



Musterlösung Grundlagen der Elektrotechnik B

07.04.2010

Aufgabe 1: Ausgleichsvorgang

(20 Punkte)

1. Spannung vor Schalten in S1

$i_L(t = 0^-) = 0$, Induktivität ist über den Widerstand R_2 entladen

2. Spannung nach Schalten in S1

$i_L(t = 0^+) = 0$, Strom an der Induktivität kann sich nicht sprunghaft ändern

3. Abklingen des Ausgleichsvorgangs in S1

$i_L(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{R_1}$, Stationärer Zustand: Es fällt keine Spannung an der Induktivität ab.

4. Aufladevorgang (S1): Aufstellen der Differentialgleichung

Bauteilgleichungen:

$$u_{R_1}(t) = R_1 \cdot i_{R_1}(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}_L(t)$$

Maschengleichung:

$$U_0 = u_{R_1}(t) + u_L(t)$$

Für den Strom gilt:

$$i_{R_1}(t) = i_L(t) = i(t)$$

Einsetzen und Umformen:

$$U_0 = R_1 \cdot i_{R_1}(t) + u_L(t)$$

$$= R_1 \cdot i_L(t) + L \dot{i}_L(t)$$

$$\frac{U_0}{R_1} = i_L(t) + \frac{L}{R_1} \dot{i}_L(t) \quad (\text{inhomogene DGL 1. Ordnung})$$

5. Aufladevorgang (S1): Lösen der Differentialgleichung

Lösung der homogenen DGL

$$i_L(t) + \frac{L}{R_1} \dot{i}_L(t) = 0$$

Exponentialansatz: $i_{Lh}(t) = I_{Lh0} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

$$\Rightarrow \frac{L}{R_1} \cdot \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \cdot I_{Lh0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{Lh0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R_1} \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \tau_1 = \frac{L}{R_1}$$

$$\Rightarrow i_{Lh} = I_{Lh0} e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$i_{Lp} = i_L(t \rightarrow \infty) = i_L(t \rightarrow \infty) + \underbrace{\frac{L}{R_1} \cdot \dot{i}_L(t \rightarrow \infty)}_{=0} = \frac{U_0}{R_1}$$

Gesamtlösung der DGL:

$$i_L(t) = i_{Lp} + i_{Lh} = \frac{U_0}{R_1} + I_{Lh0} e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

Bestimmung der Konstanten I_{Lh0} über Anfangsbed. $i_L(t = 0) = 0$:

$$0 = \frac{U_0}{R_1} + I_{Lh0} e^0 \Rightarrow I_{Lh0} = -\frac{U_0}{R_1}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

6. Verhältnis der Zeitkonstanten für Auflade- und Entladevorgang

In Schalterposition 2 fließt der Strom über R_2 und L .

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{L}{R_2} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{L \cdot R_2}{R_1 \cdot L} = \frac{1,5 \cdot L \cdot R_1}{R_1 \cdot L} = 1,5$$

7. Entladevorgang (S2): Lösen der Differentialgleichung

Endwert des Aufladevorganges:

$$i_L(t = \tau_1^-) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right) = \frac{U_0}{R_1} (1 - e^{-1}) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

Spannungsverlauf $i_L(t > \tau_1)$ während des Entladevorganges: Direktes Aufstellen der DGL mit Hilfe folgender Überlegungen:

- Exponentieller Stromabfall von $i_L(t)$ (analog zum exponentiell steigenden Stromverlauf während des Aufladevorganges)
- Zeitkonstante: $\tau_2 = \frac{L}{R_2}$
- Endwert des Aufladevorganges $i_L(t = \tau_1^-)$ entspricht dem Anfangswert des Entladevorganges $i_L(t = \tau_1^+)$, da sich der Strom in der Induktivität nicht sprunghaft ändern kann.

$$\Rightarrow i_L(t > \tau_1) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{(t-\tau_1)}{\tau_2}}$$

Endwert des Entladevorganges:

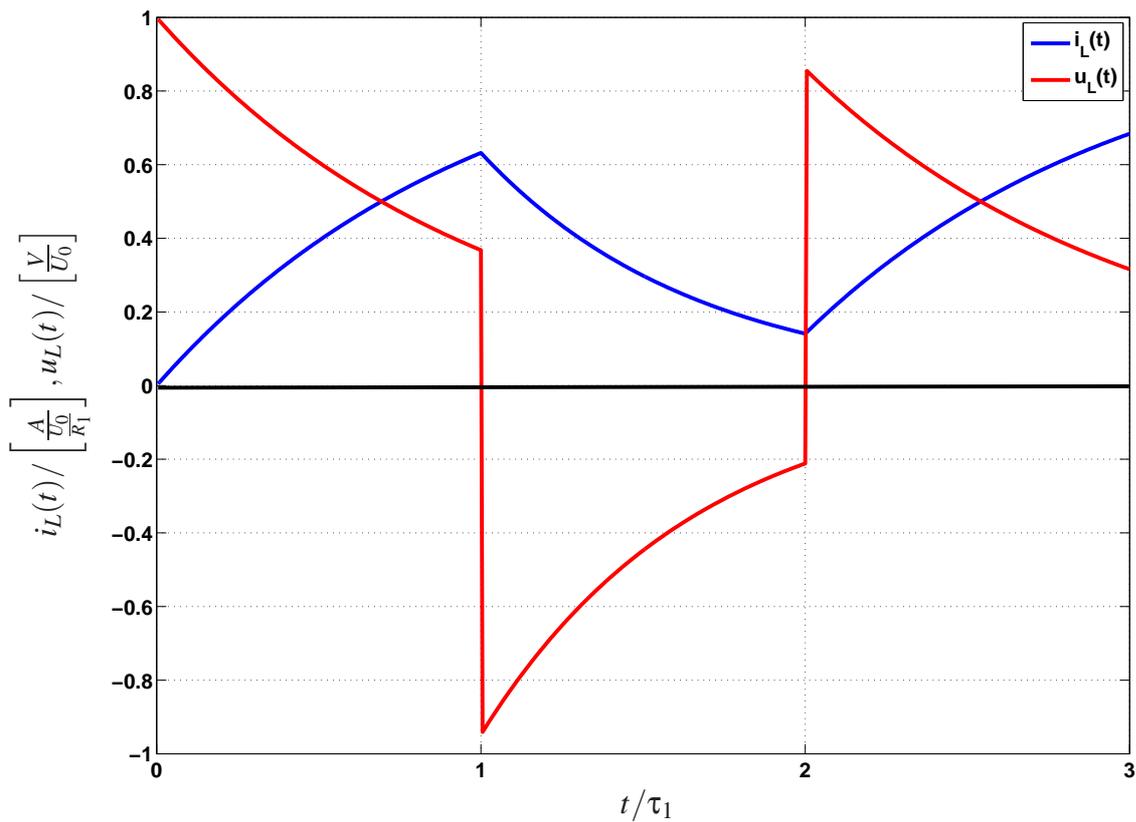
$$\Rightarrow i_L(t = 2\tau_1) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1} \cdot e^{-1,5} = 0,141 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

8. Strom- und Spannungsverläufe

Stromverläufe $i_L(t)$:

$$i_L(0 \leq t \leq \tau_1) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \Rightarrow I_1 = i_L(t = \tau_1) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

$$i_L(\tau_1 \leq t \leq 2\tau_1) = I_1 \cdot e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \Rightarrow I_2 = i_L(t = 2\tau_1) = 0,141 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$



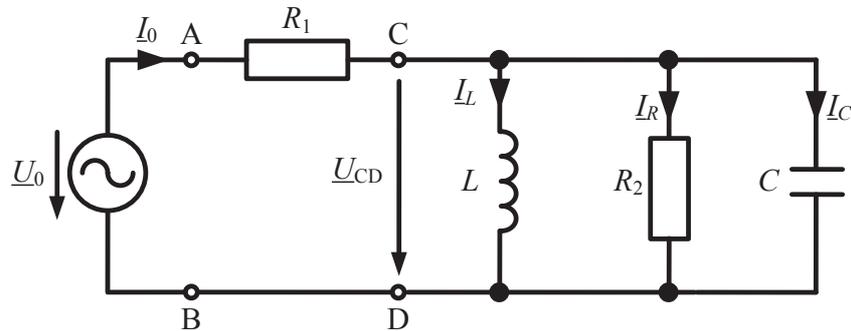
$$i_L(2\tau_1 \leq t \leq 3\tau_1) = I_2 + \left(\frac{U_0}{R_1} - I_2\right) \cdot (1 - e^{-\frac{t-2\tau_1}{\tau_1}}) \Rightarrow I_3 = i_L(t = 3\tau_1) = 0,684 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

Spannungsverläufe $u_L(t)$:

$$u_L(0 \leq t < \tau_1) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \Rightarrow U_1 = u_L(t = \tau_1^-) = 0,368 \cdot U_0$$

$$u_L(\tau_1 \leq t < 2\tau_1) = -I_1 \cdot R_2 \cdot e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \Rightarrow U_2 = u_L(t = 2\tau_1^-) = -0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1} \cdot R_2 \cdot e^{-1,5} = -0,211 \cdot U_0$$

$$u_L(2\tau_1 \leq t < 3\tau_1) = (U_0 - I_2 \cdot R_1) \cdot e^{-\frac{t-2\tau_1}{\tau_1}} \Rightarrow U_3 = u_L(t = 3\tau_1^-) = 0,859 \cdot U_0 \cdot e^{-1} = 0,316 \cdot U_0$$

Aufgabe 2: Komplexe Wechselstromrechnung, Blindleistungskompensation (20 Punkte)


1.

$$\underline{Y}_{CD} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R_2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\underline{Z}_{AB} = R_1 + \underline{Z}_{CD} = R_1 + \frac{1}{\underline{Y}_{CD}} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$= R_1 + \frac{\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} - j \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

2.

$$\underline{Z}_{CD} = 151,397 + j260,609 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{AB} = 551,397 + j260,609 \, \Omega$$

3.

$$\underline{U}_{CD} = \frac{\underline{Z}_{CD}}{\underline{Z}_{AB}} \underline{U}_0 = 93,617 + j64,459 \, \text{V}$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_{CD} j\omega C = -0,02 + j0,029 \, \text{A}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{CD}}{j\omega L} = 0,205 - j0,298 \, \text{A}$$

$$\underline{I}_{R_2} = \frac{\underline{U}_{CD}}{R_2} = 0,156 + j0,107 \, \text{A}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_C + \underline{I}_L + \underline{I}_{R_2} = 0,341 - j0,161 \, \text{A}$$

4.

$$\varphi_{U_0} = 0$$

$$\varphi_{I_0} = \arctan \frac{\text{Im}(\underline{I}_0)}{\text{Re}(\underline{I}_0)} = -0,442$$

$$\varphi = \varphi_{U_0} - \varphi_{I_0} = 0,442$$

5.

$$P_0 = |\underline{U}_0| |\underline{I}_0| \cos(\varphi) = 78,42 \text{ W}$$

$$Q_0 = |\underline{U}_0| |\underline{I}_0| \sin(\varphi) = 37,064 \text{ VA}$$

$$\underline{S}_0 = P_0 + jQ_0 = 78,42 + j37,064 \text{ VA} = 86,738e^{j0,842} \text{ VA}$$

oder

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = 78,42 + j37,064 \text{ VA} = 86,738e^{j0,842} \text{ VA}$$

6. Da die Spannung dem Strom vorausleilt (Induktive) und die Leistungsfaktor sei

$$\cos \varphi = \frac{P_0}{S_0} = \frac{78,42 \text{ W}}{86,738 \text{ VA}} = 0,904 < \cos \varphi' = 0,93,$$

is ein Kondensator dafür zu wählen.

Vor der Kompensation:

$$P_0 = 78,42 \text{ W}, Q_0 = 37,064 \text{ VA}$$

Nach der Kompensation:

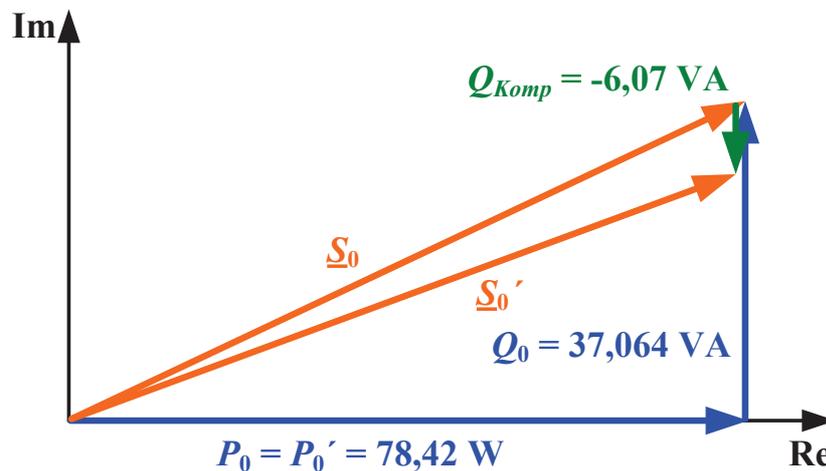
$$\varphi' = \arccos 0,93 = 0,376$$

$$P'_0 = P_0 = 78,42 \text{ W}, Q'_0 = P'_0 \tan \varphi' = 30,994 \text{ VA}$$

$$Q_{Komp} = Q'_0 - Q_0 = -6,07 \text{ VA}$$

$$C_{Komp} = \frac{-Q_{Komp}}{\omega U_0^2} = 365,3 \text{ nF}$$

7.



Aufgabe 3: Übertragungsfunktionen 3

(22 Punkte)

1. a) $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = (R + j\omega L) \underline{i}$
 $\Rightarrow \underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + j\omega T_1}$ mit $T_1 = \frac{L}{R}$

b) Tiefpassverhalten

2. a) $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}$
 $\Rightarrow \underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{R} \frac{j\omega T_2}{1 + j\omega T_2}$ mit $T_2 = RC$

b) Tiefpassverhalten

3. a) $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}$
 $\Rightarrow \underline{H}_3(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1}{R} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$

Koeffizientenvergleich mit

$$\underline{H}_3(j\Omega) = \frac{1}{R} \frac{\dots}{1 + j2d\Omega - \Omega^2}$$

liefert:

$$2d\Omega = \omega RC \text{ und } \Omega^2 = \omega^2 LC$$

Man erhält:

$$\Omega = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$d = \frac{\omega RC}{2\Omega} = \frac{1}{2} \omega_0 RC = \frac{1}{2} \frac{RC}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\underline{H}_3(j\Omega) = \frac{1}{R} \frac{j2d\Omega}{1 + j2d\Omega - \Omega^2}$$

b) Bandpassverhalten

4. Die Übertragungsfunktion beschreibt die Abhängigkeit zwischen einem Strom und einer Spannung und hat deshalb die Einheit $\left[\frac{1}{\Omega} \right] = \left[\frac{A}{V} \right]$.

5. Für $\underline{z}_2 \neq 0$ gilt:

$$\left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right|$$

$$\left| \underline{H}_4(j\Omega) \right| = \sqrt{\frac{(2d\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2d\Omega)^2}} = \sqrt{\frac{4d^2\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}}$$

$$6. \quad \underline{H}_4(j\Omega) = \frac{j2d\Omega}{(1-\Omega^2) + j2d\Omega} \frac{(1-\Omega^2) - j2d\Omega}{(1-\Omega^2) - j2d\Omega} = \frac{4d^2\Omega^2 + j2d\Omega(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}$$

$$\angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan\left(\frac{2d\Omega(1-\Omega^2)}{4d^2\Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{1-\Omega^2}{2d\Omega}\right)$$

$$7. \quad |\underline{H}_4(j\Omega)| = \sqrt{\frac{4d^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(1-\Omega^2)^2}{4d^2\Omega^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d\Omega} - \frac{\Omega^2}{2d\Omega}\right)^2}}$$

$\Omega \ll 1$:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} |\underline{H}_4(j\Omega)| = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d\Omega} - \frac{\Omega^2}{2d\Omega}\right)^2}} \approx \frac{1}{\frac{1}{2d} \frac{1}{\Omega}}$$

$$\Rightarrow A(\Omega) = 20\lg(2d\Omega) = 20\lg(2d) + 20\lg(\Omega)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$\Omega = 1$:

$$|\underline{H}_4(j\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{2d}\right)^2}} = 1$$

Geradennäherung: $A(\Omega) \approx 20\lg(2d)$

$$\angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan\left(\frac{1-1}{2d}\right) = 0$$

$\Omega \gg 1$:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} |\underline{H}_4(j\Omega)| = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d\Omega} - \frac{\Omega^2}{2d\Omega}\right)^2}} \approx \frac{1}{\frac{\Omega}{2d}}$$

$$\Rightarrow A(\Omega) = 20\lg\left(\frac{2d}{\Omega}\right) = 20\lg(2d) - 20\lg(\Omega)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

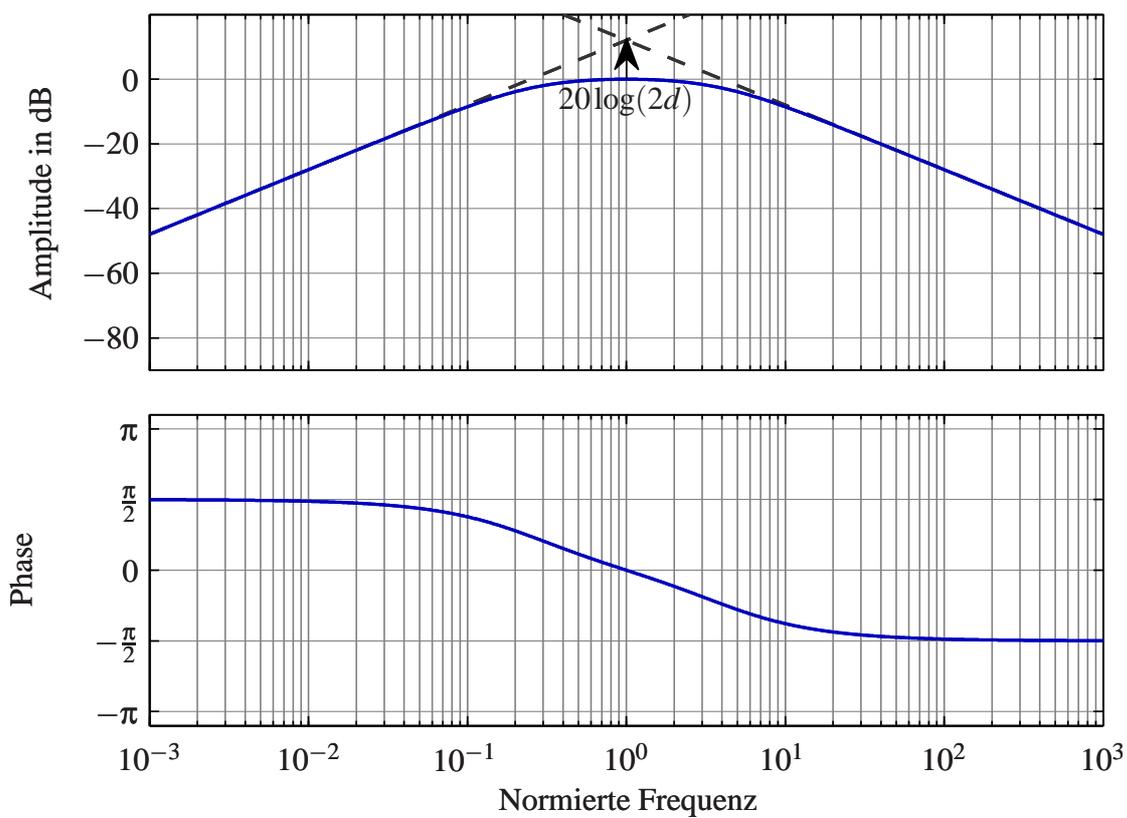


Abbildung 3.1: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion $\underline{H}_4(j\Omega)$

Aufgabe 4: Gleichstromsteller

(30 Punkte)

1. Der Effektivwert berechnet sich wie folgt:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i^2(t) dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \int_0^{60\mu s} \left(\frac{5A}{60\mu s} t + 10A \right)^2 dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \int_0^{60\mu s} \left(\frac{25A^2}{60\mu s} t^2 + \frac{100A^2}{60\mu s} t + 100A \right) dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \left(\frac{1}{3} \frac{25A^2}{60\mu s} t^3 + \frac{50A^2}{60\mu s} t^2 + 100At \right) \Big|_0^{60\mu s}}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \left(\frac{1}{3} \frac{25A^2}{60\mu s} (60\mu s)^3 + \frac{50A^2}{60\mu s} (60\mu s)^2 + 100A \cdot 60\mu s \right)}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{100\mu s} (500A^2\mu s + 3000A^2\mu s + 6000A^2\mu s)}$$

$$I = \sqrt{95A^2}$$

$$I = 9,75A$$

2. Der Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ werden am Transistor gemessen. Bei der Schaltungstopologie handelt es sich um eine Hochsetzsteller.
3. Die Größen lassen sich aus dem Diagramm ablesen oder berechnen.

$$T_s = 100\mu s$$

$$f_s = \frac{1}{T_s} = 10kHz$$

$$T_e = 60\mu s$$

$$T_a = T_s - T_e = 40\mu s$$

$$D = \frac{T_e}{T_s} = 0,6$$

$$U_2 = 120V$$

$$U_1 = U_2(1 - D) = 48V$$

4. Die Induktivität der Drossel berechnet sich aus der der Maschengleichung für den eingeschalteten Transistor:

$$\begin{aligned}
 U_1 - U_L &= 0 \\
 U_1 &= U_L = L \frac{di_L(t)}{dt} \\
 \Rightarrow L &= \frac{U_1 \Delta t}{\Delta i} \\
 L &= \frac{48V \cdot 60\mu s}{5A} \\
 L &= 576\mu H
 \end{aligned}$$

5. Der maßstäbliche Stromverlauf ist in der Abbildung ?? zu finden.
 6. Der Mittelwert des Diodenstromes ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
 \bar{i}_D &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_D(t) dt \\
 \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} \int_0^{40\mu s} \left(-\frac{5A}{40\mu s} t + 15A \right) dt \\
 \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} \left(-\frac{5A}{2 \cdot 40\mu s} t^2 + 15A t \right) \Big|_0^{40\mu s} \\
 \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} \left(-\frac{5A}{2 \cdot 40\mu s} (40\mu s)^2 + 15A \cdot 40\mu s \right) \\
 \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} (-100A^2\mu s + 600A^2\mu s) \\
 \bar{i}_D &= 5A
 \end{aligned}$$

7. Der Lastwiderstand R kann aus der Ausgangsspannung U_2 und dem Mittelwert des Diodenstromes \bar{i}_D berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{U_2}{I_2} \\
 R &= \frac{U_2}{\bar{i}_D} \\
 R &= \frac{120V}{5A} \\
 R &= 24\Omega
 \end{aligned}$$

8. Der zeitliche Verlauf der Leistung $p_L(t)$ ist in ?? dargestellt.

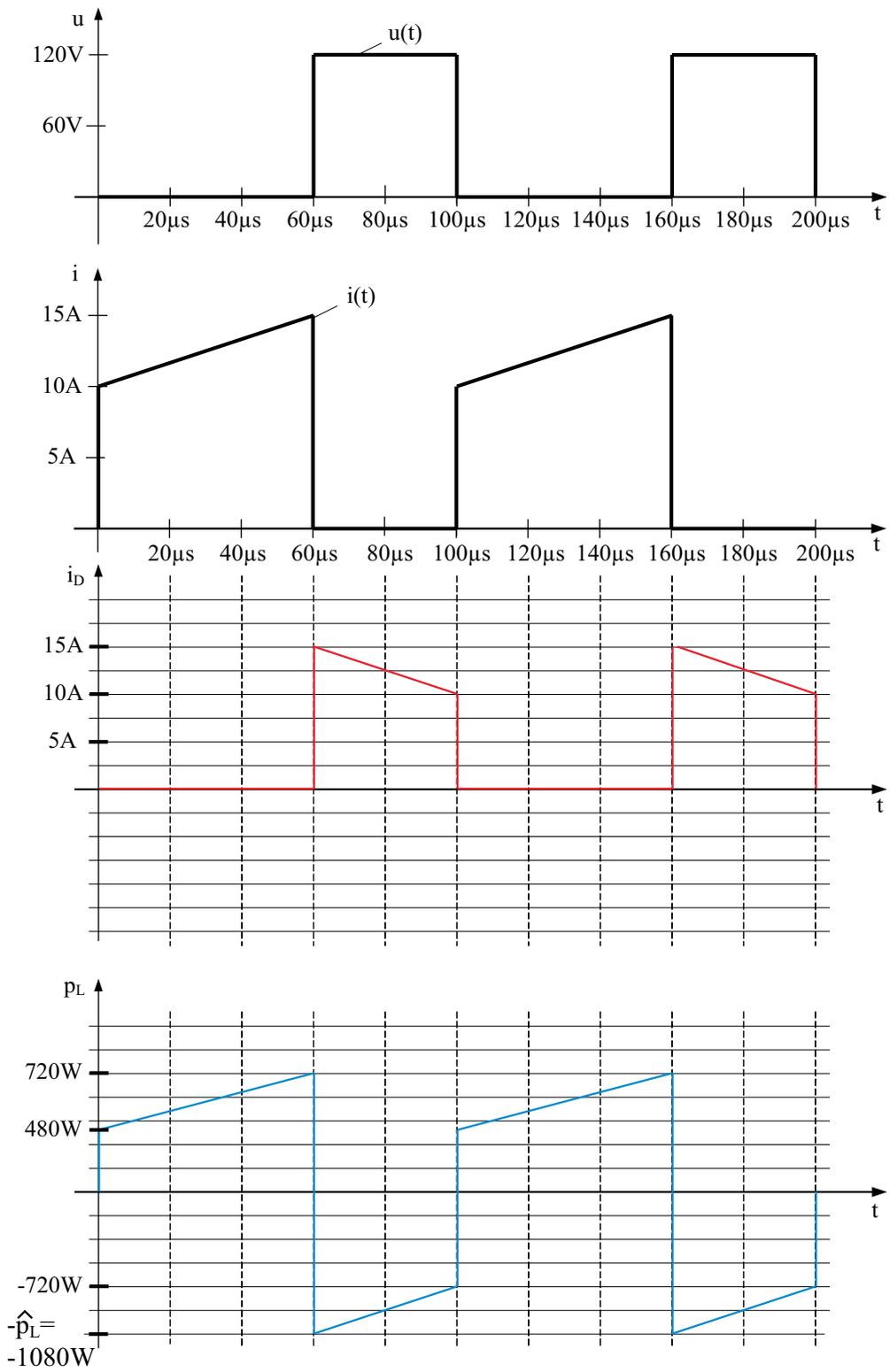
9. Die Schaltung befinde sich an der Lückgrenze. Für den Spulenstrom gilt hierbei: $i_L(T_S) = i_D(T_S) = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{i}_D &= \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} i_D(t) dt \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\text{s}} \int_0^{40\mu\text{s}} \left(-\frac{5\text{A}}{40\mu\text{s}} t + 5\text{A} \right) dt \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\text{s}} \left(-\frac{5\text{A}}{2 \cdot 40\mu\text{s}} t^2 + 5\text{A} t \right) \Big|_0^{40\mu\text{s}} \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\text{s}} \left(-\frac{5\text{A}}{240\mu\text{s}} (40\mu\text{s})^2 + 5\text{A} \cdot 40\mu\text{s} \right) \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\text{s}} (-100\text{A}^2\mu\text{s} + 200\text{A}^2\mu\text{s}) \\ \bar{i}_D &= 1\text{A} \\ \Rightarrow R &= \frac{120\text{V}}{1\text{A}} \\ R &= 120\Omega \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \Delta i &= \frac{D T_S U_1}{L} = \frac{0,2 \cdot 100\mu\text{s} \cdot 48\text{V}}{576\mu\text{H}} \\ \Delta i &= 1,67\text{A} \\ \text{oder} \\ \Delta i &= \frac{D(1-D) T_S U_2}{L} = \frac{0,2(1-0,2) \cdot 100\mu\text{s} \cdot 60\text{V}}{576\mu\text{H}} \\ \Delta i &= 1,67\text{A} \end{aligned}$$

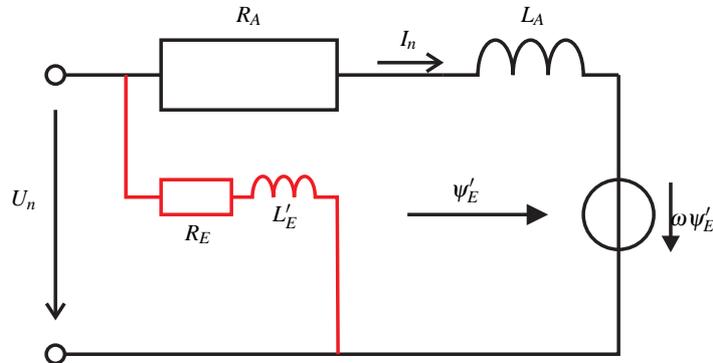
beachte die Ausgangsspannung ist in diesem Fall nicht $U_2 \neq 120\text{V}$, sondern $U_2 = \frac{1}{1-D} U_1 = 60\text{V}$



Aufgabe 5: Gleichstrommaschine

(18 Punkte)

1. Ersatzschaltbild (rot gilt für Aufg.4)



2. Ersatzschaltbild-Parameter

$$\omega_0 = n_0 \frac{\pi}{30} = 314,16 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_n = n_n \frac{\pi}{30} = 157,08 \text{ s}^{-1}$$

$$\psi'_E = \frac{U_n}{\omega_0} = 76,4 \text{ mVs}$$

$$R_A = \frac{U_n - \omega_n \psi'_E}{I_n} = 0,6 \Omega$$

$$L_A = \tau_T R_A = 6 \text{ mH}$$

3. Drehmoment im Arbeitspunkt: $T_n = 1,53 \text{ Nm}$

4. Auslegung des Erregerkreises:

a) $R_E = \frac{U_n}{I_{E,n}} = 48 \Omega$

b) $L_E = \tau_E * R_E = 48 \text{ mH}; \quad L'_E = \frac{\psi'_E}{I_n}$

c) $N_E = c_m \frac{L_F}{L_E}$