Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik
Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Laborpraktikum
Versuch RLC-Netzwerke und lineare Filter

Inhalt

1. Einleitung

Frequenzselektive Schaltungen sind in der Elektrotechnik weit verbreitet. Sie kommen z. B. in Oszillatorschaltungen zur Erzeugung von elektromagnetischen Schwingungen zum Einsatz oder werden verwendet, um aus einem Frequenzspektrum einzelne Frequenzen oder Frequenzbereiche auszublenden. Grundlage vieler dieser Schaltungen ist der Schwingkreis in seiner parallelen oder seriellen Form, der im Verlauf dieses Praktikumversuchs näher untersucht werden soll.

Ein spezielles Anwendungsgebiet von Schwingkreisen ist die Filterung der Schaltfrequenz in leistungselektronischen Schaltungen. Im Fachgebiet LEA wurde ein schaltender Audio-Verstärker aufgebaut, der sich im Gegensatz zu herkömmlichen Verstärkern durch sehr geringe Verluste auszeichnet. Herkömmliche Verstärker arbeiten im sogenannten Klasse A- oder Klasse A/B-Betrieb, was bedeutet, dass die zur Signalverstärkung eingesetzten Transistoren im aktiven Bereich betrieben werden, sich also wie ein veränderlicher Widerstand verhalten. Dies hat zur Folge, dass bei diesen Verstärkern mehr als die Hälfte der zugeführten Energie in Wärme umgewandelt wird. Dies ist jedoch vor allem in mobilen Anwendungen wie transportablen Radios oder Mobiltelefonen unerwünscht, da zum einen die Wärme über große und schwere Kühlkörper abgeführt werden muss und zum anderen die Betriebszeit mit einer Batterieladung verkürzt wird.

Einen besseren Wirkungsgrad haben digitale Verstärker, die in der sogenannten Klasse D betrieben werden. Hierbei werden die Transistoren nicht im aktiven Bereich angesteuert, sondern entweder vollständig eingeschaltet oder gesperrt. Sie verhalten sich somit ähnlich wie ein Schalter, der im leitenden Zustand nur einen geringen Durchlasswiderstand besitzt, im sperrenden Zustand jedoch einen sehr hohen Sperrwiderstand. Somit ist je nach Zustand die Spannung über oder der Strom durch den Schalter nahezu Null, so dass nach der Formel $P = U \cdot I$ nur geringe Verluste entstehen. Dieses Prinzip wird auch bei Schaltnetzteilen und allgemein in der Leistungselektronik angewendet.

Ein Problem dieser schaltenden Verstärker ist jedoch, dass das Ausgangssignal $u_V(t)$ nicht mehr sinusförmig ist, sondern aus einer modulierten rechteckförmigen Spannung besteht (Abb. 1). Diese verzerrt das Tonsignal und verursacht dadurch wiederum Verluste in den Zuleitungen der Lautsprecher und den Lautsprechern selbst. Um am Ausgang des Verstärkers wieder ein sinusförmiges Signal zu erhalten, können Schwingkreise als Filter eingesetzt werden.

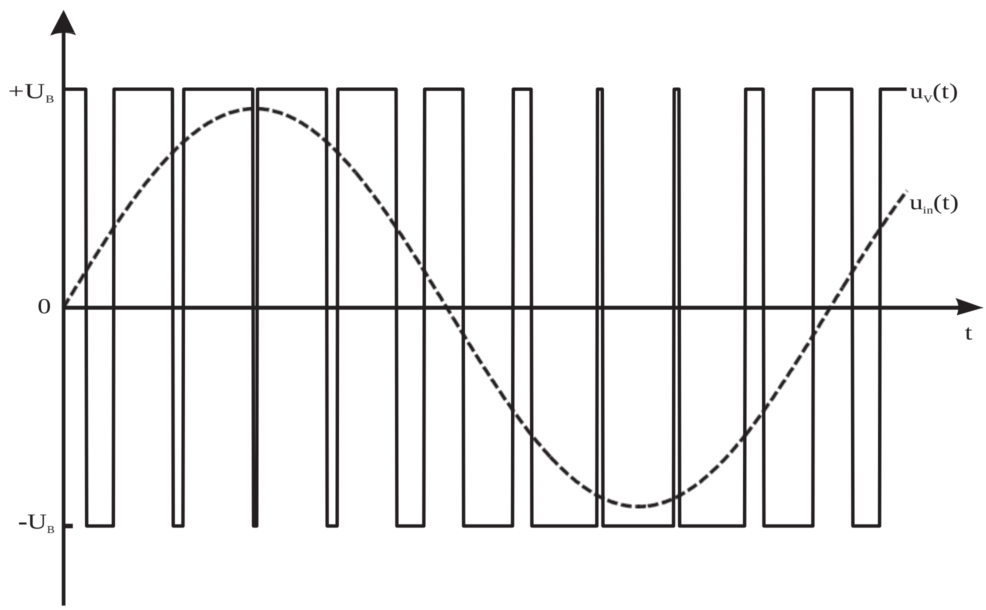


Abb. 1: Eingangsspannung $u_{in}(t)$ und Ausgangsspannung $u_v(t)$ des schaltenden Verstärkers

Ablauf des Praktikumsversuchs

In der letzten Aufgabe dieses Praktikumsversuchs wird die Wirkung von Schwingkreisen auf das Ausgangssignal des Audioverstärkers untersucht. Als Vorbereitung dazu sind im nächsten Kapitel die theoretischen Grundlagen zum Verständnis und zur Berechnung von Schwingkreisen zusammengefasst.

Die Teilnahme an diesem Versuche erfordert eine gründliche Vorbereitung. Dazu sind die Unterlagen durchzuarbeiten und die Vorbereitungsaufgaben von allen Teilnehmern zu lösen. Diese werden vor dem Versuch kontrolliert.

In einem Eingangskolloquium von ca 30-60 min wird vor der Versuchsdurchführung die Vorbereitung der Teilnehmer überprüft. Hier präsentieren und diskutieren Sie mit Ihren Kommilitonen die Grundlagen, wie z.B. wichtige Zusammenhänge, Grafiken und wichtige Formeln, die Sie in der Versuchsbeschreibung und den Aufgaben erlernt haben.

Teilnehmer, die ungenügend vorbereitet sind, dürfen nicht am Versuch teilnehmen und erhalten kein Testat.

Im praktischen Teil wird von Ihnen die Resonanzfrequenz für einen Serienschwingkreis über die Messung des Widerstandes bestimmt, die Stromresonanzkurve eines Parallelschwingkreises ermittelt und ein Abschaltversuch durchgeführt, um so verschiedene Parameter des Schwingkreises zu bestimmen. Abschließend werden dann geeignete Schwingkreise zur Filterung des Ausgangssignals des Verstärkers bestimmt, die Parameter berechnet und das Ergebnis mit dem Oszilloskop überprüft.

2. Grundlagen

2.1 Freie Schwingungen

2.1.1 Freier ungedämpfter Schwingkreis

Ein Schwingkreis entsteht durch die Zusammenschaltung eines kapazitiven und eines induktiven Energiespeichers, üblicherweise also eines Kondensators und einer Spule. Können dabei die Bauteile als verlustlos angesehen werden, so bilden sie ein ungedämpft schwingfähiges System.

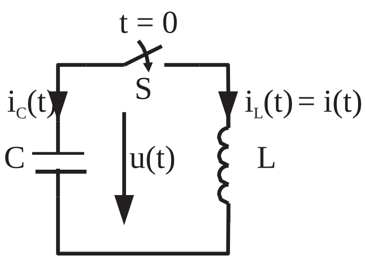


Abb. 2: Freier ungedämpfter Schwingkreis

Abbildung 2 zeigt einen solchen freien, ungedämpften Schwingkries. Zu Beginn sei der Kondensator C auf die Spannung $u(t = 0) = U_{C0}$ aufgeladen, die Spule L sei stromlos. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s werde der Schalter S geschlossen.

Da nun auch über der Spule die Spannung $u_L(t) = u_C(t) = u(t)$ anliegt, baut sich nach der Gleichung

$$i(t) = i_L(t) = -i_C(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

ein Strom $i = i_L = -i_C$ durch die Spule und den Kondensator auf. Gleichzeitig sinkt die Spannung über Kondensator und Spule:

$$u(t) = u_C(t) = u_L(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\mathrm{d}t + u(0) = -\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t + U_{C0} \tag{2}$$

Die zuvor im elektrischen Feld des Kondensators gespeicherte elektrische Energie wandelt sich nun mit steigendem Strom zunehmend in magnetische Energie der Spule, also in ein Magnetfeld um. Während zur Zeit $t = 0$ sämtliche Energie im Kondensator gespeichert war, ist sie zum Zeitpunkt $t = t_1$, wenn die Spannung u über Kondensator und Spule den Wert 0 erreicht, komplett im Magnetfeld der Spule gespeichert.

Da die Spule ihren Strom aufrecht erhalten will (eine Induktivität wirkt einer Stromänderung entgegen), wird die Spannung u nach Erreichen des Strommaximums entsprechend $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ negativ. Der Strom i wird nun nach Formel (1) wieder abgebaut, bis er den Wert $i = 0$ A erreicht und die Energie wieder vollständig im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert ist. Dessen Spannung u_C besitzt dann die gleiche Amplitude wie zum Zeitpunkt $t = 0$, jedoch umgekehrtes Vorzeichen. Der gesamte Umladungsvorgang wiederholt sich nun periodisch. Die Amplituden von Strom i und Spannung u bleiben beim ungedämpften Schwingkreis konstant.

Die Schwingungsgleichung lässt sich durch Aufstellen und Lösen der zugehörigen Differentialgleichungen ermitteln. Dazu wird z. B. Gleichung (1) einmal und Gleichung (2) zweimal differenziert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{Gl.}1) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}u(t) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\text{Gl. }2) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (3) in (4) und Umformung ergibt sich nun die **Differentialgleichung** für die Schwingung:

$$\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u(t) = 0 \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist eine Gleichung der Form

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{6}$$

mit der **Kennkreisfrequenz**

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{7}$$

Über einen Koeffzientenvergleich und das Einsetzen von Anfangsbedingungen können nun die Konstanten A und B bestimmt werden:

Vor dem Schließen des Schalters S war der Kondensator auf die Spannung $u(t = 0^-) = U_{C0}$ aufgeladen. Da sich die Kondensatorspannung nicht sprungartig ändern kann, sondern einen stetigen

Verlauf besitzt, gilt für den Zeitpunkt direkt nach dem Schalten:

$$u(t=0^+) = u(t=0^-) = U_{C0}\,. \tag{8}$$

Setzt man dies in Gleichung (6) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t=0^+) = A\cos(0) + B\sin(0) &= U_{C0} \\ \Leftrightarrow A + 0 &= U_{C0} \\ \Leftrightarrow A &= U_{C0} \end{aligned}\quad . \tag{9}$$

Über die Konstante B kann noch keine Aussage getroffen werden. Hierfür muss die erste zeitliche Ableitung von Gleichung (6) betrachtet werden:

$$\dot{u}(t) = -U_{C0}\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \tag{10}$$

Als Anfangsbedingung wird nun die Spannungsänderung $\dot{u}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0^+$ benötigt. Diese erhält man aus der Bauteilgleichung für den Kondensator:

$$\dot{u}_C(t) = \frac{1}{C}i_C\,. \tag{11}$$

Da zwischen dem Kondensatorstrom i_C und dem Induktivitätsstrom $i_L = i$ der Zusammenhang $i_C = -i_L = -i$ besteht und der Strom durch die Induktivität nicht springen kann, ergibt sich aus

$$i_C(t=0^+) = -i_L(t=0^+) = -i_L(t=0^-) = 0 \tag{12}$$

mit Gleichung (11):

$$\dot{u}_C(t=0^+) = \frac{1}{C}i_C(t=0^+) = 0\,. \tag{13}$$

Setzt man dies in Gleichung (10) ein, so erhält man für die Konstante B:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t=0^+) = -U_{C0}\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 + B\omega_0\cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow B &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Somit ergibt sich die **Schwingungsgleichung für die Spannung *u*(*t*)** zu

$$u(t) = U_{C0}\cos(\omega_0 t) \tag{15}$$

Äquivalent ergibt sich durch einmaliges Differenzieren der Gleichung (2) und zweimaliges Differenzieren der Gleichung (1) die **Schwingungsgleichung für *i*(*t*)**:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0 \tag{16}$$

mit der Lösung

$$i(t) = U_{C0}\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega_0 t) = \frac{U_{C0}}{Z_0}\sin(\omega_0 t) \ . \tag{17}$$

Der Faktor

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{18}$$

wird als **Kennwiderstand** des Schwingkreises bezeichnet.

Für den Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ ergeben sich somit die folgenden Verläufe:

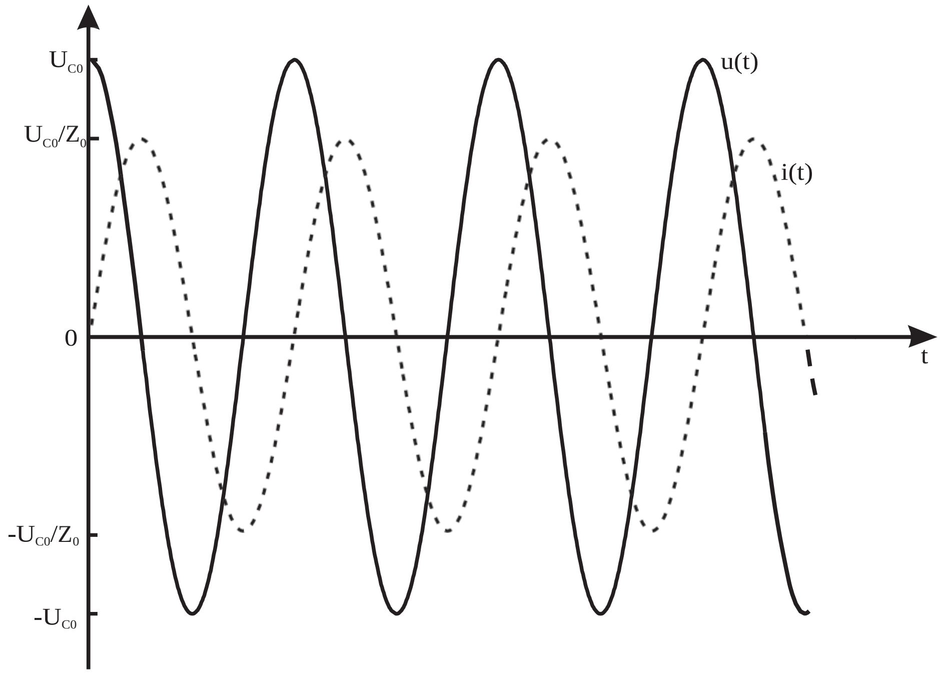


Abb. 3: Freie ungedämpfte Schwingung

2.1.2 Freier gedämpfter Schwingkreis

Betrachtet man im Gegensatz zu Abschnitt 2.1.1 reale Bauelemente, so muss z.B. der ohmsche Widerstand der Spulenwicklung mit betrachtet werden, an dem Verluste entstehen. Diese verursachen eine Dämpfung des Schwingkreises, also eine kontinuierliche Reduktion der Schwingungsamplitude, da dem System ständig Energie in Form von Wärme entzogen wird.

Im Ersatzschaltbild können die ohmschen Verluste durch einen Ersatzwiderstand modelliert werden, der in Reihe oder parallel zur idealen Induktivität und Kapazität geschaltet wird:

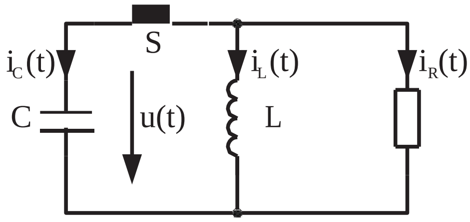


Abb. 4: Freier gedämpfter Schwingkreis

Für die Ersatzschaltung in Abb. 4 gilt:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}^2t} \tag{19}$$

$$u_L(t) = u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}u(t) \tag{20}$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i_R(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

Da die Summe der Ströme nach der Kirchhoffschen Knotenregel Null beträgt und damit auch

$$\frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_R(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{22}$$

gilt, ergibt sich nun mit den Gleichungen (19), (20) und (21) die **Differentialgleichung des verlustbehafteten Schwingkreises**:

$$\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}^2t} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u(t) = 0 \tag{23}$$

Diese besitzt für den Schwingungsfall die allgemeinen Lösungen

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega_d t + \phi_U)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{24}$$

und

$$i_L(t) = \hat{I}\sin(\omega_d t + \phi_I)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{25}$$

mit der **Zeitkonstante**

$$\tau = 2RC \tag{26}$$

und der **Eigenkreisfrequenz des verlustbehafteten Schwingkreises**

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0 \tau)^2}}\,. \tag{27}$$

Die Konstanten $\hat{U}$ und ϕ_U bestimmen sich wiederum aus den Anfangsbedingungen.

Auch beim gedämpften Schwingkreis stellt sich also eine sinusförmige Schwingung ein, allerdings klingt ihre Amplitude mit der Zeitkonstante τ ab. Außerdem ist ihre Eigenkreisfrequenz ω_d kleiner als die Kennkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Schwingkreises.

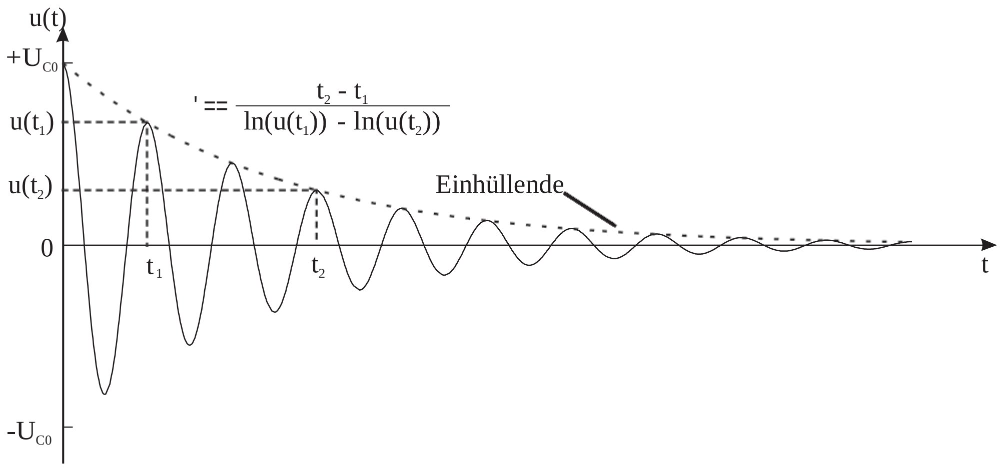


Abb. 5: Spannungsverlauf einer freien gedämpften Schwingung

2.2 Erzwungene Schwingungen

Regt man einen Schwingkreis mit sinusförmigen Strömen oder Spannungen an, so stellen sich erzwungene Schwingungen ein, da die Ströme und Spannungen des Schwingkreises der anregenden Signalquelle folgen müssen.

Der Schwingkreis stellt nun aus Sicht der Quelle einen Zweipol dar, dessen Widerstand einen ausgeprägten Frequenzgang aufweist. Dieser lässt sich über die komplexe Wechselstromrechnung bestimmen.

2.2.1 Der Reihenschwingkreis

Der verlustbehaftete Reihenschwingkreis kann durch folgendes Ersatzschaltbild nachgebildet werden:

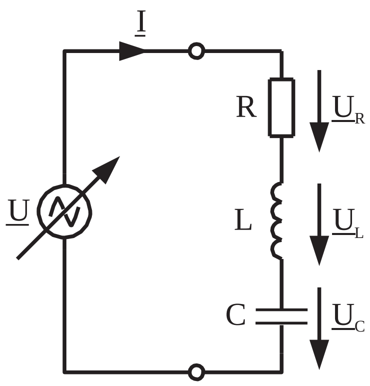


Abb. 6: Verlustbehafteter Reihenschwingkreis

Der Widerstand R fasst dabei die Verluste der Spule L und des Kondensators C zusammen.

Der komplexe Widerstand $\underline{Z}$ des Serienschwingkreises berechnet sich dann mittels der komplexen Wechselstromrechnung zu

$$\underline{Z}(\mathrm{j}\omega) = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}, \tag{28}$$

sein Betrag zu

$$|\underline{Z}(\omega)| = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{29}$$

und seine Phasenlage zu

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right). \tag{30}$$

Wird der Schwingkreis aus einer starren Quelle (U = konst.) mit sinusförmiger Spannung, aber variabler Kreisfreqenz ω gespeist, so ergibt sich für den Betrag des Stromes $\underline{I}$:

$$|\underline{I}(\omega)| = I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}. \tag{31}$$

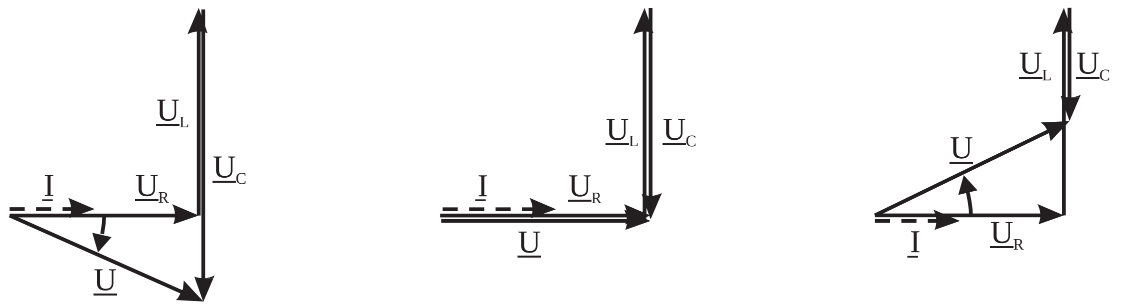
Legt man nun den Strom in die reelle Achse ($\underline{I}(\omega) = I(\omega)$), so fallen über den Komponenten R, L und C die Spannungen

$$\underline{U}_R(j\omega) = RI(\omega) = \frac{R}{Z(\omega)}U \tag{32}$$

$$\underline{U}_L(j\omega) = j\omega L \cdot I(\omega) = \frac{j\omega L}{Z(\omega)} \cdot U \tag{33}$$

$$\underline{U}_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I(\omega) = -j\frac{1}{\omega C Z(\omega)} \cdot U \tag{34}$$

ab. Damit lassen sich die **Zeigerdiagramme** der Spannungen im Schwingkreis zeichnen:



a) $U_L < U_C$ b) $U_L = U_C$ c) $U_L > U_C$

Abb. 7: Zeigerdiagramme des Reihenschwingkreises

Trägt man den Betrag und die Phasenlage des Stromes durch den Schwingkreis (Gleichung (30) und (31)) über der Kreisfrequenz der Spannungsquelle auf, so erhält man die **Resonanzkurve** in Abb. 8. Sie besitzt ein Maximum bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, also bei der Kennfrequenz des ungedämpften Schwingkreises.

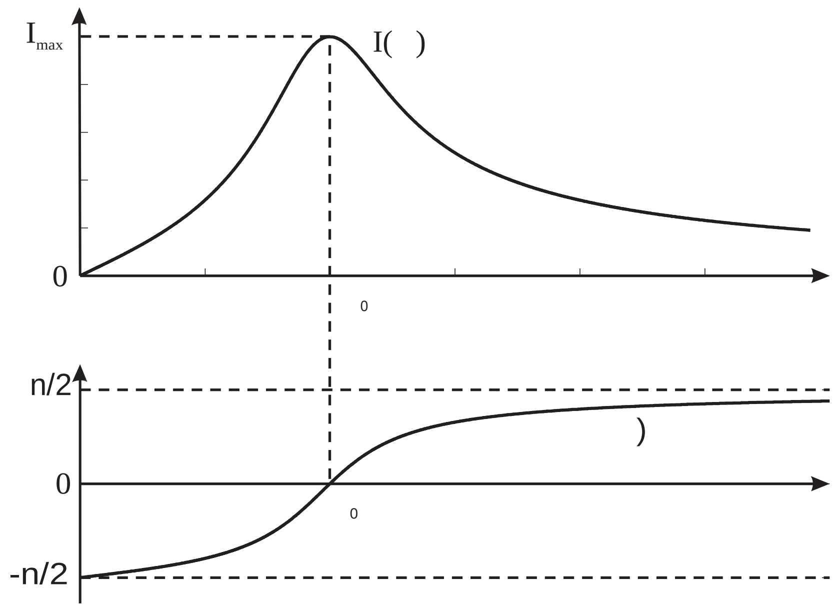


Abb. 8: Resonanzkurve des Stromes im Reihenschwingkreis

Bei dieser **Resonanzfrequenz** wird der Strom durch den Schwingkreis maximal, weil die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ minimal wird. Somit wird auch die Spannung $\underline{U}_R$ über dem Widerstand maximal. Die Spannungen über der Spule und über dem Kondensator besitzen die gleiche Amplitude, sind jedoch um 180° phasenverschoben, so dass sie sich gegenseitig aufheben (siehe Abb. 7b). Der Phasenwinkel zwischen Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$ beträgt 0°, d. h. die Schaltung verhält sich rein resistiv.

Bei **kleineren Frequenzen** $\omega < \omega_0$ dominiert der Kondensator den Gesamtwiderstand, der Phasenwinkel ϕ ist kleiner als 0. Der Schwingkreis hat also kapazitiven Charakter (Abb. 7a). Die Spannung über dem Kondensator erreicht bei der Frequenz

$$\omega_C = \omega_0\sqrt{1-2d^2} \tag{35}$$

ihr Maximum, wobei

$$d = \frac{R}{2Z_0} \tag{36}$$

als **Dämpfungsgrad** bezeichnet wird.

Bei **höheren Frequenzen** $\omega > \omega_0$ beeinflusst überwiegend die Induktivität L das Verhalten des Schwingkreises. Der Phasenwinkel ϕ ist größer als 0, der Schwingkreis verhält sich induktiv (Abb. 7c).

Die Spannung über der Induktivität wird für

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2d^2}} \tag{37}$$

maximal.

Das geometrische Mittel der Frequenzen ω_C und ω_L ergibt wieder die Kennfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_C \cdot \omega_L} \tag{38}$$

Die Maximalwerte der Spannungen U_C und U_L sind betraglich gleich groß und können bei geringem Dämpfungsgrad d die Spannung der Quelle deutlich übersteigen.

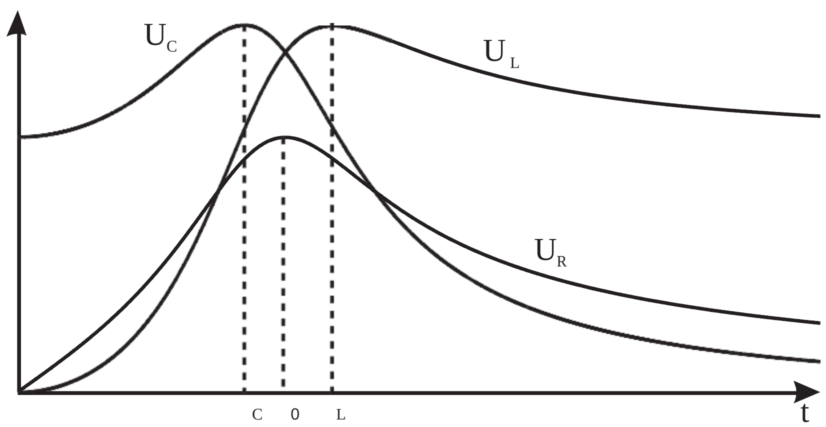


Abb. 9: Verlauf der Spannungen im Reihenschwingkreis, Gipfelfrequenzen ω_C, ω_L

Eine weitere wichtige Kenngröße des Schwingkreises ist die **Güte** oder auch **Resonanzschärfe Q_s**[1]. Sie ist ein Maß für das Selektionsverhalten des Schwingkreises, also die Fähigkeit, Frequenzen aus einem Spektrum herauszufiltern. Sie ist definiert als

$$Q_s = \frac{1}{2d} = \frac{Z_0}{R}. \tag{39}$$

Sie lässt sich aus der Resonanzkurve des Stroms I ableiten. Zuerst werden die beiden **Grenzfrequenzen** ω_1 und ω_2 bestimmt, für die der Betrag der Impedanz $\underline{Z}$ auf das $\sqrt{2}$-fache angestiegen ist und sich die vom Schwingkreis aufgenommene Leistung halbiert hat. Diese berechnen sich aus

$$Z(\omega) = \sqrt{2} \cdot R \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow R = \left| \omega_{1,2} L - \frac{1}{\omega_{1,2} C} \right| \tag{41}$$

zu

$$\omega_{1,2} = \left| \omega_0 \left(d \pm \sqrt{1 + d^2} \right) \right|. \tag{42}$$

Die Differenz der beiden Frequenzen

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\omega_0 d \tag{43}$$

wird als **Bandbreite** des Schwingkreises bezeichnet (Abb. 10).

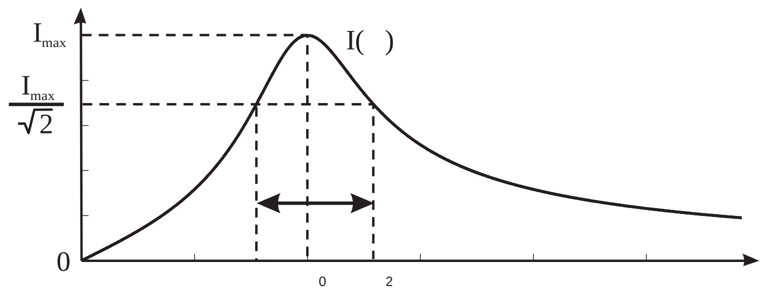


Abb. 10: Grenzfrequenzen ω_1, ω_2 und Bandbreite $\Delta\omega$

Aus ihr berechnet sich die Güte Q_s zu[2]

$$Q_s = \frac{1}{2d} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \tag{44}$$

Je größer die Güte Q_s, desto kleiner ist die Halbwertsbreite des Schwingkreises, d. h. umso

1. Das Symbol Q hat in der Elektrotechnik verschiedene Bedeutungen, z. B. Güte, Ladung oder Blindleistung. Da diese Größen in der Regel nicht zusammen, z. B in einer Gleichung, benutzt werden, besteht jedoch kaum die Gefahr einer Verwechslung.
2. Eine weitere Interpretation der Güte Q_s ergibt sich aus der Formel $Q_s = 2\pi[(w_L + w_C)/w_V]$, wobei w_L und w_C die inneren Energien von Kapazität C und Induktivität L sowie w_V die Verlustenergie pro Schwingung bezeichnen.

schmaler ist die Impedanzresonanzkurve.

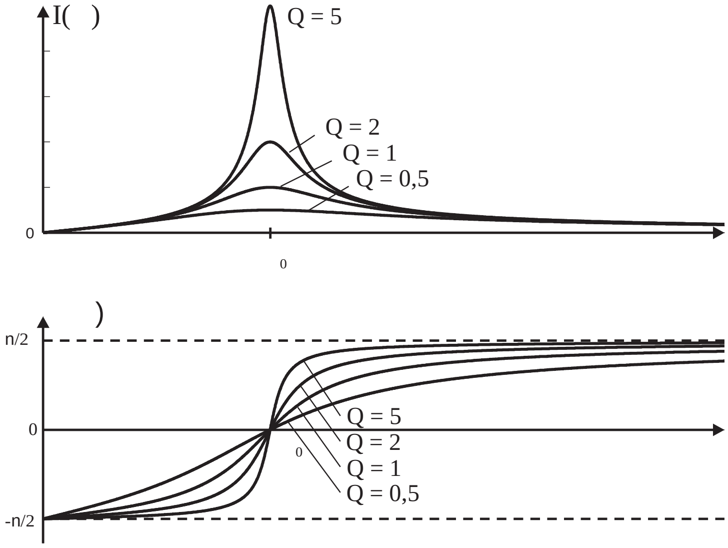


Abb. 12: Verlauf der Resonanzkurve bei verschiedenen Werten der Güte Q_s

Weiterhin gibt die Güte Q_s die **Spannungserhöhung** an der Induktivität und am Kondensator im Resonanzfall an:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = Q_s\,. \tag{45}$$

Diese Spannungserhöhung muss beim Entwurf der Spule und des Kondensators hinsichtlich der Isolationsfestigkeit beachtet werden.

2.2.2 Der Parallelschwingkreis

Der verlustbehaftete Parallelschwingkreis kann durch folgendes **Ersatzschaltbild** modelliert werden:

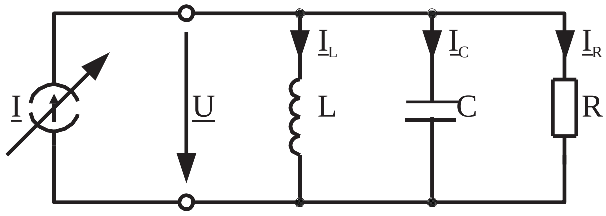


Abb. 13: Verlustbehafteter Parallelschwingkreis

Der Parallelwiderstand R fasst dabei sämtliche Verluste der Speicherbauelemente zusammen.

Speist man den Parallelschwingkreis mit einem sinusförmigen Strom I, so ergeben sich analog zum Reihenschwingkreis folgende Beziehungen:

$$\underline{Y}(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R} \tag{46}$$

$$Y(\omega) = |\underline{Y}(\mathrm{j}\omega)| = \sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + \frac{1}{R^2}} \tag{47}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) \tag{48}$$

Für den Betrag der über dem Parallelschwingkreis abfallenden Spannung U gilt:

$$U(\omega) = \frac{I}{Y(\omega)}. \tag{49}$$

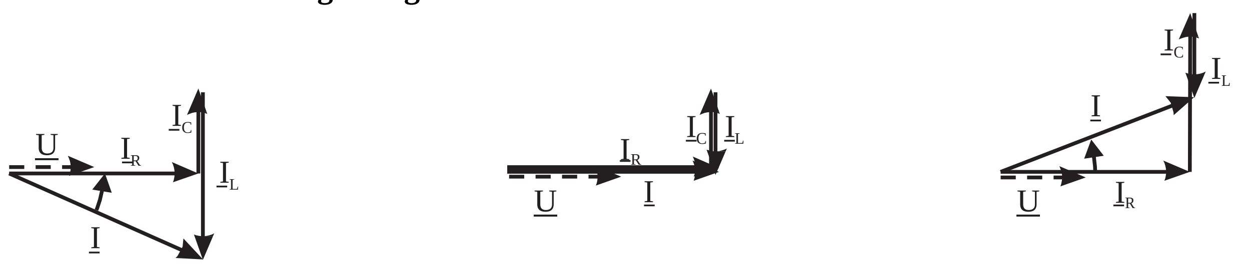
Legt man diese Spannung $U(\omega)$ in die reelle Achse, so gilt für die **Ströme durch die Zweige des Parallelschwingkreises**:

$$\underline{I}_{\mathrm{L}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} U(\omega) = \frac{-\mathrm{j}}{\omega L Y(\omega)} \cdot I \tag{50}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{C}}(\omega) = \mathrm{j}\omega C \cdot U(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega C}{Y(\omega)} \cdot I \tag{51}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{R}}(\omega) = \frac{1}{R} \cdot U(\omega) = \frac{1}{R Y(\omega)} \cdot I \tag{52}$$

Damit lassen sich die **Zeigerdiagramme** der Ströme zeichnen:



$\omega < \omega_0$ $\omega = \omega_0$ $\omega > \omega_0$

Abb. 14: Zeigerdiagramme des Parallelschwingkreises

Die **Resonanzkurve** des Parallelschwingkreises wird von Ihnen während des Praktikumversuchs bestimmt.

Die **Resonanzkreisfrequenz** ergibt sich wie beim Serienschwingkreis zu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{53}$$

Im **Resonanzfall** wird die Spannung über dem Parallelschwingkreis maximal, d. h. seine Admittanz Y wird minimal. Die Ströme $\underline{I}_{\mathrm{L}}$ und $\underline{I}_{\mathrm{C}}$ sind gleich groß, aber um 180° phasenverschoben. Der gesamte Quellenstrom $\underline{I}$ fließt also über den Widerstand R, während sich durch die Induktivität L und den Kondensator C ein Kreisstrom ausbildet. Das Verhalten der Ströme im Parallelschwingkreis korrespondiert also mit dem Verhalten der Spannungen im Reihenschwingkreis.

I_{L} und I_{C} können deutlich größer sein als der Quellenstrom I. Ihr Maximum wird bei den Kreisfrequenzen

$$\omega_{\mathrm{C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2d^2}} \tag{54}$$

und

$$\omega_L = \omega_0\sqrt{1-2d^2} \tag{55}$$

erreicht. Dabei ist

$$d = \frac{1}{2Y_0R} = \frac{Z_0}{2R} \tag{56}$$

der **Dämpfungsgrad** und

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \sqrt{\frac{C}{L}} \tag{57}$$

die **Kennadmittanz** des Parallelschwingkreises.

Analog zum Reihenschwingkreis ergibt sich die **Güte** Q_s zu

$$Q_s = \frac{1}{2d} = Y_0R\,. \tag{58}$$

Die **Grenzfrequenzen** ω_1 und ω_2, bei denen die Admittanz auf den $\sqrt{2}$-fachen Wert der Resonanzadmittanz angestiegen ist, ergeben sich analog zum Reihenschwingkreis zu

$$\omega_{1,2} = \left|\omega_0(d \pm \sqrt{1+d^2})\right|. \tag{59}$$

3. Aufgaben zur Versuchsvorbereitung

Im Kolloquium, das zu Beginn des Versuchs durchgeführt wird, werden allgemeine Fragestellungen zum Thema RLC-Netzwerke und lineare Filter diskutiert. Dabei geht es nicht darum, sämtliche Formeln auswendig zu lernen. Vielmehr ist es wichtig, dass die allgemeinen Zusammenhänge und Ansätze verstanden wurden. Denkbar sind zum Beispiel das Zeichnen und Erklären der behandelten Ersatzschaltbilder, das Aufstellen einfacher DGLs für die freien Schwingkreise, das Erarbeiten deren Lösung und das Skizzieren von Zeigerdiagrammen und Spannungs- bzw. Stromverläufen. Auch die Definition von Kennkreisfrequenz, Kennwiderstand, Bandbreite, Dämpfung und Güte sollte bekannt sein. Des weiteren ist es sinnvoll, die Versuchsbeschreibung durchzuarbeiten und Teilaufgaben schon im Voraus zu lösen oder Formeln herauszusuchen.

Im Folgenden sind zur Vorbereitung Aufgaben gestellt, welche schriftlich zu bearbeiten und im Kolloquium von jedem Studierenden vorzulegen sind:

1. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild eines freien, ungedämpften Schwingkreises.
2. Leiten Sie die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ her und ermitteln Sie die Lösung aus den Anfangsbedingungen.
3. Zeichnen Sie einen verlustbehafteten Reihenschwingkreis, der von einer Wechselspannungsquelle angeregt wird.
4. Welche Besonderheiten ergeben sich bei Resonanz? Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Spannungen über den Bauelementen.
5. Wie ändert sich der Strom durch den Schwingkreis, wenn die Frequenz variiert wird? Zeichnen Sie die Resonanzkurve des Stroms und kennzeichnen Sie die Resonanzfrequenz sowie den kapazitiven und induktiven Bereich.

Es werde nun ein fremderregter, gedämpfter Parallelschwingkreis betrachtet.
Es gelte: L = 10 mH, C = 100 nF, R = 1 kΩ.

6. Geben Sie die Formeln für die Resonanzkreisfrequenz ω_0 und die Kennadmittanz Y_0 an und bestimmen Sie die Zahlenwerte.
7. Wie berechnen sich die Dämpfung d und die Güte Q? Welche Werte ergeben sich?
8. Wie lauten die Formeln für die Kreisfrequenzen ω_L und ω_C sowie die Grenzfrequenzen ω_1 und ω_2? Bestimmen sie die Zahlenwerte.

4. Praktikumsdurchführung

Die Durchführung des Praktikums erfolgt im ersten Teil an einem Experimentier-Steckbrett, auf dem die verschiedenen Elemente des Schwingkreises platziert werden. Die Eingangsspannung wird durch einen Signalgenerator zur Verfügung gestellt. An diesem können die Frequenz, die Signalform (Dreieck, Rechteck, Sinus) und die Amplitude des Signals eingestellt werden. Die Ausgangsspannung wird am Koaxialausgang mit der Bezeichnung „50Ω“ abgegriffen. Bitte beachten Sie, dass der Signalgenerator keine ideale Spannungsquelle darstellt, sondern einen Innenwiderstand von 50Ω besitzt.

Die Messungen werden mit Digitalmultimetern und mit einem Mehrkanaloszilloskop durchgeführt. Die Messwerte werden während des Versuchs direkt in einen Rechner eingegeben und durch ein Tabellenkalkulationsprogramm ausgewertet.

In der letzten Aufgabe wird die Filterwirkung der Schwingkreise anhand des schaltenden Verstärkers untersucht. Dieser ist auf einer Platine aufgebaut, entsprechende Abgriffe zur Messung mit dem Oszilloskop sind vorhanden.

Berücksichtigen Sie bitte, dass die **Masseanschlüsse aller Anschlüsse des Oszilloskops auf einem Potential** liegen müssen. Es ist daher ratsam, nur eine Massebuchse des Oszilloskops mit der Schaltung zu verbinden, um Kurzschlüsse zu vermeiden. Bezogen auf dieses Massepotential können dann mehrere Kanäle gemessen werden.

4.1 Ungedämpfter Reihenschwingkreis: Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Resonanzimpedanz

Bauen Sie auf dem Steckbrett einen **Reihenschwingkreis** aus einer **Spule** (1000 Windungen) und einer **Kapazität** (C = 1 µF) auf. Schließen Sie den Signalgenerator an den Schwingkreis an (Signalform Sinus, maximale Amplitude). Skizzieren Sie die aufzubauende Schaltung:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Signalgenerators die Induktivität L der Spule. Welche Größe sollte dazu gemessen werden? Bedenken Sie, dass der Signalgenerator keine ideale Quelle darstellt, sondern einen nicht zu vernachlässigenden Innenwiderstand besitzt. Zeichnen Sie die Messgeräte in die obige Zeichnung ein.

L = $\boxed{}$

Berechnen Sie die zu erwartende Kennfrequenz f_0 für das als ungedämpft anzunehmende System. Welche Impedanz erwarten Sie?

$f_{0,\text{ theoretisch}} =$	
$Z(f_0)_{\text{theoretisch}} =$	

Bestimmen Sie experimentell die Resonanzfrequenz f_0, indem Sie den Schwingkreis mit verschiedenen Frequenzen um den erwarteten Resonanzpunkt herum anregen und geeignete Größen messen. Welche Impedanz Z hat die Schaltung bei Resonanz?

$f_0 =$	
$Z(f_0) =$	

Stimmen die theoretischen und die realen Werte überein? Falls nicht, wie erklären Sie sich den Unterschied? Weisen Sie ihre Annahme nach!

4.2 Gedämpfter Parallelschwingkreis: Bestimmung der Resonanzkurve und der Parameter

Bauen Sie einen **Parallelschwingkreis** aus den Bauteilen **Spule** (1000 Windungen), **Kondensator** (C = 1 µF) und **Widerstand** (R = 200 Ω) auf. Skizzieren Sie die Schaltung:

Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0, die Kreisfrequenzen ω_L, ω_C des Strommaximums an Induktivität und Kondensator sowie die Grenzfrequenzen ω_1, ω_2. Wie groß ist der Dämpfungsgrad d und die Güte Q?

$\omega_{0,\text{ theoretisch}} =$		$\Rightarrow f_{0,\text{ theoretisch}} =$	
$\omega_{L,\text{ theoretisch}} =$		$\Rightarrow f_{L,\text{ theoretisch}} =$	
$\omega_{C,\text{ theoretisch}} =$		$\Rightarrow f_{C,\text{ theoretisch}} =$	
$\omega_{1,\text{ theoretisch}} =$		$\Rightarrow f_{1,\text{ theoretisch}} =$	
$\omega_{2,\text{ theoretisch}} =$		$\Rightarrow f_{2,\text{ theoretisch}} =$	

$d =$	
$Q =$	

Überprüfen Sie nun die berechneten Werte experimentell. Erregen Sie den Schwingkreis bei maximaler Amplitude des Signalgenerators mit verschiedenen Frequenzen (mit dem Oszilloskop kontrollieren!) und messen Sie die Ströme I_C, I_L und I_R durch die einzelnen Zweige sowie den Gesamtstrom I. Geben Sie die Messwerte in eine Excel-Tabelle ein und bestimmen Sie damit die Kurven der bezogenen Ströme I_C/I, I_L/I sowie I_R/I. Letztere ist proportional zur Spannung über dem Schwingkreis.

Lesen Sie die Resonanzkreisfrequenz f_0 und die Kreisfrequenzen f_L, f_C ab. Bestimmen Sie die Grenzfrequenzen f_1, f_2 sowie den Dämpfungsgrad d und die Güte Q zeichnerisch.

$f_0 =$	
$f_L =$	
$f_C =$	
$f_1 =$	
$f_2 =$	
$d =$	
$Q =$	

Betrachten Sie den Effektivwert des Gesamtstroms und die Effektivwerte der Ströme durch die Zweige bei Resonanz. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm. Was fällt auf?

4.3 Gedämpfter Parallelschwingkreis: Abklingvorgang

Entfernen Sie aus dem Parallelschwingkreis aus der 2. Aufgabe den **200 Ω-Widerstand** und benutzen Sie einen **Vorwiderstand** R_V = 510 Ω **in Reihe** zum Schwingkreis. Regen Sie nun die

Schaltung mit einer Rechteckfrequenz an, deren Frequenz deutlich geringer als die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ist.

Oszilloskopieren Sie die Spannung über dem Schwingkreis. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_0 und die Abklingzeitkonstante τ aus dem Spannungsverlauf.

$f_0 =$	
$\tau =$	

4.4 Schwingkreise als Filter: Anwendung am schaltender Verstärker zur Unterdrückung der Schaltfrequenz

Am Beispiel des schaltenden Verstärkers soll der Einsatz der Schwingkreise zur Filterung bestimmter Frequenzen demonstriert werden. Der schaltende Verstärker hat das Ersatzschaltbild in Abb. 15.

Ein Eingangssignal $u_{\mathrm{in}}(t)$ wird auf den Verstärker gegeben. Eine Steuerung generiert aus diesem Signal die Schaltsignale für die Leistungstransistoren T_1 und T_2 der Halbbrücke. Über diese wird mit einer Schaltfrequenz von $f_{\mathrm{S}} = 200$ kHz entweder die Spannung $+U_{\mathrm{B}}$ oder $-U_{\mathrm{B}}$ auf den Ausgang des Verstärkers geschaltet ($u_{\mathrm{V}}(t)$, siehe Abb. 1, Kapitel 1). Der Verlauf des Kurzzeitmittelwerts der Spannung über eine Schaltperiode entspricht dabei dem verstärkten Eingangssignal $u_{\mathrm{in}}(t)$. Ein *LC*-Glied glättet die Ausgangsspannung $u_{\mathrm{V}}(t)$, so dass diese nach dem Filter aus einer Überlagerung des verstärkten Signals und einer Sinusschwingung mit Schaltfrequenz entspricht. Dieses Signal $u_{\mathrm{TP}}(t)$ soll nun durch einen Parallel- und einen Serienschwingkreis so gefiltert werden, dass die hochfrequente Sinusschwingung optimal unterdrückt wird, das verstärkte Nutzsignal jedoch nicht beeinträchtigt wird.

Zeichnen Sie in die nachstehende Abbildung die entsprechenden Schwingkreise ein. Wie ist die Kennkreisfrequenz ω_0 zu wählen?

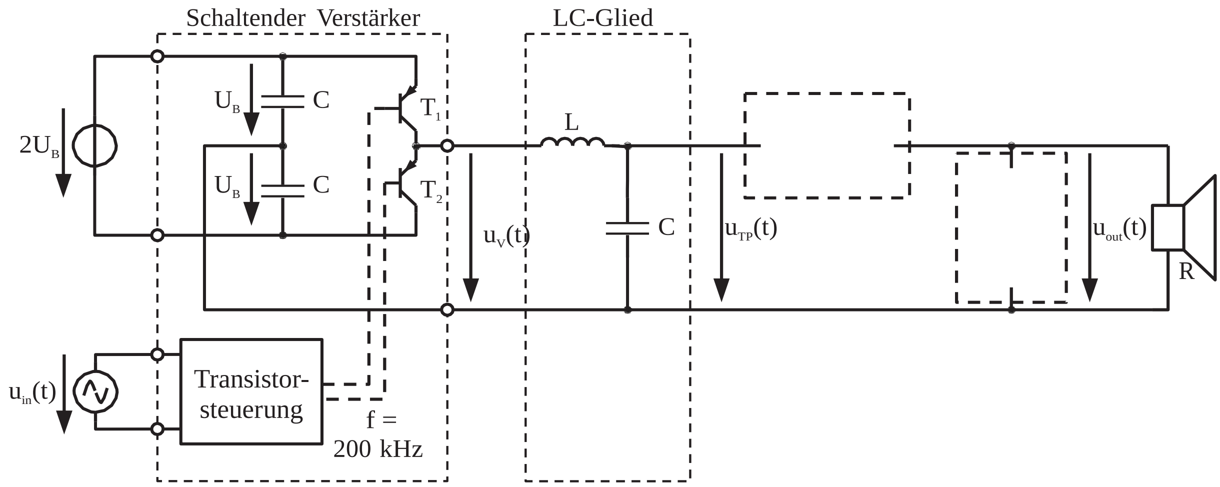


Abb. 15: Ersatzschaltbild des Verstärkers

$\omega_0 =$	

Geben Sie ein Nutzsignal mit der Frequenz $f = 1$ kHz auf den Eingang des Verstärkers. Oszilloskopieren Sie die Spannungsverläufe des Signals am Verstärkerausgang ($u_{V}(t)$), nach dem LC-Glied ($u_{TP}(t)$) und am Lautsprecher ($u_{out}(t)$). Bestimmen Sie die jeweiligen Amplituden des Störsignals.

$\hat{U}_{\text{Stör, V}} =$	
$\hat{U}_{\text{Stör, TP}} =$	
$\hat{U}_{\text{Stör, out}} =$	

Um wieviel Dezibel wird das Störsignal gedämpft?

(Hinweis: Dämpfung $D = -20\ \text{dB} \cdot \lg\dfrac{\hat{U}_{\text{Stör, out}}}{\hat{U}_{\text{Stör, V}}}$)

$D =$ $\boxed{}$