseinprägende Struktur. Für die Magnetlagerregelung wird jedoch eine Stromeinprägung benötigt, die durch eine unterlagerte Stromregelung realisiert wird.

The 4-quadrant converter is a voltage source topology. For the magnetic bearing, however, a current source is needed. This is achieved by employing a subordinate current control.

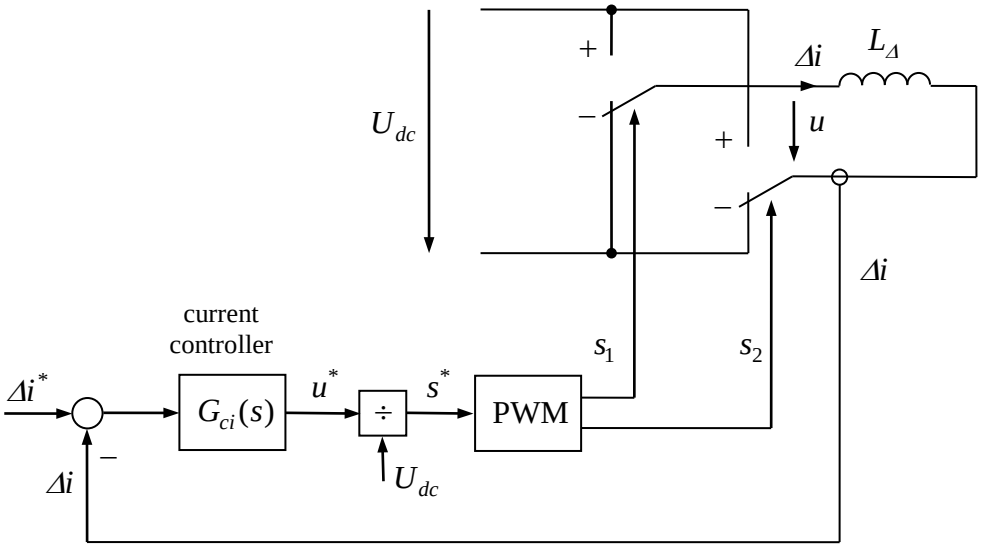


Fig. 4-18:
Strukturbild der Stromregelung für einen 4-Quadranten-Steller

Current control structure for the 4-quadrant converter

Unter Vernachlässigung der pulsfrequenten Anteile in Spannung und Strom kann für eine

From the viewpoint of control design, the harmonics of voltage and current that are due to the pulse frequency of the converter can be

regelungstechnische Modellbildung im Sinne einer zeitlich lokalen Mittelung

neglegted. That means, the actual pulsating voltages are substituted by their locally averaged values, which are just the input to the PWM:

$$u(t) \approx u^*(t) \tag{4.58}$$

angenähert werden, so dass für den regelungstechnischen Entwurf von dem stark vereinfachten folgenden Strukturbild ausgegangen werden kann, in dem von der Pulsweitenmodulation abstrahiert wird[10].

In doing so, a rather simplified control structure results, where the PWM has to be no longer considered.[11]

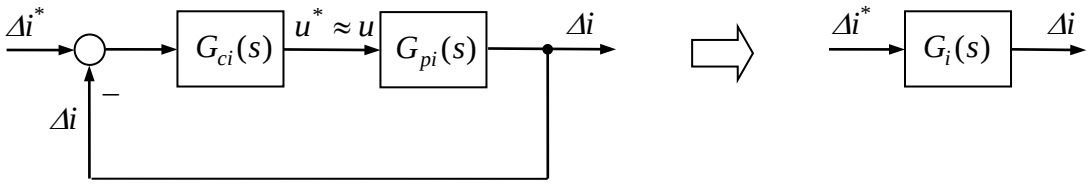


Fig. 4-19:
Strukturbild der Stromregelung für einen 4-Quadranten-Steller

Simplified current control structure for the 4QC

Die Übertragungsfunktion der Stromregelstrecke wird durch die Induktivität L_Δ bestimmt. Ggf. findet noch ein Innenwiderstand der Wicklung Berücksichtigung:

The plant transfer function is determined by the inductance L_Δ, and, if necessary, by an internal winding resistance:

$$G_{pi}(s) = \frac{1}{sL_\Delta + R_\Delta} \tag{4.59}$$

Die Führungsübertragungsfunktion ergibt sich zu

The tracking transfer function results as

$$G_i(s) = \frac{G_{ci}(s)G_{pi}(s)}{1 + G_{ci}(s)G_{pi}(s)} \tag{4.60}$$

Als Regler könnte ein *PI*- aber auch ein einfacher *P*-Regler zum Einsatz kommen. Letzterer kann zwar keinen Regelfehler von Null garantieren, doch wird ein stationärer Regel-

As controller, *PI* as well as *P*-types can be applied. The latter cannot guarantee a stationary zero control error. That can be accepted, however, because the integral

[10] Die ausführliche Begründung für dieses Vorgehen liefert die Methode der *dynamischen Mittelwertmodellierung*, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

[11] The fundamentals of this approach are provided by the *dynamical averaging method* which is not subject of this lecture.

fehler durch den integralen Anteil im überlagerten Lageregler ausgeglichen. Mit

action of an overlaid position control would compensate for this error. With

$$G_{ci}(s) = K_i \tag{4.61}$$

folgt

it follows

$$G_i(s) = \frac{K_i}{K_i + R_\Delta + sL_\Delta} = \frac{V_i}{1 + s\tau_i} \tag{4.62}$$

mit

where

$$V_i = \frac{1}{1 + R_\Delta / K_i} \quad , \qquad \tau_i = \frac{L_\Delta}{K_i + R_\Delta}$$

Für kleinen Innenwiderstand bzw. hohe Reglerverstärkung resultiert das weiter oben angenommene Verzögerungsverhalten des Stromstellglieds.

For small winding resistance or high controller gain V_i is close to 1 and the above mentioned delay behavior of the controlled current source results.

4.8 Magnetlager mit Lagerung in zwei Freiheitsgraden
Magnetic Bearing with Two Degrees of Freedom

Die bisherige eindimensionale Anordnung mit einem Freiheitsgrad kann auch in zwei orthogonalen Raumrichtungen aufgebaut werden, um zwei Freiheitsgrade zu fixieren. Dazu bräuchte man insgesamt 4 Wicklungen, von denen jeweils zwei in Reihe geschaltet werden, sofern man eine magnetische Vorspannung mit Permanentmagneten vorsieht Man würde demnach zwei Stromrichter für jeden Freiheitsgrad mit insgesamt 8 Transistoren und 8 Dioden benötigen.

The above mentioned systems with one degree of freedom can be extended to control two orthogonal axes of spatial movements. That would result in 4 windings in total, where two of them are connected in parallel, if a magnetic bias with a permanent magnet is applied. So, also two 4-quadrant converters would be needed with 8 transistors and 8 diodes in total.

Vorteilhaft sind jedoch Anordnungen mit 3 um 120° versetzt angeordneten Wicklungen, die im Stern oder Dreieck geschaltet werden. Der Stromrichteraufwand reduziert sich dadurch auf 6 Transistoren und 6 Dioden, die Zahl elektrischen Anschlüsse und ebenso die Zahl der Wicklungen von 4 auf 3.

In contrast, the coils can be arranged with a spatial shift of 120°, resulting in three coils that can be connected as star or delta. The converter expense thus reduces to only 6 transistors and 6 diodes. The number of electrical terminals and windings from 4 to 3.

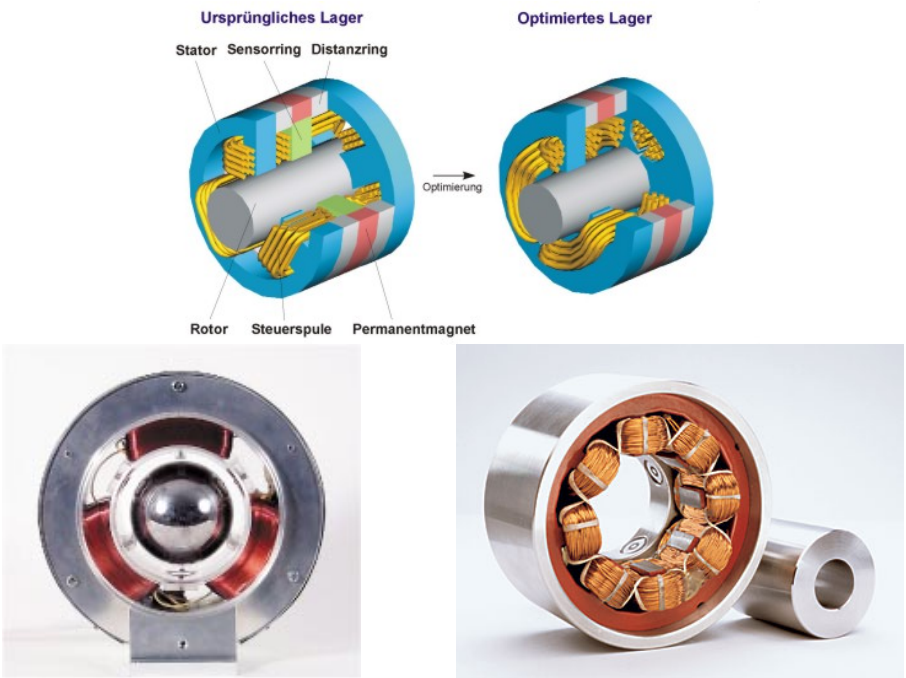


Fig. 4-20:
Verschiedene Konstruktionen magnetischer Lager

Various constructions of magnetic bearings

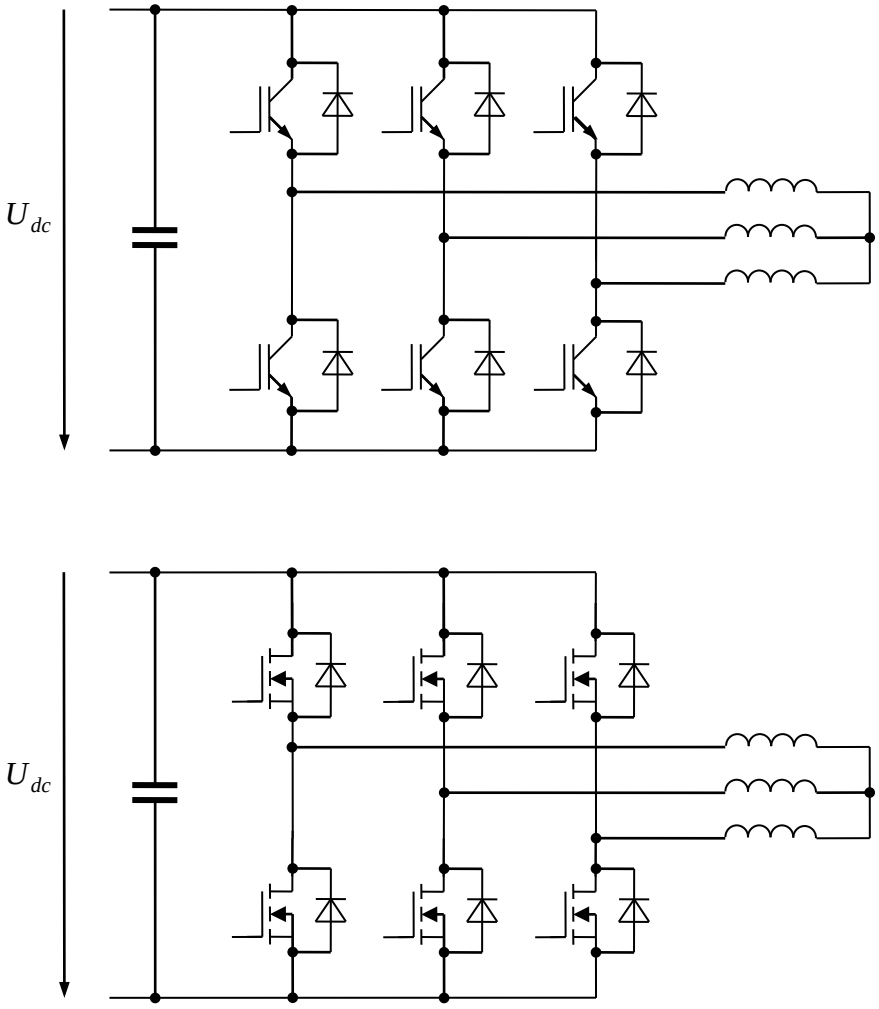
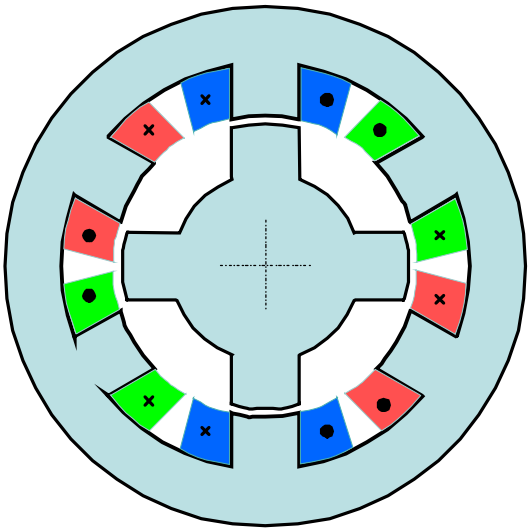


Fig. 4-21:
Stromrichter für Magnetlager mit drei Wicklungen; Ausführung mit IGBT (oben) oder MOSFET (unten)

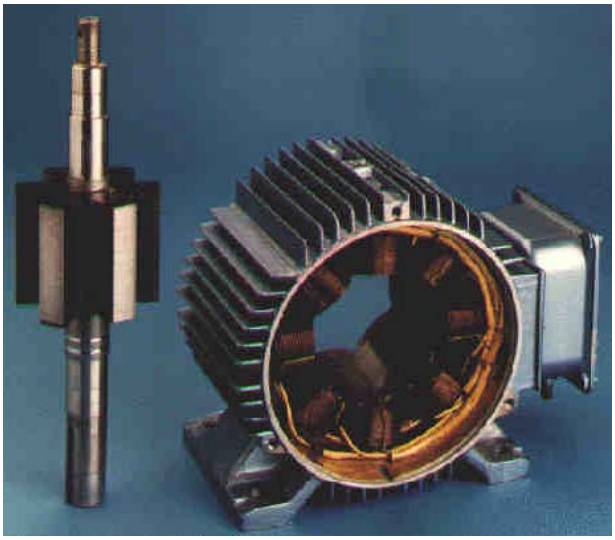
Converter for magnetic bearing with three windings, circuit with IGBT (above) or MOSFET (below)

5 Geschalteter Reluktanz-Motor Switched Reluctance Motor

5.1 Konstruktiver Aufbau Construction



6/4-SRM



8/6-SRM

Fig. 5-1:
Prinzipieller Aufbau eines SRM Basic layout of a SRM

Der Geschaltete Reluktanz-Motor (Switched Reluctance Motor, SRM) zeichnet sich durch eine ausgeprägte Asymmetrie des Rotors aus. Diese führt zu einem stark positionsabhängigen magnetischen Widerstand (Reluktanz). Die Wicklungen des Ständers sind als konzentrierte Polwicklungen ausgeführt, von denen jeweils die gegenüberliegenden Spulen in Reihe oder parallel geschaltet werden. Je Strang findet man also zwei Ständerpole. Der Motor kann mit verschiedenen Zahlen von Ständer- und Rotorpolen ausgeführt werden. Gängige Kombinationen von Ständer- und Rotorpolzahlen sind 6/8, 8/6, 8/10. Aber auch einsträngige 2/2-Maschinen sind möglich.

Characteristic of a switched reluctance motor (SRM) is the saliency of the rotor. This leads to a magnetic reluctance which depends on the angular position. The windings of the stator are constructed as concentrated pole windings. Opposite windings belong to the same phase and are connected in parallel or in series. The motor can be constructed with different numbers of stator and rotor poles. Common combinations of stator and rotor pole numbers are 6/8, 8/6, 8/10. However, even single-phase 2/2-machines are possible.

Die Ströme der einzelnen Stränge werden in der Regel blockförmig und nacheinander angesteuert. Hierbei kommt es auf die Richtung des Stromflusses nicht an, was die erforderliche Stromrichtertopologie vereinfacht.

The shape of the phase currents is usually block-like with a phase shift between the phases so that only one phase is turned on at a time. The polarity of the currents is not important which simplifies the required converter topology.

Das Prinzip des Geschaltete Reluktanz-Motors ist bereits seit 1838 bekannt. Aber erst in den letzten ein, zwei Jahrzehnten konnte sich dieses Motorprinzip breiter etablieren, denn die Ansteuerung und Regelung des Motors ist technisch etwas aufwändiger und konnte früher nicht – zumindest nicht wirtschaftlich vertretbar realisiert werden.

Der Geschaltete Reluktanz-Motor selbst ist kostengünstig zu fertigen. Die Polwicklungen können separat vorgefertigt und dann als fertig gewickelte Spulen über die Pole geschoben werden. Stator und Rotor sind konstruktiv sehr einfach und robust aufgebaut. Daher ist der Motor besonders auch für hohe Drehzahlen geeignet. Wirkungsgrad und Drehmomentausnutzung sind günstig.

Nachteilig sind die Geräusche des Motors, die durch die pulsenden axialen magnetischen Kräfte hervorgerufen werden. Die mechanische Konstruktion beeinflusst die Geräusche maßgeblich. Der SRM ist für Positionierungsaufgaben mit Genauigkeiten unterhalb einer Polteilung und gleichmäßigen ruhigen Lauf bei kleinen Drehzahlen nicht prädestiniert; zumindest ist eine aufwändige Steuerung und Regelung notwendig, um dies zu beherrschen.

The principle of the switched reluctance motor is already known since 1838. However, only in the last one or two decades this motor could gain a larger market share because the motor control is more complicated compared with other motor types and could not be realized with reasonable effort in former times.

The switched reluctance motor itself can be manufactured at reasonable cost. The pole windings can be manufactured separately. Then, they are mounted as ready-made coils on the poles. Construction of stator and rotor is very simple and robust. Therefore, the motor is dedicated also for high speed applications. Efficiency and torque-to-volume ratio are reasonable.

A drawback is the generation of noise, which is caused by pulsating radial forces. So, the mechanical construction is a very crucial point to handle these forces and thus the noise emission. The SRM is not adequate for fine positioning tasks with accuracy below a pole pitch, and also not for smooth running at low speed. However, sophisticated control would be needed to cope with such requirements.

5.2 Funktionsprinzip
Functional principle

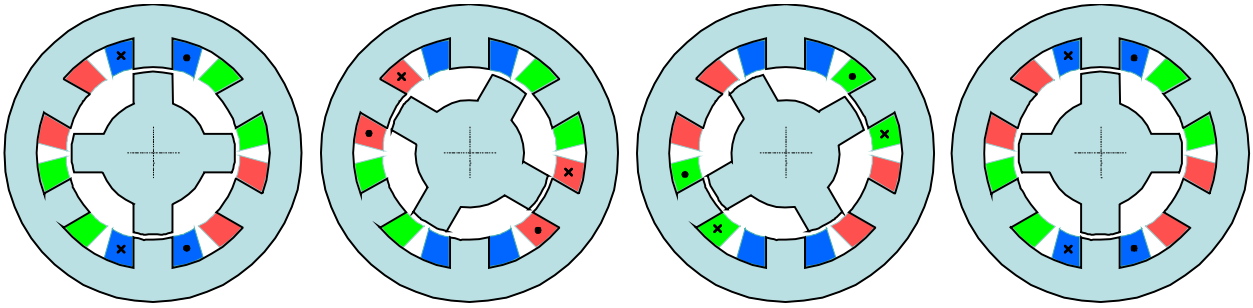


Fig. 5-2:
Veranschaulichung des Funktionsprinzips eines Switched Reluctance Motors: Die Stränge des Motors werden sukzessive eingeschaltet

Functional principle of a switched reluctance motor: The phases are turned on phase-by-phase

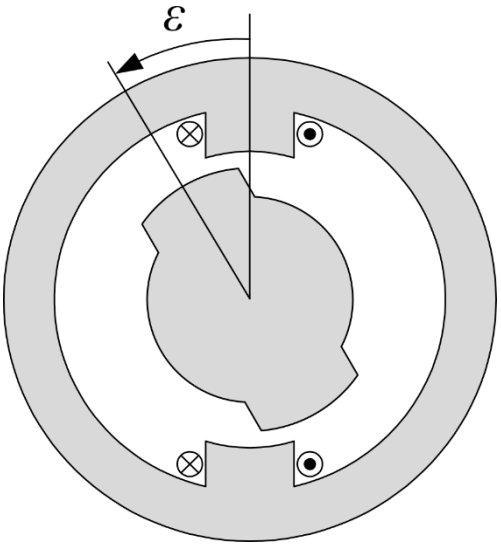


Fig. 5-3:
Einsträngiger Motor (2/2-SRM)

Single-phase motor (2/2-SRM)

Für die Untersuchung des Betriebsverhaltens wird zunächst nur ein einzelner Strang betrachtet. Für die Modellierung wird von einem einfachen magnetischen Kreis mit einem nichtlinearen magnetischen Element

In order to investigate the operation behavior, only a single phase should be considered first. The modeling is done with a simple magnetic circuit consisting of a nonlinear magnetic reluctance,

$$\phi = \phi_{Fe}(\theta_{Fe}) \quad \text{bzw.} \quad \theta = \theta_{Fe}(\phi)$$

und einer linearer Reluktanz des Luftspalts

respectively, and the linear reluctance of the airgap,

$$\theta_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{L}}(\varepsilon)\phi \tag{5.1}$$

ausgegangen. Dieser magnetische Luftwiderstand ist von der Position ε abhängig. Für die ausgerichteten Positionen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \pi$ wird der magnetische Widerstand R_{L} minimal. Die magnetische Spannung der Wicklung ist $\theta_0 = Ni$, wobei N die Gesamtwindungszahl beider beteiligten Wicklungen ist.

which depends on the angular position ε. At the aligned positions $\varepsilon = 0$ and $\varepsilon = \pi$, the magnetic relectance R_{L} is at its minimum. The magnetomotive force of the winding is $\theta_0 = Ni$, where N is number of turns of all windings connected in series.

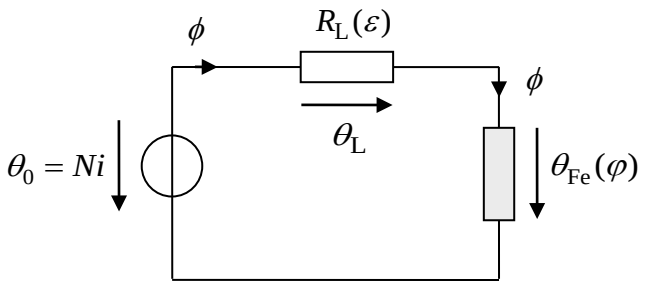


Fig. 5-4:
Einfaches Reluktanzmodell des einsträngigen SRM

Simple magnetic circuit of a single-phase SRM

$$Ni = \theta_0 = \theta_{\mathrm{L}} + \theta_{\mathrm{Fe}} = R_{\mathrm{L}}(\varepsilon)\varphi + \theta_{\mathrm{Fe}}(\varphi) \tag{5.2}$$

$$\psi = N\phi \tag{5.3}$$

Die Darstellung des Stroms in Abhängigkeit vom mehrfach verketteten Fluss $\psi = N\phi$ und Winkel ergibt

The representation of the phase current depending on the flux linkage $\psi = N\phi$ and position angle yields

$$i = i(\psi, \varepsilon) = \frac{R_{\mathrm{L}}(\varepsilon)}{N^2}\psi + \frac{1}{N}\theta_{\mathrm{Fe}}\left(\frac{\psi}{N}\right) \tag{5.4}$$

Wir gehen davon aus, dass durch die Umkehrabbildung die Magnetisierungskennlinie gefunden werden kann, so dass folgt

It should be assumed this equation can be solved for the flux so that magnetization curve results as

$$\psi = \psi(i, \varepsilon) \tag{5.5}$$

Nach (2.21) kann der Fluss und die Kraft aus der Koenergie gewonnen werden. Der

According to (2.21), the flux and the force can be derived from the co-energy. The only

einzige Unterschied ist, dass wir hier keine translatorische, sondern dass eine rotatorische Verschiebung vorliegt, so dass die Kraftvariable nun das Drehmoment T ist:

difference is that we do not have here a translational, but rotational displacement so that the resulting force quantity is now the torque T:

$$\psi(i,\varepsilon)=\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial i}\ ,\quad T(i,\varepsilon)=\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \varepsilon}$$

Anhand der Magnetisierungskennlinie kann die Funktionsweise des SRM demonstiert werden. Zunächst sei angenommen, dass das Material keine Sättigung zeigt, so dass die Magnetisierungskennlinine eine Gerade ist, deren Steigung, also die Induktivität, von der Winkelposition abhängt.

With the magnetization curves, the functional principle of the SRM can be demonstrated graphically. For means of simplification, saturation is not considered at first, i. e. the magnetization curves are assumed as straight lines. The slope of such a line is the inductance that depends on the angular position.

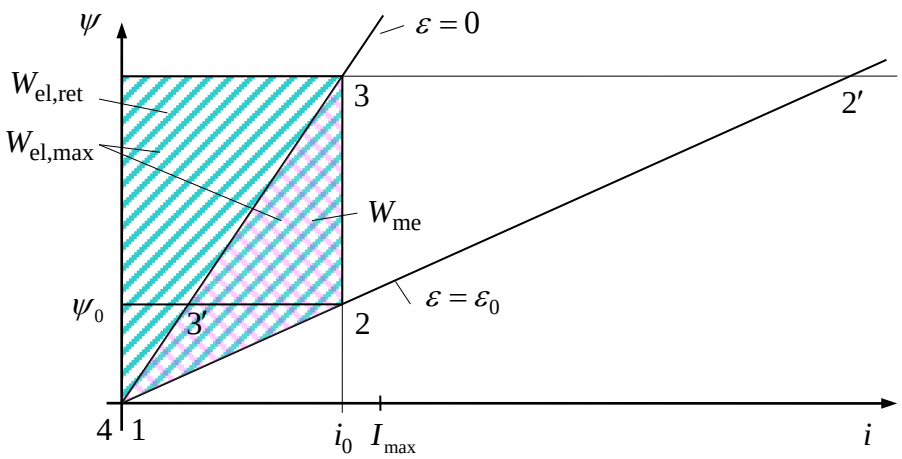


Fig. 5-5:
Energiewandlungszaklus des geschalteten Reluktanz-Motors mit linearem magnetischem Material

Cycle of energy conversion of the SRM with linear magnetic material

Die Energiewandlung wird anhand eines idealisierten Zyklus betrachtet. Dabei werden insbesonders die Arbeitsdifferenziale

The conversion of energy is discussed with an idealized cycle. Particularly, we will investigate the differentials of work

$$\mathrm{d}W_\mathrm{el}=i\,\mathrm{d}\psi \tag{5.6}$$

und

and

$$\mathrm{d}W_\mathrm{me}=T\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon \tag{5.7}$$

untersucht, die als Flächen links und unter der Magnetisierungskurve interpretiert werden können (vgl. Fig. 2-4). Wir beginnen im

- Zustand 1: $i = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

  Der Rotor befindet sich in einer nicht ausgerichteten Position $\varepsilon = \varepsilon_0$. Die Spule ist stromlos. Nun wird der Strom bis auf den Wert $i = i_0$ erhöht. Wir gehen im Gedankenexperiment davon aus, dass sich der Rotor während dieser Aufmagnetisierung nicht bewegt bzw. festgebremst ist. Wir gelangen dann in den

- Zustand 2: $i = i_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

  Bis hierhin wurde die elektrische Arbeit

which can be interpreted as areas left from and below the magnetization curve (cf. Fig. 2-4). Let us begin in

- State 1: $i = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

  The rotor is in an unaligned position $\varepsilon = \varepsilon_0$. The winding is turned off, the current is zero. Then, the current is increased from zero to the final value $i = i_0$. During this time of magnetizing the rotor is assumed not to move or to be fixed by a brake. As a result, the next state is …

- State 2: $i = i_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

  Until now, the electric work supplied to the motor is

$$W_{\mathrm{el1,2}} = \int_1^2 i \, \mathrm{d}\psi \tag{5.8}$$

verrichtet, die sich als Dreiecksfläche zwischen der Geraden 1-2 und der ψ-Achse interpretieren lässt. Bei Übergang zwischen Zustand 1 und 2 wurde keinerlei mechanische Arbeit geleistet.

Nun wird der Rotor freigegeben, so dass sich dieser in die ausgerichtete Position drehen kann. Dabei werde der Strom konstant gehalten:

- Zustand 3: $i = i_0$, $\varepsilon = 0$

  Der Rotor hat sich unter den Statorpolen ausgerichtet. Bis hierhin wurde die elektrische Arbeit

which is the triangular area between the line 1-2 and the ψ-axis. During the transition between state 1 and state 2 no mechanical work is done.

Now, the rotor is released so that it can move to the aligned position. During that movement, the current is kept constant, resulting in the new state

- State 3: $i = i_0$, $\varepsilon = 0$

  The rotor has now aligned to the stator poles. Until now, the electrical work fed into the motor is

$$W_{\mathrm{el,max}} = W_{\mathrm{el1,3}} = \int_1^3 i \, \mathrm{d}\psi \tag{5.9}$$

geleistet. Das ist die Fläche zwischen dem Kurvenzug 1-2-3 und der ψ-Achse. Während des Übergangs von der Position 2 in die Position 3 wird die mechanische Arbeit

which is the area between the curve 1-2-3 and the ψ-axis. During the transition from position 2 and 3, the motor provides the mechanical work

$$W_{\mathrm{me}} = \int_1^3 \frac{\partial E_c}{\partial \varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon \tag{5.10}$$

geleistet. Das ist die vom Dreieck 1-2-3 gebildete Fläche, also die Änderung der Fläche unter der Magnetisierungskurve.

This is the area of the triangle 1-2-3, i.e. the change of the area below the magnetization curve.

Im ausgerichteten Zustand wird der Rotor dann gedanklich wieder festgehalten und dann der Strom ausgeschaltet, so dass wir in den

In the aligned position, the rotor is assumed to be fixed again and then the current is turned off, resulting in …

- Zustand 4: $i = 0$, $\varepsilon = 0$

gelangen. Während dieser Entmagnetisierung wird die noch in der Spule befindliche innere Energie an die elektrische Einspeisung zurückgegeben:

- State 4: $i = 0$, $\varepsilon = 0$

During this demagnetization, the stored magnetic energy of the winding is returned to the electrical energy supply:

$$W_{\mathrm{el,ret}} = -\int_3^4 i \, \mathrm{d}\psi \tag{5.11}$$

Das ist die Dreiecksfläche zwischen der Geraden 3-4 und der ψ-Achse.

This is the area of the triangle between line 3-4 and the ψ-axis.

Unter Vernachlässigung von ohmschen und Ummagnetisierungsverlusten gilt in der Gesamtbilanz

Neglecting ohmic voltage drops and hysteresis losses, the total balance results as

$$W_{\mathrm{me}} = W_{\mathrm{el}} = W_{\mathrm{el,max}} - W_{\mathrm{el,ret}} \tag{5.12}$$

Da aber von der elektrischen Einspeisung zunächst einmal der Spitzenwert $W_{\mathrm{el,max}}$ aufgebracht werden muss, ist es gerechtfertigt, einen Leistungsfaktor ähnlich wie bei Wechsel- oder Drehstromsystemen zu definieren:

However, because the electrical supply must provide the full peak value $W_{\mathrm{el,max}}$ before a part of the work is returned, it is reasonable to introduce a power factor similar to that of common one-phase or three-phase AC systems like

$$\gamma = \frac{W_{\mathrm{me}}}{W_{\mathrm{el,max}}} = 1 - \frac{W_{\mathrm{el,ret}}}{W_{\mathrm{el,max}}} \tag{5.13}$$

Bei linearem Material kann dieser Leistungsfaktor prinzipiell nicht besser als 0,5 sein, wie aus der grafischen Darstellung sofort einsichtig wird:

Using linear materials, this power factor cannot be better as 0.5 by principle as it can be seen directly from the graphical representation:

$$\gamma < 0.5 \tag{5.14}$$

Ein modifizierter Arbeitszyklus wie 1, 2´, 3, 4 verspräche zwar einen günstigeren Leistungsfaktor, dieser ist wegen der Überschreitung der Stromgrenze I_{max} nicht möglich. Durch Veränderung des Zyklus auf 1, 2, 3´, 4 verbessert sich zwar der Leistungsfaktor, die Ausbeute gewandelter Arbeit je Zyklus unter Ausnutzung eines maximalen Stroms verschlechtert sich jedoch, so dass der Zyklaus 1, 2, 3, 4 tatsächlich die größte Ausnutzung ermöglicht. (Für Teillastbetrieb wäre der Zyklus 1, 2, 3´, 4 aber eine mögliche Alternative.)

A better power factor could be achieved running a modified cycle like 1, 2´, 3, 4. However, that would exceed a maximum current limit I_{max} so that it is not possible. The modified cycle 1, 2, 3´, 4 would improve the power factor as well, but the result of converted work per cycle is smaller. So, the cycle 1, 2, 3, 4 provides really the best work exploitation within a given current limit. For operation at partial load, however, cycle 1, 2, 3´, 4 is an alternative.

Der Leistungsfaktor verbessert sich allerdings bei Berücksichtigung der magnetischen Sättigung (s. Fig. 5-6). Dann sind auch Werte $\gamma > 0.5$ möglich.

Curiously, the power factor improves in case of magnetic saturation as it is shown in Fig. 5-6. In this case values $\gamma > 0.5$ are possible.

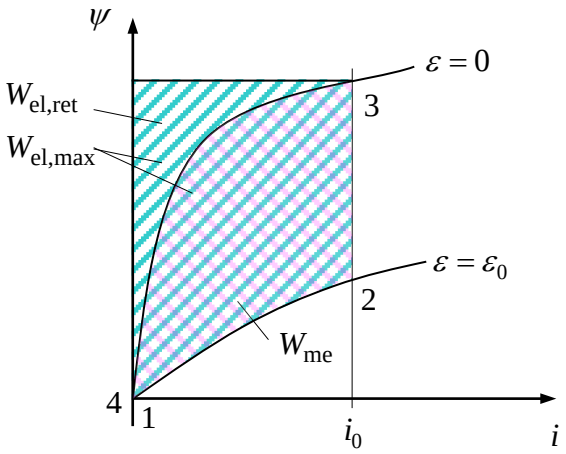


Fig. 5-6:
Zyklus der Energiewandlung des Geschalteten Reluktanz-Motors mit Berücksichtigung der Eisensättigung

Cycle of energy conversion of the switched reluctance motorwith consideration of iron saturation

Natürlich soll ein solcher Motor nicht immer volle Leistung übertragen. Teillastbetrieb wird erreicht, indem man entweder die Stromhöhe i_0 und/oder die Ein- und Ausschaltwinkel variiert.

Naturally, the motor is not always in charge to operate at full load. Partial load is realized if either the current magnitude i_0 is reduced and/or the switch-on and switch-off positions are changed.

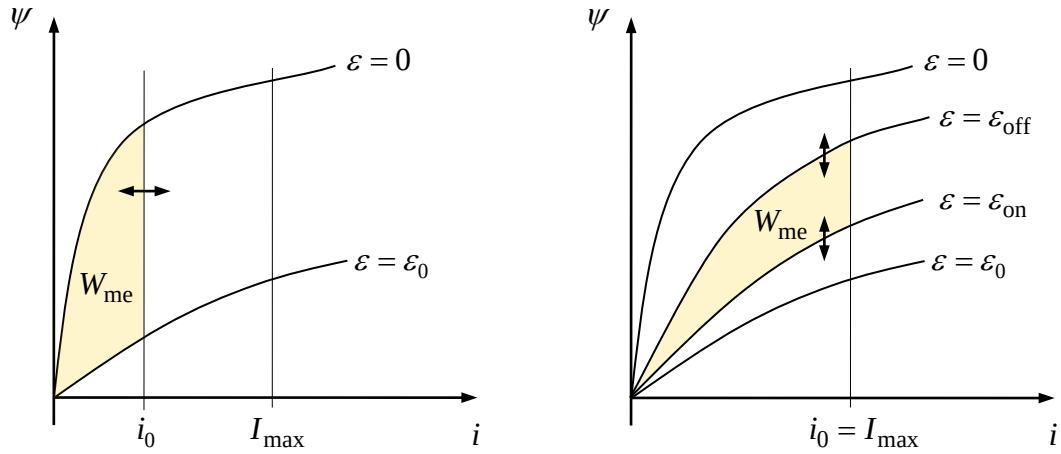


Fig. 5-7:
Veränderung der gewandelten Energie bzw. des mittleren Drehmoments über die Stromamplitude oder über die Schaltwinkel

Changing the converted energy and the mean torque by variation of the current magnitude or of the switch-on and switch-off positions

Gewöhnlich schwankt das Drehmoment des geschalteten Reluktanzmotor in einer Periode mehr oder minder stark. Für die Auswirkung auf die mechanische Last ist aber das über eine Periode τ_0 zeitlich gemittelte Drehmoment von Interesse. Eine Periode entspricht beim 2/2-SRM einer halben mechanischen Umdrehung von $180° = \pi$.

Usually, the torque of a switched reluctance motor will change more or less in one period. However, for the effect on the mechanical load, we are particularly interested in the averaged torque over one period τ_0 which corresponds with the 2/2-SRM to half of a mechanical revolution, i.e. an angle of $180° = \pi$,

$$\overline{T} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\pi} \frac{T(t)}{\omega(t)}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{\tau_0\omega}\int_0^{\pi} T(t)\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{W_{\mathrm{me}}}{\pi} \tag{5.15}$$

Bei dieser Umformung wurde die Winkelgeschwindigkeit aufgrund genügend großer Trägheit als konstant angenommen und vor das Integral gezogen, so dass sich $\tau_0\omega = \pi$ ergibt. Das verbleibende Integral ist gerade die mechanische Arbeit einer Periode. Das mittlere Drehmoment $\overline{T}$ eines Arbeitstakts ist also bis auf einen Faktor π gleich der mechanischen Arbeit. Man bemerke, dass auch die Maßeinheiten der Größen *Arbeit* und *Drehmoment* zueinander passen.

The above derivation assumed the speed $\omega(t)$ constant due to a sufficiently large intertia so that ω can be pulled out of the integral resulting in $\tau_0\omega = \pi$. The remaining integral yields the mechanical work of one period. Thus, the averaged torque is equal to the work except for a factor of π. Please note that also the units of the quantities *work* and *torque* are matching.

Bei einem Motor der Rotorpolpaarzahl N_r dreht sich der Rotor während einer vollen elektrischen Periode (alle Statorphasen N_s

With a motor of rotor pole number N_r, the rotor rotates within a full electrical period (when all stator phases N_s have completed

durchlaufen genau einen Arbeitstakt) dagegen nur um den Winkel $\Delta\varepsilon = \pi / N_r$. Außerdem leistet jeder der N_s Statorstränge bzw. -Polpaare die gleiche Arbeit W_{me}, also

one cycle) only by the angle $\Delta\varepsilon = \pi / N_r$. Additionally, each of the N_s stator phases (or stator pole pairs) contribute with the same amount of work W_{me}, resulting in the total work balance

$$\Delta\varepsilon \overline{T} = N_s W_{me} \tag{5.16}$$

Hieraus bestimmt sich das mittlere Drehmoment eines $2N_s / 2N_r$-Motors also zu

This yields the mean torque of a $2N_s / 2N_r$-Motors as

$$\overline{T} = N_s N_r \frac{W_{me}}{\pi} \tag{5.17}$$

Drückt man die Drehfrequenz des Rotors durch die Kommutierungsfrequenz f_K (die Frequenz der Arbeitstakte) aus, erhält man für die mechanische Winkelgeschwindigkeit

Let the commutation frequency be f_K (the frequency of turning the current from one phase to the next). Then the resulting speed is

$$\omega = \frac{\Delta\varepsilon}{N_s / f_K} = \frac{\pi f_K}{N_s N_r} \tag{5.18}$$

bzw. für die mittlere Leistung

and the averaged power is

$$\overline{P} = \omega \overline{T} = f_K W_{me} \tag{5.19}$$

5.3 Dynamisches Verhalten
Dynamic Behavior

Bislang wurde die Energiewandlung des Geschalteten Reluktanz-Motors unter Vernachlässigung der Dynamik betrachtet. Tatsächlich benötigen die Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen Zeit, während der sich der Motor weiterdreht.

So far, the energy conversion was discussed without considering the dynamic behavior. In reality, the transistion between the idealized states require time, and during this time, the motor continues its rotation.

Ausgangspunkt ist das Induktionsgesetz

Starting point is Faraday's law:

$$\dot{\psi} = u - Ri \tag{5.20}$$

Mit

With

$$\psi = \psi(i, \varepsilon) \tag{5.21}$$

folgt für die Zeitableitung des Flusses

The time derivative of the flux follows as

$$\dot{\psi} = \dot{i} \frac{\partial \psi}{\partial i} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \tag{5.22}$$

sowie für die Spannung

and then the voltage

$$u = Ri + \dot{i}\frac{\partial \psi}{\partial i} + \dot{\varepsilon}\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}. \tag{5.23}$$

Die Auflösung nach der Stromableitung liefert

Solving this equation for the derivative of the current yields

$$\dot{i} = \frac{u - Ri - \omega\dfrac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial i}} = \frac{u - Ri - \omega\dfrac{\partial^2 E_\mathrm{c}}{\partial \varepsilon \partial i}}{L(i,\varepsilon)} = \frac{u - Ri - \omega\dfrac{\partial T}{\partial i}}{L(i,\varepsilon)}, \tag{5.24}$$

mit

with

$$\omega = \dot{\varepsilon} \tag{5.25}$$

und der differenziellen Induktivität

and the differential inductance

$$L(i,\varepsilon) = \frac{\partial \psi}{\partial i} = \frac{\partial^2 E_\mathrm{c}}{\partial i^2} \tag{5.26}$$

Bei konstantem Strom $i = I = const.$ ist die erforderliche Spannung

In stationary case with constant current $i = I = const.$ the required stationary voltage results as

$$U_0 = RI + \omega\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = RI + \omega\frac{\partial^2 E_\mathrm{c}}{\partial \varepsilon\, \partial i} \tag{5.27}$$

Im Folgenden wird vereinfachend lineares magnetisches Material mit einer dann konstanten Reluktanz R_{Fe} betrachtet. Die Induktivität ist unter dieser Annahme nicht mehr vom Strom, sondern nur noch vom Winkel abhängig:

For means of simplicity, the magnetic material is assumed as linear with a constant reluctance R_{Fe} in the following section. With this assumption, the inductance no longer depends on the current, but on the rotation angle only:

$$L(\varepsilon) = \frac{N^2}{R_\mathrm{Fe} + R_\mathrm{L}(\varepsilon)} \tag{5.28}$$

Für den Fluss gilt

The flux is then

$$\psi = L(\varepsilon)\, i \tag{5.29}$$

.

Die innere und die Ko-Energie resultieren zu

The internal energy and the co-energy result as

$$E_{\mathrm{i}}(\psi,\varepsilon)=\frac{\psi^2}{2L(\varepsilon)}, \tag{5.30}$$

$$E_{\mathrm{c}}(i,\varepsilon)=\frac{1}{2}L(\varepsilon)i^2. \tag{5.31}$$

Das Drehmoment ist

The torque is

$$T=\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial\varepsilon}=\frac{1}{2}L'(\varepsilon)i^2 \tag{5.32}$$

wobei

where

$$L'(\varepsilon)=\frac{\mathrm{d}L(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}. \tag{5.33}$$

Die Drehmomentbildung ist also maßgeblich auf die winkelabhängige Änderung der Induktivität angewiesen. Vom Vorzeichen des Stroms hängt das Drehmoment dagegen nicht ab. Um das Drehmoment umzukehren und die Maschine generatorisch zu betreiben, muss (bei weiterhin positiver Drehzahl) im Bereich fallender Induktivität gearbeitet werden. Das läuft im Wesentlichen auf den umgekehrten Durchlauf des skizzierten Arbeitszyklus hinaus.

The generation of torque relies essentially on the angle-dependent change of the inductance. However, the sign of the current is irrelevant. In order to reverse the torque and to operate the machine as a generator, the current has to be switched on in the area of decreasing inductance (while still positive speed is assumed). The resulting operation is then just the inverse cycle as mentioned above for the driving case.

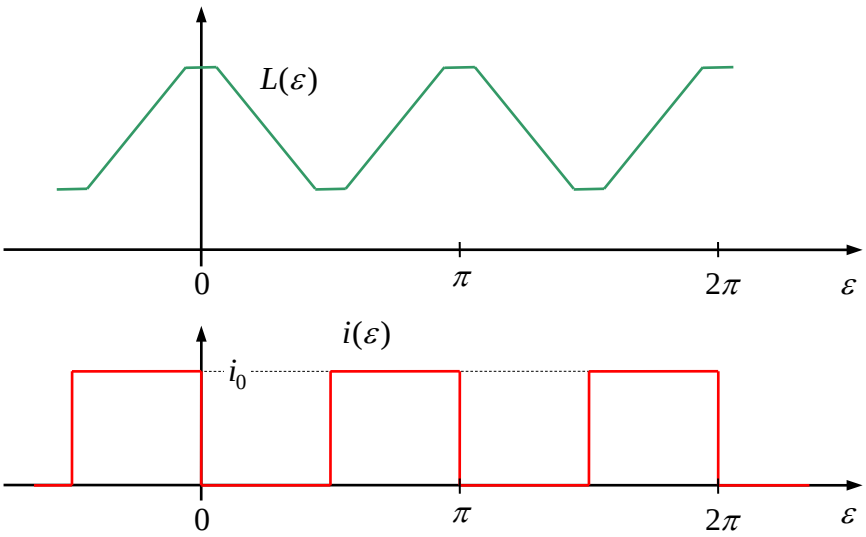


Fig. 5-8:
Idealisierte Verläufe der Induktivität und des Stroms über der Position (motorischer Betrieb)

Idealized shapes of inductance and current vs. position (driving operation)

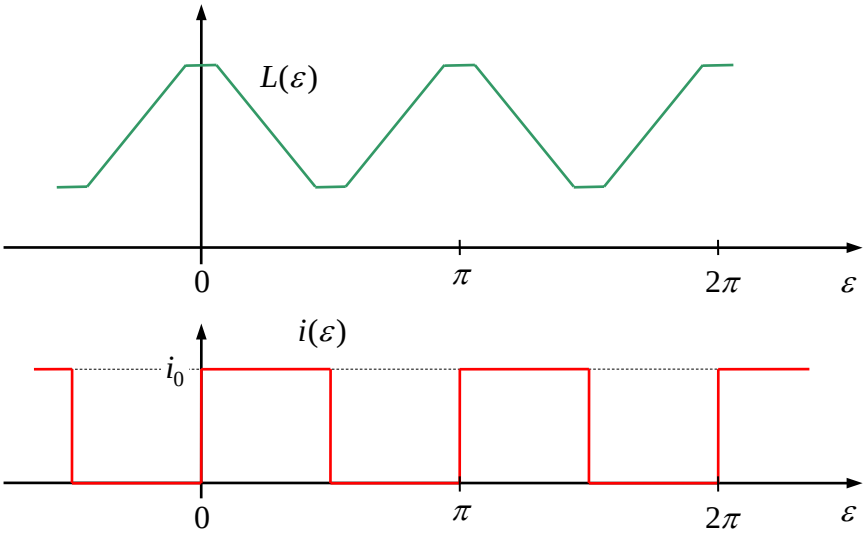


Fig. 5-9:
Idealisierte Verläufe der Induktivität und des Stroms über der Position (generatorischer Betrieb)

Idealized shapes of inductance and current vs. position (regenerative operation)

Anders als der in Fig. 5-6 dargestellte idealisierte Stromverlauf lässt sich der Strom aber nicht momentan ein- und ausschalten, sondern er gehorcht der oben entwickelten Differenzialgleichung

Deviating from the idealized current shapes of Fig. 5-9, the current cannot switched on and off instantaneously. The current obeys the differential equation

$$\dot{i} = \frac{u - Ri - \omega L'(\varepsilon) i}{L(\varepsilon)} . \tag{5.34}$$

Für konstanten Strom ist die Spannung

For constant current the required voltage is

$$U_0 = \left(R + \omega L'(\varepsilon)\right) I . \tag{5.35}$$

erforderlich. Diese Gleichungen erinnern an das Verhalten des Ankerkreises eines Gleichstrommotors. Auch dort haben wir einen ohmschen und einen induktiven Spannungsabfall sowie eine drehzahlabhängige EMK als Gegenspannung.

These equations remind us of DC motor's armature voltage, consisting of a ohmic voltage drop, a inductive voltage drop, and speed-varying electromagnetic force (EMF).

Abhängig von der Drehzahl sollen nun im Folgenden die zeitlichen Verläufe für den Arbeitszyklus qualitativ skizziert werden. Hierbei wird die speisende elektrische Energieversorgung als ideal steuerbare Quelle betrachtet, wobei allerdings eine Spannungsbegrenzung $-U_{\max} < u(t) < U_{\max}$ berücksichtigt werden soll.

The time behavior in a working cycle should now be discussed in detail for various cases of the speed. The feeding electrical supply is considered as a freely controllable voltage source within the limits $-U_{\max} < u(t) < U_{\max}$.

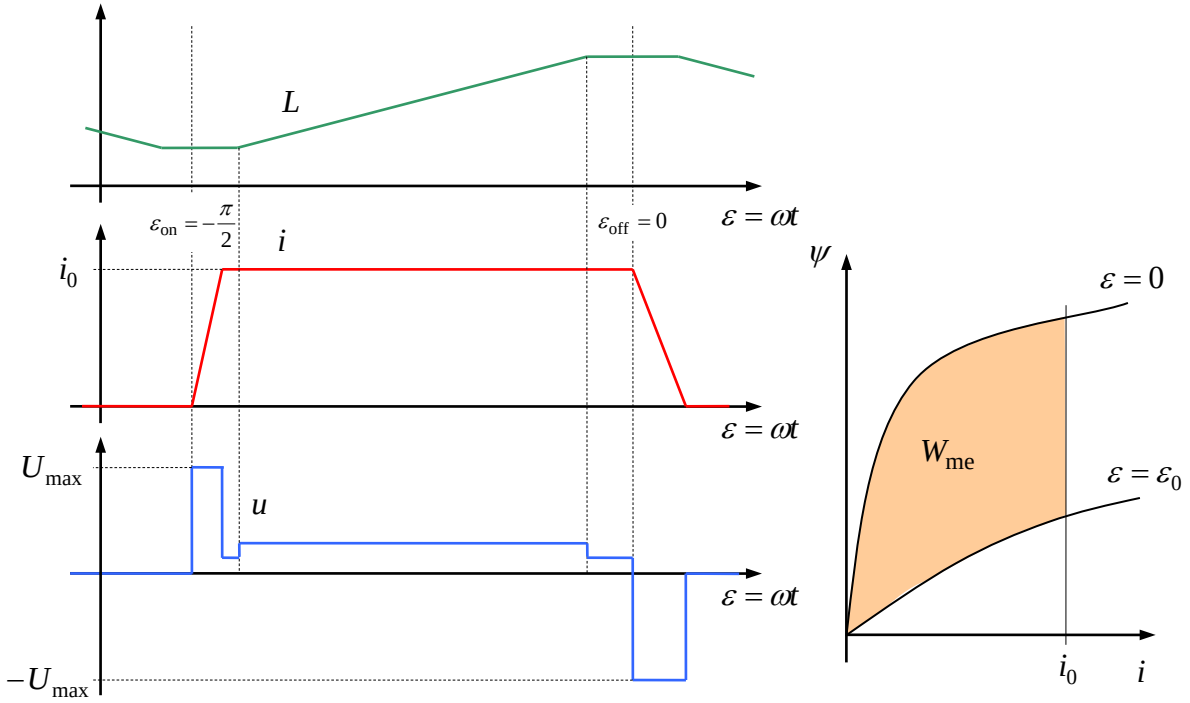


Fig. 5-10:
Verläufe bei kleiner Drehzahl Behavior at small speed

Bei kleiner Drehzahl wird der Strom bei kleinster Induktivität ein- und in der ausgerichteten Position wieder ausgeschaltet. Um den Strom möglichst schnell ein- und wieder auszuschalten, werden die maximal und minimal verfügbaren Spannungen verwendet. Der Stromanstieg ist steiler als der Abfall beim Ausschalten, weil in der ausgerichteten Position die Induktivität größer ist als beim Einschalten. Wird Anstieg und Abfall des Strom in den Bereichen mit näherungsweiser konstanter Induktivität bewerkstelligt, entspricht die gewandelte Energie dem aus der Idealisierung erwarteten Wert, (s. linkes Teilbild).

At small speed, the current is switched on at the position with smallest inductance and switched off at the aligned position. In order to switch-on and to switch-off the current as quickly as possible, maximum and minimum voltages are applied. The current rise is quicker as the decay, because the inductance in the aligned position is larger as at switch-on. If rise and decay of current are finished within the intervals of approximately constant inductance, the amount of converted energy is really that from the idealized view (left figure).

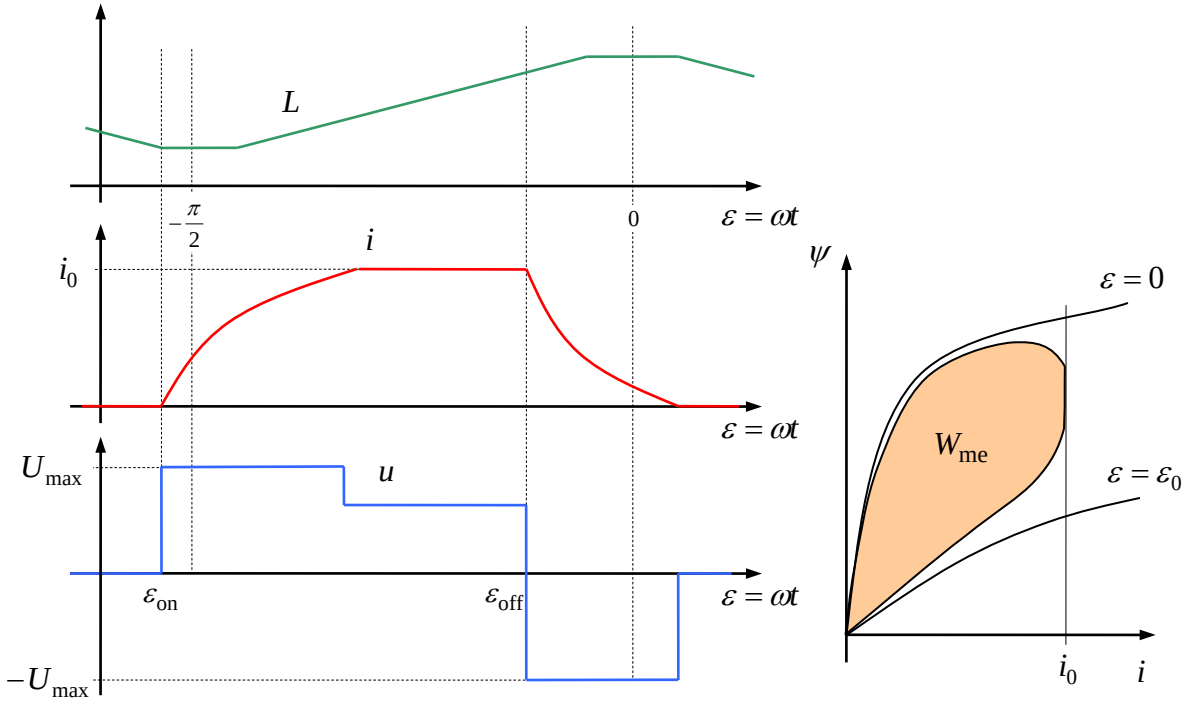


Fig. 5-11:
Verläufe bei mittlerer Drehzahl

Behavior at medium speed

Bei etwas größerer Drehzahl verringert die drehzahlabhängige Gegenspannung den Stromanstieg. Außerdem fällt dieser in der Darstellung über dem Drehwinkel zusätzlich flacher aus, weil der Winkelbereich schneller durchlaufen wird. Die Gegenspannung hilft allerdings bei der Entmagnetisierung. Aufgrund der stärker verschliffenen Stromform werden Ein- und Ausschaltwinkel zweckmäßigerweise gegenüber den geometrisch idealen Positionen vorgezogen, um das Drehmoment schnellstmöglich aufzubauen bzw. um den Strom zu Null zu bringen, bevor die Induktivität wieder kleiner wird und ein negatives Drehmoment erzeugt werden würde. Der zunehmende Verschliff des Stromverlaufs lässt das maximal erreichbare Drehmoment gegenüber dem idealisierten Verlauf spürbar abfallen.

At higher speed, the current rise takes more time because of the increased countervoltage. It must also be considered that the angle is passed through faster at higher speed, also contributing to a flatter shape of the current vs. angle. The countervoltage, however, helps during the demagnetization phase. Switch-on and switch-off should be triggered earlier compared to the case of small speed in order to increase the torque as quickly as possible and to bring it down before the inductance decreases again and would generate negative torque. Due to the rounded shape of the current a cut back of the converted work and also of the torque has to be taken into account compared to the idealized cycle.

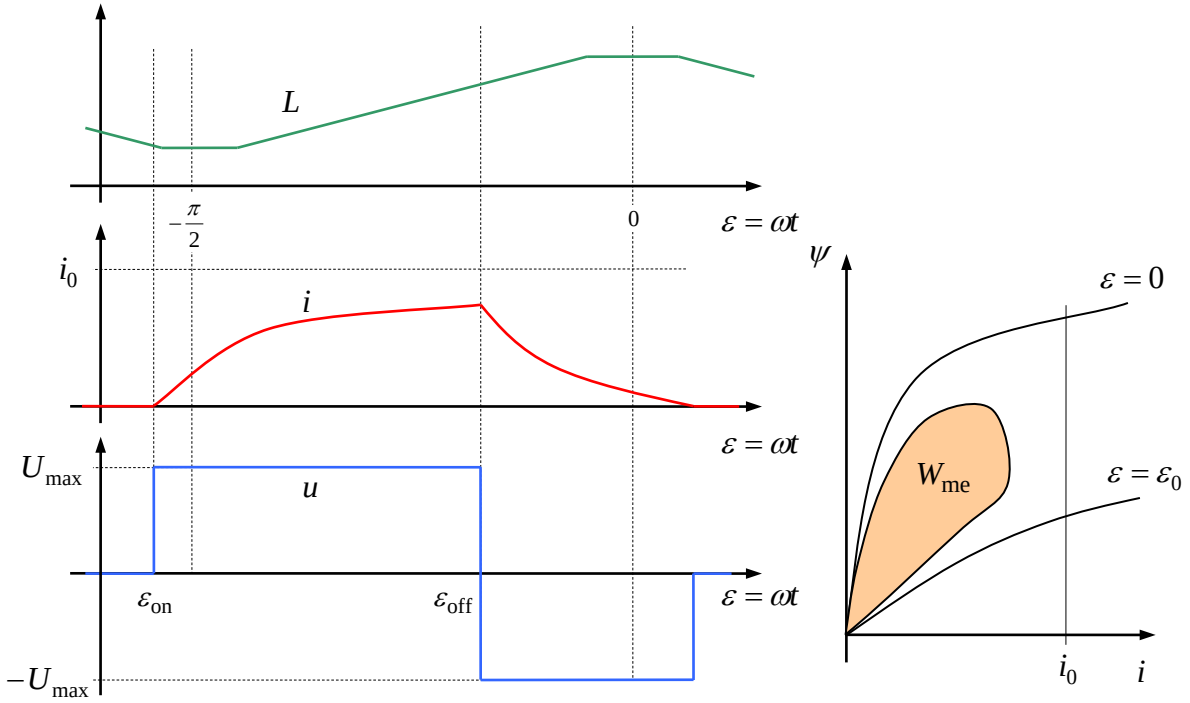


Fig. 5-12:
Verläufe bei hoher Drehzahl — Behavior at high speed

Bei hoher Drehzahl müssen Ein- und Ausschaltwinkel weit vorgezogen werden. Die Gegenspannung ist nun so groß, dass der vorherige Stromscheitelwert trotz maximaler Spannungsaufschaltung nicht mehr erreicht wird. Die Drehmomentausbeute wird deutlich kleiner. In Näherung kann von einem umgekehrt zur Drehzahl abfallenden Drehmoment ausgegangen werden.

At high speed, switch-on and switch-off angles have to be pulled ahead. The countervoltage is now so large that current will no longer reach its previous peak value. The exploitation of work and torque decreases distincly. As an approximation, the torque decreases inversely proportional to speed.

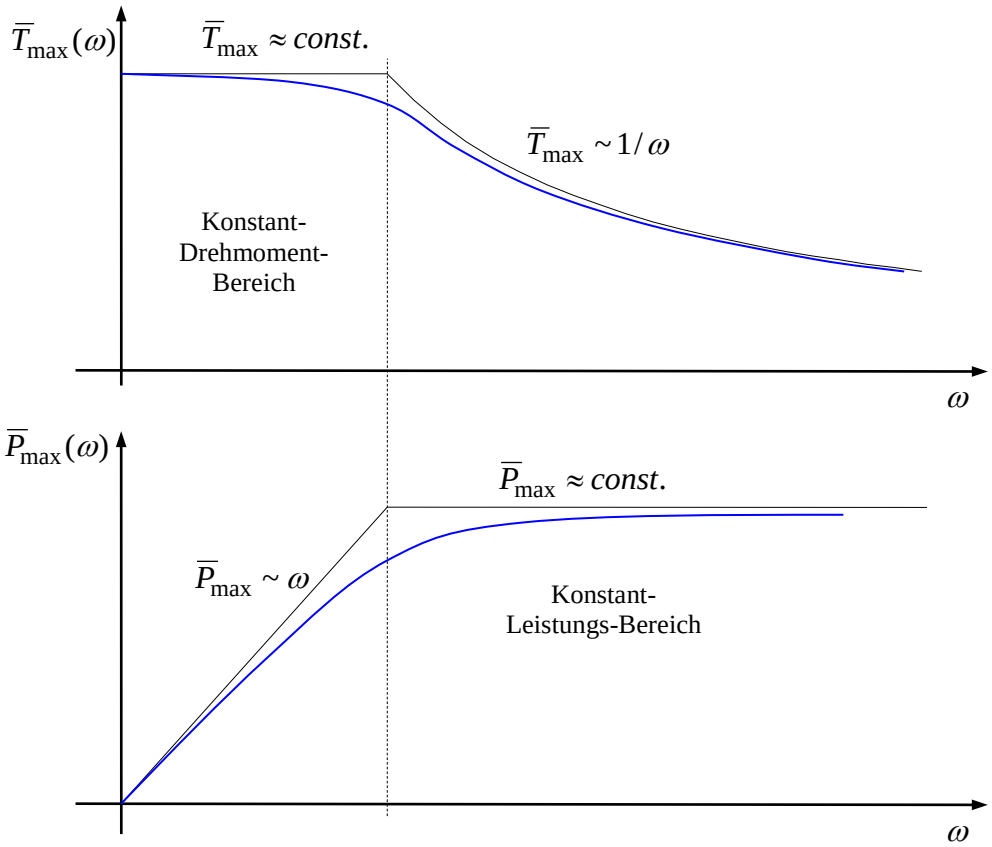


Fig. 5-13:
Maximales Drehmoment und maximale Leistung in Abhängigkeit von der Drehzahl

Maximal torque and maximal power vs. speed

5.4 Stromrichter

Das Drehmoment eines Geschalteten Reluktanz-Motors ist vom Vorzeichen des Stroms nicht abhängig. Der Stromrichter kann daher von vornherein auf nur eine Stromrichtung ausgelegt werden. Allerdings werden beide Spannungspolaritäten benötigt, da die Stränge durch negative Spannung schnell entmagnetisiert werden müssen. Der Stromrichter muss demnach ein 2-Quadranten-Steller sein.

The torque of a switched reluctance motor does not depend on the sign of the current. That is why the converter can be designed for only one current polarity. However, both voltage polarities are required since negative voltage is needed to quickly demagnetize the phases. The specified converter is then a 2-quadrant converter.

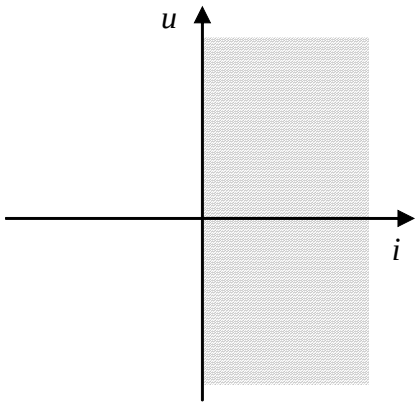


Fig. 5-14:
Benötigter Strom-Spannungs-Bereich für einen Strang eines SRM

Required current-voltage-area of a SRM phase

Der benötigte Stromrichter kann aus dem 4-Quadranten-Steller (s. Abschnitt 4.6) abgeleitet werden, wobei alle für die gewählte Stromrichtung überflüssigen Transistoren und Dioden gestrichen werden. Dadurch entsteht der 2-Quadranten-Steller des folgenden Bildes, welcher auch als asymmetrische Halbbrücke bezeichnet wird.

The specified converter can be derived from the 4-quadrant converter that is already known from Section 4.6. Removing all devices which are not necessary for the positive current polarity yields the 2-quadrant converter which is depicted in the following figure. It is also known as asymmetrical half-bridge.

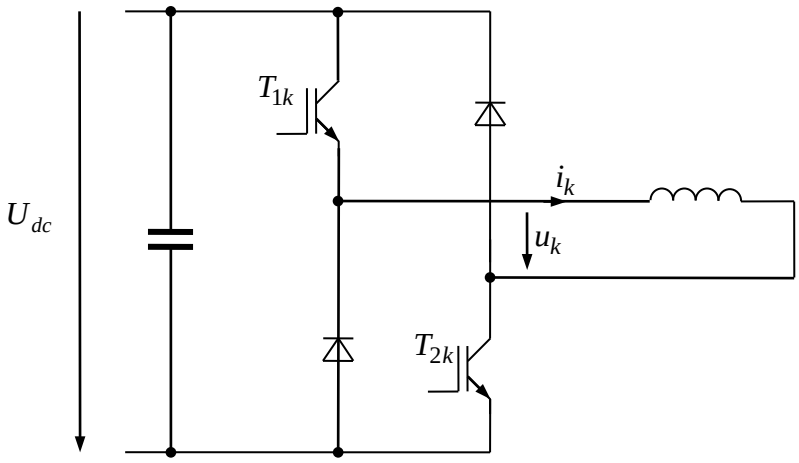


Fig. 5-15:
2 Quadranten-Steller (Halbbrücke) als Stromrichter zur Speisung eines Strangs eines Geschalteten Reluktanz-Motors

2-quadrant converter (half-bridge) as converter in order to supply one phase of a switched reluctance motor

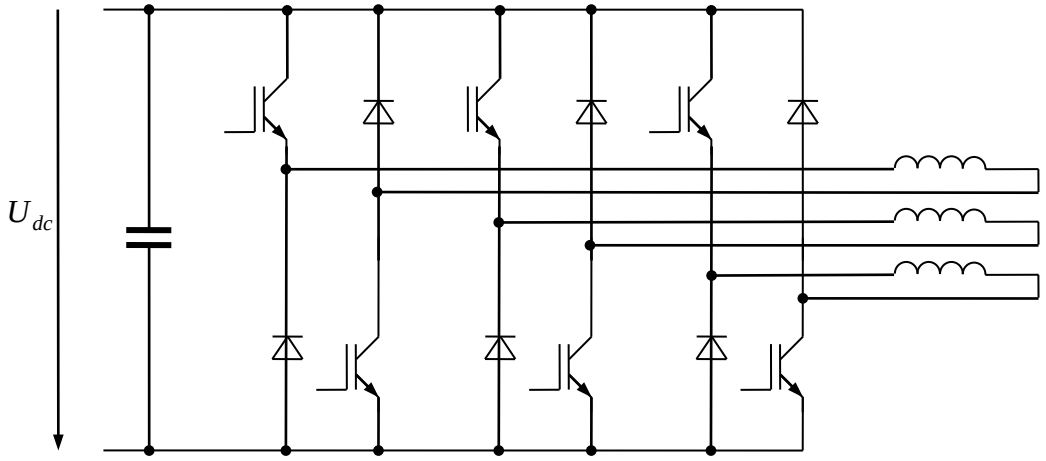


Fig. 5-16:
Stromrichter zur Speisung eines dreisträngigen Geschalteten Reluktanz-Motors

Converter for a three-phase switched reluctance motor

Die Wicklungen des Geschalteten Reluktanz-Motors müssen einzeln mit beiden Anschlüssen aus dem Motor herausgeführt werden und dürfen nicht wie bei Drehstrommotoren oder beim Magnetlager im Stern oder Dreieck geschaltet werden. Der Aufwand an Verbindungsleitungen ist daher höher als bei Drehstrommotoren. Der Stromrichter des dreisträngigen Geschalteten Reluktanz-Motors gleicht von der Zahl der notwendigen Transistoren und Dioden denen für Drehstrommotoren. Da die Stromrichtertopologie eine andere ist, können Standard-Module der Drehstromtechnik leider nicht verwendet werden können.
Die Spannung an einer Wicklung ergibt sich abhängig von den Zuständen der Transistoren nach folgender Tabelle. Bei den mit * gekennzeichneten Zuständen sind nur Dioden im Strompfad leitend. Daher resultieren die angegebenen Spannungen nur unter der Annahme, dass tatsächlich ein Strom fließt, also $i_k > 0$. Erlischt der Strom, wird die Spannung von der Last selbst bestimmt.

Both endings of each phase winding of a switched reluctance motor have to be provided as external terminals. They are not allowed to be connected as star or delta circuit as in the cases of normal AC motors or a magnetic bearing. The wiring effort is thus larger as with AC motors. The converter consists of the same number of transistors and diodes as the AC motor converter. However, the converter topology is different so that standard AC modules cannot be used.
The voltage of a winding results from the following switching table. In the states marked with stars *, only diodes are conducting. So, the declared voltage is only valid, if a current is acutally flowing, i.e. $i_k > 0$. After end of conduction, the voltage is determined by load itself.

T_{1k}	T_{2k}	u_k
off	off	$-u_{dc}$ *
off	on	0 *
on	off	0 *
on	on	$+u_{dc}$

Durch eine Pulsweitenmodulation oder durch direkte Strom-Schaltregelung werden die Transistoren geeignet getaktet. Die Pulsweitenmodulation kann direkt aus Abschnitt 3.8 übernommen werden.

The transistors are chopped with the help of a pulse width modulation or a suitable current hysteresis or peak mode control. The approach of Section 4.7 can be applied also here.

6 Schrittmotoren
Stepping Motors

Schrittmotoren zeichnen sich dadurch aus, dass sie in aller Regel ohne Positionsgeber betrieben werden. Vielmehr soll durch eine geeignete elektrische Ansteuerung (häufig durch blockförmige Ströme) sichergestellt werden, dass sich der Motor um einen genau definierten Winkel weiterdreht bzw. bei linearen Motoren um eine Strecke weiterbewegt, so dass sich durch Mitzählen der elektrischen Impulse die Position ergibt.

Stepping motors are characterized by the fact that they are operated usually without any position sensor. Rather, an adequate electrical command (often block-shaped currents) should ensure that the motor moved by a certain increment so that the actual position can be determined by counting the electrical cycles.

Als Schrittmotoren können Geschaltete Reluktanz-Motoren oder bürstenlose, elektronisch kommutierte Permanent-Magnet-Motoren eingesetzt werden. Beide Arten von Motoren erzeugen im stromlosen Zustand jedoch kein oder nur ein geringes Haltedrehmoment bzw. eine Haltekraft. Nach dem Abschalten des Stroms kann sich daher der Motor bewegen. Seine Position ist beim nächsten Wiedereinschalten unbekannt. Für Anwenddungen, bei denen der Motor im ausgeschalteten Zustand seine Position nicht verändern soll, werden so genannte Hybrid-Motoren, die das Reluktanz-Prinzip mit Permanentmagneten kombinieren, eingesetzt.

Switched reluctance motors or brushless electronically commutated DC motors could be operated, in principle, as stepping motors. Both motor types do not generate any holding force or torque when the current is zero. The motor can move during the switched-off mode depending on the applied load so that the position may be unkown when starting next time. If the application requires to retain a definite position even in switched-off state, so-called hybrid motors are preferred, i.e. the varying reluctance is combined with permanent magnets.

Das Bild Fig. 6-1 zeigt als Beispiel einen linearen zweiphasigen Schrittmotor. Die einfachste Betriebsart ist die Einprägung blockförmiger Ströme, womit der Motor mit einer der Polteilung oder eines Bruchteils der Polteilung des passiven Teils entsprechenden Genauigkeit positioniert werden kann. Durch Überlappung der Ströme bzw. durch sinusförmige Speisung gelingt eine feinere oder sogar kontinuierliche Positionierung innerhalb einer Polteilung.

Fig. 6-1 shows the example of a linear two-phase stepping motor. The simplest operation mode is to apply block-shaped currents so that the motor can be positioned with an accuracy of one pole pitch of the passive stator. Using current overlapping of both phases or sinusoidally shaped currents, even a finer positioning can be achieved.

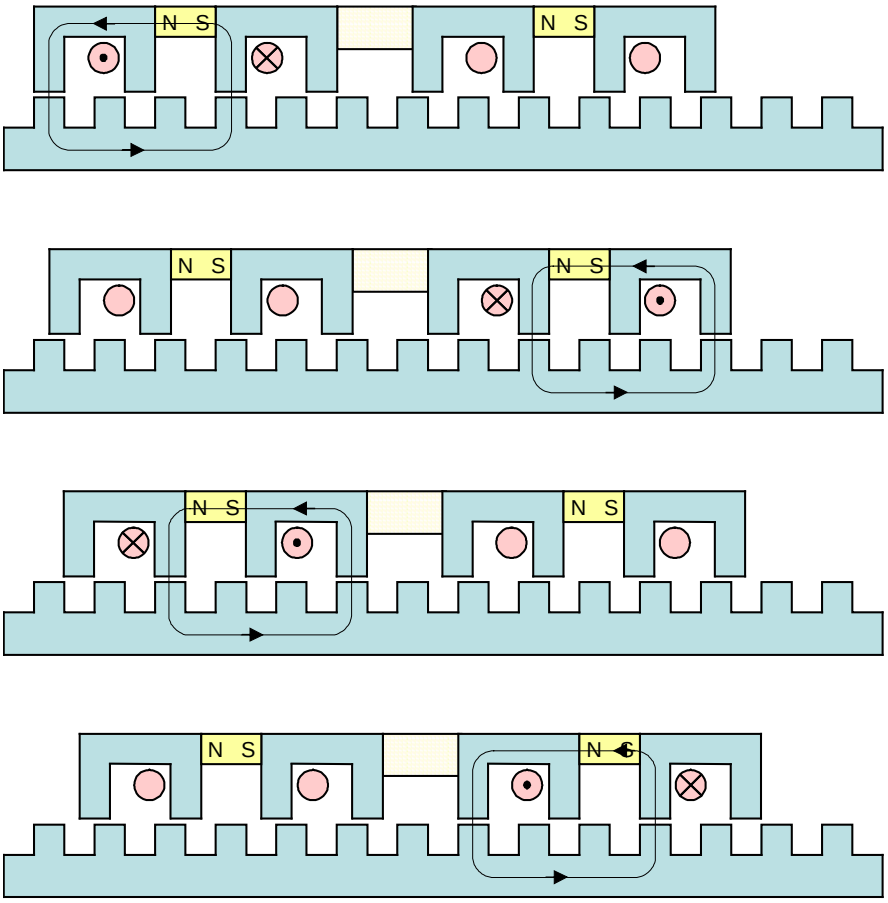


Fig. 6-1:
Linearer hybrider Schrittmotor Linear hybrid stepping motor

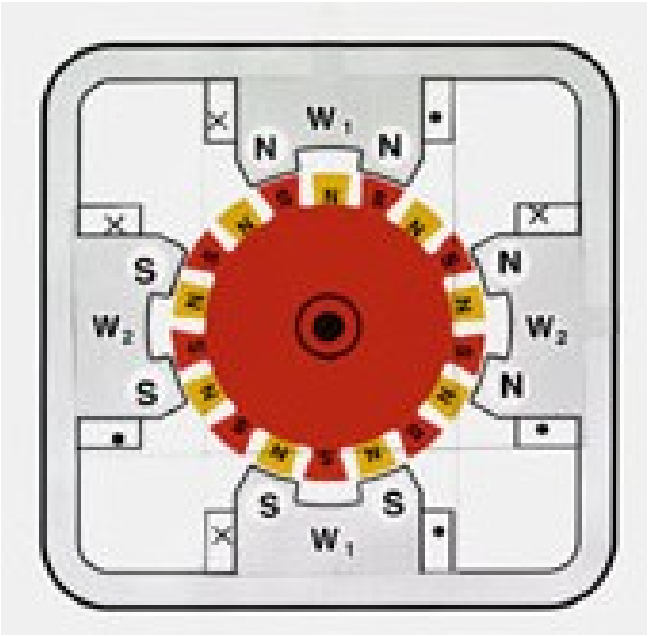


Fig. 6-2:
Hybrider Schrittmotor Hybrid stepping motor

7 Gleichstrommotor[12] DC-Motor[13]

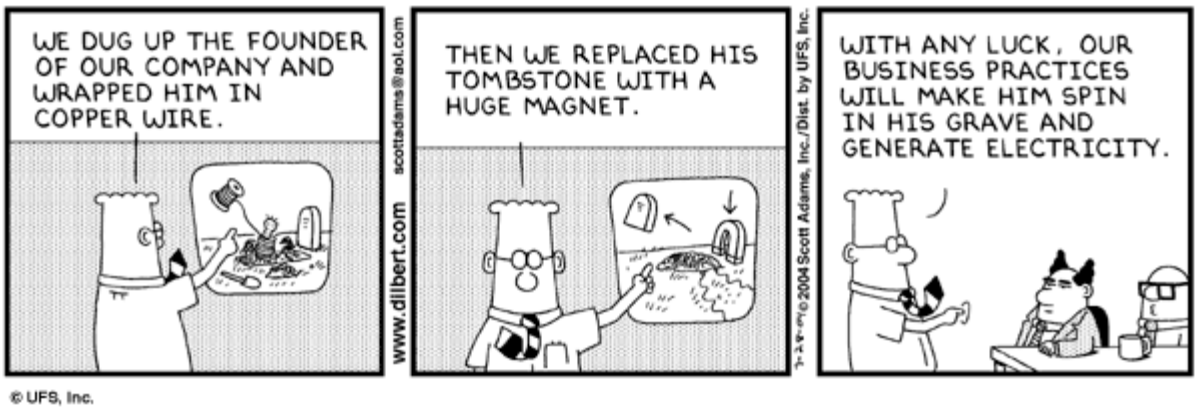


Fig. 7-1:
Das elektromotorische Prinzip The electromotive principle

7.1 Wirkprinzip Action Principle

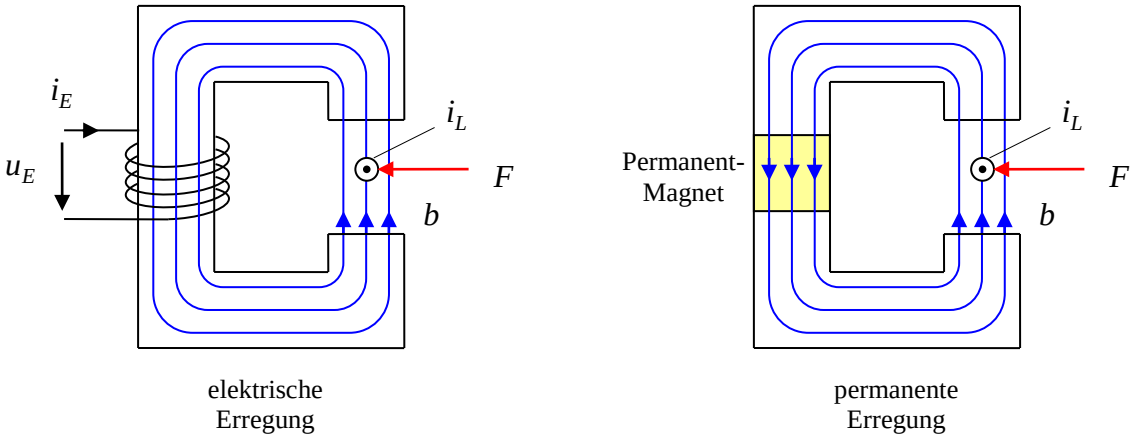


Fig. 7-2:
Wirkprinzip Active principle

[12] Die folgenden Seiten sind zum Teil lediglich eine Wiederholung des Stoffes aus den Grundlagen der Elektrotechnik B. Dieser Stoff ist Basis für weiterführende Betrachtungen und wird in diesem Skript nur der Vollständigkeit halber noch einmal wiedergegeben.

[13] The following pages are particularily only a repetition of a chapter of the basic bachelor course „basics of electrical engineering. The pages are provided here only for reasons of completeness. As the basics of DC motors can be learnt from many textbooks, an English translation is only provided starting from Chapter 7.12.

Kraftwirkung auf den stromdurchflossenen Leiter (*Lorentzkraft*):

$$F = i_L bl \tag{7.1}$$

l: Länge des Leiters

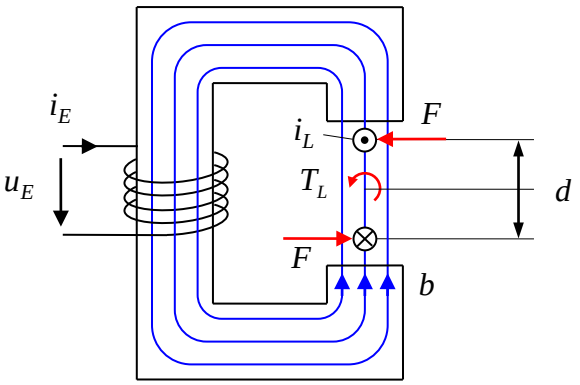


Fig. 7-3:
Drehmoment auf Leiterschleife Torque on wire loop

Drehmoment: *Torque:*

$$T_L = 2F\frac{d}{2} = Fd = i_L\, b\, d\, l \tag{7.2}$$

Induzierte Spannung in der Leiterschleife, entweder aus Induktionsgesetz:

$$u_L = \dot{\psi}_L = 2b\frac{d}{2}\omega l = b\, d\, l\, \omega \tag{7.3}$$

oder aus der Leistungsbilanz:

$$p_{el} = p_{mech} \tag{7.4}$$

$$u_L i_L = T_L \omega = i_L\, b\, d\, l\, \omega \tag{7.5}$$

$$u_L = b\, d\, l\, \omega \tag{7.6}$$

Der Term

$$\phi_0 = b\, d\, l \tag{7.7}$$

lässt sich als der magnetische Fluss deuten, der die Leiterschleife bei senkrechter

Ausrichtung und bei homogener Flussdichte durchdringen würde. Hiermit:

$$u_L = \phi_0 \, \omega \tag{7.8}$$

$$T_L = \phi_0 \, i_L \tag{7.9}$$

7.2 Aufbau
Construction

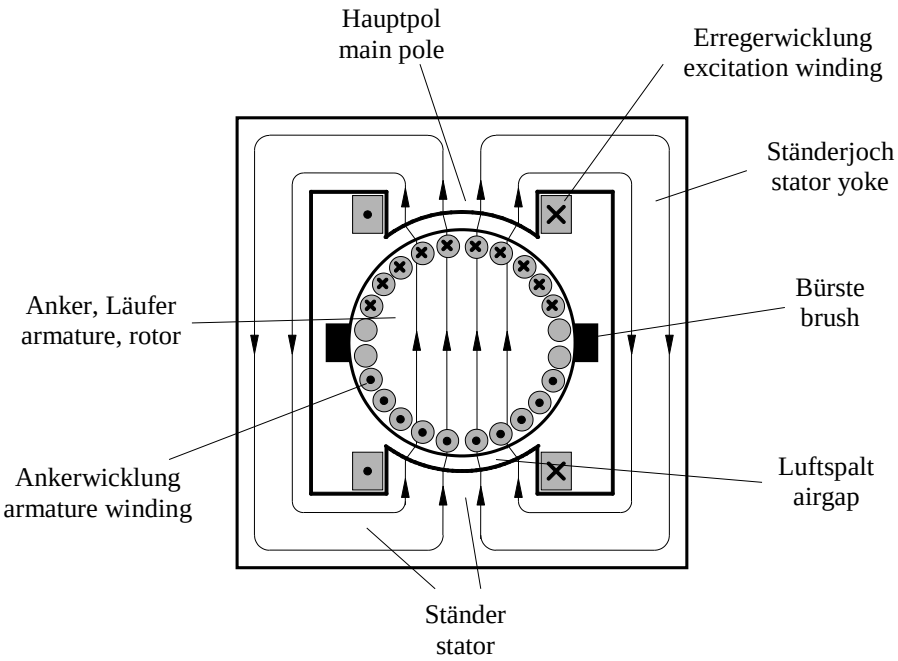


Fig. 7-4:
Schnittbild eines Gleichstrom-motors

Sectional view of a DC motor

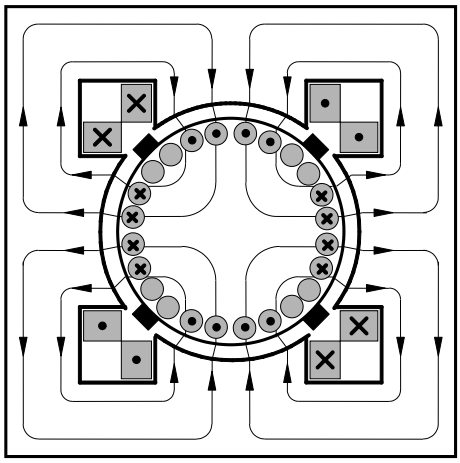


Fig. 7-5:
Gleichstrommotor mit zwei Polpaaren, $p = 2$

DC motor with two pole pairs, $p = 2$

7.3 Kommutator und Ankerwicklungsschemata
Commutator and Armature Winding Schemes

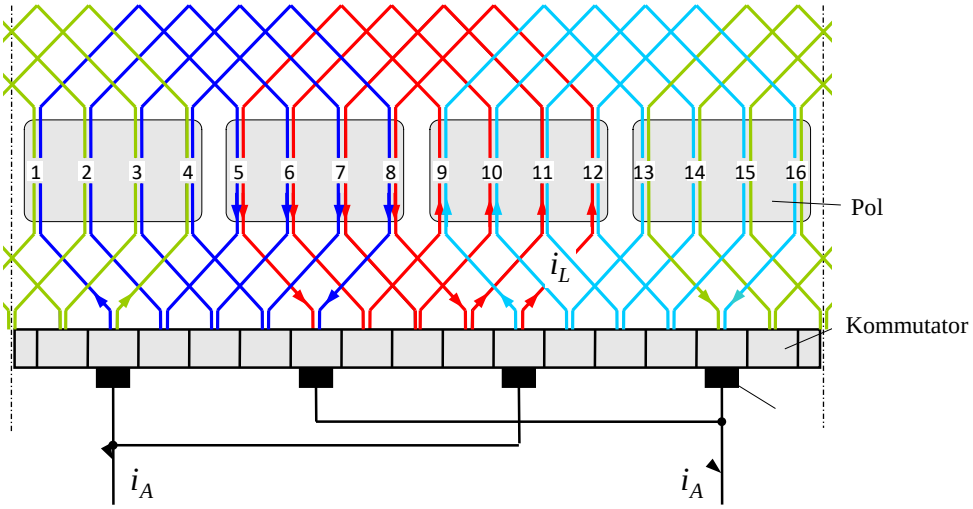


Fig. 7-6:
Wicklungsschema des Ankers Schleifenwicklung, hier für $p = 2$, Zahl der parallelen Zweige $2a = 2p$

Armature winding scheme lap winding, here for $p = 2$, no. of parallel paths $2a = 2p$

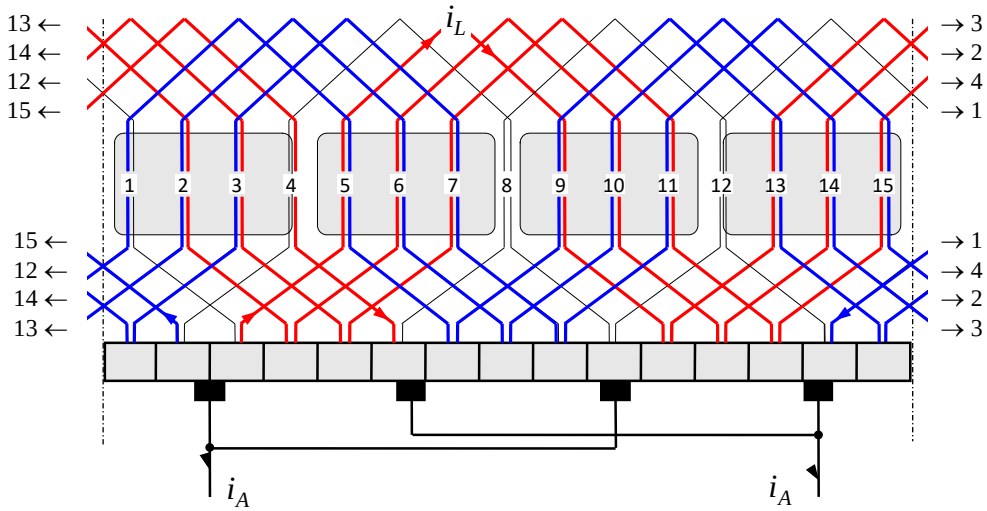


Fig. 7-7:
Wicklungsschema des Ankers Wellenwicklung, hier für $p = 2$, Zahl der parallelen Zweige $2a = 2$

Armature winding scheme wave winding, here for $p = 2$, no. of parallel paths $2a = 2p$

7.4 Kommutierung und Wendepolwicklung
Commutation and Commutator Winding

Stichworte:

Kurzschluss der zu kommutierenden Leiterschleife durch den Kommutator.

Kurzgeschlossene Leiterschleife friert den Fluss ein:

$$\dot{\psi}_L = u_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_L = const. \tag{7.10}$$

Daher vor dem Kurzschluss dafür sorgen, dass Leiterschleife frei vom Fluss des Ankerfeldes wird -> Einführung der Wendepolwicklung –> dadurch natürliche Stromkommutierung

Magnetische Durchflutung der Wendepolwicklung muss derjenigen der Ankerstromwicklung entsprechen.

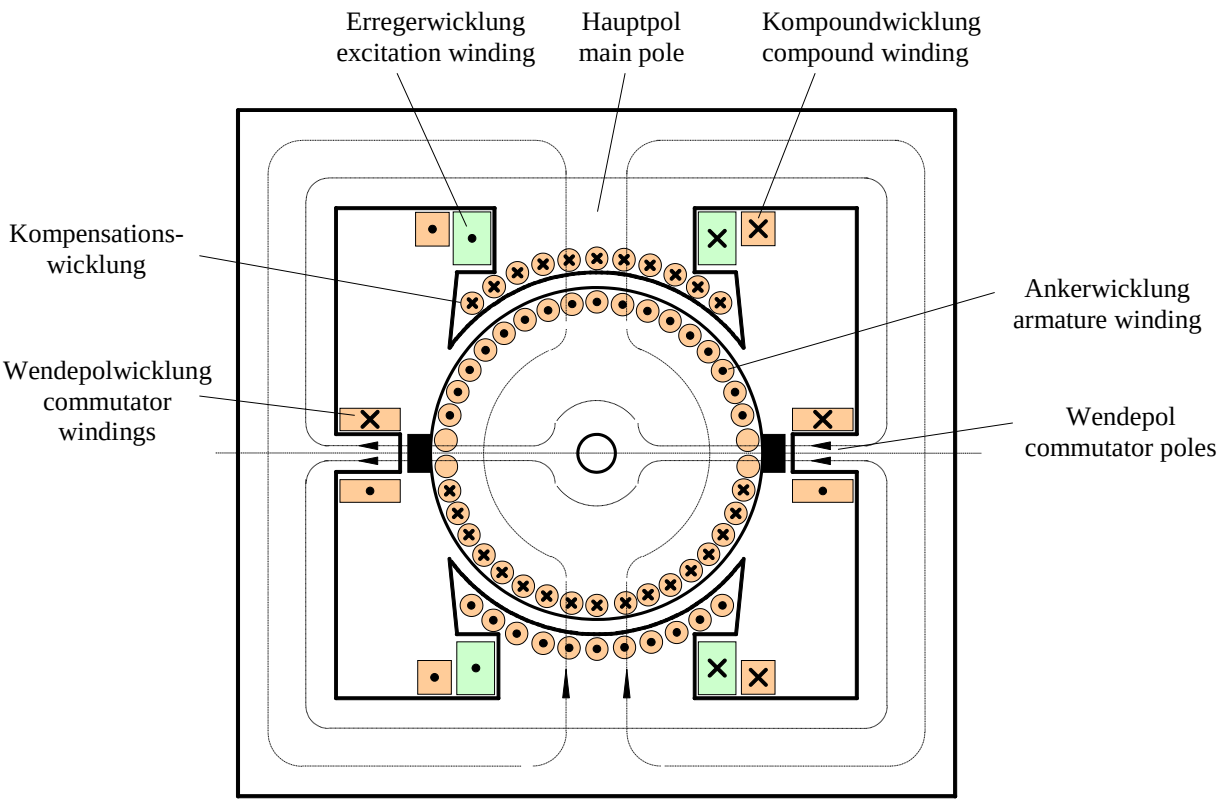


Fig. 7-8:
Gleichstrommotor mit Erreger-, Anker-, Wendepol-, Kompound- und Kompensationswicklung

DC motor with excitation, armature, commutator, and compound windings

7.5 Ankerrückwirkung, Kompensations- und Kompoundwicklung Armature reaction, Compensation and Compound Windings

Stichworte:

Ankerfeld verursacht Feldverzerrung in den Erregerpolen. Bei linearem Material wäre dies kein Nachteil. Die einseitige magnetische Sättigung im Erregerpol führt jedoch zur Erhöhung des gesamten magnetischen Widerstands im Erregerkreis und somit zur Schwächung des Erregerflusses.

Gegenmaßnahmen

- Erhöhung der magnetischen Spannung im magnetischen Erregerkreis durch Kompoundwicklung, welche vom Ankerstrom durchflossen wird
- Einführung der Kompensationswicklung zur Kompensation der Ankerrückwirkung, ebenfalls vom Ankerstrom durchflossen.

7.6 Mathematische Modellierung
Mathematical Modeling

Bezeichnungen:

T_L	Drehmoment einer Leiterschleife
T	gesamtes Drehmoment des Ankers (Luftspaltdrehmoment)
N_A	Zahl der Anker-Leiterschleifen
N_E	Gesamtzahl aller Erregerwindungen
$2a$	Zahl der parallelen Ankerstromzweige
p	Polpaarzahl
α	Polbedeckung, Verhältnis der aktiven Polflächen zur Ankeroberfläche
ϕ_E	Erregerfluss
b_E	Erregerflussdichte
l	aktive Länge des Ankers
d	Ankerdurchmesser
δ	Luftspalt
A_{pol}	Polfläche

Resultierendes auf den Anker wirkendes Drehmoment:

$$T = N_A T_L \alpha = N_A \phi_0 \alpha i_L = N_A b_E d l \alpha i_L \tag{7.11}$$

Ankerstrom i_A teilt sich auf $2a$ Zweige auf:

$$i_L = \frac{1}{2a} i_A \tag{7.12}$$

$$\phi_E = b_E A_{pol} = \frac{\pi d l \alpha}{2p} b_E \tag{7.13}$$

Damit:

$$T = \frac{p N_A}{a \pi} \phi_E i_A = c \phi_E i_A = \psi'_E i_A \tag{7.14}$$

wobei

$$c = \frac{p N_A}{a \pi} \quad , \quad \psi'_E = c \phi_E$$

Die induzierte Spannung (*elektromotorische Kraft, EMK*) folgt wieder aus der Leistungsbilanz,

$$u_i = c\,\phi_E\,\omega = \psi'_E\,\omega\,, \tag{7.15}$$

oder alternativ durch Summation der induzierten Spannungen der in Reihe geschalteten Leiterschleifen.

Spannungsgleichung des Ankerkreises unter Berücksichtigung des Ankerwiderstands R_A, der Ankerinduktivität L_A und des Bürstenspannungsabfalls u_B:

$$u_A = u_i + L_A\,\dot{i}_A + R_A\,i_A + 2u_B \tag{7.16}$$

Mit guter Genauigkeit kann der Bürstenspannungsabfall u_B also eine konstante, vom Ankerstrom unabhängige Spannung von etwa 1 V angesetzt werden.

Erregerstromkreis:

$$u_E = L_E\,\dot{i}_E + R_E\,i_E \tag{7.17}$$

Beachte: Im Allgemeinen sind zwischen zwei Wicklungen Gegeninduktivitäten zu berücksichtigen. Die Flüsse von Erreger- und Ankerwicklung sind aber durch die zueinander senkrechte Anordnung nicht miteinander verkettet, so dass die Gegeninduktivität zwischen diesen Wicklungen Null ist.

Magnetischer Kreis der Erregung:

Magnetische Leitfähigkeit des Erregerkreises

$$\Lambda_E = \frac{1}{R_{magE}} = \frac{\mu_0 A_{Pol}}{2\delta} = \frac{\mu_0}{2\delta}\frac{\alpha\,\pi\,d\,l}{2\,p} = \frac{\mu_0\,\alpha\,\pi\,d\,l}{4\,p\,\delta} \tag{7.18}$$

Induktivität:

$$L_E = \Lambda_E\,\frac{N_E^2}{p^2}\,p = \Lambda_E\,\frac{N_E^2}{p} \tag{7.19}$$

Erregerfluss:

$$\phi_E = \Lambda_E \frac{N_E}{p} i_E = \frac{L_E}{N_E} i_E = \frac{\mu_0 \alpha \pi d l N_E}{4 p^2 \delta} i_E \tag{7.20}$$

$$\psi'_E = c\phi_E = \frac{cL_E}{N_E} i_E = L'_E i_E \ , \quad L'_E = \frac{cL_E}{N_E} = \frac{\mu_0 \alpha d l N_E N_A}{4a\, p\delta}$$

Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen:

$$T = \psi'_E i_A$$

$$\psi'_E = L'_E i_E$$

$$u_A = \psi'_E \omega + L_A \dot{i}_A + R_A i_A + 2u_B \tag{7.21}$$

$$u_E = L_E \dot{i}_E + R_E i_E \tag{7.22}$$

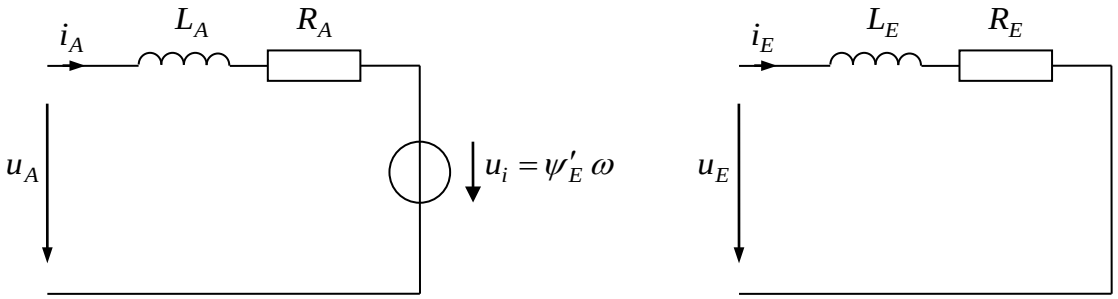


Fig. 7-9:
Ersatzschaltbilder des Anker- und des Erregerkreises

Dynamisches Verhalten

Das dynamische Verhalten des Anker- bzw. Erregerstroms entspricht dem einer *RL*-Gliedes. die maßgeblichen Anker- und Erregerzeitkonstanten sind

$$\tau_A = \frac{L_A}{R_A} \quad \text{und} \quad \tau_E = \frac{L_E}{R_E}$$

7.7 Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad Electrical and Mechanical Power, Efficiency

Elektrische Leistung (Verbraucherzählpfeilsystem):

$$p_{el} = p_{elA} + p_{elE} = u_A i_A + u_E i_E \tag{7.23}$$

Mechanische Leistung (Erzeugerzählpfeilsystem):

$$p_{mech} = \omega T \tag{7.24}$$

Energiebilanz:

$$p_{el} = \dot{w}_A + \dot{w}_E + p_V + p_{mech} \tag{7.25}$$

Verlustleistung:

$$P_V = P_{VA} + P_{VE} = R_E i_E^2 + R_A i_A^2 \tag{7.26}$$

Innere Energien:

$$w_A = \frac{1}{2} L_A i_A^2 \quad , \quad w_E = \frac{1}{2} L_E i_E^2$$

Wirkungsgrad des Ankerkreises (Vernachlässigung der Erregerverluste) im stationären Zustand für den motorischen Betrieb:

$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{elA}} = \frac{\omega T}{U_A I_A} = \frac{\omega T}{\left(R_A I_A + \psi'_E \omega\right) I_A} = \frac{\omega T}{\left(R_A \dfrac{T}{\psi'_E} + \psi'_E \omega\right) \dfrac{T}{\psi'_E}} = \frac{\omega}{\omega + \dfrac{R_A}{\psi'^2_E} T} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_A}{\psi'^2_E} \dfrac{T}{\omega}} \tag{7.27}$$

7.8 Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen Circuit Types, Terminal Designations and Circuit Symbols

Man unterscheidet verschiedene Schaltungsarten:

- *Fremderregung*: Erreger- und Ankerkreis werden aus verschiedenen elektrischen Quellen gespeist
- *Nebenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind parallel geschaltet
- *Reihenschluss*: Erreger- und Ankerkreis sind in Reihe geschaltet

Wicklung	Klemmen
Ankerwicklung	A1, A2
Wendepolwicklung	B1, B2
Kompensationswicklung	C1, C2
Erregerwicklung für Reihenschlussschaltung	D1, D2
Erregerwicklung für Nebenschlussschaltung	E1, E2
Erregerwicklung für Fremderregung	F1, F2

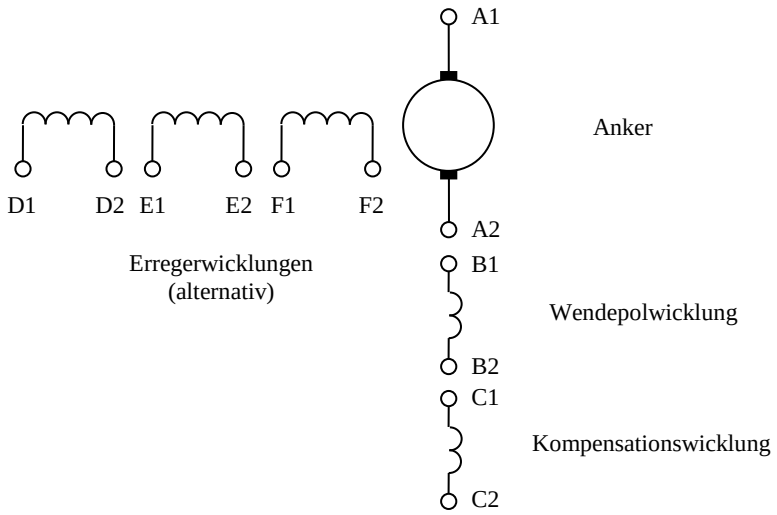


Fig. 7-10:

7.9 Fremderregter und permanent erregter Motor Separately and Permanently Excited Motor

Beim fremderregten Betrieb werden Erreger- und Ankerwicklung unabhängig voneinander gespeist. Typischerweise wird der Erregerstrom und damit der Erregerfluss konstant gehalten,

$$i_E = const. \quad \Rightarrow \quad \phi_E = const. \text{ bzw. } \psi'_E = const., \tag{7.28}$$

Dies gelingt durch Aufschaltung einer konstanten Erregerspannung u_E allerdings nur unvollkommen, da sich der Strom aufgrund des temperaturabhängigen Widerstands R_E verändern kann. Ggf. wird eine Erregerstromregelung vorgesehen.

Beim permanent erregten Motor wird der Erregerfluss von einem Permanentmagneten erzeugt. Sein Verhalten gleicht dem des fremderregten Motors mit konstantem Erregerstrom.

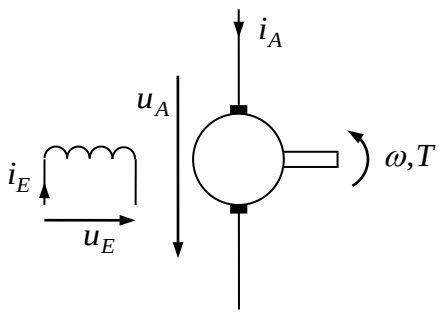


Fig. 7-11:
Fremderregter Gleichstrommotor

Stationäres Strom-Spannungs-Verhalten bei konstanter Drehzahl

$$U_A = \psi'_E\, \omega + R_A\, I_A \tag{7.29}$$

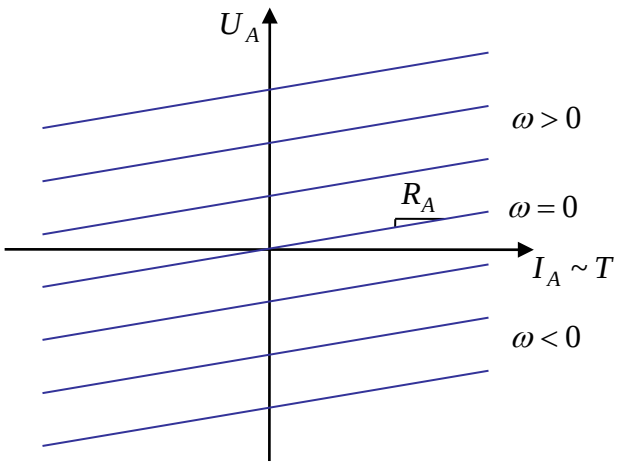


Fig. 7-12:
Stationäre Kennlinien von Ankerstrom und -spannung

Stationäres Drehmoment-Drehzahl-Verhalten bei konstanter Spannung

Einsetzen der Drehmomentbeziehung in die Spannungsgleichung:

$$U_A = \frac{R_A}{\psi'_E} T + \omega \psi'_E \tag{7.30}$$

Auflösen nach ω ergibt das stationäre Drehmoment-Drehzahlverhalten für konstante Ankerspannung:

$$\omega = \frac{U_A}{\psi'_E} - \frac{R_A T}{\psi'^2_E} \tag{7.31}$$

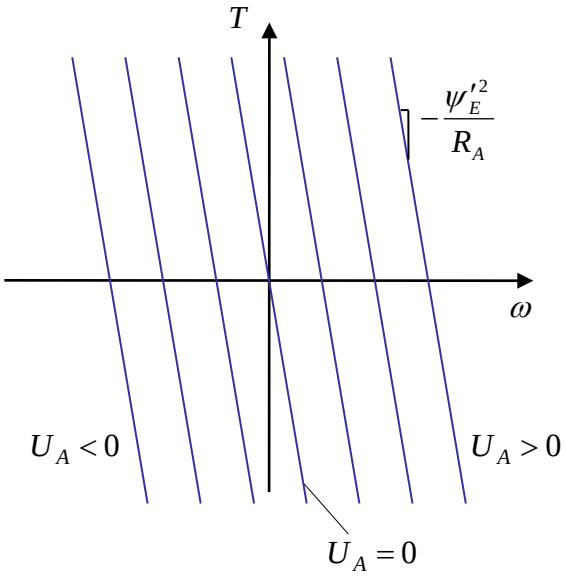


Fig. 7-13:
Stationäre Kennlinien von Drehmoment und Drehzahl bei konstanter Ankerspannung

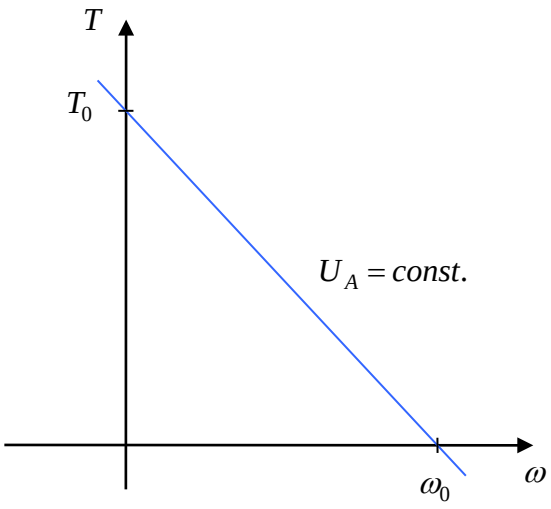


Fig. 7-14:
Losbrech-Drehmoment und Leerlaufdrehzahl bei konstanter Ankerspannung

Losbrech-Drehmoment und –Ankerstrom ($\omega = 0$):

$$I_{A0} = \frac{U_A}{R_A}, \quad T_0 = \frac{U_A \psi'_E}{R_A}$$

Leerlaufdrehzahl ($T = 0$ bzw. $I_A = 0$)

$$\omega_0 = \frac{U_A}{\psi'_E} \tag{7.32}$$

Wird der Gleichstrommotor mit konstanter Ankerspannung betrieben, entsteht beim Einschalten aus dem Stillstand heraus ein sehr großer Anlaufstrom, der ggf. den zulässigen Maximalwert überschreitet. Bei kleinen Motoren mit geringer Trägheit, die schnell beschleunigen, kann ein derartiger kurzzeitiger Überstrom ggf. hingenommen werden. Andernfalls muss der Anlaufstrom begrenzt werden. Die klassische Vorgehensweise arbeitet mit Anlaufwiderständen vorgenommen, die mit steigender Drehzahl dann überbrückt werden.

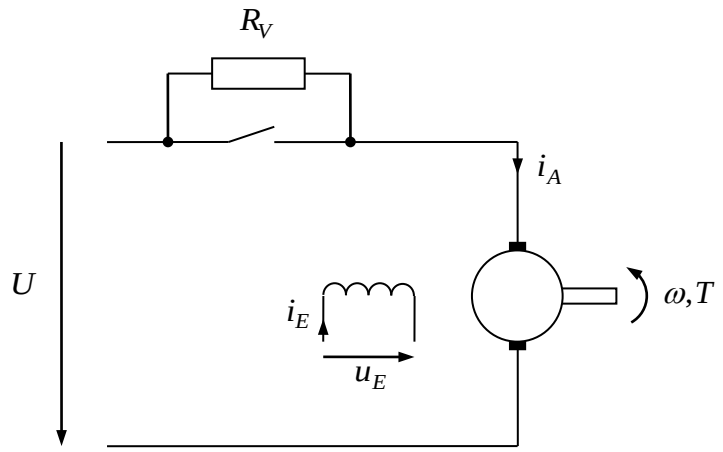


Fig. 7-15:
Betrieb mit Vorwiderstand

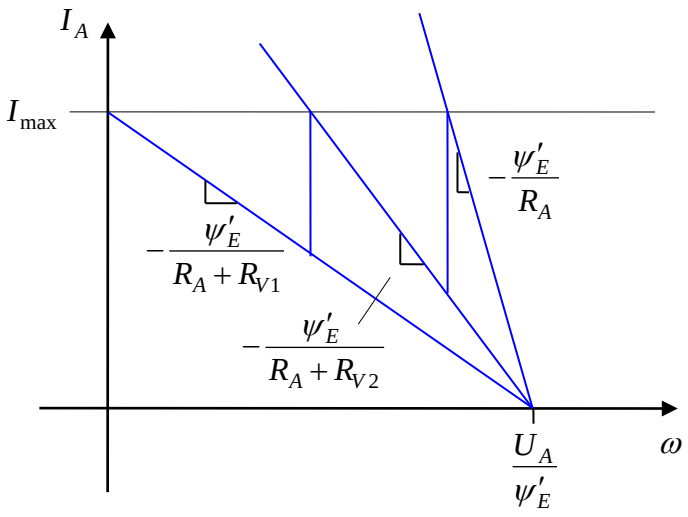


Fig. 7-16:
Anfahren mit Vorwiderständen

7.10 Nebenschlussmotor
Shunt Motor

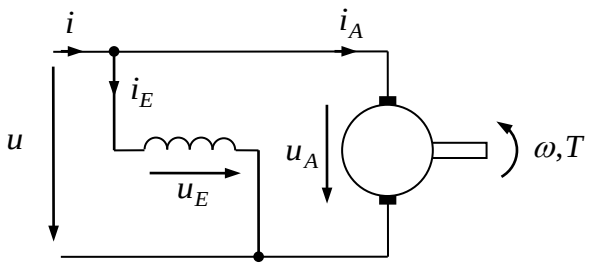


Fig. 7-17:
Nebenschlussschaltung Shunt circuit

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E\,\omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E\,\omega + L_A \dot{i}_A \tag{7.33}$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \tag{7.34}$$

$$T = \psi'_E\, i_A = L'_E\, i_E\, i_A \tag{7.35}$$

Nebenschluss:

$$u = u_A = u_E \quad , \qquad i = i_A + i_E$$

Stationäres Verhalten:

$$I_E = \frac{U}{R_E} \tag{7.36}$$

$$I_A = \frac{U - L'_E I_E\,\omega}{R_A} = \frac{U - L'_E U / R_E\,\omega}{R_A} = \frac{1 - L'_E / R_E\,\omega}{R_A} U \tag{7.37}$$

$$I = I_E + I_A = \left[\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_E} - \frac{L'_E \omega}{R_A R_E} \right] U \tag{7.38}$$

$$T = L'_E\, I_E\, I_A = L'_E \frac{1 - L'_E / R_E\,\omega}{R_A R_E} U^2 \tag{7.39}$$

7.11 Reihenschlussmotor
Series Motor

$$u_A = R_A i_A + \psi'_E\,\omega + L_A \dot{i}_A = R_A i_A + L'_E i_E\,\omega + L_A \dot{i}_A \tag{7.40}$$

$$u_E = R_E i_E + L_E \dot{i}_E \tag{7.41}$$

$$T = \psi'_E\, i_A = L'_E\, i_E\, i_A \tag{7.42}$$

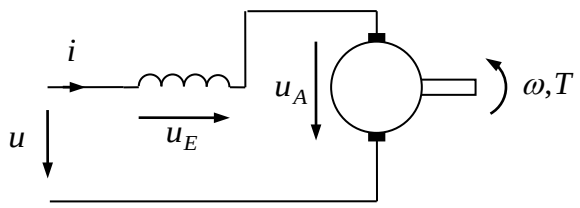


Fig. 7-18:
Reihenschlussschaltung Series circuit

Reihenschluss:

$$u = u_A + u_E \quad , \qquad i = i_A = i_E$$

$$R = R_A + R_E \quad , \qquad L = L_A + L_E$$

$$\begin{aligned} u &= R\,i + L'_E\, i\,\omega + L\dot{i} \\ u &= \left(R + L'_E\,\omega\right) i + L\dot{i} \\ u &= R'(\omega)\, i + L\dot{i} \end{aligned} \tag{7.43}$$

Drehzahlabhängiger effektiver Widerstand:

$$R'(\omega) = R + L'_E\,\omega \tag{7.44}$$

$$T = \psi'_E\, i = L'_E i^2 \tag{7.45}$$

Quadratische Abhängigkeit des Drehmoments vom Strom, Änderung des Vorzeichens ist nur durch Wechsel der Verschaltung von Erreger- und Ankerwicklung möglich, $i = i_A = -i_E$

Daher kann ein Reihenschlussmotor auch mit Wechselspannung gespeist werden. Sinusförmige Speisung mit der Frequenz ω_{el}, Schreibweise mit komplexen Effektivwertzeigern:

$$\underline{U} = R'(\omega)\,\underline{I} + j\omega_{el}L\underline{I} \tag{7.46}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R'(\omega) + j\omega_{el}L} \tag{7.47}$$

Das Drehmoment pulsiert mit $2\omega_{el}$. Drehmomentmittelwert:

$$\overline{T} = L'_E\,\overline{i^2} = L'_E I^2 = \frac{L'_E U^2}{R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2} \tag{7.48}$$

Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik:

$$\left(R'^2(\omega) + \omega_{el}^2 L^2\right)\overline{T} = L'_E U^2 \tag{7.49}$$

$$\left(\left(R + L'_E\,\omega\right)^2 + \omega_{el}^2 L^2\right)\overline{T} = L'_E U^2 \tag{7.50}$$

Wird der Reihenschlussmotor mit konstanter Spannung betrieben und dabei mechanisch entlastet, $T \to 0$, wächst die Drehzahl über alle Grenzen, $\omega \to \infty$ (s. Bild).

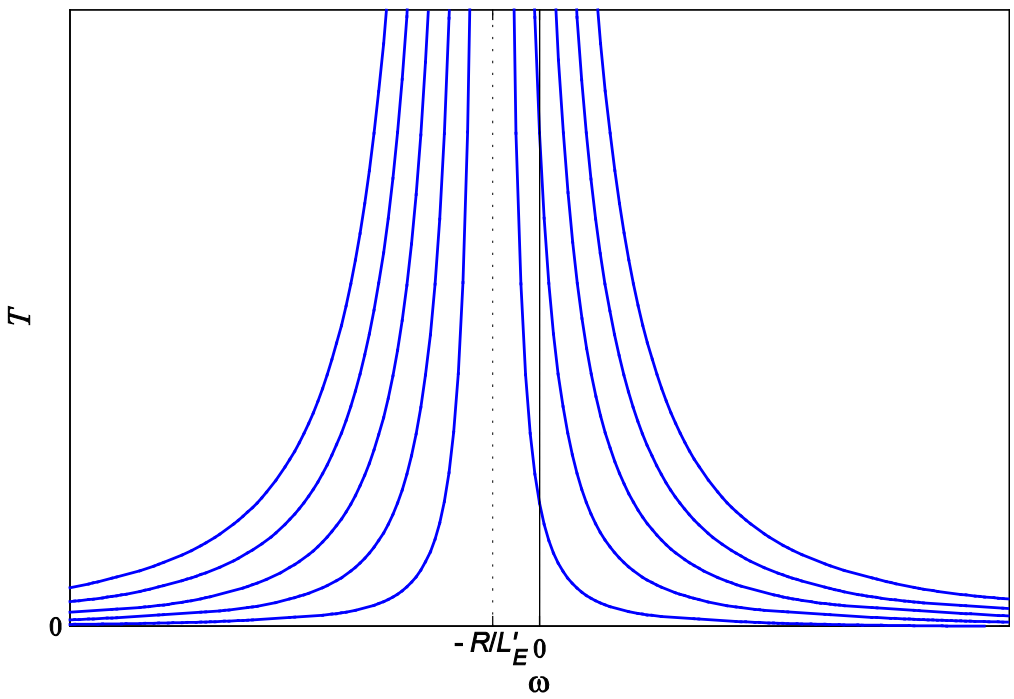


Fig. 7-19:
Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Spannungen *U* bei Gleichspannungsspeisung

Torque-speed characteristics of the series DC motor for various DC supply voltages *U*

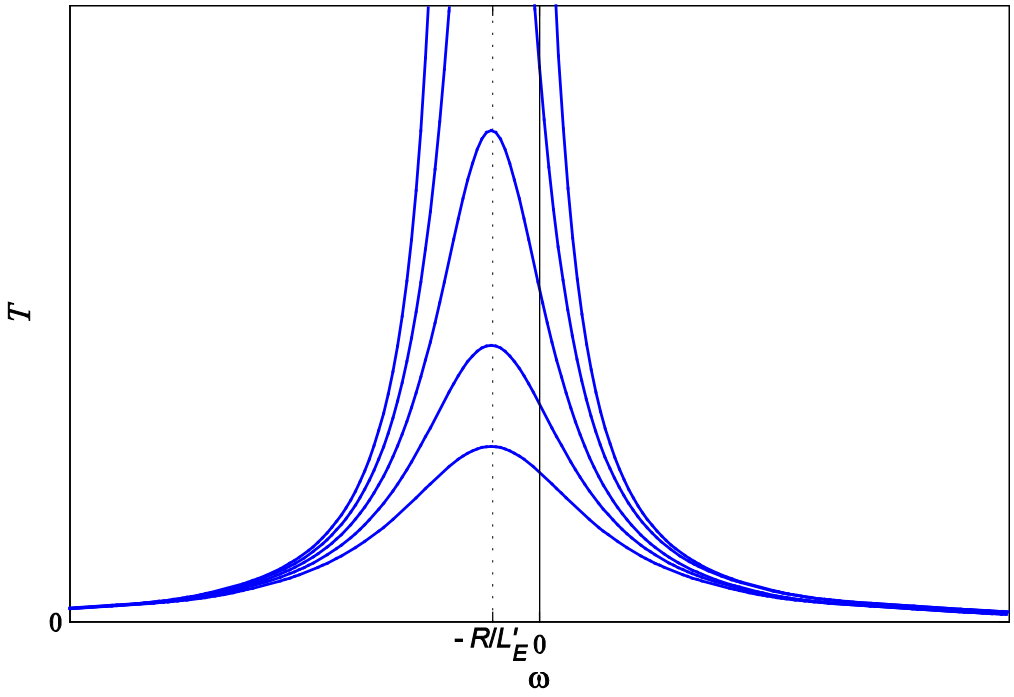


Fig. 7-20:
Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien des Reihenschluss-motors für GS-Speisung und verschiedene Frequenzen bei WS-Speisung, die Höhe der Spannungen *U* ist für alle Kurven konstant

Torque-speed characteristic of the series DC motor for DC supply and AC supply of various frequencies, the magnitude of the voltage *U* is constant for all curves

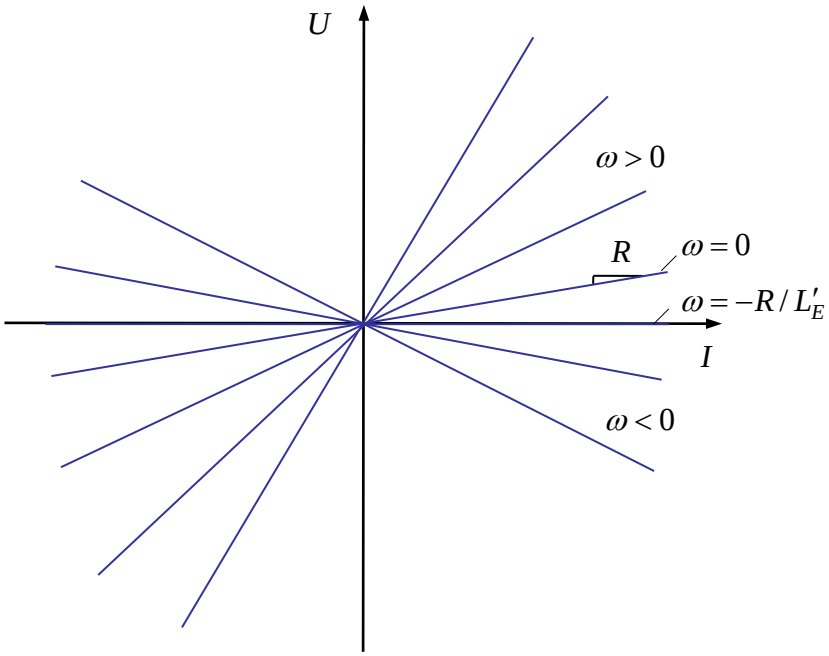


Fig. 7-21:
Strom-Spannungs-Kennlinien des Reihenschlussmotors für verschiedene Drehzahlen

7.12 Geregelter Betrieb
Controlled Operation

Um gezielt einen bestimmten Betriebspunkt bezüglich Drehmoment und Drehzahl einstellen zu können, bedarf es veränderbarer Speisespannungen. Im Fall von Wechsel- oder Drehspannung kann eine steuerbare Thyristorbrücke zum Einsatz kommen. Steht eine Gleichspannung als Energieversorgung zur Verfügung, werden Gleichstromsteller eingesetzt. Die Art des Gleichstromstellers hängt von der gewünschten Betriebsart des Motors ab. Soll der Motor nur in einer Richtung motorisch betrieben werden, reicht ein einfacher Tiefsetzsteller aus. Sind beide Drehrichtungen und beide Drehmomentrichtungen (motorischer und generatorischer Betrieb) zu beherrschen, muss für die Ankerspeisung ein 4-Quadranten-Steller verwendet werden. Für den Erregerkreis ist jeweils ein einfacher Tiefsetzsteller ausreichend. Die Speisung mit linear arbeitenden Endstufen

In order to operate the motor at a particular operation point in terms of torque and speed, a variable voltage supply is necessary. In case of one- or three-phase grids that can be realized by a controllable thyristor bridge. DC-DC converters are applied if a DC source is available. The type of the required DC-DC converter depends on the operation modes of the motor. If it is sufficient to operate the machine only in one direction of rotation in motoric operation mode, a simple buck (step-down) converter is sufficient. If both directions of rotation as well as motoric and regenerative (i.e. braking) modes must be covered, a 4-quadrant converter is required to feed the armature circuit. For the supply of the excitation circuit, however, a simple buck converter is still sufficient. The usage of a linear power amplifier is usually not appropriate due to the high losses.

kommt wegen der hohen Verluste nicht in Betracht.

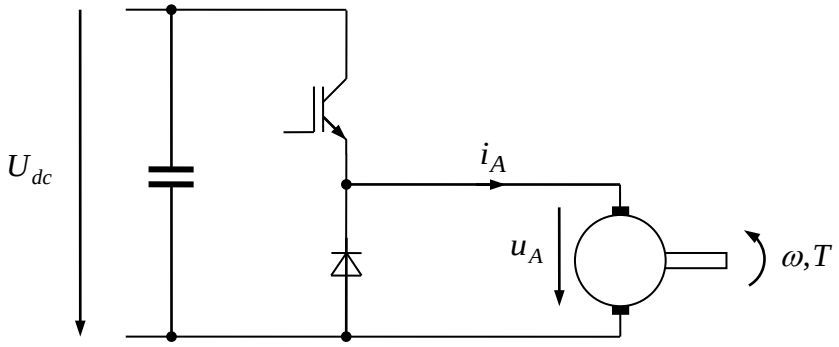


Fig. 7-22:
Speisung des Ankerkreises durch einen Tiefsetzsteller

Feeding the armature circuit by a buck converter

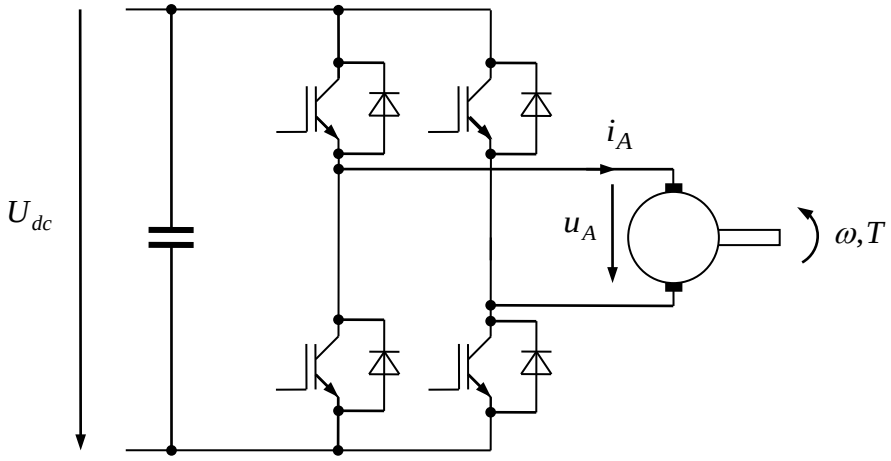


Fig. 7-23:
Speisung des Ankerkreises durch einen 4-Quadranten-Steller

Feeding the armature circuit by a 4-quadrant converter

Bei einfachen Drehzahlregelungen wirkt der Drehzahlregler direkt auf die Ankerspannung. Es empfiehlt sich jedoch eine Vorsteuerung oder Kompensation der EMK, so dass sich, wie man im Bild des regelungstechnischen Modells sieht, die Wirkungswege der Rückführung der EMK im

In case of a simple speed control, the speed controller acts directly on the armature voltage. However, a feedforward compensation of EMF turns out as an adavantageous detail. In doing so, the EMF action paths in the motor model and in the controller are mutually cancelled out, see Fig. 7-25. As a

Streckenmodell und die EMK-Vorsteuerung des Reglers gegenseitig kompensieren, siehe Fig. 7-25**.** Man erhält damit eine Ersatz-Regelstrecke, die nur noch aus einem P-T_1-Glied und einem Integrierer besteht, Fig. 7-26. Für diese Struktur kann der Regler nach der Methode des Symmetrischen Optimums (Abschnitt 9.2) entworfen werden. Dort sieht man aber, dass die erreichbare Bandbreite des geschlossenen Regelkreises zwar in gewissem Rahmen verändert werden kann, dass diese in jedem Fall aber unterhalb der Knickfrequenz der Regelstrecke liegt. Die maßgebliche Strecken-Zeitkonstante ist aber hier die Ankerzeitkonstante $\tau_A = L_A / R_A$. Bei kleinen Zeitkonstanten oder geringen dynamischen Anforderungen an die Regelung kann dennoch diese Art der Regelung ausreichen. Bei höheren Anforderungen, insbesondere bei größeren Maschinen, bei denen typischerweise die Ankerzeitkonstante groß ist, stößt man aber schnell an die prinzipiellen Grenzen dieser Art der Regelung.

result, we will get an equivalent control system as shown in Fig. 7-26**,** consisting only of a P-T_1 delay element and an integrator**.** For this simplified structure, the controller can be designed according to the Symmetrical Optimum method (Chapter 9.2). As it can be learnt from that chapter, though the achievable bandwidth of the closed-loop control system can be varied in some range, however, in any case the bandwidth is below the corner frequency of the plant transfer function. The important plant time constant is given here by the armature time constant $\tau_A = L_A / R_A$. With small time constants or low requirements with respect to dynamical performance, such a design may suffice. With higher dynamic demands which come up typically with motors of higher power rating where the armature time constants are even large, this kind of control is usually no longer applied.

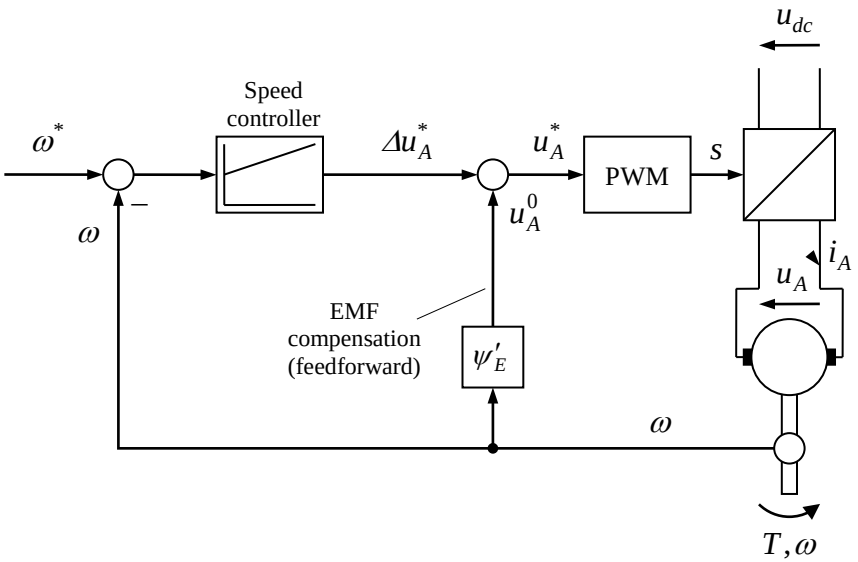


Fig. 7-24:
Einschleifige Drehzahlregelung Single-loop speed control

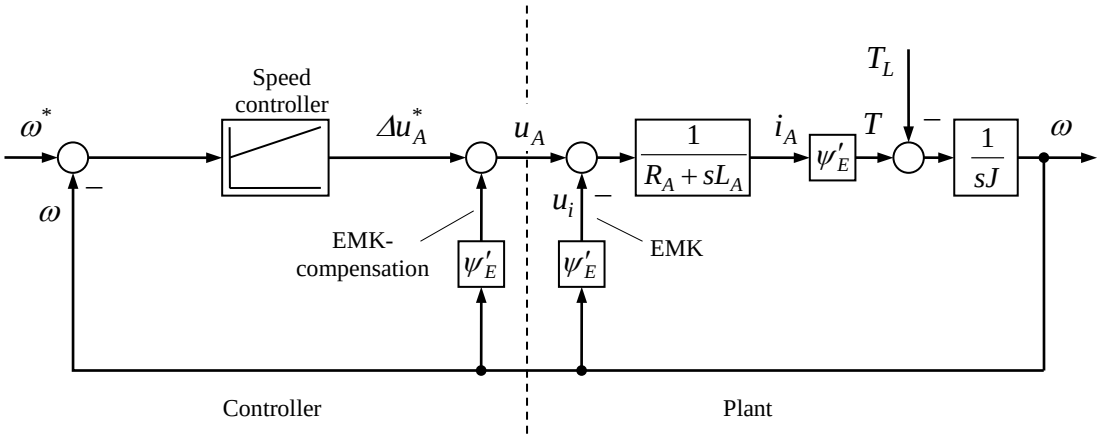


Fig. 7-25:
Einschleifige Drehzahlregelung: regelungstechnisches Modell

Single-loop speed control: resulting control structure

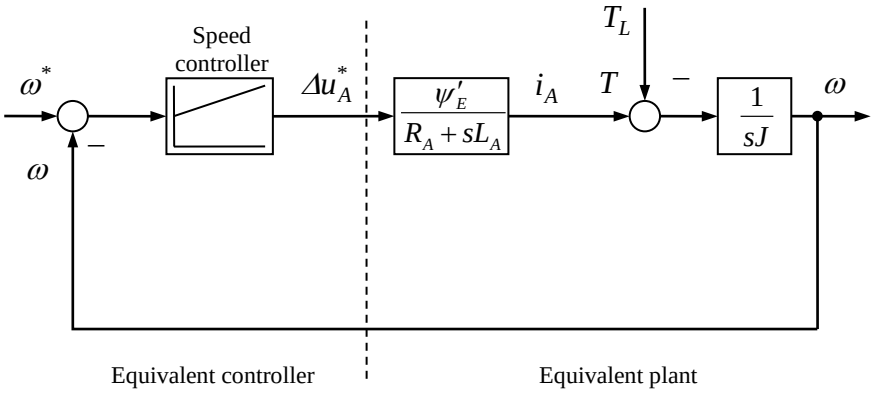


Fig. 7-26:
Einschleifige Drehzahlregelung: resultierendes regelungstechnisches Modell

Single-loop speed control: simplified equivalent control structure

Ein weiterer Nachteil der einschleifigen Drehzahl-Regelung ist, dass der Ankerstrom nicht direkt kontrolliert wird. Der Ankerstrom ist eine kritische Größe, da bei Überschreitung der zulässigen Werte Schäden durch Erhitzung aufgrund der Stromwärmeverluste entstehen können. Der Motor hat meist größere thermische Zeitkonstanten, so dass eine Überschreitung des zulässigen Nennstroms sogar um ein Vielfaches für eine gewisse Zeit (meist im Bereich einiger

Another drawback of the single-loop speed control is the fact that there is no direct supervision of the armature current. The armature current is a critical quantity as exceeding of the rated value may demage the devices due to heating-up. As the thermal time constants of the motor are usually large, an excess of the current rating can be tolerated for a short amount of time (usually some seconds). Even more critical are the feeding power electronic devices as their

Sekunden) geduldet werden kann. Weit kritischer ist aber die speisende Leistungselektronik, die Überströme nur für sehr kurze Zeiten verträgt, da die thermischen Zeitkonstanten der inneren Halbleiter-Struktur äußerst kurz sind (ggf. nur einige Millisekunden). Aus diesem Grund wird häufig gar keine kurzzeitige Überschreitung des maximalen Stroms zugelassen. Eine Regelung, mit der keine definierte Beschränkung des Stromes möglich ist, ist daher kritisch.

thermal time constants are very small, e.g. some fractions of a second. So, overcurrents are often not allowed at all. A control, which cannot guarantee that the current will retain within the allowed limits, is thus very critical.

Eine Kontrollmöglichkeit des Stromes bietet dagegen eine Regelungsstruktur mit unterlagerter Stromregelung, die außerdem von Regelungsdynamik deutliche Vorteile bietet.

However, it is possible to supervise the armature current using a cascade control structur with inner current control. Also the dynamic behavior will be improved.

Die Regelung wird nun kaskadiert aufgebaut. Der innere Stromregler hat die Aufgabe, den Strom auf den gewünschten Sollwert zu regeln, dessen Sollwert vom äußeren Drehzahlregler vorgegeben wird. Das Ankerstrom und Drehmoment zueinander proportional sind, kann man die innere Regelung auch als Drehmoment-Regelung interpretieren. Wie bei der einschleifigen Regelung empfiehlt sich auch hier eine EMK-Vorsteuerung, siehe Fig. 7-27, Fig. 7-28, Fig. 7-29.

The control is constructed in so-called cascaded manner. The task of the inner current control loops is to track the demaned current value, which is provided by the outer speed controller. Since armature current and torque are proportional, the inner current control can be seen as torque control. Similar to the single-loop speed control, an EMF feedforward compensation is recommended also here, see Fig. 7-26, Fig. 7-27, Fig. 7-28.

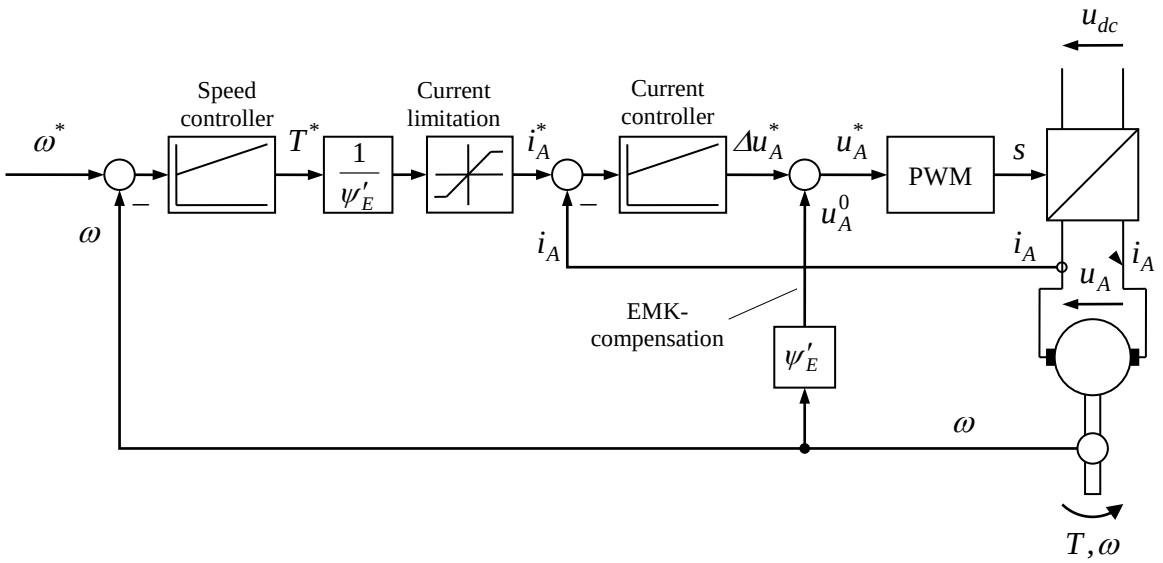


Fig. 7-27:
Drehzahlregelung mit unterlagerter Ankerstromregelung

Speed control with inner armature current control

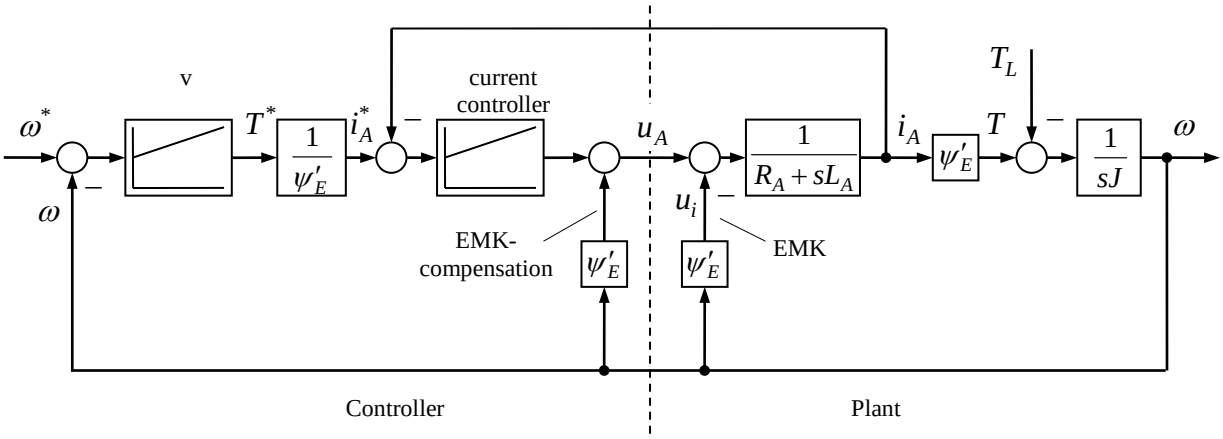


Fig. 7-28:
Drehzahlregelung mit unterlagerter Ankerstromregelung: regelungstechnisches Modell (die Stromsollwertbegrenzung wie auch die Begrenzung der Ankerspannung aufgrund des Umrichters sind hier zur Vereinfachung nicht dargestellt)

Speed control with inner armature current control: control structure (the limitation of the demanded current value as well as the saturation of the armature voltage are not depicted in this figure for reasons of simplification)

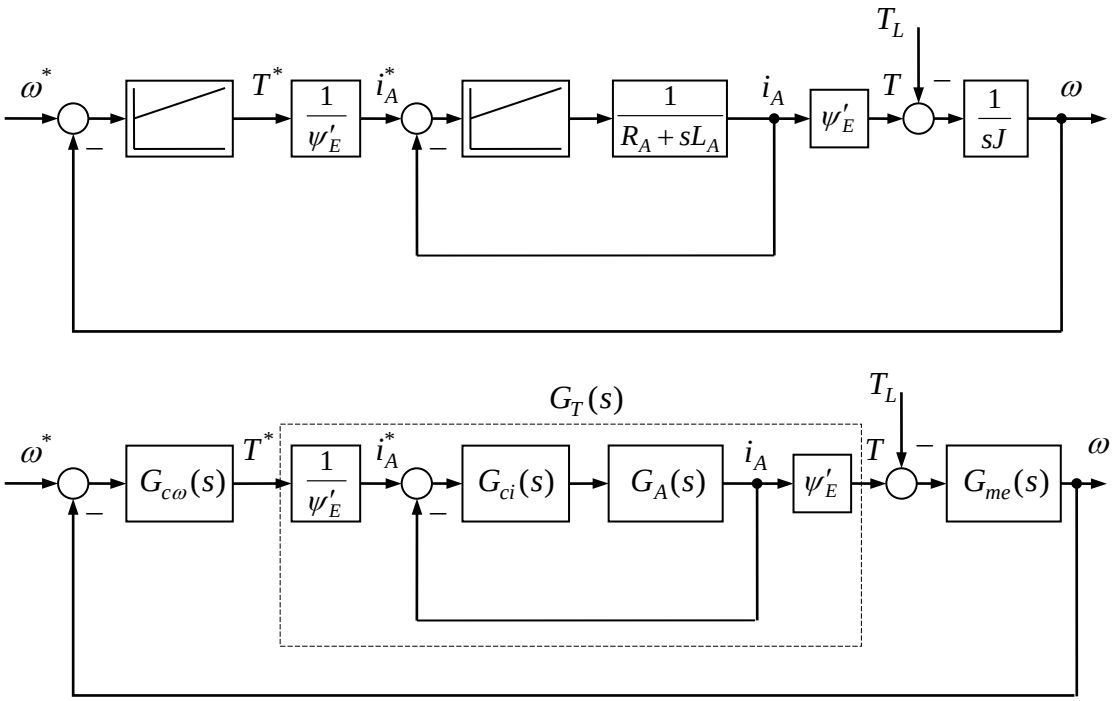


Fig. 7-29:
Vereinfachtes regelungstechnisches Modell

Simplified control structure

Beim Regelungsentwurf wird nun zunächst die innere Ankerstromregelung entworfen. Die Streckenzeitkonstante ist auch hier wieder die Ankerzeitkonstante, aber diese Teil-Regelstrecke enthält – anders als weiter oben beim einschleifigen Drehzahlregler – keinen Integrator. Ggf. könnte man in dieser Regelschleife noch eine weitere schnelle Zeitkonstante ergänzen, die Einflüsse der Reglerabtastung oder Messwandler-Zeitkonstanten berücksichtigt. Dies wäre nach den Bezeichnungen des Regelerentwurfs nach dem Betragsoptimums (Abschnitt 9.1) dann die schnelle Streckenzeitkonstante τ_σ. Die Ankerzeitkonstante τ_A spielt jetzt nur die Rolle der langsamen Streckenzeitkonstante τ_S. Die erreichbare Reglerbandbreite orientiert sich nun an der kleinen Zeitkonstante τ_σ, während die Ankerzeitkonstante, zumindest für das Führungsverhalten, gar keine Rolle spielt. Die erreichbare Dynamik des Stromregelkreises ist damit um Größenordnungen besser als die Dynamik der einschleifigen Regelung.

The control design starts with design of the armature current control first. The plant time constant is also given by the armature time constant. However, unlike as with the single-loop control above, this part of the plant transfer function does not include an integrator. If applicable, another small time constant could be included into the transfer function in order to consider the influences of data sampling or sensor time constants. According to the symbols used with the Magnitude Optimum design (Chapter 9.1) this small time constant would be τ_σ. The armature time constant τ_A now plays the role of the large plant time constant τ_S. The achievable control bandwidth is now in the range of the small time constant τ_σ, while the large armature time constant is not important for the tracking behavior. So, the achievable dynamic performance of the current control turns out to be dimension better than the performance of the single-loop control.

Auch die Drehzahlregelung profitiert von der höheren Dynamik der Stromregelung, da auch diese jetzt weit dynamischer entworfen werden kann als bei der einschleifigen Struktur. Zu diesem Zweck wird der unterlagerte geschlossene Stromregelkreis $G_T(s)$ (siehe Fig. 7-29) durch ein Verzögerungsglied modelliert, dessen Zeitkonstante im Allgemeinen deutlich kleiner als die Ankerzeitkonstante sein wird. Der Drehzahlregler kann damit wieder mit Hilfe des Symmetrischen Optimums entworfen werden, jetzt aber mit weit besseren Kennwerten.

Now, also the speed controller benefits from the good dynamic performance of the current control. The speed controller can be designed much faster as with the single-loop approach. In order to do so, the closed-loop inner current control $G_T(s)$ (see Fig. 7-29) is being approximated by a delay component which time constant is usually much smaller than the armature time constant. The design of the speed controller can be again done with the Symmetrical Optimum approach, however, now resulting in a much better performance.

Die oben angesprochene Überwachung des Strommaximalwerts wird in dieser kaskadierten Struktur durch eine Begrenzung des Stromsollwerts, also des Ausgangs des Drehzahlreglers, ausgeführt wie in Fig. 7-27 gezeigt. Zwar kann es durch Regelfehler Abweichungen zwischen Strom-Ist- und -Sollwert geben. Ist aber der Stromregler sehr gut ausgelegt, werden diese Abweichungen gering sein, so dass durch die Begrenzung des Sollwerts (mit kleinen Sicherheitabschlägen) auch der Istwert den vorgegebenen Betriebsbereich einhalten wird.

The supervision of the current allowed current rating, as discussed above, can now be realized easily by a simple limitation of the current reference value as shown in Fig. 7-27. In fact, there may occur deviations between demanded and actual current values. If the current controller is well tuned, theses deviations will usually be only small so that the the actual current will really retain within the allowed limition, where a small safety margin should be taken into account.

Im Folgenden sind die Zusammenhänge im Regelkreis zusammengefasst:

The main relations for the control loop are summarized as follows:

Differenzialgleichung für den Ankerstrom und Drehzahl:

Differential equation for armature current and speed:

$$L_A \dot{i}_A = u_A - R_A\, i_A - u_i = u_A - R_A\, i_A - \omega \psi'_E \tag{7.51}$$

$$J\dot{\omega} = T - T_L \tag{7.52}$$

Laplace-Transformierte:

Laplace-Transformed

$$sL_A i_A = u_A(s) - R_A\, i_A(s) - u_i(s) \tag{7.53}$$

$$sJ\omega(s) = T(s) - T_L(s) \tag{7.54}$$

Übertragungsfunktionen:

Transfer functions:

Übertragungsfunktion des elektrischen Teilsystems (Ankeradmittanz):

Transfer function of the electrical sub-system (armature admittance)

$$G_A(s) = Y_A(s) = \frac{i_A(s)}{u_A(s) - u_i(s)} = \frac{1}{R_A + sL_A} \tag{7.55}$$

Drehmoment-Führungsübertragungsfunktion

Torque transfer function

$$G_T(s) = \frac{T(s)}{T^*(s)} = \frac{G_{ci}(s) G_A(s)}{1 + G_{ci}(s) G_A(s)} \tag{7.56}$$

Übertragungsfunktion des mechanischen Teilsystems:

Transfer function of the mechanical sub-system

$$G_{me}(s) = \frac{\omega_A(s)}{T(s) - T_L(s)} = \frac{1}{sJ} \tag{7.57}$$

Drehzahl-Führungsübertragungsfunktion

Speed tracking transfer function

$$G_\omega(s) = \frac{G_{c\omega}(s) G_T(s) G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s) G_T(s) G_{me}(s)} \tag{7.58}$$

Störübertragungsfunktion

Disturbance transfer function

$$G_{T_L}(s) = \frac{G_{me}(s)}{1 + G_{c\omega}(s) G_T(s) G_{me}(s)} \tag{7.59}$$

7.13 Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen Operation at the Limits of Current and Voltages

Die stationären Gleichungen für den fremderregten Motor lauten

The steady-state equations of the separately excited DC motor are

$$u_A = R_A i_A(s) + \omega \psi'_E \tag{7.60}$$

$$T = \psi'_E i_A \tag{7.61}$$

Das Drehmoment ist (bei konstantem Erregerfluss) durch die Stromgrenze des Motors bzw. des speisenden Umrichters

The maximum available torque results (at constant excitation flux) from the current limit of the motor or the feeding electric converter,

$$|i_A| \le I_{\max},$$

begrenzt,

respectively:

$$T_{\max} = \psi'_E I_{\max}, \quad T_{\min} = \psi'_E I_{\max}.$$

Auch die vom speisenden Umrichter gelieferte Spannung ist begrenzt:

Additionally, the voltage of the feeding converter is limited as well:

$$|u_A| \le U_{\max}. \tag{7.62}$$

Wird der Erregerfluss konstant gehalten (was beim Permanentmagnet-Gleichstrommotor ohnehin der Fall ist), erreicht die Spannung bei der Drehzahl

If the exciting magnetic flux is considered constant (with permanent excitation this is the case anyhow), the voltage will reach its limit at the speed of

$$\omega_1 = \frac{U_{\max} - R_A i_A}{\psi'_E} = \frac{U_{\max}}{\psi'_E} - \frac{R_A}{\psi'^2_E} T = \omega_0 - \frac{R_A}{\psi'^2_E} T \tag{7.63}$$

ihre Begrenzung. Die Drehzahl kann darüber hinaus bei gleichbleibendem Fluss nicht weiter gesteigert werden. Die Drehzahl ω_0 ist die Leerlaufdrehzahl, die als ungefähre Abschätzung der Drehzahlgrenze dienen kann. Die exakte Grenzdrehzahl ω_1 hängt aber nicht nur vom Erregerfluss, sondern auch vom Ankerstrom bzw. vom Drehmoment ab. Bei Betrieb mit maximalen

The speed cannot be increased beyond that point with constant excitation flux. The speed ω_0 is the idling speed. This value can be taken as roughly approximated speed limit. The exact speed limit ω_1, however, depends not only on the excitation flux, but also on the armature current or the torque, respectively. With operation at maximum current

Strom $i_A = \pm I_{\max}$ resultieren für den motorischen und generatorischen Fall die Grenzdrehzahlen

$i_A = \pm I_{\max}$, the exact motoric and regenerative speed limits result to

$$\omega_{1mot} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\psi'_E} \quad , \quad \omega_{1gen} = \frac{U_{\max} + R_A I_{\max}}{\psi'_E}$$

Höhere Drehzahlen sind jedoch möglich, wenn der Erregerfluss verringert (geschwächt) wird. Der Fluss muss umgekehrt proportional zur Drehzahl reduziert werden,

Higher speeds are possible, however, if the flux is reduced accordingly. The flux must be reduced inversely proportional to the speed,

$$\psi'_E = \frac{U_{\max} - R_A I_A}{\omega} \approx \frac{U_{\max}}{\omega}, \tag{7.64}$$

um die Spannungsbegrenzung einzuhalten. Dazu bedarf es natürlich einer steuerbaren Erregerspeisung (bei permanent erregten Gleichstrommotoren ist das natürlich nicht möglich). Das verfügbare Drehmoment reduziert sich nun umkehrt proportional zur Drehzahl,

in order not to violate the voltage limit. To do so, a variable supply of the excitation circuit is required (which is not possible with permanently excited motors). Then, the provided torque will also be reduced inversely proportional to the speed,

$$T_{\max} = \frac{U_{\max} - R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega} \tag{7.65}$$

bzw. für generatorischen Betrieb

in the motoric case, and for the regenerative case

$$T_{\min} = \frac{U_{\max} + R_A I_{\max}}{\omega} I_{\max} \approx \frac{U_{\max} I_{\max}}{\omega} \tag{7.66}$$

Die verfügbare mechanische Leistung

The maximum available mechanical power yields as

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = (U_{\max} - R_A I_{\max}) I_{\max} \approx U_{\max} I_{\max} \tag{7.67}$$

konstant. Dieser Bereich wird *Flussschwächbereich* bzw. *Konstant-Leistungs-Bereich* genannt. Im unteren Drehzahlbereich $|\omega| < \omega_1$, wo die Ankerspannung nicht ihre Grenze erreicht, ist die verfügbare Leistung dagegen proportional zur Drehzahl

and results to be constant. This operation area is called *flux weakening range* or *constant-power-range*. In the lower speed area with $|\omega| < \omega_1$, where the armature voltage is not saturated, the maximium power results to be proportional to the speed

$$P_{\max} = \omega T_{\max} = \omega \psi'_E I_{\max} \tag{7.68}$$

bzw.

or

$$P_{\min} = \omega T_{\min} = -\omega \psi'_E I_{\max}. \tag{7.69}$$

Dieser Bereich heißt *Anker-Stellbereich* oder *Spannungs-Stellbereich* bzw. *Konstant-Drehmoment-Bereich*. Der Flussschwächbereich wird häufig als dimensionsloses Verhältnis der Drehzahl ω_1 zur maximalen Drehzahl $\omega_{\max}$, welche in der Regel aus mechanischen Grenzen resultiert, angegeben.

This area is called *armature* or *voltage control range* or *constant-torque-range*. The flux weakening range is often specified by the dimensionless ratio of the ω_1 and the maximum speed $\omega_{\max}$, which usually results from mechanical restrictions.

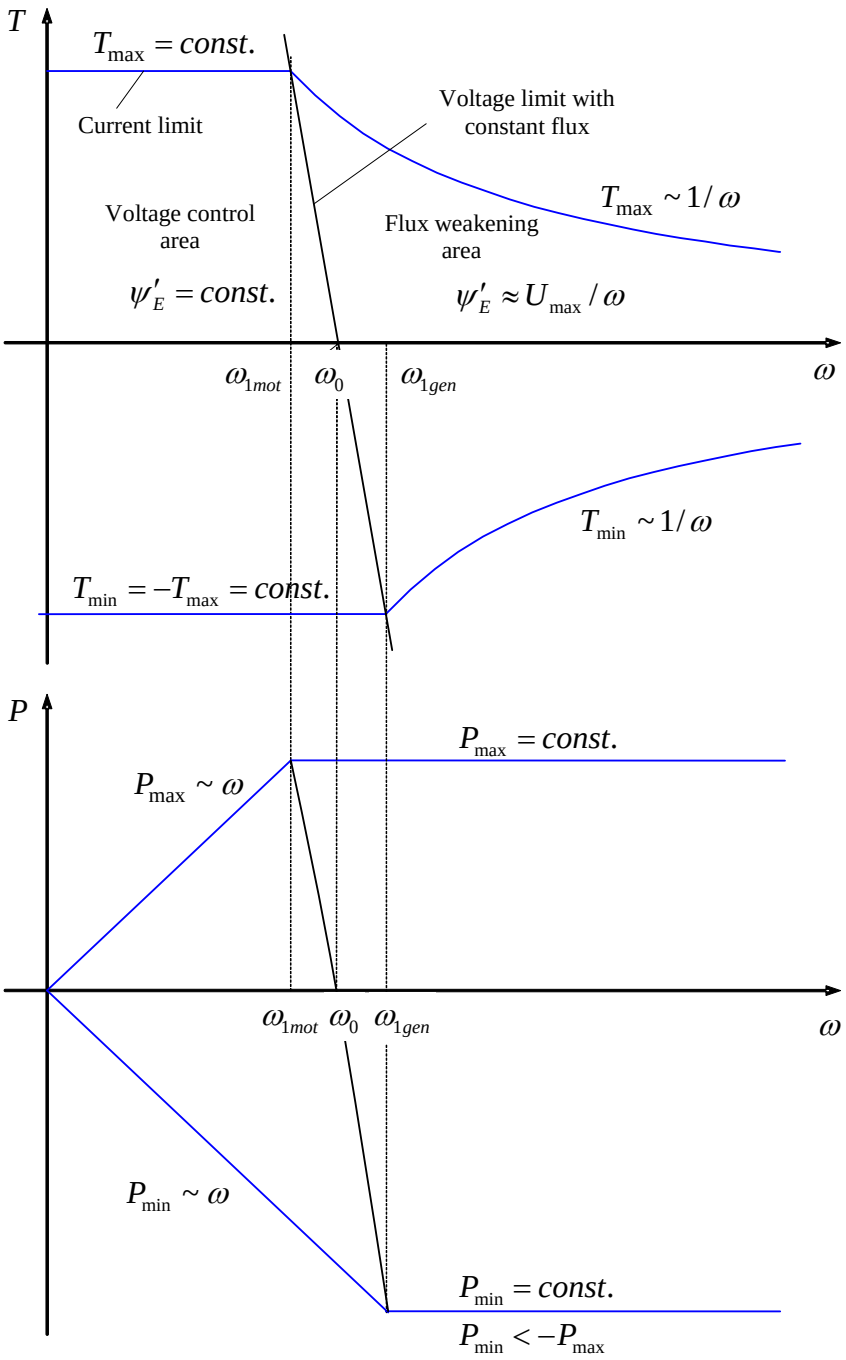


Fig. 7-30:
Verläufe von verfügbarem Drehmoment und verfügbarer Leistung über der Drehzahl

Maximum availabe torque and power vs. speed

8 Elektronisch kommutierte Motoren Electronically Commutated Motors

8.1 Funktionsprinzip Functional Principle

Elektronisch kommutierte Motoren gleichen in ihrem Funktionsprinzip konventionellen permanent erregten Gleichstrommotoren. Wie bei diesen gibt es einen Anker und eine Erregung mittels eines Permanentmagnets. Statt der mechanischen Kommutierung werden die Ankerwicklungen jedoch elektronisch umgeschaltet. Um die Zuführungen zum elektronischen Kommutator zu bewerkstelligen, wird beim elektronisch kommutierten Motor der Anker nicht drehend, sondern als der feststehende Teil des Motors (Stator) ausgeführt. Der Erreger, also die Permanentmagneten, werden im Läufer (Rotor) angeordnet. Das Konstruktionsprinzip mit innen liegendem Rotor ist zwar das am weitesten verbreiteste, es gibt aber auch Ausführungen mit Außenläufer.

The functional principle of electronically commutated motors is quite the same as of conventional permanent magnet DC motors. Both types of motors comprise an armature and a magnetic excitation from a permanent magnet. Unlike the mechanical commutation of a classical DC motor, the switching of the armature windings is performed electronically. In order to enable simple wiring between windings and the electronic switch, the armature of the electronically commutated motor is located in the stator. In return, the excitation, i.e. the permanent magnet is now located as moving part in the rotor. The most common construction principle provides for a rotor being located on the inside. However, a construction with external rotor is also possible.

Je nach Hersteller werden elektronisch kommutierte Motoren als BLDC-Motoren (*brushless* DC oder deutsch *bürstenlos*) bzw. als EC-Motoren (*electronically commutated, elektronisch kommutiert*) bezeichnet.

Depending on the manufacturer's wording, electronically commutated motors (*EC motors*) can also be called *brushless DC motors* (*BLDC motors*).

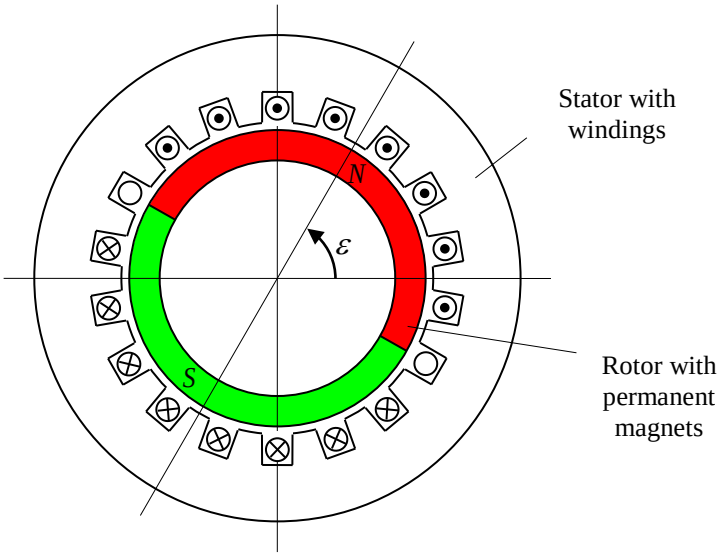


Fig. 8-1:
Gleichstrommotor mit rotierendem Erreger und stehendem Anker

DC motor with rotating excitation and armature winding in the stator

Die Vorteile elektronisch kommutierter Motoren gegenüber mechanisch kommutierten sind Folgende:

- Durch den außenliegenden Anker kann dieser besser gekühlt werden als der innen liegende Anker des konventionellen Gleichstrommotors. Durch diese bessere Kühlung ist eine kompaktere Konstruktion möglich.
- Der mechanische Kommutator nimmt ca. 1/3 der Baulänge eines Gleichstrommotors in Anspruch. Ein elektronisch kommutierter Motor ist deshalb wesentlich kürzer.
- Der Verschleiß der Bürsten entfällt. Ein elektronisch kommutierter Motor ist praktisch wartungsfrei.

(Noch) stehen diesen Vorteilen allerdings die etwas höheren Kosten für die elektronische Kommutierung gegenüber, welche allerdings einige zusätzliche funktionelle Vorteile mit sich bringt.

Während man beim mechanisch kommutierten Motor eine Vielzahl von Ankerteilwicklungen und Kommutatorkontakten (häufig einige Zehn) vorfindet, findet man beim elektronisch kommutierten Motoren meist nur drei Ankerwicklungen vor, obwohl das Funktionsprinzip nicht auf diese Zahl beschränkt ist. Anders als bei klassischen Gleichstrommotoren werden diese Ankerwicklungen nicht ringförmig, sondern im Stern geschaltet.

The advantages of electronically commutated motors as compared to mechanically commutated motors are as follows:

- The armature winding is located in the outer stator which can be cooled more easily as the internal rotor of a conventional DC motor. Due to better cooling, a more compact contruction is possible.
- The mechanical commutator contributes to about one third of the overall length. An electronically commutated motor is much shorter.
- No wear of the brushes. An electronically commutated motor is almost free of maintenance.

Today, these advantages are compensated to a large extent by the higher cost of the electronic commutation. However, the electronical commutation exhibits some additional benefits.

While a mechanically commutated motor usually includes some tens armature segments, within an electronically commutated motors there are most commonly only three such segments that should be called phases. However, the function principle is not restricted to only three phases. Unlike classical DC motors, these winding segments are not connected in a ring, but as a star.

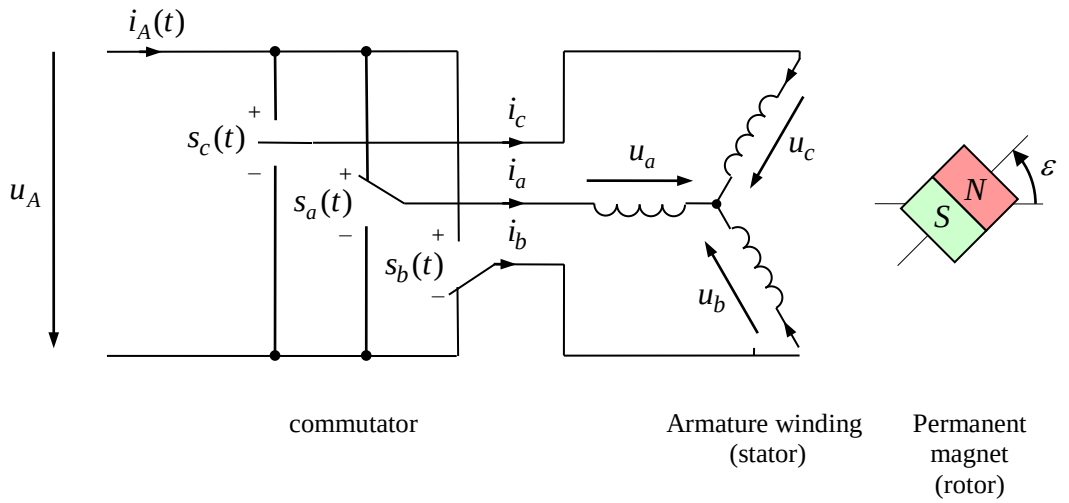


Fig. 8-2:
Prinzipbild des elektronisch kommutierten Motors

Principle diagram of an electronically commutated motor

Jeder der Anschlüsse der Ankerwicklungen *a*, *b*, *c* kann über den Kommutator mit dem positiven oder dem negativen Potential der Speisespannung verbunden werden oder offen bleiben. Der Ankerstrom i_A durchfließt also immer zwei der drei Ankerwicklungen, die dritte bleibt stromlos. Mittels der Schaltfunktionen

With a commutator as shown in the diagram, each of the terminals of the phase windings *a*, *b*, *c* can be connected to the positive or the negative potential of the supply voltage, or remains unconnected. So, the armature current i_A always flows through two out of the three phase windings, the third winding remains unconnected. Introducing the switching function

$$s_a, s_b, s_c \in \{-1;0;+1\},$$

wobei der Wert „0“ die offene Schalterstellung repräsentieren möge, lassen sich die Zusammenhänge zwischen Ankerstrom bzw. -spannung und den Stranggrößen wie folgt darstellen:

where the value „0“ should denote the opened switch, the relations between armature current and voltage and the phase quantities can be written as follows:

$$i_A = \frac{1}{2} \sum_{k=a,b,c} s_k i_k \tag{8.1}$$

$$u_A = \sum_{k=a,b,c} s_k u_k \tag{8.2}$$

8.2 Induzierte Spannungen
Induced Voltages

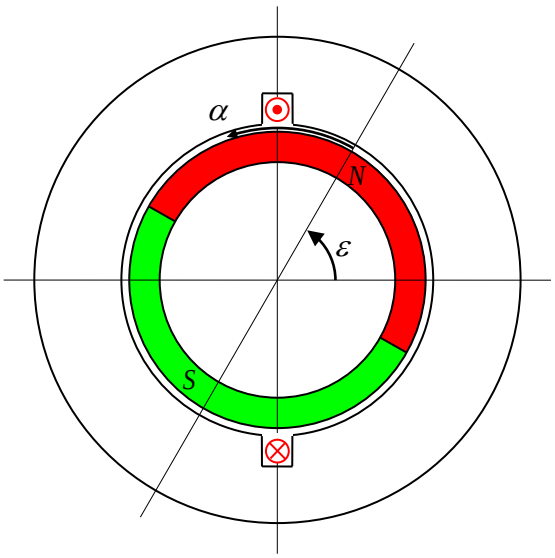


Fig. 8-3:
Zur induzierten Spannung in einer einzelnen Ankerwindung
ε : Stellungswinkel des Rotors gegenüber dem Stator
α : Rotorfeste Koordinate zur Beschreibung des Rotorfeldes

On the induced voltage in a single armature winding turn
ε : position angle of the rotor with respect to the stator
α : rotor-fixed coordinate to be used for the description of the rotor field

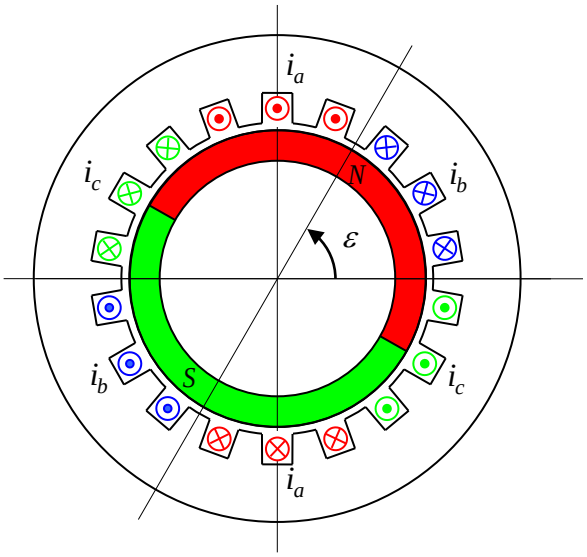


Fig. 8-4:
Zuordnung der Windungen zu den drei Wicklungen (Die Punkte und Kreuze sind hier nicht als tatsächliche Stromfluss-richtung, sondern nur als Zähl-richtungen zu verstehen)

Allocation of the turns to the three-phase winding system (dots and crosses do not indicate the actual directions of the current flows but only the direction of counting)

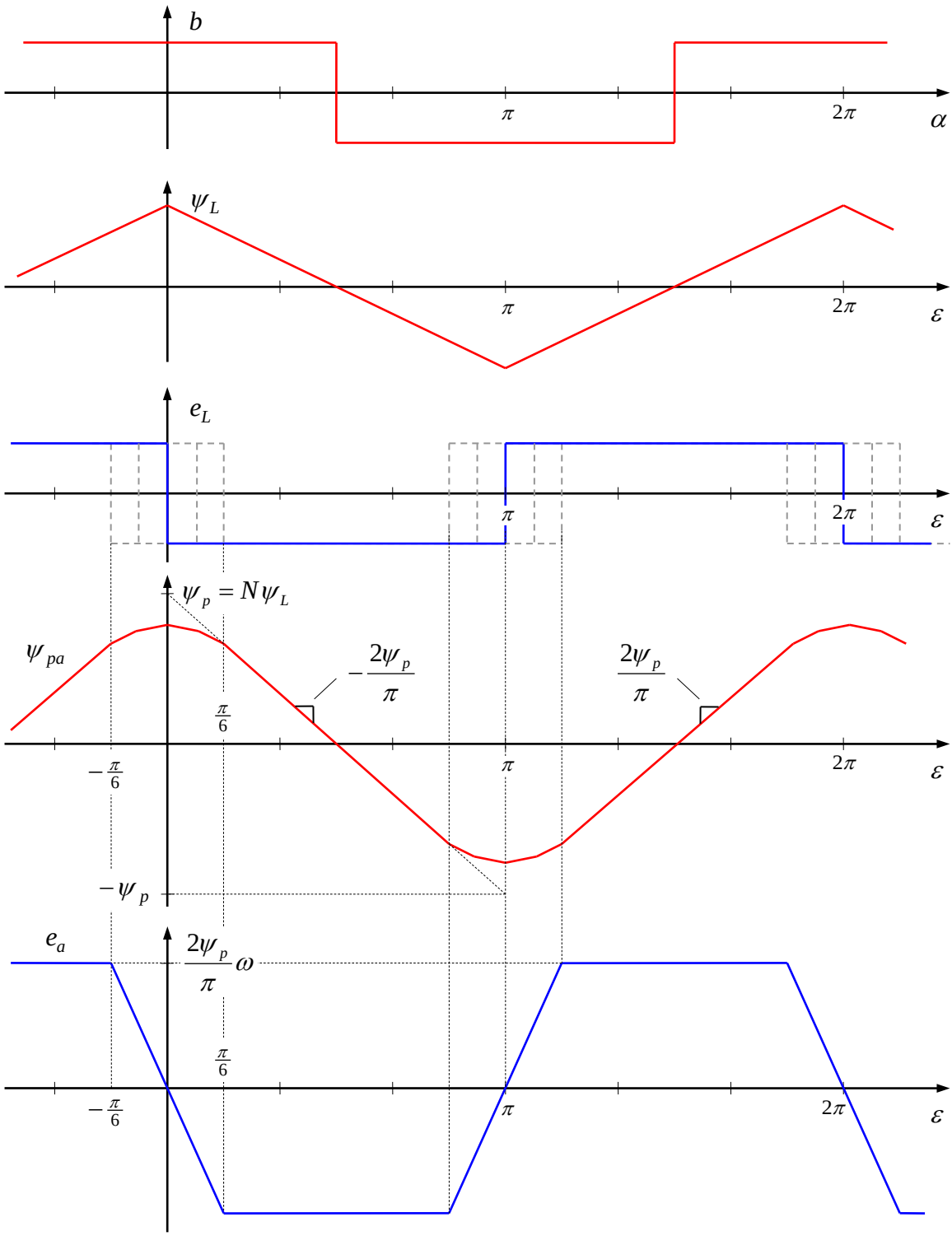


Fig. 8-5:
Konstruktion der induzierten Spannung einer Leiterschleife und einer Wicklung

Construction of the induced voltage of a turn and a complete winding

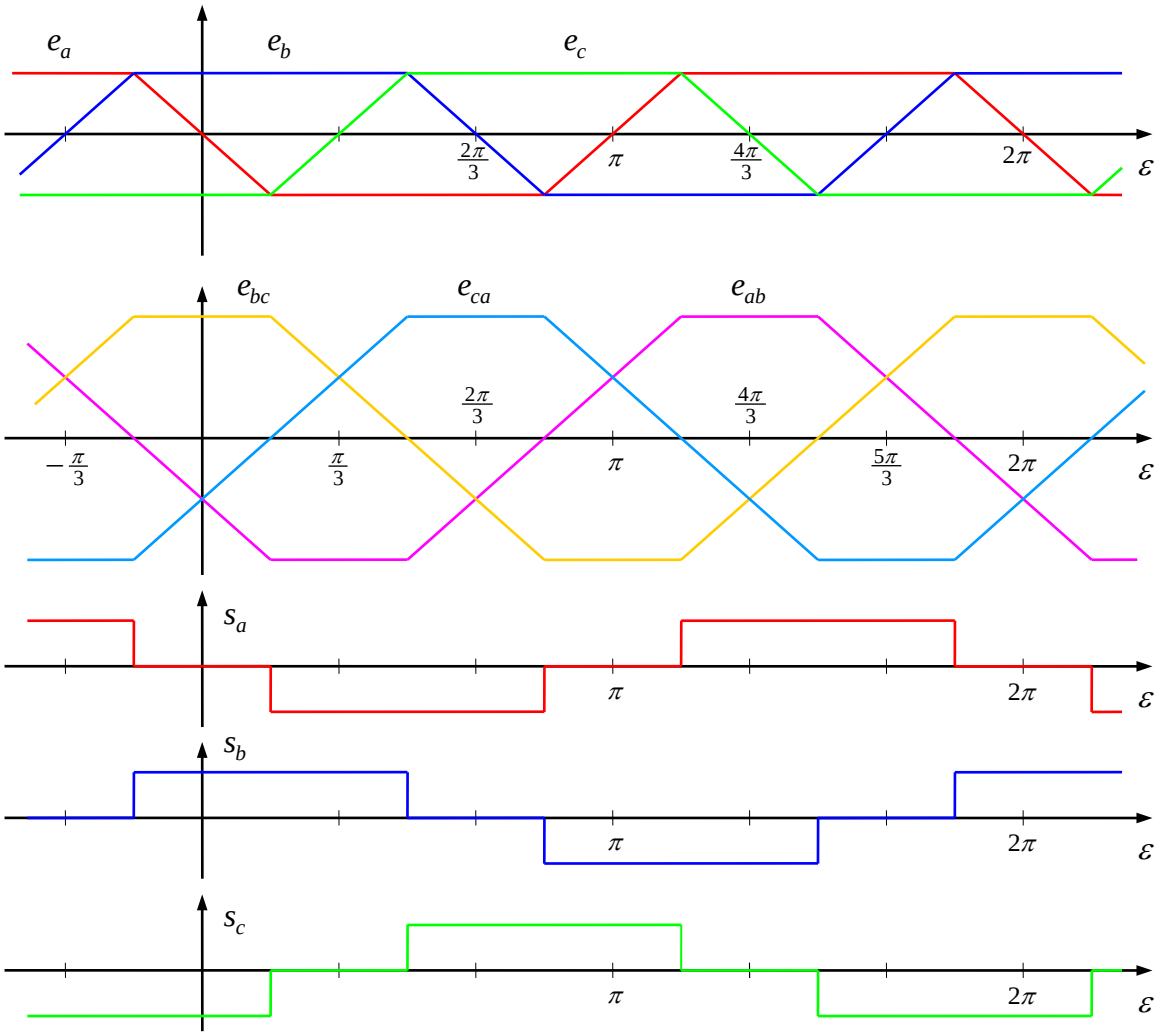


Fig. 8-6:

Strangspannungen und Leiter-Leiter-Spannungen sowie notwendige Schalterstellungen des Kommutators zur Gleichrichtung der Ankerspannungen

Phase and phase-to-phase voltages and the required switching states of the commutator in order to rectify the armature voltages

8.3 Ersatzschaltbild und Drehmoment
Equivalent Circuit Diagram and Torque

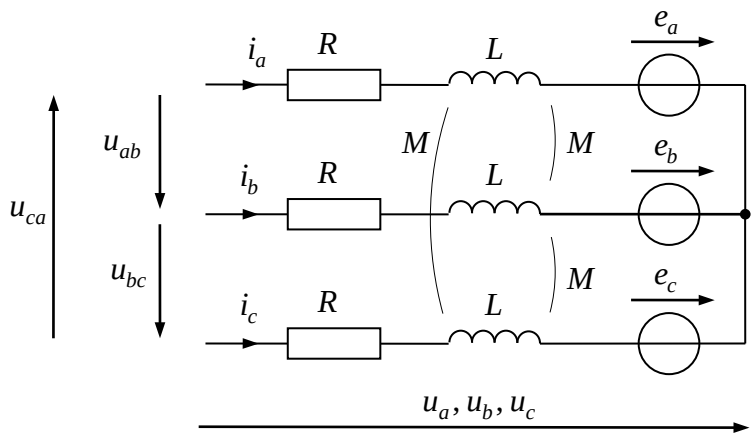


Fig. 8-7:
Ersatzschaltbild mit Ankerinduktivität und Ersatzspannungsquellen

Equivalent circuit diagram with armature inductance and voltage sources representing the EMF

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \boldsymbol{L} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

mit

where

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

und der Induktivitätsmatrix

and the inductance matrix

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

.

Die Hauptinduktivität M gibt die Flussverkettung zwischen zwei Wicklungen an, sie ist negativ: $M < 0$. Aufgrund der Symmetrie der dreiphasigen Wicklungen kann höchstens die Hälfte des magnetischen Flusses einer Wicklung mit einer der anderen beiden ver-

The main or mutual inductance M describes the the flux linkage between two windings. It is negative, $M < 0$. Due to the symmetry of the three phase windings, only up to one half of the magnetic flux of one winding can be linked with another winding. The negative

kettet sein. Hierbei ist allerdings ein umgekehrtes Vorzeichen zu berücksichtigen. Für die Hauptinduktivität gilt demnach die Abschätzung

sign has to be considered, however. So, the following limit results

$$-M \leq \frac{1}{2}L \tag{8.6}$$

Wird vom Kommutierungsvorgang abgesehen, ist immer einer der drei Ströme i_a, i_b, i_c Null. Also wird das dynamische Verhalten im verbleibenden Strompfad z.B. im Fall

Excluding the commuation process from our consideration, one of the three phase windings i_a, i_b, i_c is always zero. In the remaining path of the current, the dynamic behavior e.g. in the case

$$i_c = 0, \quad i_A = i_a = -i_b, \quad u_A = u_a - u_b \tag{8.7}$$

beschrieben durch

is determined by

$$u_a = Ri_a + L\dot{i}_a + M\dot{i}_b + e_a \tag{8.8}$$

$$u_b = Ri_b + L\dot{i}_b + M\dot{i}_a + e_b \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} u_A &= u_{ab} = u_a - u_b \\ &= 2Ri_A + 2L\dot{i}_A - 2M\dot{i}_A + e_{ab} \\ &= R_A i_A + L_A \dot{i}_A + e_A \end{aligned} \tag{8.10}$$

Der wirksame Ankerwiderstand und die wirksame Ankerinduktivität resultieren also zu

The effective armature resistance and the effective armature inductance result to

$$R_A = 2R, \quad L_A = 2L - 2M$$

sowie die induzierte Spannung (die Erklärung von ψ_p ergibt sich aus dem Bild weiter oben) zu

The induced voltage, the EMF (the definition of ψ_p can be seen from the above timing diagram) results to

$$e_A = 2\frac{2}{\pi}\psi_p\omega = \frac{4}{\pi}\psi_p\omega = \psi'_p\omega \tag{8.11}$$

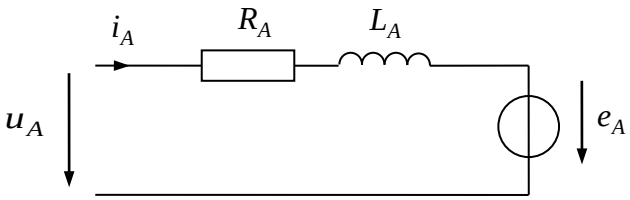


Fig. 8-8:
Resultierendes Ersatzschaltbild für den Ankerkreis

Resulting equivalent circuit diagram of the armature circuit

Das Drehmoment kann über die Leistungsbilanz gewonnen werden (die mechanische Leistung ist gleich der an den Ersatz-Spannungsquellen e_a, e_b, e_c anfallenden elektrischen Leistung):

The torque can be determined via the power balance as the mechanical power ist equal to the electrical power of the voltage sources e_a, e_b, e_c :

$$P_{me} = \omega_{me} T = \sum_{k=a,b,c} i_k e_k \tag{8.12}$$

Unter der Annahme, dass stets einer der drei Ströme gleich Null ist und die anderen beiden entgegengesetzt gleich sind (und den Ankerstrom i_A führen), folgt (p ist die Polpaarzahl)

Assuming that one of the three currents is always zero while the other two are equal with inverted sign (and are equal to the armature current i_A), it follows (p is the number of pole pairs)

$$\omega_{me} T = \frac{\omega}{p} T = 2 i_A \frac{2\psi_p}{\pi} \omega \tag{8.13}$$

$$T = \frac{4}{\pi} p \psi_p i_A = p \psi'_p i_A \tag{8.14}$$

8.4 Stromrichter
Converter

Um den elektronisch kommutierten Motor mit variabler Spannung zu speisen, kann genauso wie beim mechanisch kommutierten Gleichstrommotor ein Tiefsetzsteller verwendet werden. Wie dort ist auch hier keine gesonderte Stellerdrossel notwendig, da die Ankerinduktivität bzw. die Induktivitäten der drei Stränge diese Aufgabe mit übernehmen. Ein Schaltbild des Tiefsetzstellers in Kombination mit dem elektronisch kommutierten Motor zeigt das nachfolgende Bild, was aber

In order to supply the electronically commutated motor with variable voltage, a step-down converter (buck converter) can be applied similar to the mechanical commutated motor. Also in this case, a converter inductance is not required as the inductances of the motor take over this task. A circuitry with the combination of a buck converter with the electronically commutated motor is shown in the following figure. However, that structure should not be

nicht als reale Schaltbild, sondern nur als Zwischenschritt begriffen werden möge. In dieser Konfiguration arbeitet der elektronische Kommutator genauso wie das mechanische Vorbild polend, d.h. während einer Periode wechselt dieser Schalter nur einmal die Polarität. Demgegenüber arbeitet der Tiefsetzsteller pulsend mit einer in der Regel weit höheren Schaltfrequenz.

understood as realistic circuitry, but as an intermediate step only. In this configuration, the electronical commutator is only in charge of changing the polarity once in a fundamental period as it is also characteristic of the mechanical archetype. The buck converter, however, is operated with a higher switching frequency in a pulsing mode.

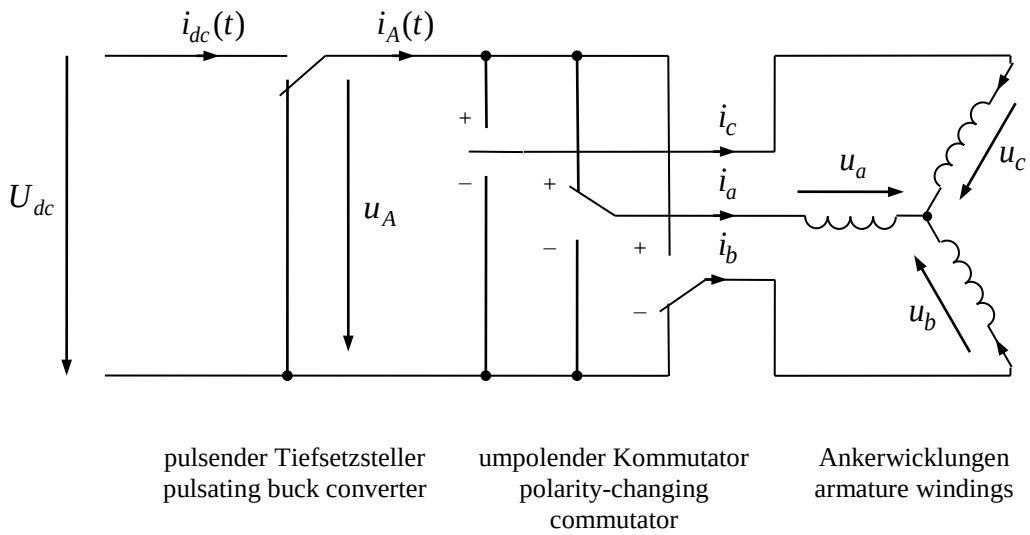
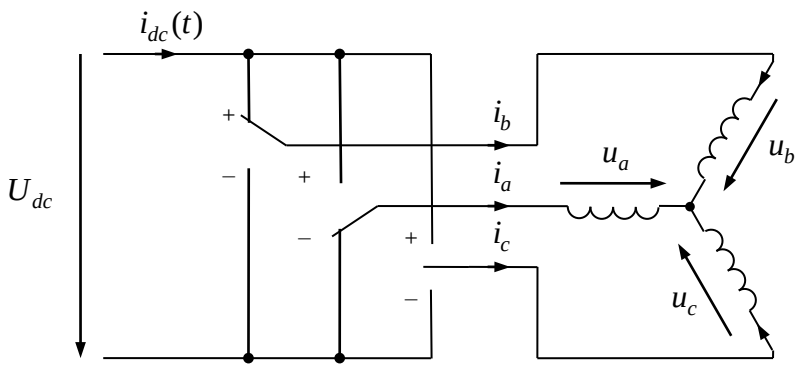


Fig. 8-9:
Speisung durch einen Tiefsetzsteller

Supply with a step-down (buck) converter

Die Ausführung der beiden Funktionen (pulsender Tiefsetzsteller und polender Kommutator) müssen aber keineswegs durch verschiedene Schalter bewerkstelligt werden. Der bislang nur als polend betrachtete elektronische Kommutator kann die Funktion des Pulsens mit übernehmen, wie im nachfolgenden Bild dargestellt ist. In dieser Struktur ist es aber nicht mehr möglich, Ankerstrom i_A und Ankerspannung u_A genau an einer Stelle der Schaltung messtechnisch zu erfassen.

However, there is no need to employ different kinds of switches for the two functions pulsing buck converter and commutator. The electronic “commutator” whose major task has been considered up to now to ensure the correct polarity can take over the task of pulsing as well. That is shown in the following figure. In this structure, however, it is no longer possible to identify the armature current i_A and the armature voltage u_A at a certain point in the circuit diagram.



Dreiphasiger Umrichter
three-phase converter

Fig. 8-10:
Integration der Funktionen *Pulsen* und *Polen* in einem dreisträngigen Steller

Integration of the functions *pulsing* and *polarity-changing* within a three-phase converter

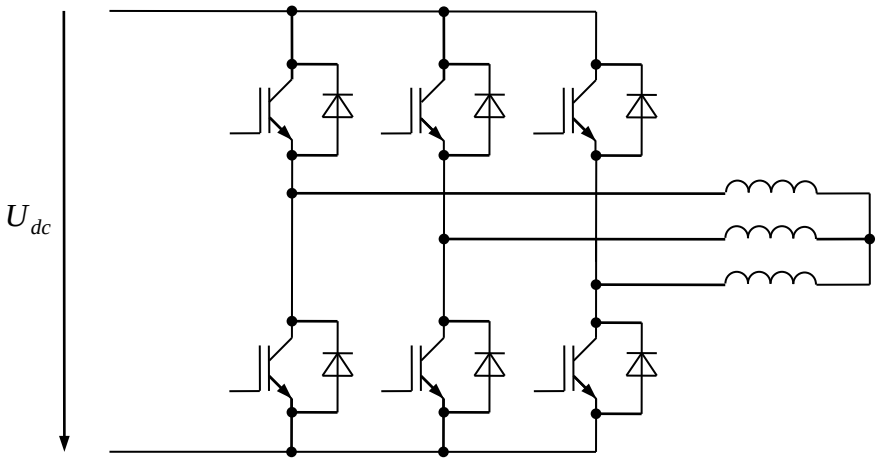


Fig. 8-11:
Realisierung des dreisträngigen Stellers

Realization of a three-phase converter

8.5 Kommutierung
Commutation

Für die Untersuchung der Kommutierung z. B. zwischen Strang *a* und *b* wird angenommen, dass der Strom im dritten unbeteiligten Strang, z. B. also im Strang *c* näherungsweise konstant bleibt.

In order to investigate the process of commutation e.g. between phases *a* and *b*, the current of the third phase *c* which does not take part in the commutation is assumed to remain approximately constant.

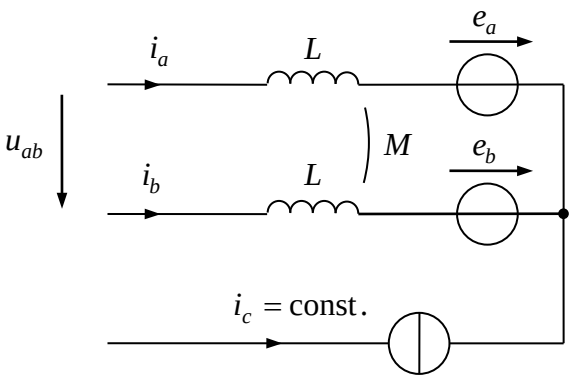


Fig. 8-12:
Ersatzschaltbild für die Kommutierung

Equivalent circuit diagram for the commuation

Im Kommutierungskreis wirkt die effektive Kommutierungsinduktivität

The inductance in the commuation mesh is

$$L_K = 2L - 2M \ ,$$

die also gleich der effektiven Ankerinduktivität ist. Die ohmschen Widerstände werden bei der Kommutierung vernachlässigt. Während der Kommutierung sucht sich der zu kommutierende Strom bei bereits abgeschaltetem Transistor den Pfad durch die entsprechende Freilaufdiode, so dass als Kommutierungsspannung die negative Spannung des Gleichspannungskreises wirkt. Dies führt zu folgendem Ersatzschaltbild für den Kommutierungsvorgang:

which is identical to the effective armature inductance. The ohmic resistances shall be neglected during the commutation. The commutation starts when the conducting transistor is switched off. The current changes its path to the free-wheeling diode. As a result, the driving commutation voltage is then the negative DC supply voltage. This leads to the simplified equivalent circuit diagram for the commutation mesh:

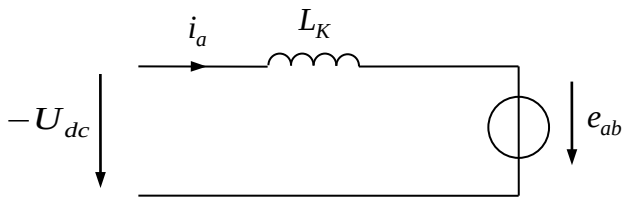


Fig. 8-13:
Vereinfachtes Ersatzschaltbild für den Kommutierungskreis

Simplified equivalent circuit diagram of the commutation mesh

Die Anfangswerte zum Beginn der Kommutierung sind

The starting values of the commuation are

$$i_a(t_{K1}) = i_A\,,\quad i_b(t_{K1}) = 0\ .$$

Nach abgeschlossener Kommutierung ist

The commuation is completed when the following end values are reached:

$$i_a(t_{K2}) = 0\,,\quad i_b(t_{K2}) = i_A\ .$$

Die Differenzialgleichung für den Kommutierungsvorgang lautet

The differential equation for the commutation is as follows

$$L_K \dot{i}_a = -U_{dc} - e_{ab} \tag{8.15}$$

Für das dargestellte Beispiel sollte die Kommutierung um den Winkel $\varepsilon_K = -\pi/6$ stattfinden (s. obige Zeitverläufe). Zu diesem Zeitpunkt (und in Näherung in der Umgebung) ist aber die induzierte Spannung $e_{ab} = 0$, so dass nur die äußere Spannung U_{dc} für die Kommutierung maßgeblich ist. Es resultiert die Kommutierungszeit

For the considered example, the commuation should take place symmetrically with respect to the angle $\varepsilon_K = -\pi/6$ (see timing diagrams above). Around this instant, the induced voltage crosses zero, $e_{ab} = 0$. As a result, only the external voltage U_{dc} is the driving voltage in the commutation mesh. So, the commutation time can be simply calculated as

$$T_K = t_{K2} - t_{K1} = \frac{i_a(t_{K1})L_K}{U_{dc}} = \frac{i_A L_K}{U_{dc}} \tag{8.16}$$

Für eine genauere Betrachtung wird der zeitliche Verlauf von e_{ab} im Kommutierungsintervall berücksichtigt:

For a more detailed investigation, the accurate behavior of e_{ab} during the commutation shall be taken into account:

$$i_A = i_a(t_{K2}) - i_a(t_{K1}) = \int_{t_{K1}}^{t_{K2}} \dot{i}_a(t)\,dt = -\frac{U_{dc}T_K}{L_K} - \frac{1}{L_K}\int_{t_{K1}}^{t_{K2}} e_{ab}(t)\,dt \tag{8.17}$$

Obwohl $e_{ab}(t)$ nicht als Null vorausgesetzt wird, fällt das Integral über $e_{ab}(t)$ weg, sofern der Kommutierungsvorgang genau symmetrisch um den Winkel ε_K ausgelöst wird. Die Zeitverläufe der Ströme ändern sich zwar durch Berücksichtigung von $e_{ab}(t)$, nicht aber die Kommutierungszeit. Der letzte Term ist aber gerade Null, so dass sich zwar der Verlauf der Ströme während der Kommutierung verändert, nicht aber die Kommutierungszeit. Dies setzt aber einen entsprechenden Winkelvorhalt voraus. Die Kommutierung muss zum Winkel

Inspite of not assuming $e_{ab}(t)$ as zero, the corresponding integral of $e_{ab}(t)$ is zero anyhow, provided that the commutation is symmetrical with respect to the angle ε_K. Although the particular trajectories of $i_a(t)$ will change depending on $e_{ab}(t)$, the total commutation time remains constant. However, that requires the commutation to be triggered in advance with an angle of

$$\varepsilon_{K1} = \varepsilon_K - \Delta\varepsilon_K \tag{8.18}$$

ausgelöst werden, damit sie symmetrisch zum Winkel ε_K abläuft und zum Winkel

That way, the commutation interval is symmetrical with respect to the center angle ε_K and will be finished at the angle

$$\varepsilon_{K2} = \varepsilon_K + \Delta\varepsilon_K \tag{8.19}$$

abgeschlossen ist. Dieser Winkelvorhalt berechnet sich zu

The angle advance is calculated from

$$\Delta\varepsilon_K = \frac{T_K}{2}\omega = \frac{i_A L_K \omega}{2U_{dc}} \tag{8.20}$$

Ein größerer Winkelvorhalt als dieser Wert kann dazu dienen, sich die induzierte Spannung zur Unterstützung der Kommutierung zu Nutze zu machen, so dass sich die Kommutierungszeit sogar verkürzt. Dies kann bei großen Drehzahlen sinnvoll sein, wenn es gilt, die Kommutierung während eines nicht zu großen Winkelintervalls durchzuführen. Eine verzögert ausglöste Kommutierung verlängert die Kommutierungszeit und wirkt sich insbesondere bei hohen Drehzahlen ungünstig aus.

A larger advance can be applied in order to utilize the induced voltage additionally driving the commutation and thus to shorten the commutation time. This can be advantageous particularly in high speed operation when the available time for commutation is short. A delayed commutation trigger would lengthen the commutation time having a negative impact particularly at higher speeds.

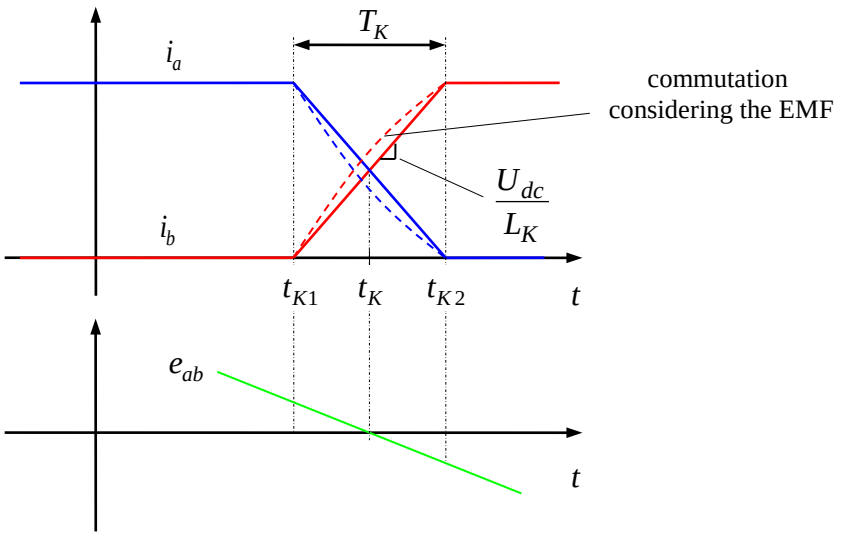


Fig. 8-14:
Zeitverläufe bei der Kommutierung (Normalbetrieb)

Trajectories during the commutation

Anders als beim mechanisch kommutierten Gleichstrommotor, bei dem der zu kommutierende Strom nur über Kommutatorkontakte und Bürsten fließt, aber an den äußeren Ankerklemmen nicht sichtbar ist, fließt beim elektronisch kommutierten Motor dieser Strom über den speisenden DC-Kreis.

Unlike the mechanically commutated DC motor, where the commutation of the armature current takes place locally only within the commutator contacts and the carbon brushes, the the electronical commutation also includes the DC bus.

8.6 Regelung
Control

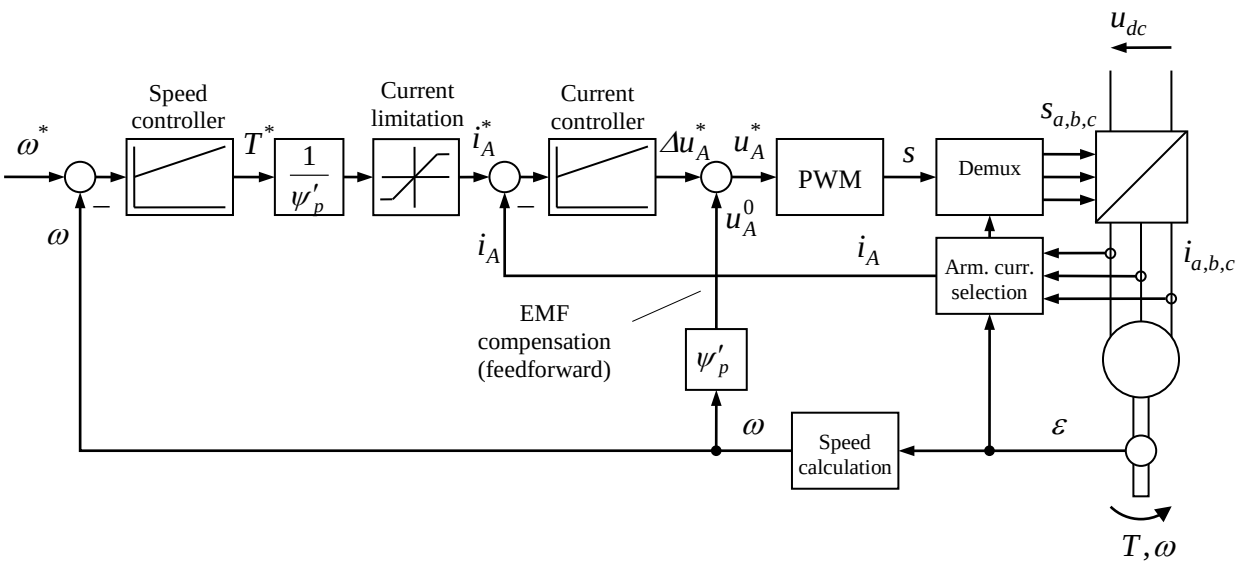


Fig. 8-15:
Drehzahlregelung mit unterlagerter Stromregelung und PWM

Speed control with inner current control and PWM

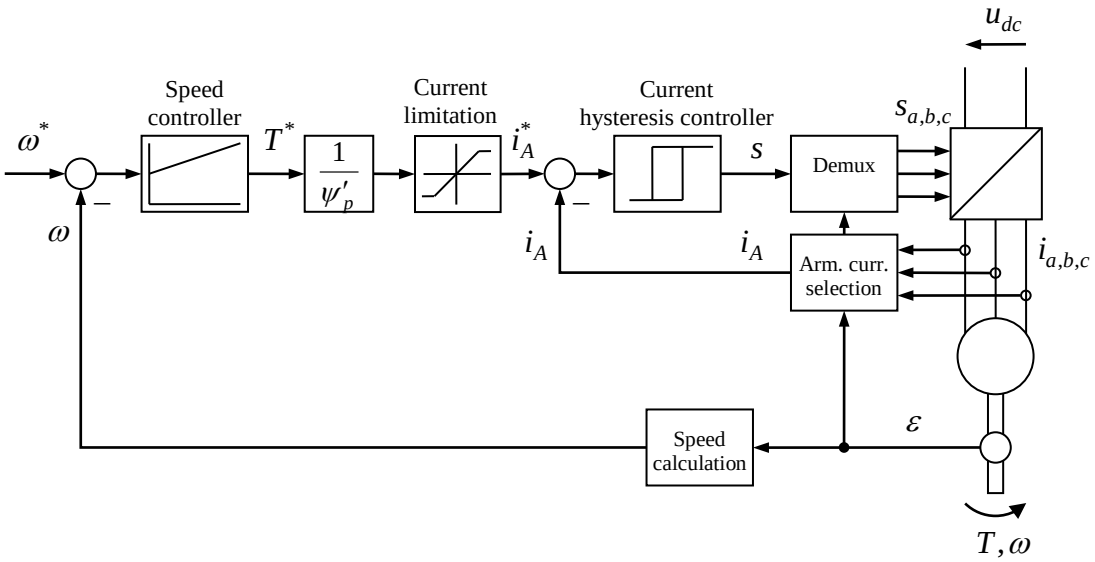


Fig. 8-16:
Drehzahlregelung mit unterlagerter Strom-Schaltregelung

Speed control with inner hysteresis current control

Die Bildung des Ankerstroms i_A kann abhängig vom Stellungswinkel ε durch vorzeichengerechte Auswahl des passenden

The calculation of the armature current i_A can be performed depending on the position angle ε by selection of one of the phase

Strangstroms i_a, i_b, i_c nach folgender Tabelle vorgenommen werden.

currents i_a, i_b, i_c with appropriate sign according to the following table:

Tabelle für die Kommutatorschalter-stellungen und für den maßgeblichen Anker-strom

Table of the commutator switching positions and the relevant armature current

ε	s_a	s_b	s_c	$i_A =$
$-30° < \varepsilon < 30°$	0	$+1$	-1	$i_b = -i_c$
$30° < \varepsilon < 90°$	-1	$+1$	0	$i_b = -i_a$
$90° < \varepsilon < 150°$	-1	0	$+1$	$i_c = -i_a$
$150° < \varepsilon < 210°$	0	-1	$+1$	$i_c = -i_b$
$210° < \varepsilon < 270°$	$+1$	-1	0	$i_a = -i_b$
$270° < \varepsilon < 330°$	$+1$	0	-1	$i_a = -i_c$

Wird eine Rückspeisung ausgeschlossen, ist also der Ankerstrom stets positiv, kann der Ankerstrom unabhängig von der Winkel-stellung über die Beziehung

If regenerative operation is excluded, the armature current will always be positive or zero so that it can be caculated independent of the position from

$$i_A = \frac{1}{2} \sum_{k=a,b,c} |i_k|$$

bestimmt werden, was recht einfach zu re-alisieren ist.

which can be realized quite easily.

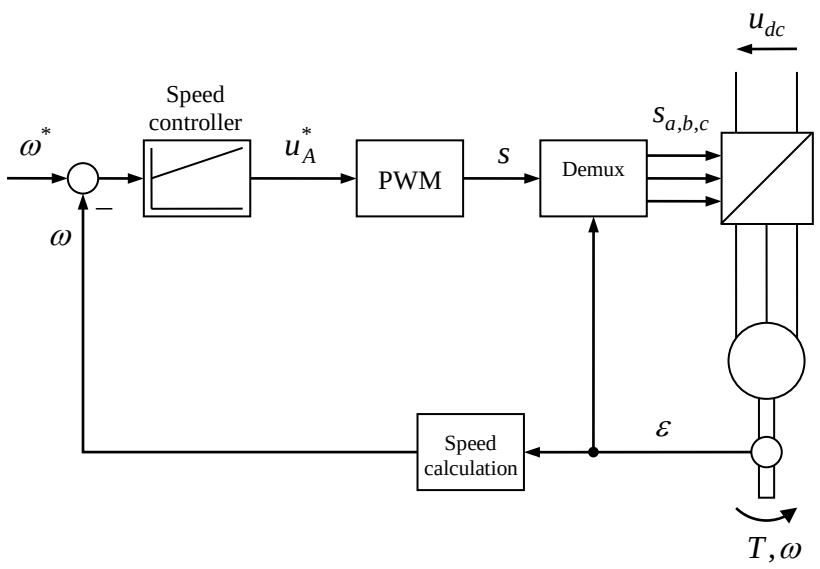


Fig. 8-17:

Vereinfachte Drehzahlregelung ohne unterlagerte Stromregelung und EMK-Vorsteuerung	Simplified speed control without inner current control and EMF compensation

9 Entwurf von Strom- und Drehzahlregelung
Design of Current and Speed Control

In verschiedenen Zusammenhängen wie beim Magnetlager, beim Geschalteten Reluktanzmotor, beim Gleichstrommotor, auch bei seiner elektronisch kommutierten Variante, sind unterlagerte Stromregelungen zu entwerfen, die alle eine sehr ähnliche Struktur besitzen, und jeweils nach Standardverfahren entworfen werden können. Ähnliches trifft auf die Drehzahlregelung zu.

In different contexts such as for the magnetic bearing, switched reluctance motor, DC motor – both variants with mechanical and electronic commutation – subordinate current controllers are to be employed. All of them have quite a similar structure and can be designed similarily using standard controller design methods. The same applies for the speed control.

Bei einer Stromregelung gehen wir beispielsweise von einer Streckenübertragungsfunktion (der Admittanz) eines *RL*-Gliedes aus:

For the current control, we should start with a plant transfer function (i. e. the admittance) of a *RL*-element:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = G_{\mathrm{p}}(s) = \frac{1}{R+sL} = \frac{1}{R}\frac{1}{1+s\tau_{\mathrm{s}}} \tag{9.1}$$

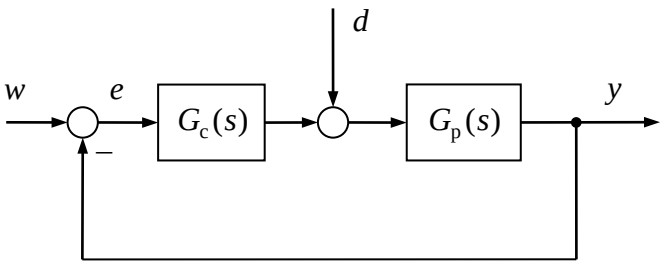


Fig. 9-1:
Betrachteter Standardregelkreis mit Regelgröße *y*, Führungsgröße *w* und Störgröße *d*

Considered standard control loop with control variable *y*, set value *w*, and disturbance variable *d*

Von weiteren Einflüssen wie der EMK soll hier abgesehen werden. Wir nehmen an, dass diese z. B. zuvor durch eine entsprechende Vorsteuerung im Regler kompensiert wird (im regelungstechnischen Sinn handelt es sich um eine Störgrößenkompensation).

Other influences like the EMF shall not be considered here. It is assumed that the EMF has already been compensated by a feedforward action of the controller (in term of control engineering, we refer to disturbance compensation).

Zusätzlich zum Verhalten des *RL*-Gliedes soll noch eine weitere Zeitkonstante τ_σ berücksichtigt werden, die z. B. durch Sensoren oder durch eine Verzögerung des Spannungsstellgliedes verusacht wird. All-

Additionally to the behavior of the *RL*-element, another time constant τ_σ shall be taken into account, which may be due to, e.g., the delays of sensors or the voltage actuator. Thus, we should start from the transfer function

gemein soll daher von einer Streckenübertragungsfunktion der Form

$$G_{\mathrm{p}}(s) = V_{\mathrm{p}} \frac{1}{1+s\tau_s} \frac{1}{1+s\tau_\sigma} \tag{9.2}$$

ausgegangen werden. Hierbei nehmen wir

It is assumed that

$$\tau_s > \tau_\sigma \tag{9.3}$$

an. Der Regler wird nun als *PI*-Glied mit der Nachstellzeit T_{r} und der Verstärkung V_{c} angesetzt:

The controller is now assumed to be a *PI*-type with reset time T_{r} and controller gain V_{c}:

$$G_c(s) = V_c \frac{1+sT_n}{sT_n} \tag{9.4}$$

Damit ergibt sich die Kreisübertragungsfunktion[14]

Then, the loop transfer function results to[15]

$$L(s) = G_{\mathrm{p}}(s) G_{\mathrm{c}}(s) = V_{\mathrm{p}} V_{\mathrm{c}} \frac{1}{1+s\tau_s} \frac{1}{1+s\tau_\sigma} \frac{1+sT_{\mathrm{r}}}{sT_{\mathrm{r}}} \tag{9.5}$$

9.1 Reglerentwurf durch Pol-Nullstellen-Kürzung
Controller Design with Pole-Zero-Cancellation

Wird die Reglernachstellzeit gleich der Streckenzeitkonstanten gewählt,

If the controller reset time is chosen equal to time constant of the plant,

$$T_{\mathrm{r}} = \tau_s \tag{9.6}$$

kürzt sich in der Kreisverstärkung der betreffende Pol mit der Reglernullstelle und es resultiert

the corresponding plant pole will be cancelled by the controller zero and the loop transfer function results to

$$L(s) = V_{\mathrm{p}} V_{\mathrm{c}} \frac{1}{sT_{\mathrm{r}}} \frac{1}{1+s\tau_\sigma} \tag{9.7}$$

Durch Übergang auf die normierte Verstärkung

With the normalized gain

[14] Obwohl für die Kreisverstärkung der gleiche Buchstabe verwendet wie für die Induktivität, besteht im Folgenden keine Verwechselungsgefahr, da von Induktivitäten im weiterem kein Gebrauch gemacht wird.

[15] Though the same letter is used for the loop transfer function as well as for the inductance, there is no danger of confusion, since inductances will not occur in the following.

$$\gamma = \frac{\tau_\sigma}{\tau_s} V_\mathrm{p} V_\mathrm{c} = \tilde{V}_\mathrm{p} V_\mathrm{c} \tag{9.8}$$

ergibt sich die Darstellung

the loop transfer function is represented as

$$L(s) = \gamma \frac{1}{s\tau_\sigma} \frac{1}{1 + s\tau_\sigma} \tag{9.9}$$

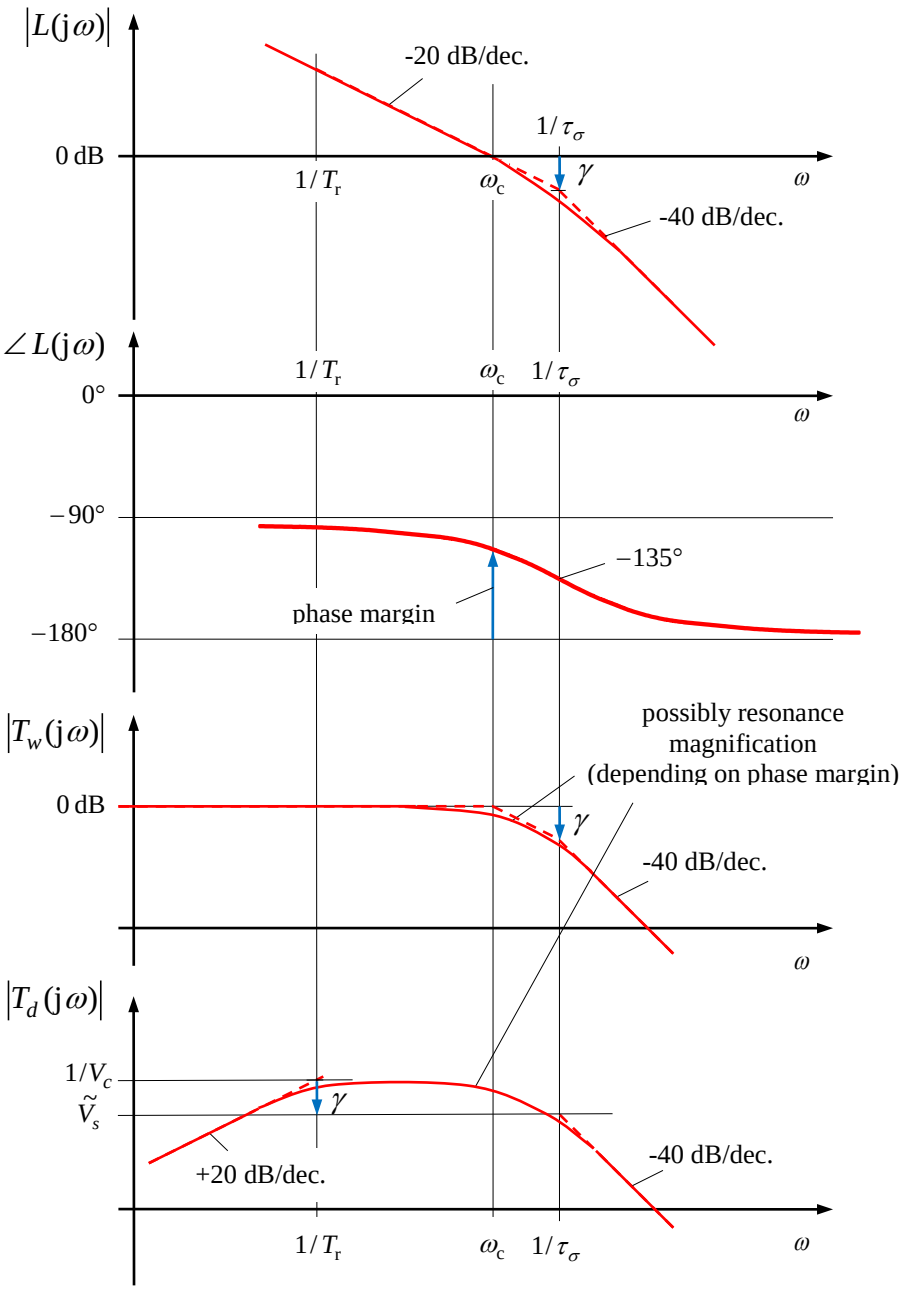


Fig. 9-2:
Frequenzgänge bei Auslegung nach dem Betragsoptimumin doppelt-logarithmischer Darstellung

Frequency response for control design according the magnitude optimum in double-logarithmic scaling

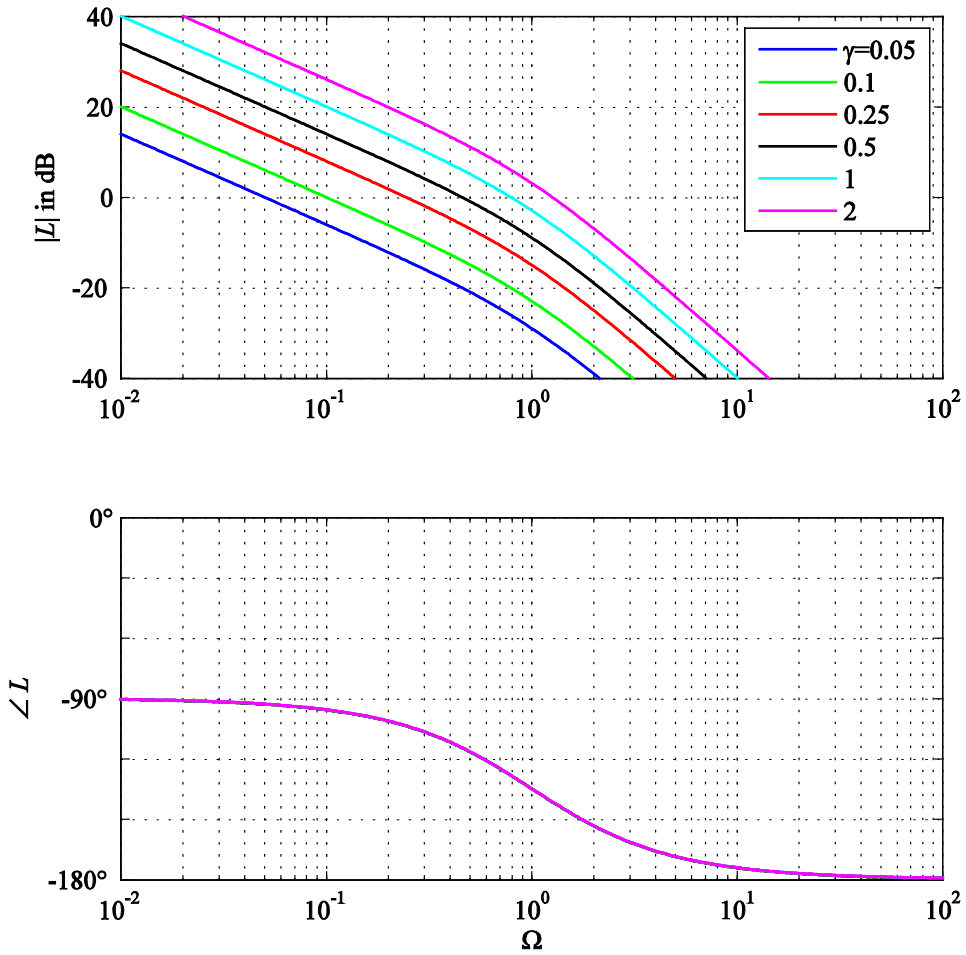


Fig. 9-3:
Frequenzgang der Kreisübertragungsfunktion L über der normierten Frequenz $\Omega = \omega\tau_\sigma$ für verschiedene Werte von γ verschiebt sich lediglich der Amplitudengang

Frequency response of the loop gain L vs. normalized frequency $\Omega = \omega\tau_\sigma$ for different values of γ, only the magnitude is affected by this parameter

Die Führungsübertragungsfunktion erhält man zu

The control transfer function (tracking of reference input) results as

$$T_w(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\gamma}{s\tau_\sigma(1+s\tau_\sigma)+\gamma} = \frac{1}{1+s\frac{\tau_\sigma}{\gamma}+s^2\frac{\tau_\sigma^2}{\gamma}} \tag{9.10}$$

Der Vergleich mit der Standardform eines P-T_2-Gliedes,

Comparing this with the standard form of a P-T_2-element,

$$T_w(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{1+s\frac{\tau_\sigma}{\gamma}+s^2\frac{\tau_\sigma^2}{\gamma}} = \frac{1}{1+2d\frac{s}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}} \tag{9.11}$$

liefert

yields

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\gamma}}{\tau_\sigma} \tag{9.12}$$

,

$$d = \frac{1}{2\tau_\sigma \omega_0} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \tag{9.13}$$

Vorteilhafterweise bezieht man die Frequenz auf die Zeitkonstante τ_σ, also

It is reasonable to normalize the frequency with respect to the time constant τ_σ, i.e.

$$\Omega_0 = \omega_0 \tau_\sigma = \sqrt{\gamma}\,. \tag{9.14}$$

Der noch freie Verstärkungsparameter γ beinflusst also die Dämpfung d, aber auch die Kennkreisfrequenz ω_0 bzw. Ω_0 des Führungsverhaltens. Man sieht aber, dass der Regelungsentwurf die Kennkreisfrequenz in jedem Fall im Bereich von $1/\tau_\sigma$ platziert, was bedeutet, dass die mögliche Dynamik des Systems, die ja durch die Zeitkonstante τ_σ begrenzt wird, sehr weit ausgeschöpft wird.

The free gain parameter γ influences the damping factor d as well as the characteristic frequency ω_0 or Ω_0, respectively, of the control transfer function. In any case of the control design, however, the characteristic frequency will not be far from $1/\tau_\sigma$. That means that the dynamic capability of the system, which is in the end limited by the time constant τ_σ is exploited to a rather high extent.

Die resultierenden Frequenzgänge der Führungsübertragungsfunktion sind im folgenden Bild dargestellt. Wie man gut erkennt, gewinnt man eine höhere Bandbreite auf Kosten der Dämpfung bzw. der Resonanzüberhöhung bzw. des Überschwingens im Zeitbereich. Typische Dämpfungswerte wählt man zwischen $1/\sqrt{2}$ und 1, je nachdem, welches Überschwingen man zulassen möchte. Die Wahl

The resulting Bode plots of the control transfer funtions are shown in the following figures. As it can be clearly seen, a higher Bandwidth can be achieved at the cost of poorer damping, higher resonance peak or higher overshoot in the time domain. Typical damping values lie in the range between $1/\sqrt{2}$ and 1, depending on the acceptable overshoot. The design with the value

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

wird als *Betragsoptimum*[16] bezeichnet.

is called *Magnitude Optimum*[17].

Die *Bandbreite* des Führungsverhaltens (-3 dB-Grenzfrequenz) lässt sich analytisch bestimmen. Zweckmäßigerweise bezieht man die Frequenz wieder auf die Zeitkonstante τ_σ:

The *bandwidth* of the control transfer behavior (-3 dB frequency) can be determined straight forward in an analytical manner. Advantageously, the frequency should again be referred to the time constant τ_σ:

[16] Zum Hintergrund und zur Motivation der Namengebung sei auf die ausführliche Literatur verwiesen, siehe z. B. Lutz, Wendt: Taschenbuch der Regelungstechnik.

[17] Please see the comprehensive literature in order to learn more about background, motivation, and title of the method, e.g. Lutz, Wendt: Taschenbuch der Regelungstechnik.

$$T_w(\mathrm{j}\Omega) = \frac{\gamma}{\gamma + \mathrm{j}\Omega - \Omega^2} \tag{9.15}$$

$$\left|T_w(\mathrm{j}\Omega_\mathrm{b})\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{9.16}$$

$$2\gamma^2 = \left|\gamma + \mathrm{j}\Omega_\mathrm{b} - \Omega_\mathrm{b}^2\right|^2 = \left(\gamma - \Omega_\mathrm{b}^2\right)^2 + \Omega_\mathrm{b}^2 = \gamma^2 - 2\gamma\Omega_\mathrm{b}^2 + \Omega_\mathrm{b}^4 + \Omega_\mathrm{b}^2 \tag{9.17}$$

$$(1-2\gamma)\Omega_\mathrm{b}^2 + \Omega_\mathrm{b}^4 - \gamma^2 = 0 \tag{9.18}$$

$$\Omega_\mathrm{b}^2 = \gamma - \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\gamma - \frac{1}{2}\right]^2 + \gamma^2} \tag{9.19}$$

$$\Omega_\mathrm{b} = \sqrt{\gamma - \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\gamma - \frac{1}{2}\right]^2 + \gamma^2}} \tag{9.20}$$

Für die Standardauslegung $\gamma = 1/2$ ergibt sich beispielsweise die Bandbreite $\Omega_\mathrm{b} = 1/\sqrt{2}$.

For the standard design $\gamma = 1/2$ a bandwidth of $\Omega_\mathrm{b} = 1/\sqrt{2}$ results.

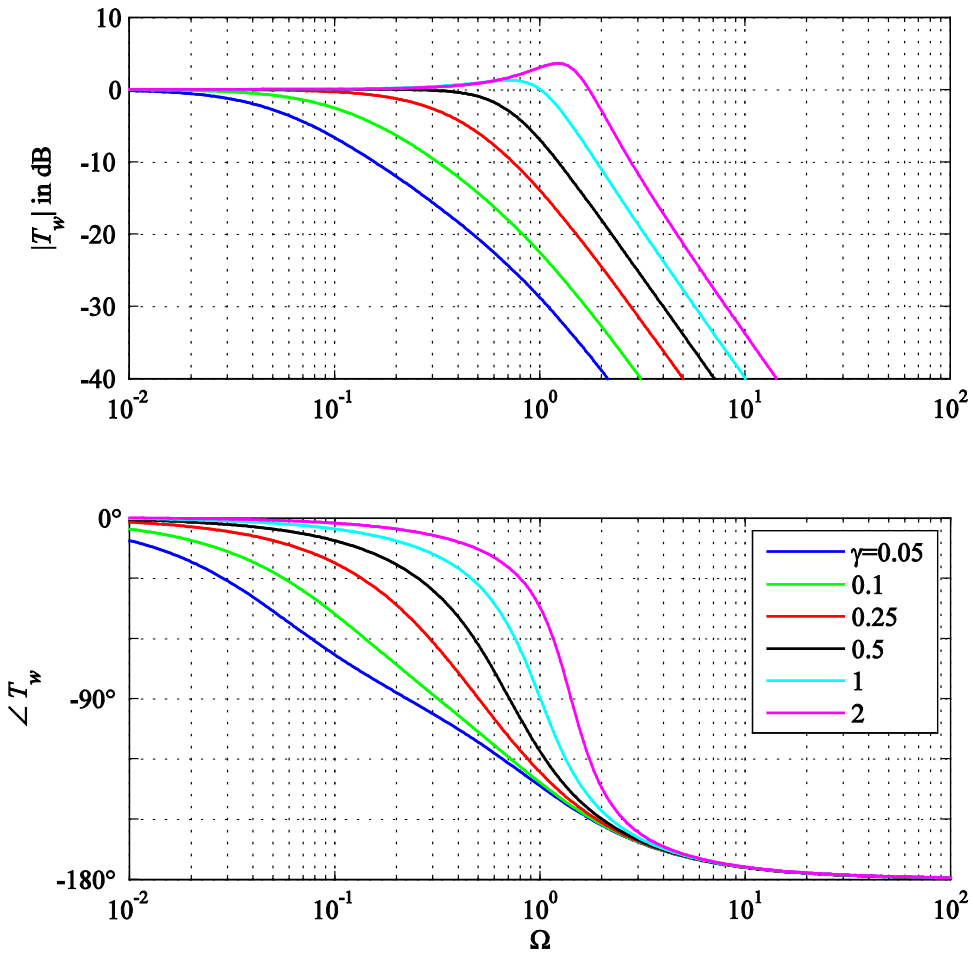


Fig. 9-4:
Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion T_w über der normierten Frequenz $\Omega = \omega\tau_\sigma$ für verschiedene Werte von γ,

Bode plot of the control tracking transfer function T_w vs. normalized frequency $\Omega = \omega\tau_\sigma$ for different values of γ,

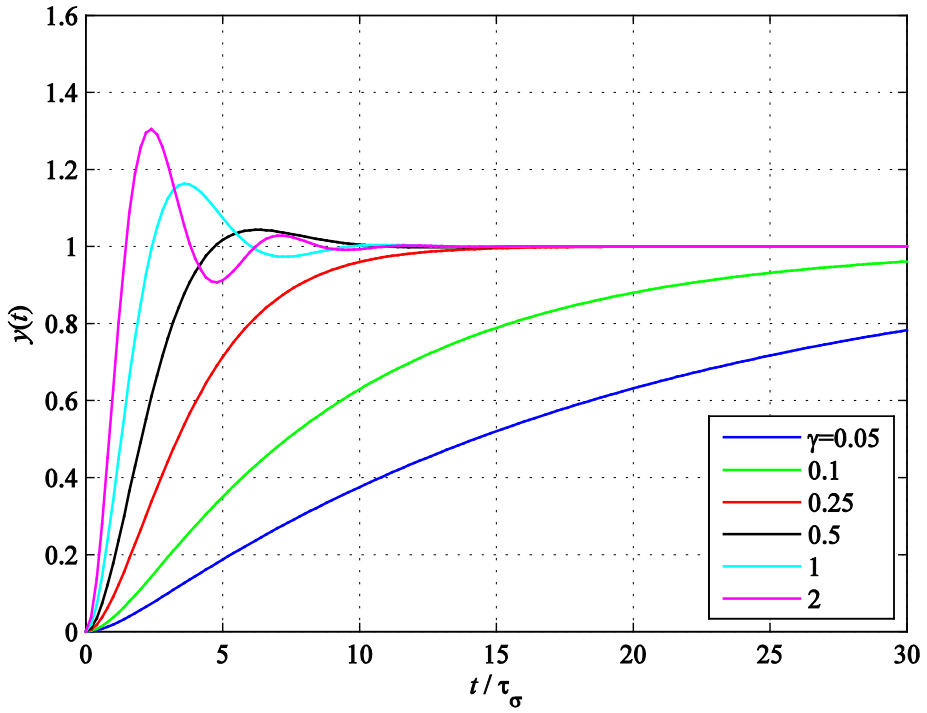


Fig. 9-5:
Antwort der Regelgröße $y(t)$ auf einen Sollwertsprung $w(t)=\sigma(t)$ (Folgeverhalten)

Response of the control variable $y(t)$ to a step-like change of the set point $w(t)=\sigma(t)$ (tracking behavior)

Das Betragsoptimum ist ein relativ einfaches Entwurfsverfahren, welches Regler mit guter Führungsdynamik liefert. Zu beachten ist aber auch das Störverhalten. Die Übertragungsfunktion von einer Störung am Streckeneingang d zur Regelgröße ist y

The Magnitude Optimum is a relatively simple design method that yields rather good reference tracking dynamics. However, attention should also be paid to the disturbance behavior. The disturbance transfer function from the disturbance input d to control variable y is

$$T_d(s)=\frac{G_\mathrm{p}(s)}{1+L(s)}=V_\mathrm{p}\frac{s\tau_\sigma}{\left(s\tau_\sigma(1+s\tau_\sigma)+\gamma\right)\left(1+s\tau_s\right)}=\tilde{V}_\mathrm{p}\frac{s\tau_s}{\left(s\tau_\sigma(1+s\tau_\sigma)+\gamma\right)\left(1+s\tau_s\right)} \tag{9.21}$$

bzw. mit der bezogenen Frequenz ausgedrückt:

or, in the representation with the normalized frequency:

$$T_d(\mathrm{j}\Omega)=V_\mathrm{p}\frac{\mathrm{j}\Omega}{\left(-\Omega^2+\mathrm{j}\Omega+\gamma\right)\left(1+\mathrm{j}\Omega\tau_s/\tau_\sigma\right)} \tag{9.22}$$

Wie man sieht, tritt die im Führungsverhalten gekürzte Polstelle $s=-1/\tau_s$ im Störverhalten weiterhin auf. Insbesondere, wenn τ_s groß gegenüber τ_σ ist, bedeutet das, dass ggf.

It can be see that the pole $s=-1/\tau_s$ that has been cancelled in the control transfer function is still present in the disturbance transfer function. Particularly, if τ_s is large

vorhandene Störungen nur langsam ausgeregelt werden. Wie das Bild der Störgrößensprungantwort zeigt, wird selbst bei großer Reglerverstärkung der Regelfehler erst durch ein langsames kriechendes Verhalten ausgeregelt. Im Stromregelkreis eines Gleichstrommotors kann beispielsweise eine solche Störung auftreten, wenn die EMK durch die Vorsteuerung nicht oder nicht exakt kompensiert wird (vgl. Abschnitt 7.12). Beim Betrieb mit konstanter oder langsam veränderlicher Drehzahl ist eine solche langsame Störausregelung hinnehmbar. Werden aber sehr schnelle Drehzahländerungen ausgeführt, so dass sich auch die EMK als Störgröße sehr schnell ändert, sollte eine schnelle Störausregelung angestrebt werden. Das ist mit dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Symmetrischen Optimum besser möglich.

compared to τ_σ disturbances will take a relatively long time to be rejected. As the disturbance step response figure shows, even with high controller gain, the control error decreases only slowly with a creeping behavior. Such a disturbance can occur in the current control loop of a DC motor in the case the EMF is not or not precisely compensated for by the feedforward controller action (cp. Section 7.12). In case of operation with constant of slowly varying speed such a slow disturbance rejection would not cause any problems. However, if the speed and thus the EMF changes rapidly, a quick disturbance rejection is desired. In that case the design method described in the following section, the Symmetrical Optimum, may be more suitable.

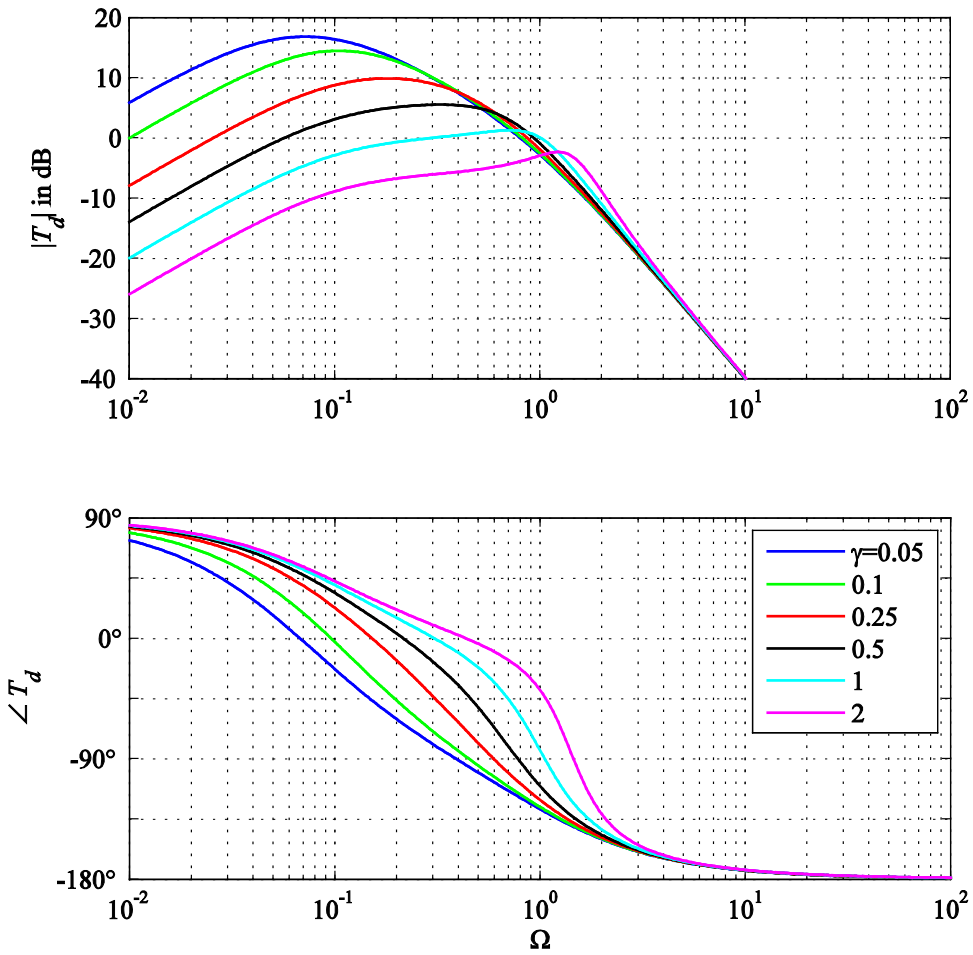


Fig. 9-6:
Frequenzgang der Störübertragungsfunktion T_d über der normierten Frequenz $\Omega = \omega\tau_\sigma$ mit $\tilde{V}_\mathrm{p} = 1$, $\tau_s / \tau_\sigma = 10$

Frequency response of the disturbance transfer function T_d vs. normalized frequency $\Omega = \omega\tau_\sigma$ with $\tilde{V}_\mathrm{p} = 1$, $\tau_s / \tau_\sigma = 10$

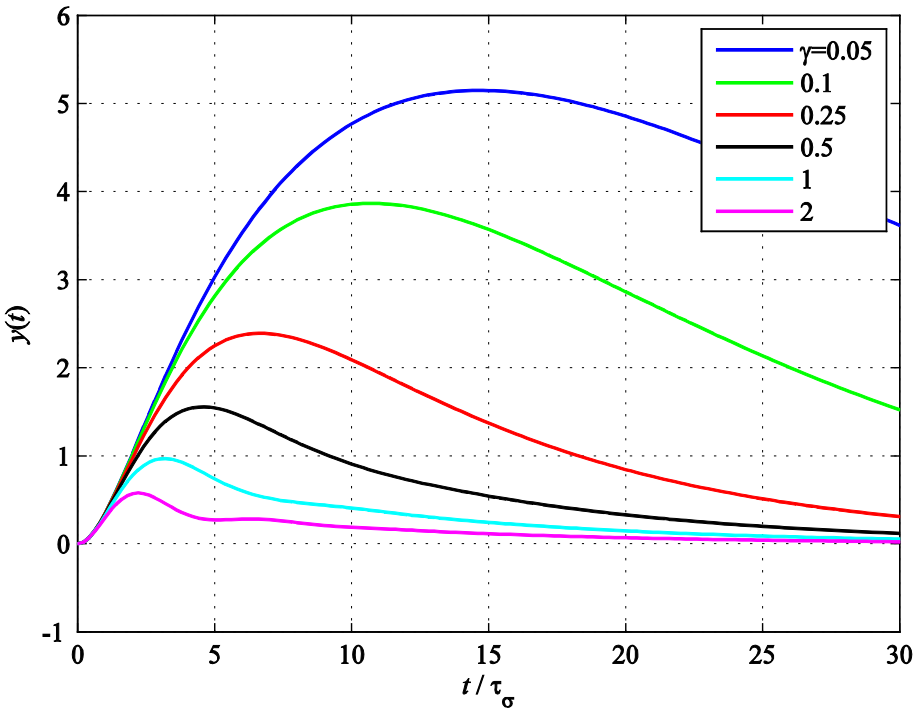


Fig. 9-7:
Antwort der Regelgröße $y(t)$ auf einen Störgrößensprung $d(t) = \sigma(t)$ mit $\tilde{V}_p = 1$, $\tau_s / \tau_\sigma = 10$

Response of the control variable $y(t)$ to step-like change of the disturbance $d(t) = \sigma(t)$, with $\tilde{V}_p = 1$, $\tau_s / \tau_\sigma = 10$

Die Amplitudendurchtrittsfrequenz Ω_c der Kreisverstärkung lässt sich im Übrigen analytisch bestimmen:

The magnitude crossover frequency Ω_c of the loop gain can also be determined analytically:

$$1 = |L(\mathrm{j}\Omega_c)|^2 = \gamma^2 \frac{1}{\Omega_c^2} \frac{1}{1+\Omega_c^2} \tag{9.23}$$

$$\begin{aligned} &\Omega_c^2\left(1+\Omega_c^2\right) = \gamma^2 \\ &\Omega_c^4 + \Omega_c^2 - \gamma^2 = 0 \\ &\Omega_c^2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^2} \end{aligned} \tag{9.24}$$

$$\Omega_c = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^2} - \frac{1}{2}} \tag{9.25}$$

9.2 Symmetrisches Optimum
Symmetrical Optimum

Das vorangegangene Verfahren legt die Reglernachstellzeit so fest, dass eine Pol-Nullstellen-Kürzung auftritt, mit der ein günstiges Führungsverhalten resultiert. Das Störverhalten wird beim Entwurf nicht beachtet. Soll ein besseres Störverhalten erreicht werden, muss man – unter Beibehaltung des *PI*-Reglertyps – die Reglernachstellzeit anders festlegen. Von der Tendenz her muss diese verringert werden, damit der integrale Anteil schneller reagiert. Besonders einfach gestaltet sich der hier dargestellte Reglerentwurf, wenn man annimmt, dass die langsame Streckenzeitkonstante τ_s der Strecke sehr viel größer als die schnelle Zeitkonstante τ_σ und auch größer als die einzustellende Reglernachstellzeit T_r ist: $\tau_s >> \tau_\sigma,\ T_\mathrm{r}$. In diesem Fall lässt sich diese Zeitkonstante gänzlich vernachlässigen und das betreffende T_1-Glied durch einen Integrator approximieren:

The control design method introduced in the preceding section uses the controller reset time for a pole-zero-cancellation. With that design method, good reference tracking dynamics result while the disturbance behavior is not considered. Aiming for a better disturbance rejection while keeping the *PI* controller type, the controller reset time should be determined in a different way. As a tendency, the reset time should be reduced to enable a quicker reaction of the integral part of the controller. The situation becomes very simple if the plant time constant τ_s is assumed to be much larger than the small time constant τ_σ and also larger than the controller reset time T_r: $\tau_s >> \tau_\sigma,\ T_\mathrm{r}$. In this case, the small time constant can bei approximated only by an integrative behavior:

$$G_\mathrm{p}(s) = V_\mathrm{p}\frac{1}{1+s\tau_s}\frac{1}{1+s\tau_\sigma} \approx V_\mathrm{p}\frac{1}{s\tau_s}\frac{1}{1+s\tau_\sigma} = V_\mathrm{p}\frac{\tau_\sigma}{\tau_s}\frac{1}{s\tau_\sigma}\frac{1}{1+s\tau_\sigma} = \tilde{V}_\mathrm{p}\frac{1}{s\tau_\sigma(1+s\tau_\sigma)} \tag{9.26}$$

Bei der Drehzahlregelung enthält die Regelstrecke ohnehin von vornherein einen Integrierer. Die Kreisübertragungsfunktion lautet nun

In case of a speed control, the plant really includes such an integrator. The loop transfer function results to

$$L(s) = G_\mathrm{c}(s)G_\mathrm{p}(s) = \tilde{V}_\mathrm{p}V_\mathrm{c}\frac{1+sT_\mathrm{r}}{sT_\mathrm{r}}\frac{1}{s\tau_\sigma}\frac{1}{1+s\tau_\sigma} = \tilde{V}_\mathrm{p}V_\mathrm{c}\frac{1}{s^2T_\mathrm{r}\tau_\sigma}\frac{1+sT_n}{1+s\tau_\sigma} \tag{9.27}$$

Der Regelungsentwurf kann sehr gut mit genäherten Amplitudengängen skizziert werden. Für kleine Frequenzen fällt der Amplitudengang der Kreisverstärkung zunächst mit -40 dB/Dekade. Die Phasendrehung ist dementsprechend etwa -180°. Durch die Knickfrequenz $1/T_\mathrm{r}$ wird die Phase angehoben (Nullstelle), durch die folgende Knickfrequenz $1/\tau_\sigma$ (Polstelle) aber wieder abgesenkt. Der größte Phasenwinkel wird (bei logarithmischer Achsenskalierung) daher genau zwischen den beiden Knickfrequenzen erreicht. Den größten Phasenrand erhält man also, wenn die Verstärkung so gewählt wird, dass die Amplitu-

The idea of the control design can be outlined very well using approximated magnitude Bode plots. For small frequencies, the magnitude plot decreases first with -40 dB per decade. The phase delay is -180° accordingly. At the corner frequency $1/T_\mathrm{r}$ the phase is increased by the controller zero, but decreased again at the corner frequency $1/\tau_\sigma$ (plant pole). The maximum phase angle is achieved exactly between the two corner frequencies (in terms of the logarithmic scaling). The largest phase margin is obtained if the gain is chosen in that way so that the magnitude crossover frequency ω_c is exactly at this point. Let

dendurchtrittsfrequenz genau an dieser Stelle ω_c platziert wird. Sei also

$$\frac{T_r}{\tau_\sigma} = a^2 \tag{9.28}$$

das Verhältnis von Nachstellzeit und schneller Streckenzeitkonstante, so soll die Amplitudendurchtrittsfrequenz bei

be the ratio between reset time and the small time constant. Then, the crossover frequency should be located at

$$\omega_c = \frac{1}{a\tau_\sigma} = \frac{a}{T_r} \tag{9.29}$$

zu liegen kommen. Das Verhältnis a lässt sich also durch zwei verschiedne Frequenzverhältnisse interpretieren (vgl. Bild):

In doing so, the ratio a can be interpreted as two different frequency ratios as also shown in the figure:

$$a = \frac{\omega_c}{1/T_r} = \frac{1/\tau_\sigma}{\omega_c} \tag{9.30}$$

In Anlehnung an Begriffe der Geometrie wird a deshalb als Doppelverhältnis bezeichnet. Bei einer logarithmischen Skalierung der Frequenzachse im Bodediagramm sind also die geometrischen Abstände der Knickfrequenzen $1/\tau_\sigma$ und $1/T_r$ von der Durchtrittsfrequenz ω_c genau gleich.

With respect to terms of geometry, a is called *double ratio*. On a logarithmic frequency axis the geometric distances from the crossover frequency ω_c is exactly the same to both corner frequencies $1/\tau_\sigma$ und $1/T_r$.

Bei der Durchtrittsfrequenz muss der Betrag der Kreisverstärkung 1 sein,

At the crossover frequency, the loop gain must be 1,

$$\left|L(\mathrm{j}\omega_c)\right| = 1\,, \tag{9.31}$$

was zur Festlegung der Reglerverstärkung führt:

that leads to the design of the controller gain:

$$1 = \left|\tilde{V}_p V_c \frac{1}{-\omega_c^2 T_r \tau_\sigma} \frac{1+\mathrm{j}\omega_c T_r}{1+\mathrm{j}\omega_c \tau_\sigma}\right| = \tilde{V}_p V_c \left|\frac{1+\mathrm{j}a}{1+\mathrm{j}/a}\right| = \tilde{V}_p V_c\, a \left|\frac{1+\mathrm{j}a}{a+\mathrm{j}}\right| = \tilde{V}_p V_c\, a \tag{9.32}$$

$$\tilde{V}_s V_c = \frac{1}{a} \quad \text{bzw.} \quad V_c = \frac{1}{a\tilde{V}_s}$$

Damit resultieren Kreis- und Führungsübertragungsfunktionen zu

With that, loop and reference transfer functions result to

$$L(s) = \frac{1}{a^3 s^2 \tau_\sigma^2} \frac{1+a^2 s\tau_\sigma}{1+s\tau_\sigma} \tag{9.33}$$

$$T_w(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1+a^2 s\tau_\sigma}{1+a^2 s\tau_\sigma + a^3 s^2 \tau_\sigma^2 (1+s\tau_\sigma)} = \frac{1+a^2 s\tau_\sigma}{1+a^2 s\tau_\sigma + a^3 s^2 \tau_\sigma^2 + a^3 s^2 \tau_\sigma^2} \tag{9.34}$$

Die Reglerübertragungsfunktion lässt sich mit dem Doppelverhältnis a schreiben als

The controller transfer function can be expressed with the double ratio a as

$$G_\mathrm{c}(s) = \frac{1}{a\tilde{V}_\mathrm{p}} \frac{1+s\tau_\sigma a^2}{s\tau_\sigma a^2} = \frac{1}{a^3 \tilde{V}_s} \frac{1+s\tau_\sigma a^2}{s\tau_\sigma} \tag{9.35}$$

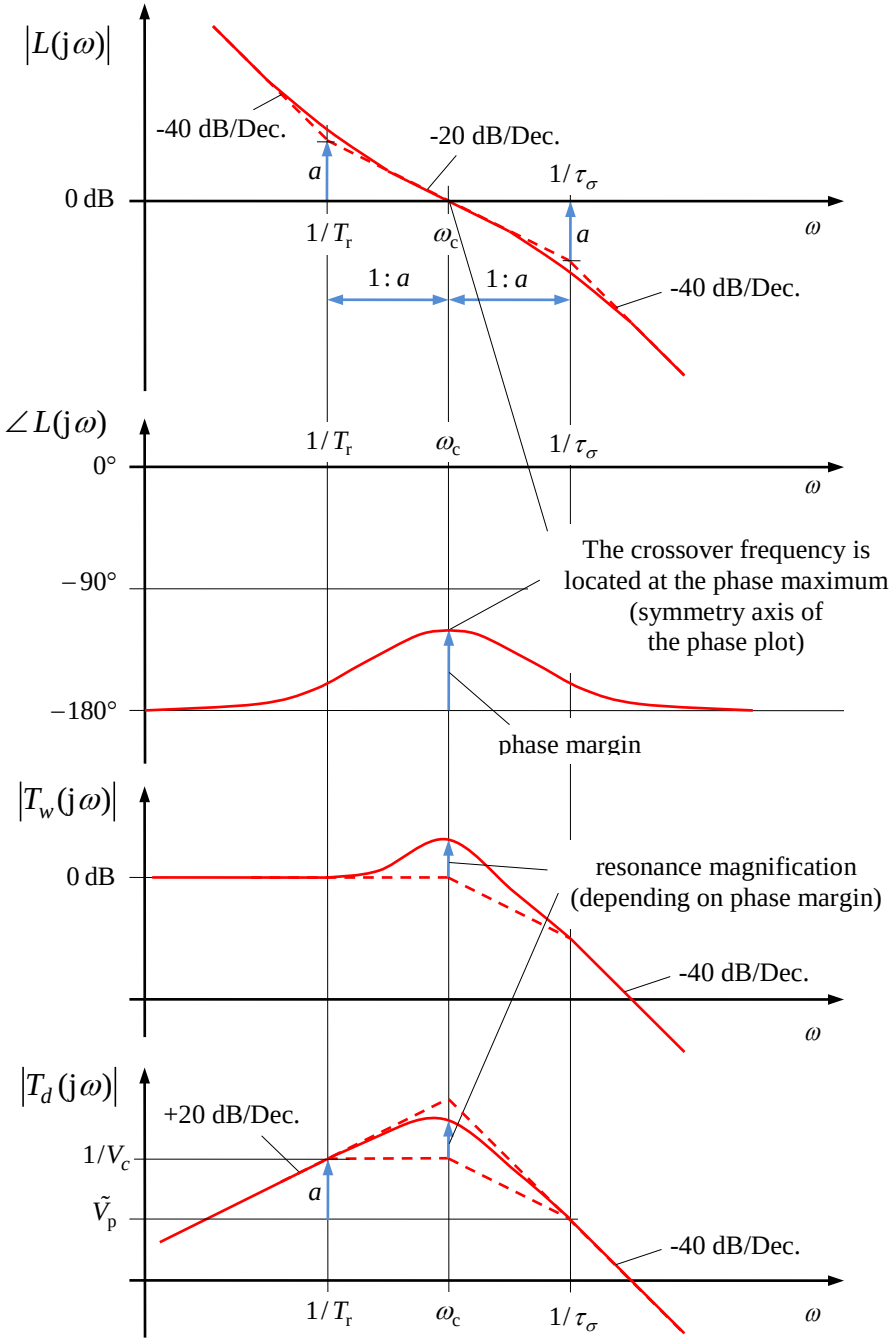


Fig. 9-8:

Frequenzgänge bei Auslegung nach dem Symmetrischen Optimum in doppelt-logarithmischer Darstellung (insbesondere durch die von der Phasenreserve abhängige Resonanzüberhöhung werden die tatsächlichen Kurvenformen stark verschliffen, bessere Einsicht in die Konstruktion erlauben die Approximationen durch Geradenstücke (gestrichelt))

Frequency responses with the Symmetrical Optimum design method in double-logarithmic scaling (The resonance peaks depending on the phase margins, in particular, distort the curve shapes. However, sometimes the piecewise straight lines (dashed) allow a better understanding of the design method than the exact plot.)

Die Bandbreite des Führungsfrequenzganges wird ungefähr durch die Amplitudendurchtrittsfrequenz $\omega_c = 1/a\tau_\sigma$ bestimmt, wenn man die Näherung

The bandwidth of the control transfer function is approximately determined by the magnitude crossover frequency $\omega_c = 1/a\tau_\sigma$ when regarding the approximation

$$T_w(\mathrm{j}\omega) = \frac{L(\mathrm{j}\omega)}{1+L(\mathrm{j}\omega)} \approx \begin{cases} L(\mathrm{j}\omega) & \text{für} \quad |L(\mathrm{j}\omega)| << 1 \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad |L(\mathrm{j}\omega)| >> 1 \end{cases} \tag{9.36}$$

beachtet. Um eine hohe Bandbreite zu erreichen, sollte a also möglichst klein gewählt werden. Das geht aber auf Kosten der Phasenreserve und mit einer starken Resonanzüberhöhung einher. Das Ziel einer möglichst großen Durchtrittsfrequenz ω_c sorgt aber tendenziell auch für einen günstigen Störfrequenzgang, denn je größer ω_c und damit $1/T_r$, desto schmaler ist der Frequenzbereich ungünstiger großer Störübertragung zwischen $1/T_r$ und ω_c. Die Störübertragungsfunktion ergibt sich wie folgt:

In order to achieve a high bandwidth, a small ratio a should be chosen. Of course that is done at the cost of a small phase margin and high resonance peaks. On the other hand, the disturbance behavior will benefit from aiming at a high crossover frequency ω_c. The higher ω_c and thus $1/T_r$, the smaller is the frequency band of poor disturbance rejection between $1/T_r$ and ω_c. The disturbance transfer function results as follows:

$$\begin{aligned} T_d(s) &= \frac{G_p(s)}{1+L(s)} = \frac{T_w(s)}{G_c(s)} \\ &= a^3\tilde{V}_p \frac{s\tau_\sigma}{1+a^2 s\tau_\sigma + a^3 s^2\tau_\sigma^2 + a^3 s^2 \tau_\sigma^2} \end{aligned} \tag{9.37}$$

In den nachfolgenden Bildern sind Frequenzgänge und Sprungantworten für verschiedene Werte des Verhältnisses a dargestellt.

The following figures show the frequency and step responses for different values of the double ratio a as design parameter.

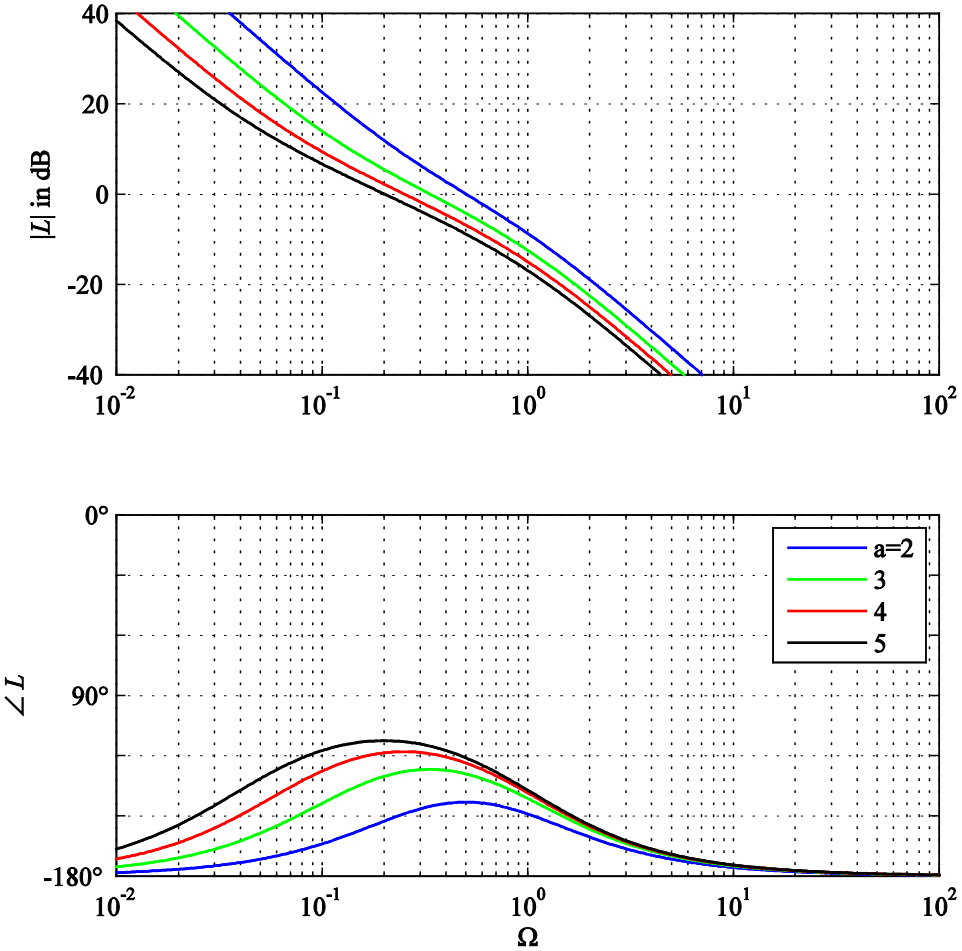


Fig. 9-9:

Frequenzgang der Kreisübertragungsfunktion L über der normierten Frequenz $\Omega = \omega\tau_\sigma$ beim Entwurf nach dem Symmetrischem Optimum

Frequency response of the loop transfer function L vs. normalized frequency $\Omega = \omega\tau_\sigma$ with Symmetrical Optimum design

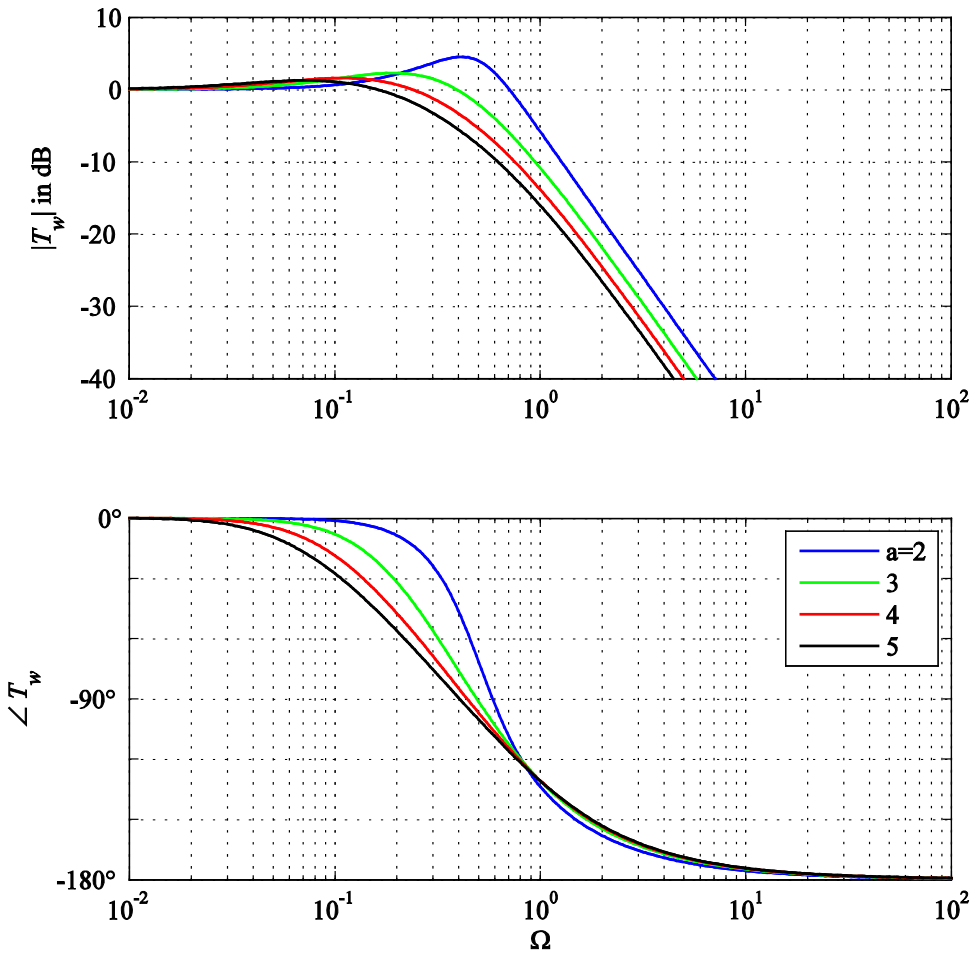


Fig. 9-10:
Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion T_w über der normierten Frequenz $\Omega = \omega\tau_\sigma$

Frequency response of the control tracking transfer function T_w vs. normalized frequency $\Omega = \omega\tau_\sigma$

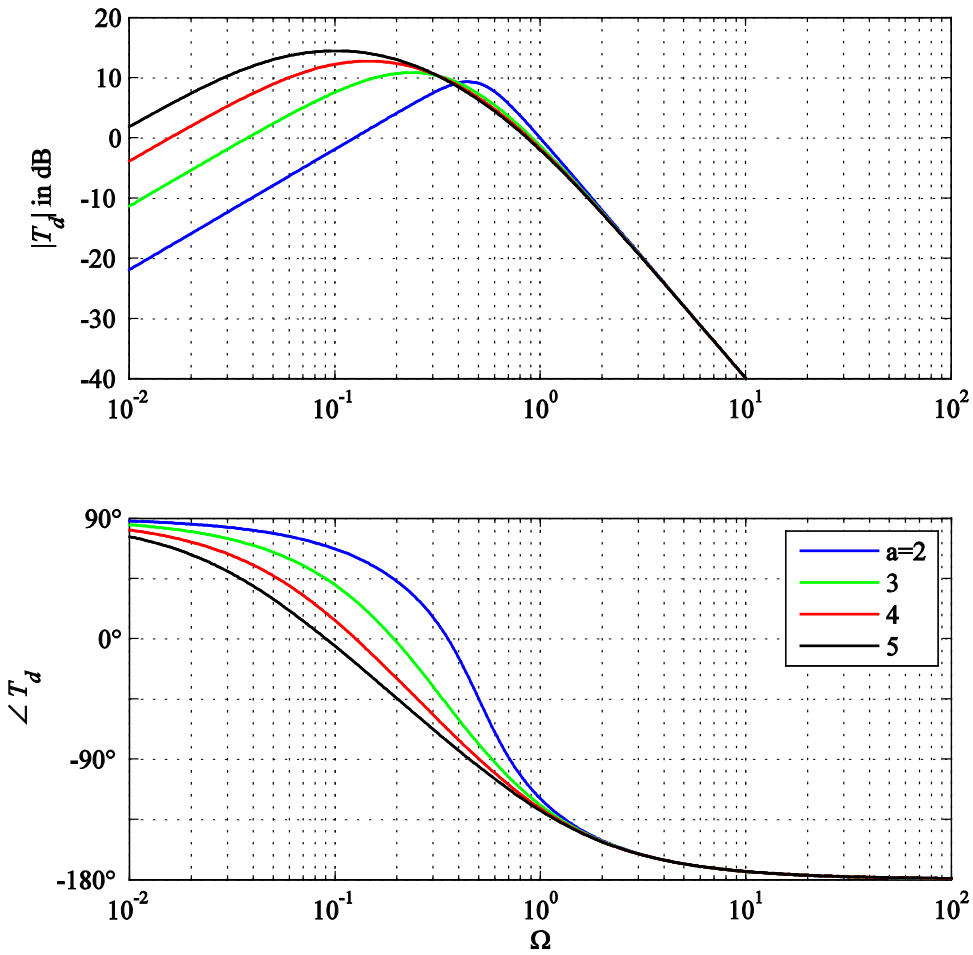


Fig. 9-11:
Frequenzgang der Störübertragungsfunktion T_d über der normierten Frequenz $\Omega = \omega\tau_\sigma$ mit $\tilde{V}_n = 1$

Frequency response of the disturbance transfer function T_d vs. normalized frequency $\Omega = \omega\tau_\sigma$ with $\tilde{V}_n = 1$

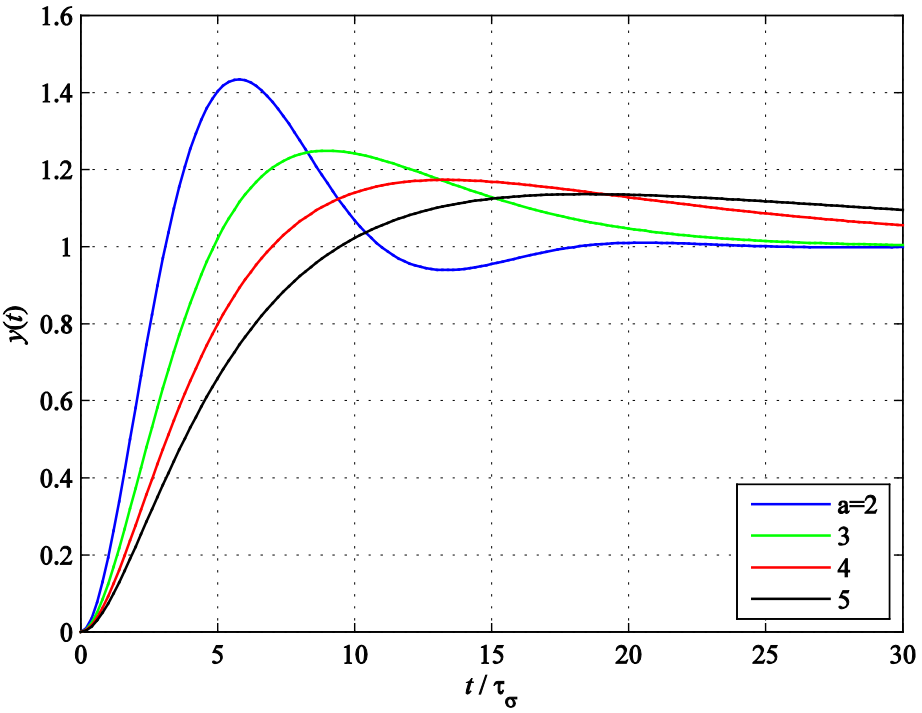


Fig. 9-12:
Antwort der Regelgröße $y(t)$ auf einen Führungssprung $w(t) = \sigma(t)$ (Folgeverhalten)

Response of the control variable $y(t)$ to a step-like change of the set point $w(t) = \sigma(t)$ (tracking behavior)

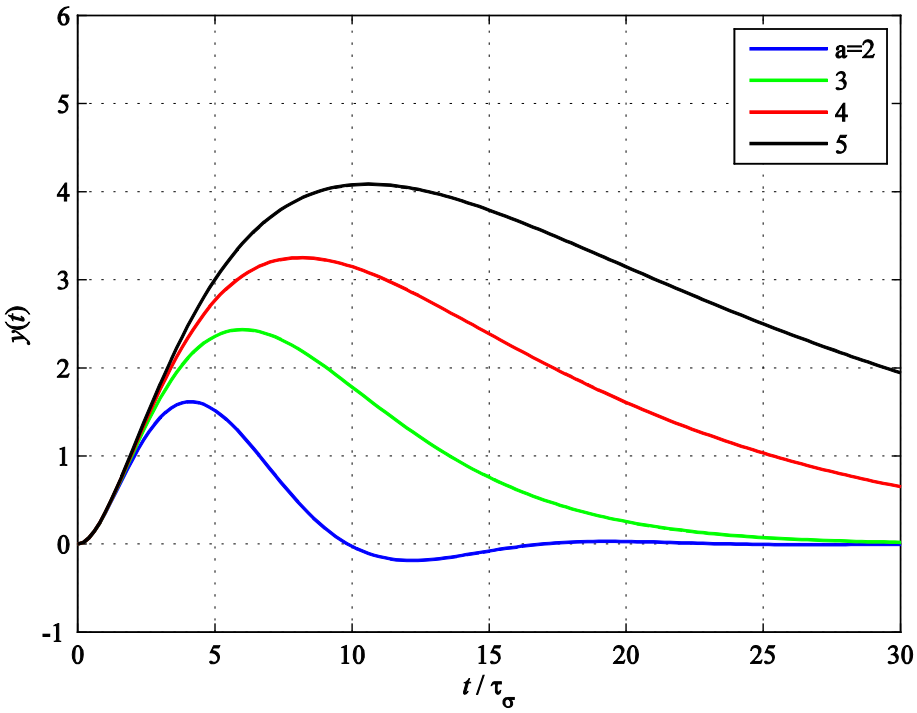


Fig. 9-13:
Antwort der Regelgröße $y(t)$ auf einen Störgrößensprung $d(t) = \sigma(t)$ mit $\tilde{V}_s = 1$

Response of the control variable $y(t)$ to a step-like change of the disturbance input $d(t) = \sigma(t)$ with $V_s = 1$

Eine beliebte Standardeinstellung des Symmetrischen Optimums ist $a = 2$. Damit wird eine Phasenreserve von 37° erreicht. Allerdings ist das Überschwingen bei Führungssprüngen von 43% unbefriedigend. Dieses Überschwingen ist im Wesentlichen der Nullstelle der Führungsübertragungsfunktion bei $s = 1/(a^2\tau_\sigma)$ geschuldet. Durch ein zusätzliches T_1-Führungsfilter (Fig. 9-14)

A popular standard design of the Symmetrical Optimum is $a = 2$. With that value, the phase margin results to 37°. In time domain, the resulting 43% overshoot of the reference step response is not satisfactory, however. The reason for this large overshoot is maily due to the zero of the reference transfer function at $s = 1/(a^2\tau_\sigma)$. With help of an additional T_1 prefilter (Fig. 9-14),

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + a^2\tau_\sigma s} = \frac{1}{1 + T_n s} \tag{9.38}$$

wird im Führungsverhalten die entsprechende Nullstelle gekürzt, wodurch sich das Überschwingen auf 8% reduziert, allerdings auch die Anregelzeit grob verdoppelt (siehe Fig. 9-15).

the transfer function zero is cancelled, reducing the step response overshoot to only 8%, but doubling the rise time in return (see Fig. 9-15).

Für $a = 3$ resultiert der Spezialfall eines reellen Dreifachpols der Führungs- und Störübertragungsfunktion bei $s = 1/(3\tau_\sigma)$. Mit Führungsfilter zeigt die Führungssprung-

The value $a = 3$ represents the special case of a triple pole of the reference and disturbance transfer functions at $s = 1/(3\tau_\sigma)$. With the prefilter applied, the step response does not show any overshoot in that case.

Antwort in diesem Fall keinerlei Überschwingen.

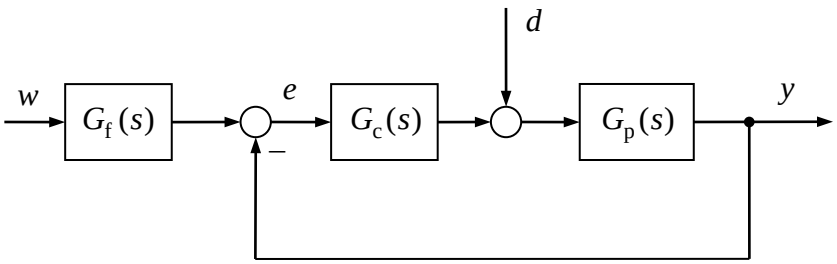


Fig. 9-14:
Regelkreis mit Führungsfilter

Control loop with pre-filter

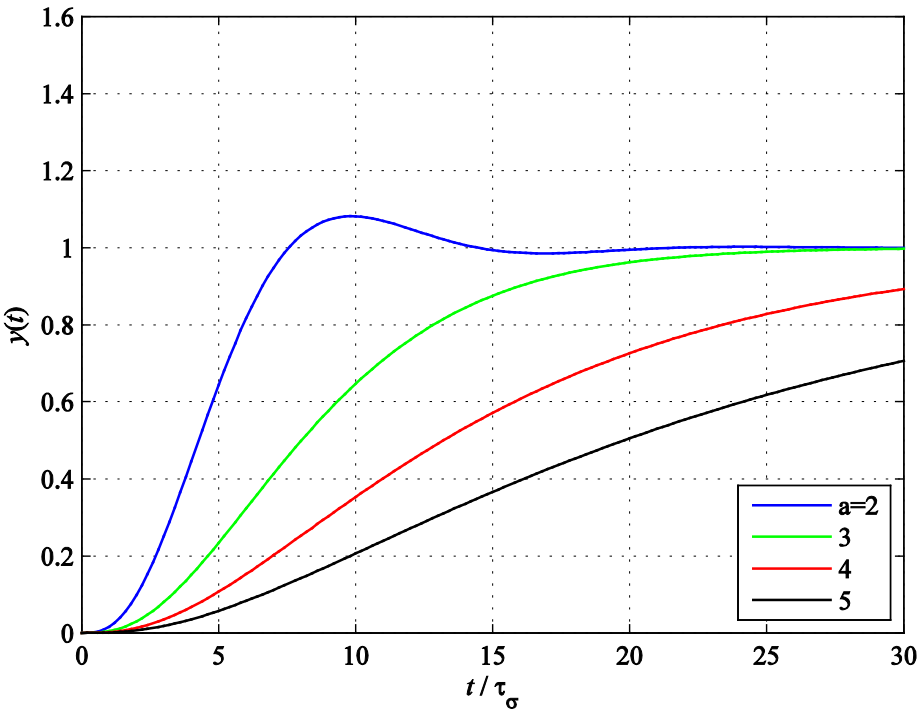


Fig. 9-15:
Antwort der Regelgröße $y(t)$ auf einen Führungssprung $w(t) = \sigma(t)$ mit zusätzlichem T_1-Führungsfilter (Folgeverhalten)

Response of the control variable $y(t)$ to a step-like change of the reference input $w(t) = \sigma(t)$ with additional T_1-prefilter (tracking behavior)

Das Symmetrische Optimum wurde hier nur für den Fall eines integrierenden Streckenanteils dargestellt, wobei dies, wie eingangs ausgeführt, als Näherung für eine Strecke mit zwei stark unterschiedlichen Zeitkonstanten

The Symmetrical Optimum was only introduced for the case of a plant with integrating behavior and one time constant. Nevertheless, this assumption can also be seen as a suitable approximation for a plant with two

$\tau_\sigma << \tau_s$ (wie beim Betragsoptimum vorausgesetzt) dienen kann. In der Literatur wird aber auch der Fall ohne eine solche Näherung behandelt.

distant time constants $\tau_\sigma << \tau_s$ (as assumed with the Magnitude Optimum). In literature, however, also the exact case without such an approximation is covered.

Das Störverhalten des Symmetrischen Optimums ist für große Verhältnisse von Streckenzeitkonstanten τ_s / τ_σ günstiger als beim Betragsoptimum, da die langsame Streckenzeitkonstante nicht durch die Reglernachstellzeit kompensiert, sondern eine kürzere Nachstellzeit eingestellt wird. Bezüglich des Führungsverhaltens schneidet das Betragsoptimum besser ab.

The disturbance suppression characteristics of the Symmetrical Optimum are superior compared with Magnitude Optimum in case of large ratios of the time constants τ_s / τ_σ. This is due to the fact that the large time constant is not being cancelled by the controller reset time, but a much shorter controller reset time is chosen, instead. As far as only tracking control performance is concerned, the Magnitude Optimum outperfoms the Symmetrical Optimum.