

Musterlösung Grundlagen der Elektrotechnik B

07.04.2010

Aufgabe 1: Ausgleichsvorgang**(20 Punkte)****1. Spannung vor Schalten in S1** $i_L(t = 0^-) = 0$, Induktivität ist über den Widerstand R_2 entladen**2. Spannung nach Schalten in S1** $i_L(t = 0^+) = 0$, Strom an der Induktivität kann sich nicht sprunghaft ändern**3. Abklingen des Ausgleichsvorgangs in S1** $i_L(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{R_1}$, Stationärer Zustand: Es fällt keine Spannung an der Induktivität ab.**4. Aufladevorgang (S1): Aufstellen der Differentialgleichung**

Bauteilgleichungen:

$$u_{R_1}(t) = R_1 \cdot i_{R_1}(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}_L(t)$$

Maschengleichung:

$$U_0 = u_{R_1}(t) + u_L(t)$$

Für den Strom gilt:

$$i_{R_1}(t) = i_L(t) = i(t)$$

Einsetzen und Umformen:

$$U_0 = R_1 \cdot i_{R_1}(t) + u_L(t)$$

$$= R_1 \cdot i_L(t) + L \dot{i}_L(t)$$

$$\frac{U_0}{R_1} = i_L(t) + \frac{L}{R_1} \dot{i}_L(t) \quad (\text{inhomogene DGL 1. Ordnung})$$

5. Aufladevorgang (S1): Lösen der Differentialgleichung

Lösung der homogenen DGL

$$i_L(t) + \frac{L}{R_1} \dot{i}_L(t) = 0$$

Exponentialansatz: $i_{Lh}(t) = I_{Lh0} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

$$\Rightarrow \frac{L}{R_1} \cdot \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \cdot I_{Lh0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{Lh0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R_1} \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \tau_1 = \frac{L}{R_1}$$

$$\Rightarrow i_{Lh} = I_{Lh0} e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$i_{Lp} = i_L(t \rightarrow \infty) = i_L(t \rightarrow \infty) + \underbrace{\frac{L}{R_1} \cdot i_L(t \rightarrow \infty)}_{=0} = \frac{U_0}{R_1}$$

Gesamtlösung der DGL:

$$i_L(t) = i_{Lp} + i_{Lh} = \frac{U_0}{R_1} + I_{Lh0} e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

Bestimmung der Konstanten I_{Lh0} über Anfangsbed. $i_L(t=0) = 0$:

$$0 = \frac{U_0}{R_1} + I_{Lh0} e^0 \Rightarrow I_{Lh0} = -\frac{U_0}{R_1}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

6. Verhältnis der Zeitkonstanten für Auflade- und Entladevorgang

In Schalterposition 2 fließt der Strom über R_2 und L .

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{L}{R_2} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{L \cdot R_2}{R_1 \cdot L} = \frac{1,5 \cdot L \cdot R_1}{R_1 \cdot L} = 1,5$$

7. Entladevorgang (S2): Lösen der Differentialgleichung

Endwert des Aufladevorganges:

$$i_L(t = \tau_1^-) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right) = \frac{U_0}{R_1} (1 - e^{-1}) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

Spannungsverlauf $i_L(t > \tau_1)$ während des Entladevorganges: Direktes Aufstellen der DGL mit Hilfe folgender Überlegungen:

- Exponentieller Stromabfall von $i_L(t)$ (analog zum exponentiell steigenden Stromverlauf während des Aufladevorganges)
- Zeitkonstante: $\tau_2 = \frac{L}{R_2}$
- Endwert des Aufladevorganges $i_L(t = \tau_1^-)$ entspricht dem Anfangswert des Entladevorganges $i_L(t = \tau_1^+)$, da sich der Strom in der Induktivität nicht sprunghaft ändern kann.

$$\Rightarrow i_L(t > \tau_1) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{(t-\tau_1)}{\tau_2}}$$

Endwert des Entladevorganges:

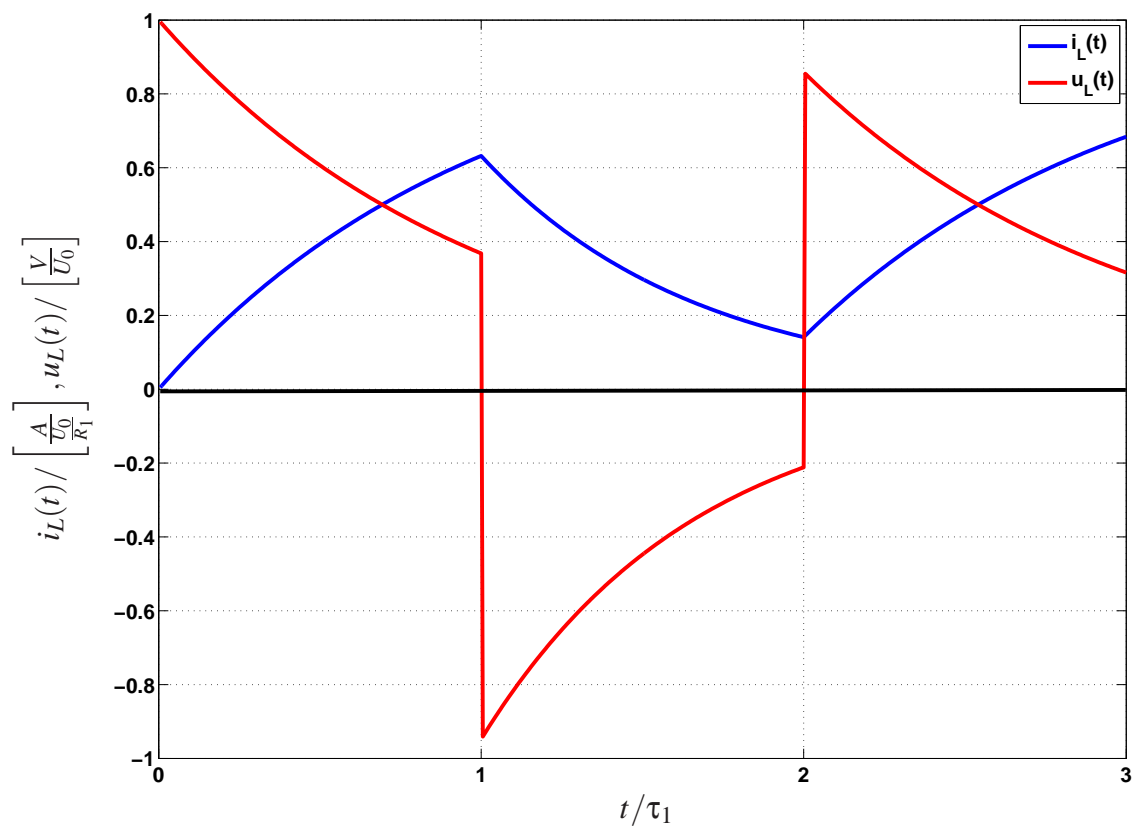
$$\Rightarrow i_L(t = 2\tau_1) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1} \cdot e^{-1,5} = 0,141 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

8. Strom- und Spannungsverläufe

Stromverläufe $i_L(t)$:

$$i_L(0 \leq t \leq \tau_1) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \Rightarrow I_1 = i_L(t = \tau_1) = 0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

$$i_L(\tau_1 \leq t \leq 2\tau_1) = I_1 \cdot e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \Rightarrow I_2 = i_L(t = 2\tau_1) = 0,141 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$



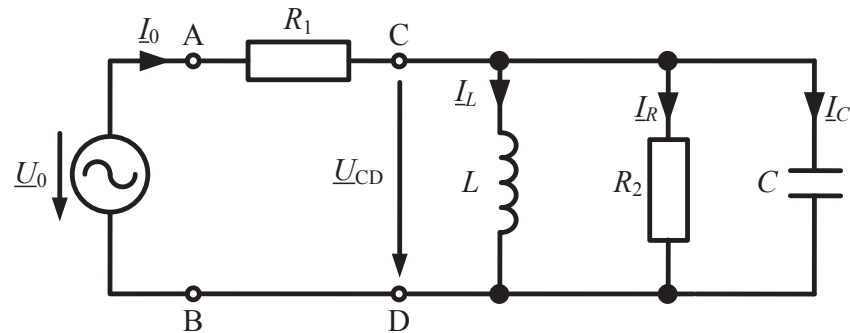
$$i_L(2\tau_1 \leq t \leq 3\tau_1) = I_2 + \left(\frac{U_0}{R_1} - I_2\right) \cdot (1 - e^{-\frac{t-2\tau_1}{\tau_1}}) \Rightarrow I_3 = i_L(t = 3\tau_1) = 0,684 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

Spannungsverläufe $u_L(t)$:

$$u_L(0 \leq t < \tau_1) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \Rightarrow U_1 = u_L(t = \tau_1^-) = 0,368 \cdot U_0$$

$$u_L(\tau_1 \leq t < 2\tau_1) = -I_1 \cdot R_2 \cdot e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \Rightarrow U_2 = u_L(t = 2\tau_1^-) = -0,632 \cdot \frac{U_0}{R_1} \cdot R_2 \cdot e^{-1,5} = -0,211 \cdot U_0$$

$$u_L(2\tau_1 \leq t < 3\tau_1) = (U_0 - I_2 \cdot R_1) \cdot e^{-\frac{t-2\tau_1}{\tau_1}} \Rightarrow U_3 = u_L(t = 3\tau_1^-) = 0,859 \cdot U_0 \cdot e^{-1} = 0,316 \cdot U_0$$

Aufgabe 2: Komplexe Wechselstromrechnung, Blindleistungskompensation (20 Punkte)


1.

$$\begin{aligned} Y_{CD} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R_2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\ Z_{AB} &= R_1 + Z_{CD} = R_1 + \frac{1}{Y_{CD}} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\ &= R_1 + \frac{\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{j\omega L}\right)^2} - j \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \end{aligned}$$

2.

$$Z_{CD} = 151,397 + j260,609 \, \Omega$$

$$Z_{AB} = 551,397 + j260,609 \, \Omega$$

3.

$$U_{CD} = \frac{Z_{CD}}{Z_{AB}} U_0 = 93,617 + j64,459 \, \text{V}$$

$$I_C = \frac{U_{CD}}{j\omega C} = -0,02 + j0,029 \, \text{A}$$

$$I_L = \frac{U_{CD}}{j\omega L} = 0,205 - j0,298 \, \text{A}$$

$$I_{R_2} = \frac{U_{CD}}{R_2} = 0,156 + j0,107 \, \text{A}$$

$$I_0 = I_C + I_L + I_{R_2} = 0,341 - j0,161 \, \text{A}$$

4.

$$\varphi_{U_0} = 0$$

$$\varphi_{I_0} = \arctan \frac{\text{Im}(I_0)}{\text{Re}(I_0)} = -0,442$$

$$\varphi = \varphi_{U_0} - \varphi_{I_0} = 0,442$$

5.

$$P_0 = |\underline{U}_0| |\underline{I}_0| \cos(\varphi) = 78,42 \text{ W}$$

$$Q_0 = |\underline{U}_0| |\underline{I}_0| \sin(\varphi) = 37,064 \text{ VA}$$

$$\underline{S}_0 = P_0 + jQ_0 = 78,42 + j37,064 \text{ VA} = 86,738 e^{j0,842} \text{ VA}$$

oder

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = 78,42 + j37,064 \text{ VA} = 86,738 e^{j0,842} \text{ VA}$$

6. Da die Spannung dem Strom vorausleitet (Induktive) und die Leistungsfaktor sei

$$\cos \varphi = \frac{P_0}{S_0} = \frac{78,42 \text{ W}}{86,738 \text{ VA}} = 0,904 < \cos \varphi' = 0,93,$$

is ein Kondensator dafür zu wählen.

Vor der Kompensation:

$$P_0 = 78,42 \text{ W}, Q_0 = 37,064 \text{ VA}$$

Nach der Kompensation:

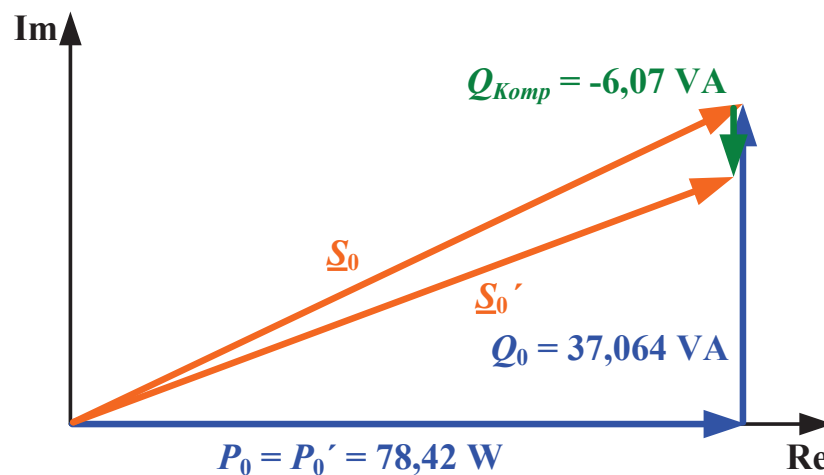
$$\varphi' = \arccos 0,93 = 0,376$$

$$P_0' = P_0 = 78,42 \text{ W}, Q_0' = P_0' \tan \varphi' = 30,994 \text{ VA}$$

$$Q_{Komp} = Q_0' - Q_0 = -6,07 \text{ VA}$$

$$C_{Komp} = \frac{-Q_{Komp}}{\omega U_0^2} = 365,3 \text{ nF}$$

7.



Aufgabe 3: Übertragungsfunktionen 3

(22 Punkte)

$$1. \quad a) \quad \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = (R + j\omega L) \underline{i}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + j\omega T_1} \quad \text{mit} \quad T_1 = \frac{L}{R}$$

b) Tiefpassverhalten

$$2. \quad a) \quad \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{R} \frac{j\omega T_2}{1 + j\omega T_2} \quad \text{mit} \quad T_2 = RC$$

b) Tiefpassverhalten

$$3. \quad a) \quad \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_3(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1}{R} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

Koeffizientenvergleich mit

$$\underline{H}_3(j\Omega) = \frac{1}{R} \frac{\dots}{1 + j2d\Omega - \Omega^2}$$

liefert:

$$2d\Omega = \omega RC \quad \text{und} \quad \Omega^2 = \omega^2 LC$$

Man erhält:

$$\Omega = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$d = \frac{\omega RC}{2\Omega} = \frac{1}{2} \omega_0 RC = \frac{1}{2} \frac{RC}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\underline{H}_3(j\Omega) = \frac{1}{R} \frac{j2d\Omega}{1 + j2d\Omega - \Omega^2}$$

b) Bandpassverhalten

4. Die Übertragungsfunktion beschreibt die Abhängigkeit zwischen einem Strom und einer Spannung und hat deshalb die Einheit $\left[\frac{1}{\Omega} \right] = \left[\frac{A}{V} \right]$.

5. Für $\underline{z}_2 \neq 0$ gilt:

$$\left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

$$|\underline{H}_4(j\Omega)| = \sqrt{\frac{(2d\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2d\Omega)^2}} = \sqrt{\frac{4d^2\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}}$$

$$6. \quad \underline{H}_4(j\Omega) = \frac{j2d\Omega}{(1-\Omega^2) + j2d\Omega} \frac{(1-\Omega^2) - j2d\Omega}{(1-\Omega^2) - j2d\Omega} = \frac{4d^2\Omega^2 + j2d\Omega(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}$$

$$\angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan\left(\frac{2d\Omega(1-\Omega^2)}{4d^2\Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{1-\Omega^2}{2d\Omega}\right)$$

$$7. \quad |\underline{H}_4(j\Omega)| = \sqrt{\frac{4d^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(1-\Omega^2)^2}{4d^2\Omega^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d\Omega} - \frac{\Omega^2}{2d\Omega}\right)^2}}$$

$\Omega \ll 1$:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} |\underline{H}_4(j\Omega)| = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d\Omega} - \frac{\Omega^2}{2d\Omega}\right)^2}} \approx \frac{1}{\frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{\Omega}}$$

$$\Rightarrow A(\Omega) = 20\lg(2d\Omega) = 20\lg(2d) + 20\lg(\Omega)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$\Omega = 1$:

$$|\underline{H}_4(j\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{2d}\right)^2}} = 1$$

Geradennäherung: $A(\Omega) \approx 20\lg(2d)$

$$\angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan\left(\frac{1-1}{2d}\right) = 0$$

$\Omega \gg 1$:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} |\underline{H}_4(j\Omega)| = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2d\Omega} - \frac{\Omega^2}{2d\Omega}\right)^2}} \approx \frac{1}{\frac{\Omega}{2d}}$$

$$\Rightarrow A(\Omega) = 20\lg\left(\frac{2d}{\Omega}\right) = 20\lg(2d) - 20\lg(\Omega)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \angle \underline{H}_4(j\Omega) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

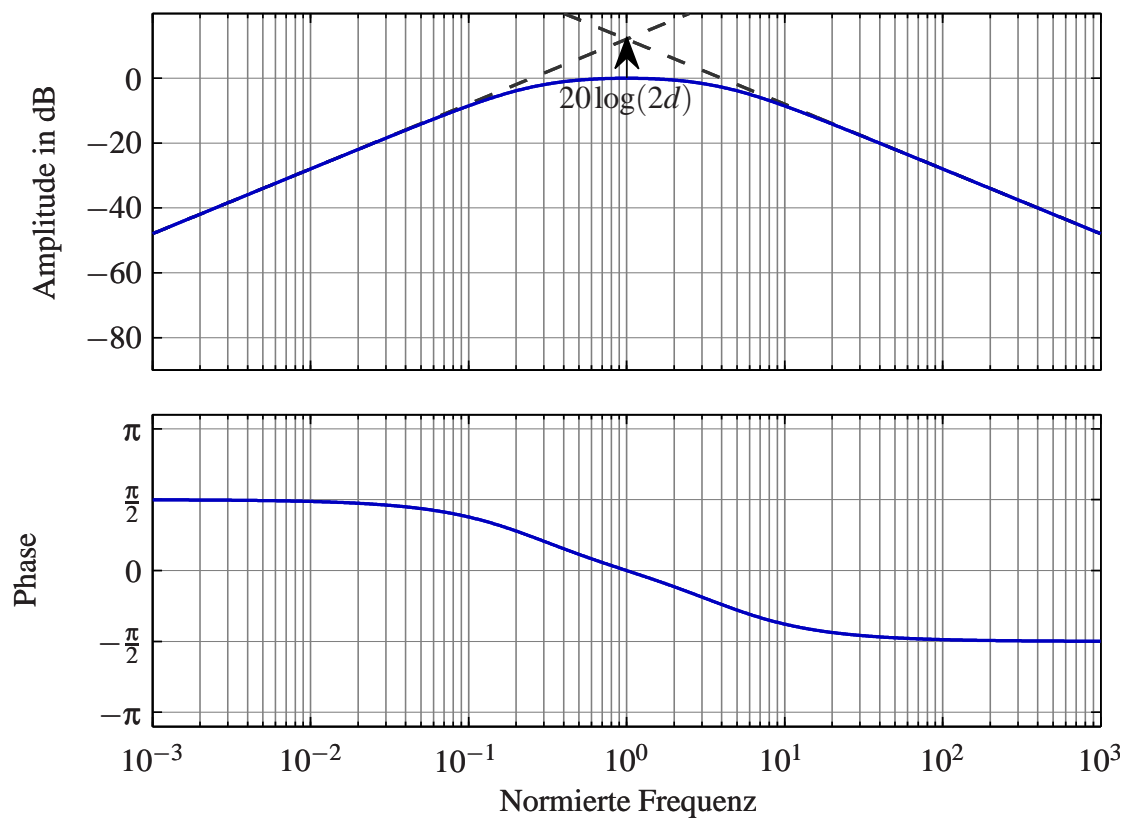


Abbildung 3.1: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion $\underline{H}_4(j\Omega)$

Aufgabe 4: Gleichstromsteller**(30 Punkte)**

1. Der Effektivwert berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i^2(t) dt} \\
 I &= \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \int_0^{60\mu s} \left(\frac{5A}{60\mu s} t + 10A \right)^2 dt} \\
 I &= \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \int_0^{60\mu s} \left(\frac{25A^2}{60\mu s} t^2 + \frac{100A^2}{60\mu s} t + 100A \right) dt} \\
 I &= \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \left(\frac{1}{3} \frac{25A^2}{60\mu s} t^3 + \frac{50A^2}{60\mu s} t^2 + 100At \right) \Big|_0^{60\mu s}} \\
 I &= \sqrt{\frac{1}{100\mu s} \left(\frac{1}{3} \frac{25A^2}{60\mu s} (60\mu s)^3 + \frac{50A^2}{60\mu s} (60\mu s)^2 + 100A \cdot 60\mu s \right)} \\
 I &= \sqrt{\frac{1}{100\mu s} (500A^2\mu s + 3000A^2\mu s + 6000A^2\mu s)} \\
 I &= \sqrt{95A^2} \\
 I &= 9,75A
 \end{aligned}$$

2. Der Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ werden am Transistor gemessen.
Bei der Schaltungstopologie handelt es sich um eine Hochsetzsteller.
3. Die Größen lassen sich aus dem Diagramm ablesen oder berechnen.

$$T_s = 100\mu s$$

$$f_s = \frac{1}{T_s} = 10\text{kHz}$$

$$T_e = 60\mu s$$

$$T_a = T_s - T_e = 40\mu s$$

$$D = \frac{T_e}{T_s} = 0,6$$

$$U_2 = 120V$$

$$U_1 = U_2(1 - D) = 48V$$

4. Die Induktivität der Drossel berechnet sich aus der der Maschengleichung für den eingeschalteten Transistor:

$$U_1 - U_L = 0$$

$$U_1 = U_L = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow L = \frac{U_1 \Delta t}{\Delta i}$$

$$L = \frac{48V 60\mu s}{5A}$$

$$L = 576\mu H$$

5. Der maßstäbliche Stromverlauf ist in der Abbildung ?? zu finden.
 6. Der Mittelwert des Diodenstromes ergibt sich aus:

$$\bar{i}_D = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_D(t) dt$$

$$\bar{i}_D = \frac{1}{100\mu s} \int_0^{40\mu s} \left(-\frac{5A}{40\mu s} t + 15A \right) dt$$

$$\bar{i}_D = \frac{1}{100\mu s} \left(-\frac{5A}{2 \cdot 40\mu s} t^2 + 15A t \right) \Big|_0^{40\mu s}$$

$$\bar{i}_D = \frac{1}{100\mu s} \left(-\frac{5A}{2 \cdot 40\mu s} (40\mu s)^2 + 15A \cdot 40\mu s \right)$$

$$\bar{i}_D = \frac{1}{100\mu s} (-100A^2\mu s + 600A^2\mu s)$$

$$\bar{i}_D = 5A$$

7. Der Lastwiderstand R kann aus der Ausgangsspannung U_2 und dem Mittelwert des Diodenstromes \bar{i}_D berechnet werden.

$$R = \frac{U_2}{I_2}$$

$$R = \frac{U_2}{\bar{i}_D}$$

$$R = \frac{120V}{5A}$$

$$R = 24\Omega$$

8. Der zeitliche Verlauf der Leistung $p_L(t)$ ist in ?? dargestellt.

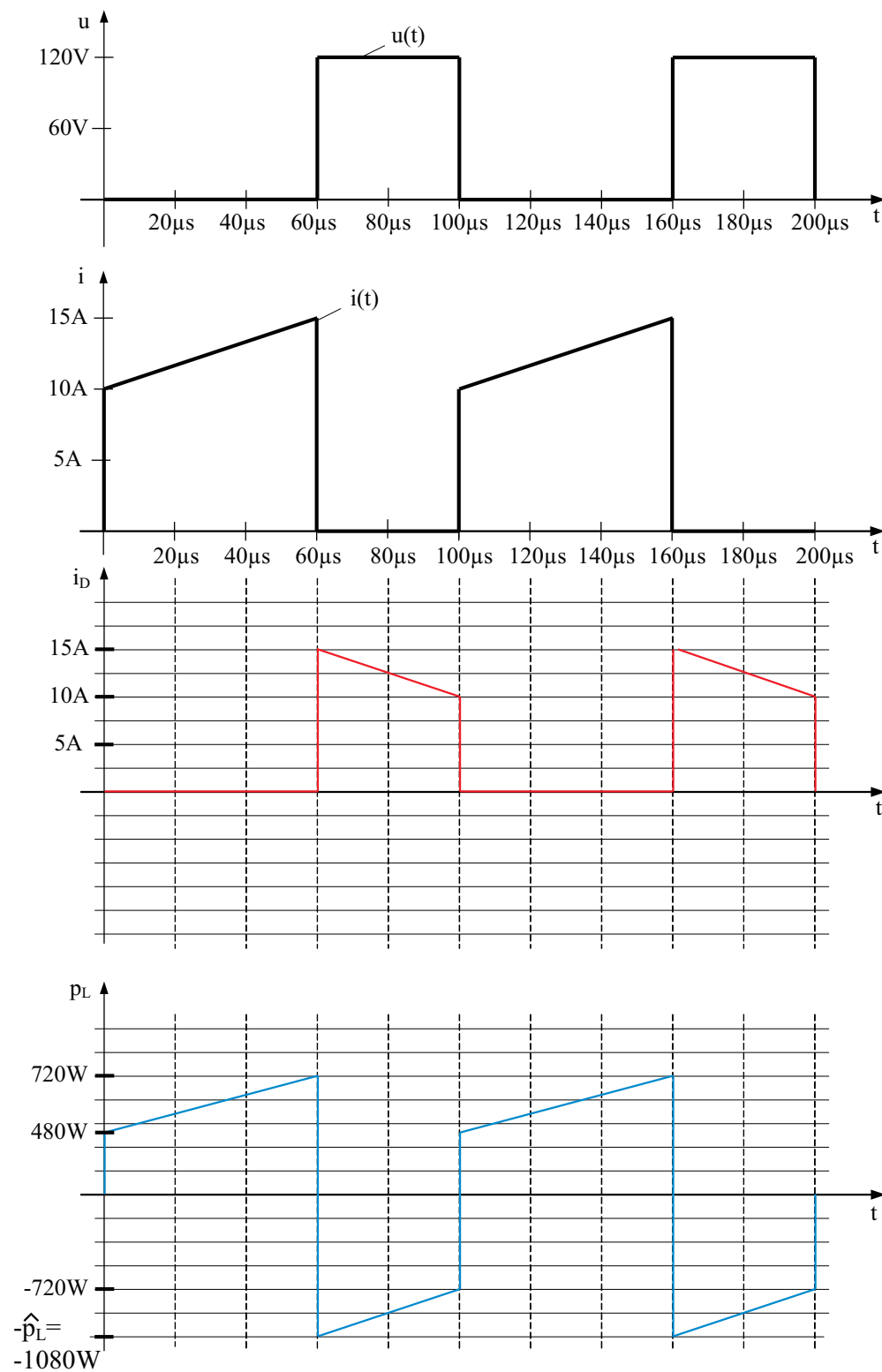
9. Die Schaltung befinde sich an der Lückgrenze. Für den Spulenstrom gilt hierbei: $i_L(T_S) = i_D(T_S) = 0$.

$$\begin{aligned}\bar{i}_D &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_D(t) dt \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} \int_0^{40\mu s} \left(-\frac{5A}{40\mu s} t + 5A \right) dt \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} \left(-\frac{5A}{2 \cdot 40\mu s} t^2 + 5A t \right) \Big|_0^{40\mu s} \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} \left(-\frac{5A}{240\mu s} (40\mu s)^2 + 5A \cdot 40\mu s \right) \\ \bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu s} (-100A^2\mu s + 200A^2\mu s) \\ \bar{i}_D &= 1A \\ \Rightarrow R &= \frac{120V}{1A} \\ R &= 120\Omega\end{aligned}$$

10.

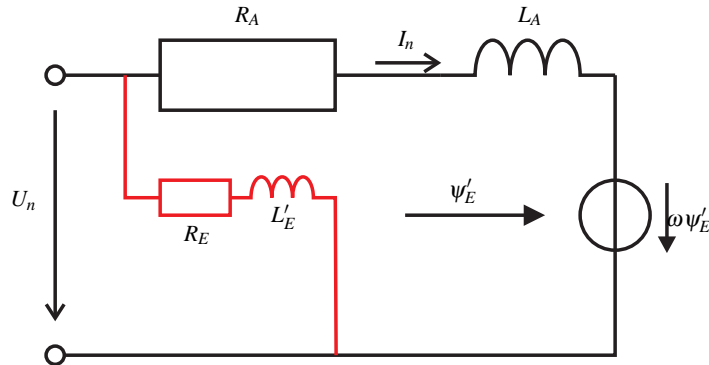
$$\begin{aligned}\Delta i &= \frac{D T_s U_1}{L} = \frac{0,2 \cdot 100\mu s \cdot 48V}{576\mu H} \\ \Delta i &= 1,67A \\ \text{oder} \\ \Delta i &= \frac{D(1-D) T_s U_2}{L} = \frac{0,2(1-0,2) \cdot 100\mu s \cdot 60V}{576\mu H} \\ \Delta i &= 1,67A\end{aligned}$$

beachte die Ausgangsspannung ist in diesem Fall nicht $U_2 \neq 120V$, sondern $U_2 = \frac{1}{1-D} U_1 = 60V$



Aufgabe 5: Gleichstrommaschine
(18 Punkte)

1. Ersatzschaltbild (rot gilt für Aufg.4)



2. Ersatzschaltbild-Parameter

$$\omega_0 = n_0 \frac{\pi}{30} = 314,16 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_n = n_n \frac{\pi}{30} = 157,08 \text{ s}^{-1}$$

$$\psi'_E = \frac{U_n}{\omega_0} = 76,4 \text{ mVs}$$

$$R_A = \frac{U_n - \omega_n \psi'_E}{I_n} = 0,6 \Omega$$

$$L_A = \tau_T R_A = 6 \text{ mH}$$

 3. Drehmoment im Arbeitspunkt: $T_n = 1,53 \text{ Nm}$

4. Auslegung des Erregerkreises:

$$\text{a) } R_E = \frac{U_n}{I_{E,n}} = 48 \Omega$$

$$\text{b) } L_E = \tau_E * R_E = 48 \text{ mH}; \quad L'_E = \frac{\psi'_E}{I_n}$$

$$\text{c) } N_E = c_m \frac{L_F}{L'_E}$$