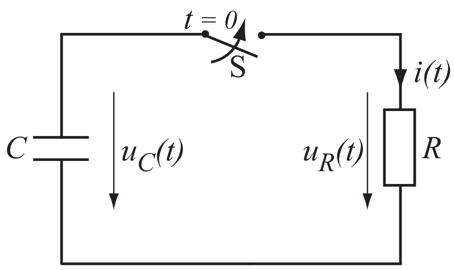
Aufgabe 1: Entladevorgang eines Kondensators



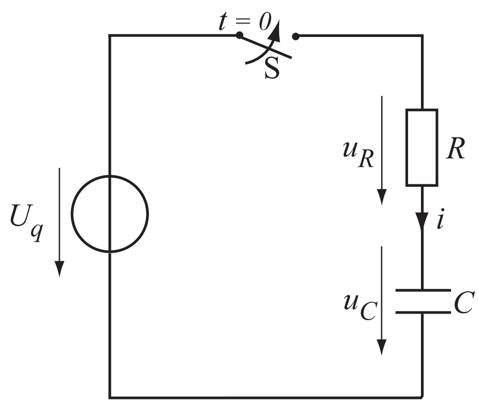
Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S geschlossen. Vor diesem Zeitpunkt sei der Kondensator C auf die Spannung U_{C0} aufgeladen.

1. Stellen Sie die Differenzialgleichung $u_C(t)$ für $t \geq 0$ auf. Formulieren Sie die Bedingung für den Anfangswert.
2. Leiten Sie die Zeitkonstante τ dieser Schaltung her.
3. Wie groß ist der Strom $i(t)$ unmittelbar nach Schließen des Schalters? Wie groß ist der Strom $i(t)$ nach Abklingen des Ausgleichsvorgangs?
4. Skizzieren Sie den Stromverlauf $i(t)$ für $t \geq 0$. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die Zeitkonstante τ.

Ergebnisse:

1. $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$; Anfangsbedingung: $u_C(t = 0) = U_{C0}$
2. $\tau = R \cdot C$
3. $i(t = 0) = \frac{U_{C0}}{R}$; $i(t \to \infty) = 0\text{A}$
4. $i(t) = \frac{U_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Aufgabe 2: Ladevorgang eines Kondensators



Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter geschlossen und der Kondensator C über den Widerstand R geladen. Für die Spannung am Kondensator u_C gilt für die Zeit $t < 0\,\text{s}$: $u_C(t) = 0\,\text{V}$.

1. Leiten Sie die Differenzialgleichung für $t \geq 0$ her.

2. Lösen Sie die Differenzialgleichung. Wie groß ist die Zeitkonstante τ dieser Schaltung.

3. Wie groß sind der Strom $i(t)$ und die Spannung $u_C(t)$ unmittelbar nach Schließen des Schalters? Wie groß sind der Strom $i(t)$ und die Spannung $u_C(t)$ nach Abklingen des Ausgleichsvorgangs?

4. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u_C(t)$ am Kondensator sowie den Stromverlauf $i(t)$ für $t \geq 0$. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die Zeitkonstante τ.

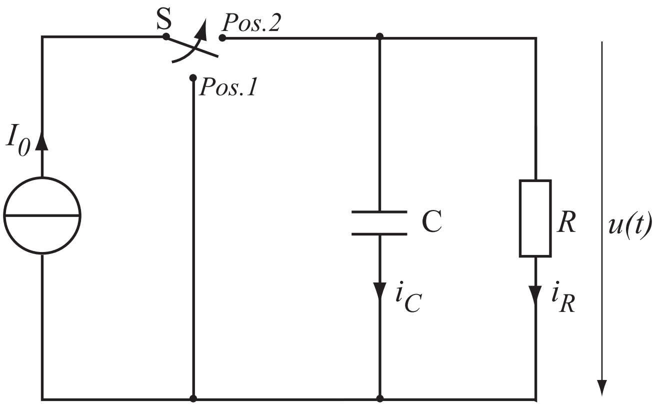
Ergebnisse:

1. $U_q = R \cdot C \cdot \dot{u}_C(t) + u_C(t)$

2. $\tau = R \cdot C$; $u_C(t) = U_q \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

3. $u_C(t = 0) = 0\,\text{V}$; $u_C(t \to \infty) = U_q$
   $i(t = 0) = \frac{U_q}{R}$; $i(t \to \infty) = 0\,\text{A}$

Aufgabe 3: RC-Parallelschaltung



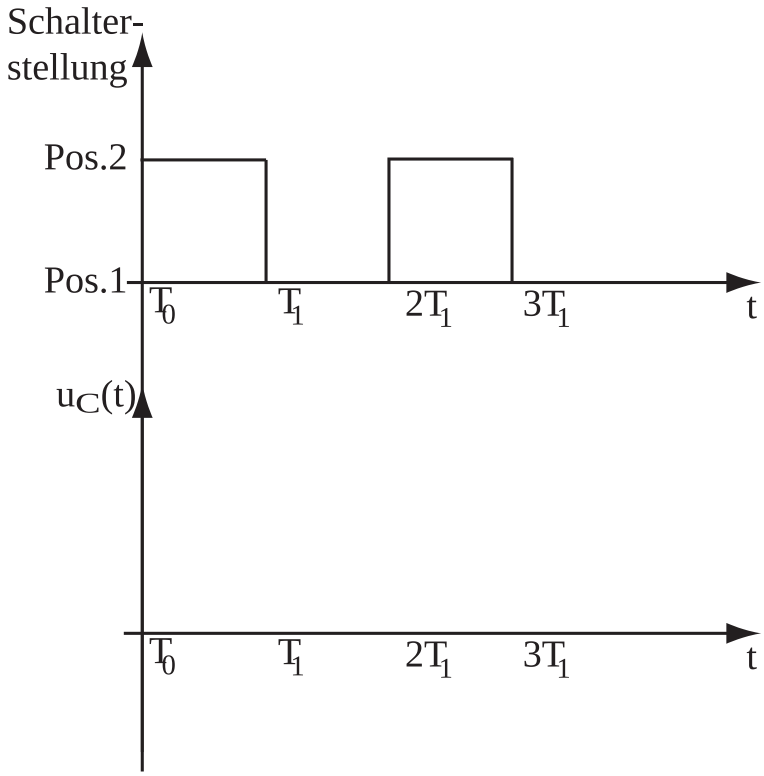
Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S von Position 1 in Position 2 geschaltet. Der Kondensator ist zu diesem Zeitpunkt entladen, d.h. für $t \leq 0\,\text{s}$ gelte $u_C(t) = 0\,\text{V}$:

1. Leiten Sie die Differenzialgleichung für $u(t)$ für $t \geq 0$ her.

2. Lösen Sie die Differenzialgleichung. Wie groß ist die maßgebliche Zeitkonstante der Schaltung?

3. Skizzieren Sie den Spannungverlauf $u(t)$ sowie die Stromverläufe $i_C(t)$ und $i_R(t)$ für $t \geq 0$. Kennzeichnen Sie in ihrer Zeichnung die Zeitkonstante τ.

Gehen Sie nun davon aus, dass in der oben dargestellten Schaltung der Widerstand R entfernt wird. Durch Betätigung des Schalters S kann dann der Stromverlauf über den Kondensator $i_C(t)$ direkt vorgegeben werden. Für die Schalterstellung gelte:

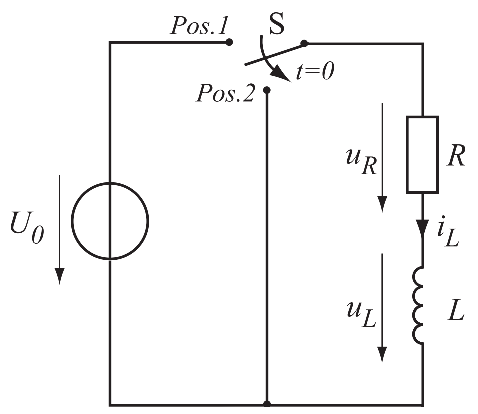


4. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf am Kondensator $u_C(t)$ in dem obigen Koordinatensystem. Geben Sie die Spannungen an, die zu den Zeitpunkten T_1, $2T_1$ und $3T_1$ am Kondensator anliegen.

Ergebnisse:

1. $RC\dot{u}(t) + u(t) = R \cdot I_0$
2. $\tau = R \cdot C;\ u_C(t) = R \cdot I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
3. $u_C(t) = R \cdot I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ i_R(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ i_C(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Aufgabe 4: RL-Reihenschaltung



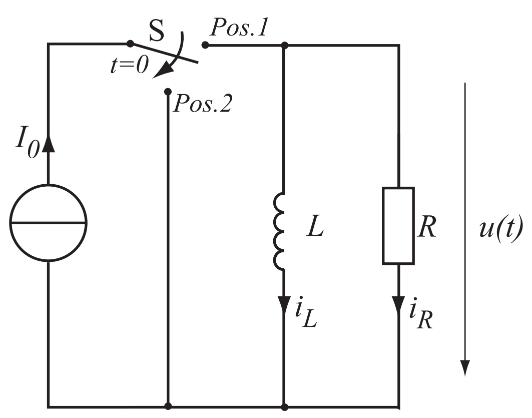
Vor dem Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich die Schaltung im stationären Zustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der ideale Schalter von Postion 1 in Position 2 geschaltet.

1. Wie groß ist der Strom i_L für $t \leq 0$?
2. Leiten Sie die Differenzialgleichung für i_L für $t \geq 0$ her.
3. Lösen Sie die Differenzialgleichung
4. Geben Sie den Verlauf der Spannung über der Induktivtät $u_L(t)$ an.

Ergebnisse:

1. $t < 0$: $i_L = \frac{U_0}{R}$
2. $L \cdot \dot{i}_L(t) + R \cdot i_L(t) = 0$
3. $i_L(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$
4. $u_L(t) = -u_R(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$

Aufgabe 5: RL-Parallelschaltung



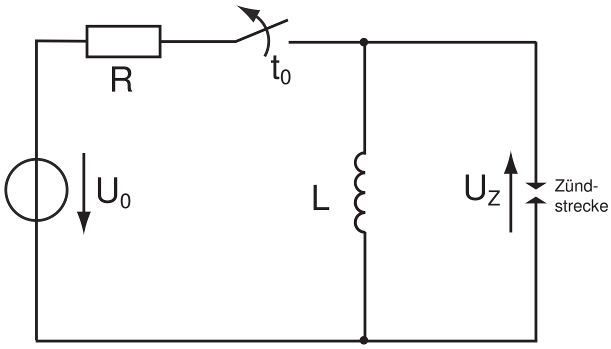
Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter von Position 1 in Position 2 geschaltet. Vor diesem Zeitpunkt sei die Schaltung im stationären (eingeschwungenen) Zustand. Weiterhin betrage der Quellstrom der idealen Stromquelle $I_0 = 12\,\mathrm{A}$.

1. Wie groß ist der Strom $i_R(t)$ unmittelbar vor dem Betätigen des Schalters? Wie groß ist er unmittelbar danach?
2. Leiten Sie die Differnzialgleichung für $i_L(t)$ für $t \geq 0$ her.
3. Lösen Sie die Differenzialgleichung. Wie lautet die Anfangsbedingung für die Differenzialgleichung? Wie groß ist die Zeitkonstante dieser Schaltung?
4. Skizzieren Sie die Stromverläufe $i_L(t)$ und $i_R(t)$ sowie den Spannungsverlauf $u(t)$ für $t \geq 0$. Zeigen Sie, wie sich aus einem Ihrer Strom- bzw. Spannungsverläufe die Zeitkonstante ablesen lässt.

Ergebnisse:

1. $i_R(t = 0^-) = 0\mathrm{A};\; i_R(t = 0^+) = -I_0$
2. $\frac{L}{R}\dot{i}_L(t) + i_L(t) = 0$
3. $\tau = \frac{L}{R};\; i_L(t) = I_{hL0}e^{-\frac{t}{L/R}};\; i_L(t = 0) = I_{hL0} = I_0$
4. $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}};\; i_R(t) = -i_L(t);\; u(t) = -I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}$

Aufgabe 6: Ansteuerung einer Zündkerze



Obenstehende Schaltung dient zur Ansteuerung einer Zündkerze. Sie wird von einer Gleichspannungsquelle mit der Ausgangsspannung $U_0 = 12\,\mathrm{V}$ gespeist. Zum Zündzeitpunkt t_0 wird der ideale Schalter geöffnet. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die Schaltung im stationären Zustand und durch die Induktivität L fließt ein Anfangszündstrom $i(t_0) = I_0 = 100\,\mathrm{A}$. Während der gesamten Zünddauer betrage die Zündspannung $U_Z = 500\,\mathrm{V}$ const.. Die Zünddauer T_Z soll 5 Millisekunden betragen. (Hinweis: Am Ende der Zünddauer hat der Strom durch die Induktivität gerade einen Wert von Null erreicht.)

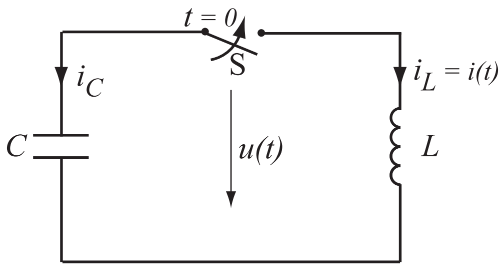
1. Wie groß muss der Widerstand R bemessen sein?
2. Wie groß muss die Induktivität L bemessen sein?
3. Wie schnell kann der Vorgang wiederholt werden, wenn für den Anfangszündstrom i_{z0} gelten soll: $i_{z0} = 0,9 I_0$?

Ergebnisse:

1. $R = 120\,\mathrm{m\Omega}$
2. $L = 25\,\mathrm{mH}$
3. $t_Z \approx 0,48\,\mathrm{s}$

Aufgabe 7: Freier ungedämpfter Schwingkreis

Gegeben sei ein Schwingkreis gemäß untenstehender Abbildung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter geschlossen. Für $t < 0$ gelte: $u_C(t) = U_{C0}$.



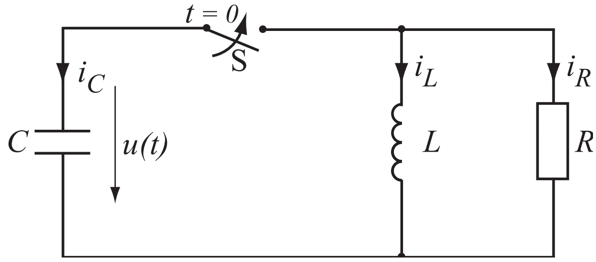
1. Stellen Sie die Differenzialgleichung für $t \geq 0$ für die Spannung $u(t)$ auf.
2. Stellen Sie die Differenzialgleichung für $t \geq 0$ für den Strom $i(t)$ auf.
3. Ermitteln Sie die Schwingungsgleichungen für die Spannung $u(t)$ und den Strom $i(t)$. Geben Sie den Kennwiderstand Z_0 und die Kennkreisfrequenz ω_0 des Schwingkreises an.
4. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u(t)$ und Stromverlauf $i(t)$ für $t \geq 0$.

Ergebnisse:

1. $LC\ddot{u}_C(t) + u(t) = 0$
2. $CL\ddot{i}_L(t) + i_L(t) = 0$
3. $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0;\ \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0$
   $u(t) = U_{C0}\cos(\omega_0 t);\ i_L(t) = -i_C(t) = \frac{U_{C0}}{Z_0}\sin(\omega_0 t)$

Aufgabe 8: Freier gedämpfter Schwingkreis

Gegeben sei ein Schwingkreis gemäß untenstehender Abbildung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S geschlossen. Es gelte: $u_C(t = 0) = U_{C0}$ und $i_L(t = 0) = 0$. Für die Bauteile gelte: $4R^2 > \frac{L}{C}$



1. Stellen Sie die Differenzialgleichung für $t \geq 0$ für die Spannung $u(t)$ auf.
2. Ermitteln Sie die Schwingungsgleichung für die Spannung $u(t)$. Geben Sie die Zeitkonstante τ und die Eigenkreisfrequenz ω_d des Schwingkreises an.
3. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u(t)$ für $t \geq 0$.

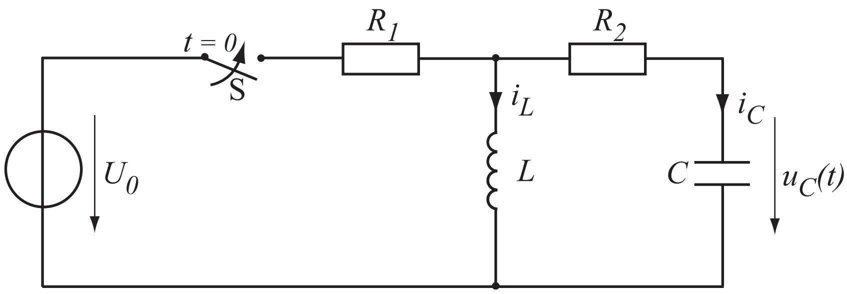
Ergebnisse:

1. $\ddot{u}(t) + \frac{1}{RC}\dot{u}(t) + \frac{1}{LC}u(t) = 0$
2. $\tau = 2RC$; $\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$

   $u(t) = U_{C0}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right]e^{-t/\tau}$

Aufgabe 9: RCL-Netzwerk

Gegeben sei untenstehendes Netzwerk. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S geschlossen.

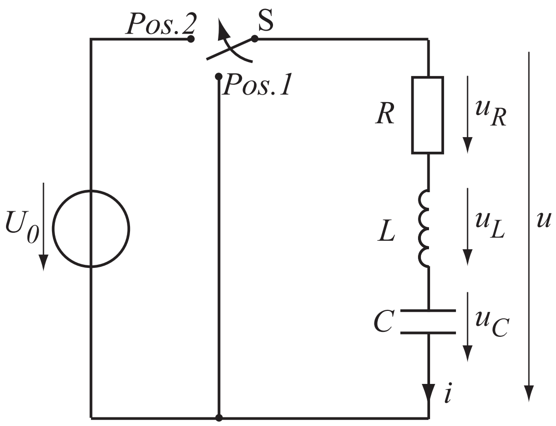


1. Stellen Sie die Differenzialgleichung für $t \geq 0$ für die Spannung $u(t)$ auf.
2. Ermitteln Sie die notwendigen Anfangsbedingungen. Nehmen Sie dazu an, dass sich die Schaltung für $t < 0$ im stationären Zustand befindet.
3. Lösen Sie die Differenzialgleichung und errechnen sie $u_C(t)$ für: $R_1 = 500\,\Omega$, $L = 1\,\text{mH}$, $R_2 = 220\,\Omega$, $C = 100\,\text{nF}$, $U_0 = 12\,\text{V}$.
4. Errechnen sie $u_C(t)$ für: $R_1 = 500\,\Omega$, $L = 1\,\text{mH}$, $R_2 = 500\,\Omega$, $C = 100\,\text{nF}$, $U_0 = 12\,\text{V}$.
5. Errechnen sie $u_C(t)$ für: $R_1 = 500\,\Omega$, $L = 1\,\text{mH}$, $R_2 = 20\,\Omega$, $C = 100\,\text{nF}$, $U_0 = 12\,\text{V}$.
6. Errechnen Sie den Maximalwert $\hat{u}_C$ und den Zeitpunkt t_M, an dem $\hat{u}_C$ auftritt, jeweils für die drei vorherigen Aufgabenpunkte.
7. Skizzieren Sie die Kurvenverläufe.

Ergebnisse:

1. $\ddot{u}_C + \dot{u}_C \left(\frac{1}{C(R_1+R_2)} + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{L}\right) + \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{1}{LC}u_C = 0$
2. $u_C(t=0) = 0$; $\dot{u}_C(t=0) = \frac{U_0}{R_1+R_2}\frac{1}{C}$
3. $u_C(t) = 1{,}667 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot te^{-\frac{t}{12\,\mu\mathrm{s}}}$
4. $u_C(t) = 0{,}55\,\mathrm{V} \cdot \left(e^{-\frac{t}{47{,}85\,\mu\mathrm{s}}} - e^{-\frac{t}{4{,}18\,\mu\mathrm{s}}}\right)$
5. $u_C(t) = 2{,}4\,\mathrm{V}\sin(96{,}154 \cdot 10^3\mathrm{s}^{-1}t)e^{-\frac{t}{52\,\mu\mathrm{s}}}$
6. $t_m = 12\,\mu\mathrm{s}$; $\hat{u}_C \approx 0{,}736\,\mathrm{V}$
   $t_m = 11{,}17\,\mu\mathrm{s}$; $\hat{u}_C \approx 0{,}398\,\mathrm{V}$
   $t_m = 14{,}28\,\mu\mathrm{s}$; $\hat{u}_C \approx 1{,}788\,\mathrm{V}$

Aufgabe 10: RCL-Reihenschwingkreis



Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S von Position 1 in Position 2 geschaltet. Für $t \leq 0$ gelte: $u_C(t) = 0$ und $i(t) = 0$.

1. Leiten Sie die Differenzialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq 0$ her.
2. Lösen Sie die Differenzialgleichung und errechnen sie $u_C(t)$ für: $L = 1\,\mathrm{mH}$, $R = 60\,\Omega$, $C = 100\,\mathrm{nF}$, $U_0 = 12\,\mathrm{V}$.
3. Errechnen Sie den Maximalwert $\hat{u}_C$ und den Zeitpunkt t_m, an dem $\hat{u}_C$ auftritt.
4. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf für $u_C(t)$.
5. Ermitteln Sie die Extremwerte der Spannung $u_C(t)$ für den Fall, dass die Spannungsquelle zum Zeitpunkt $t = 0$ ein- und zum Zeitpunkt $t = T/2$ ausgeschaltet werde.
6. Der Schalter S soll nun beliebig zwischen den Positionen 1 und 2 geschaltet werden. Wie groß kann die Spannung $u_C(t)$ maximal werden?

Ergebnisse:

1. $\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U_0}{LC}$
2. $u_C(t) = U_0\left[1 - \left[\cos(\omega_d t) + \frac{1}{\omega_d \tau}\sin(\omega_d t)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$
3. $\hat{u}_C = 16,47\,\mathrm{V}$
4. $u_C(t) = U_0\left[1 - \left[\cos(\omega_d t) + \frac{1}{\omega_d \tau}\sin(\omega_d t)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$
5. $u_C(T/2) = 16,47\,\mathrm{V};\ u_C(T) = -6,13\,\mathrm{V}$
6. $\hat{u}_C = 19,11\,\mathrm{V}$