Musterlösung
Klausur Grundlagen der Elektrotechnik
16.03.06

Aufgabe 1: Effektivwert und Mittelwert an einem Kondensator (9 Punkte)

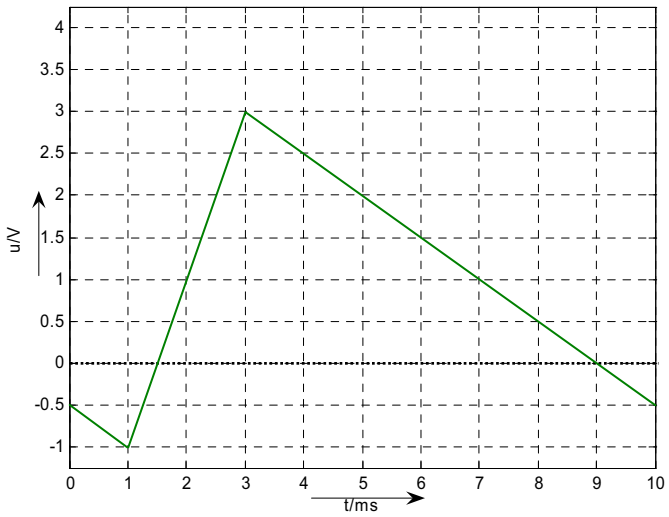
1. $i(t) = \begin{cases} -1\,\text{A} & \text{für } 0\,\text{ms} \le \text{t} \le 1\,\text{ms} \\ 4\,\text{A} & \text{für } 1\,\text{ms} \le \text{t} \le 3\,\text{ms} \\ -1\,\text{A} & \text{für } 3\,\text{ms} \le \text{t} \le 10\,\text{ms} \end{cases}$

2. $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{10\,\text{ms}}\left(\int_{0\,\text{ms}}^{1\,\text{ms}}(-1\,\text{A})^2\mathrm{d}t + \int_{1\,\text{ms}}^{3\,\text{ms}}(4\,\text{A})^2\mathrm{d}t + \int_{3\,\text{ms}}^{10\,\text{ms}}(-1\,\text{A})^2\mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\frac{40\,\text{msA}^2}{10\,\text{ms}}} = 2\,\text{A}$

3. a)

$$i(t) = C\dot{u}(t) \quad \rightarrow \quad \dot{u}(t) = \frac{1}{C}i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\,\text{mF}}\cdot(-1\,\text{A}) = -0{,}5\frac{\text{V}}{\text{ms}} & 1\,\text{ms} \le t \le 3\,\text{ms} \\ \frac{1}{2\,\text{mF}}\cdot 4\,\text{A} = 2\frac{\text{V}}{\text{ms}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Werte: $u(0\,\text{ms}) = \text{-}0{,}5\,\text{V}$, $u(1\,\text{ms}) = \text{-}1\,\text{V}$, $u(3\,\text{ms}) = 3\,\text{V}$, $u(10\,\text{ms}) = \text{-}0{,}5\,\text{V}$



b) Aus Dreiecksverlauf ablesbar: $\bar{u} = \frac{(3-(-1))\,\text{V}}{2} - 1\,\text{V} = 1\,\text{V}$

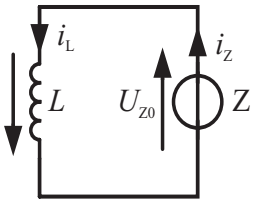
c) Verschiebung des Spannungsverlaufs um 2,5 V nach oben: $\bar{u} = 1\,\text{V} + 2{,}5\,\text{V} = 3{,}5\,\text{V}$

d) $E_{\max} = \frac{1}{2}CU_{\max}^2 = 9\,\text{mJ}$

Aufgabe 2: Ausgleichsvorgang (24 Punkte)

1. $u_L(t) = 0$ V (stationärer Zustand) $\rightarrow R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{12\text{V}}{75\text{A}} = 160\text{m}\Omega$

2.



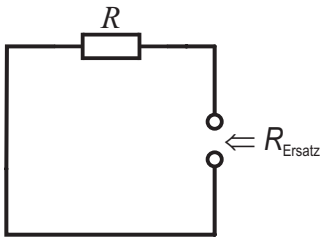
3. $i_L(t = t_0^+) = I_0 = 75$ A (Strom in Induktivität kann sich nicht sprungartig ändern)
$u_L(t = t_0^+) = -U_{Z0} = -750$ V (Maschenumlauf, die Spulenspannung wird durch die Spannung über der Zündkerze begrenzt)

4. $$u_L = -U_{Z0} = L\frac{di_L}{dt}$$
$$\Leftrightarrow i_L(t) = \int_0^t -\frac{U_{Z0}}{L}\mathrm{d}t + I_0 = -\frac{U_{Z0}}{L}\cdot(t - t_0) + I_0$$

5. Nach der Zeit $T_Z = 5$ ms ist der Strom i_L abgeklungen, d. h.
$$i_L(t_0 + T_Z) = 0 = -\frac{U_{Z0}}{L}\cdot(t_0 + T_Z - t_0) + I_0$$
$$\Leftrightarrow L = \frac{U_{Z0}\cdot T_Z}{I_0} = \frac{750\text{V}\cdot 5\text{ms}}{75\text{A}} = 50\text{mH}$$

6. $U_0 = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt}$ für $t \geq t_1$

7. Z. B. Anfangs-Endwert-Methode:
Anfangswert: $i_L(t_1) = i_0 = 0$ A (Strom durch Induktivität kann sich nicht sprunartig ändern)
Endwert: $i_L(t\rightarrow\infty) = i_\infty = I_0 = 75$ A (kein Spannungsabfall über Induktivität im stationären Zustand)
Ersatzwiderstand aus Sicht des Energiespeichers: $R_{\text{Ersatz}} = R$



Zeitkonstante: $\tau = \frac{L}{R_{\text{Ersatz}}} = \frac{L}{R} = \frac{50\text{mH}}{160\text{m}\Omega} = 0{,}3125\text{s}$
Der Stromverlauf ergibt sich nach:
$$i_L(t) = i_\infty + (i_0 - i_\infty)e^{-(t-t_1)/\tau} = I_0 + (0 - I_0)e^{-(t-t_1)/\tau}$$
$$= I_0(1 - e^{-(t-t_1)/\tau})$$
$$= 75\text{ A}(1 - e^{-(t-t_1)/0{,}3125\text{s})})$$
Zündzeitpunkt: $0{,}9I_0 = I_0(1 - e^{-\Delta t/\tau}) \Leftrightarrow \Delta t = -\tau\cdot\ln(0{,}1) = -0{,}3125\text{ s}\cdot\ln(0{,}1) = 0{,}72\text{ s}$
$\rightarrow$ Nach $\Delta t = 0{,}72$ s kann die Zündkerze wieder gezündet werden.

Aufgabe 3: Übertragungsfunktion, komplexe Wechselstromrechnung (23 Punkte)

1. $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \dfrac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega RC + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{j}\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$

2. $\mathrm{Re}\{\underline{H}(\mathrm{j}\omega_1)\} = \mathrm{Im}\{\underline{H}(\mathrm{j}\omega_2)\} \quad \Leftrightarrow 1 = \omega_1 RC \quad \Leftrightarrow \omega_1 = \dfrac{1}{RC}$

3. $H(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

   $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$

4.

   a. $\omega \ll \omega_1$: $H(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| \approx \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 \quad \Leftrightarrow A(\omega) = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg(H(\omega)) = 0\,\mathrm{dB}$

   $\varphi(\omega) \approx 0°$

   b. $\omega \gg \omega_1$: $H(\omega) \approx \dfrac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2}} = \dfrac{1}{\omega RC} \quad \Rightarrow A(\omega) = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg(H(\omega)) = -20\,\mathrm{dB} \cdot \lg(\omega RC)$

   ($\rightarrow$ Abfall von $A(\omega)$ mit 20 dB/Dekade)

   $\varphi(\omega) \approx -90°$

5.

6. Tiefpass 1. Ordnung

7. $\underline{U}_1 = \frac{10\,\text{V}}{\sqrt{2}}$; $\underline{U}_2 = \frac{5\,\text{V}}{\sqrt{2}} e^{-\text{j}(360°/6)} = \frac{5\,\text{V}}{\sqrt{2}} e^{-\text{j}(60°)}$; $f = \frac{1}{1\,\text{ms}} = 1\,\text{kHz}$

8. Aus Aufgabenpunkt 3 mit ω = 2π·1 kHz und aus Aufgabenpunkt 7: φ(ω = 2π·1 kHz) = -60° und H(ω = 2π·1 kHz) = $\underline{U}_1/\underline{U}_2$ = 0,5:

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad \Leftrightarrow R = -\frac{1}{\omega C}\tan(\varphi(\omega = 2\pi \cdot 1\,\text{kHz}))$$

$$= -\frac{1}{2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot \sqrt{3}\,\mu\text{F}}\tan(-60°) = 159{,}15\,\Omega$$

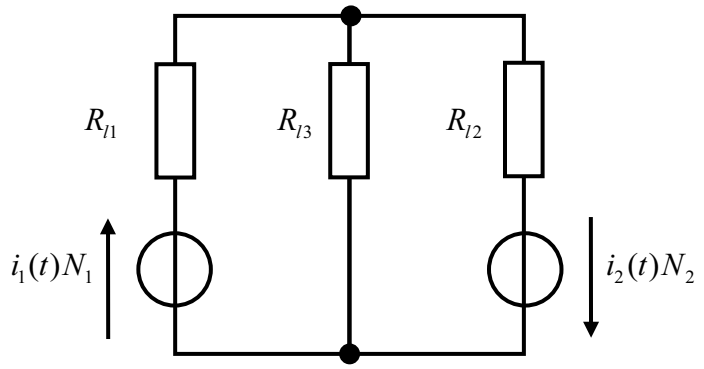
oder:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \Leftrightarrow R = \frac{1}{\omega C}\sqrt{\frac{1}{H^2(\omega)} - 1}$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot \sqrt{3}\,\mu\text{F}}\sqrt{\frac{1}{0{,}5^2} - 1} = 159{,}15\,\Omega$$

Aufgabe 4: Magnetischer Kreis **(24 Punkte)**

1. ESB:



Es handelt sich um keinen idealen Transformator, da die magnetischen Flüsse der beiden Spulen nicht vollständig miteinander verkoppelt sind.

2. $R_{l1} = R_{l2} = 2R_{l3}$ weil $l_3 = l_1/2$

$$R_{l1} = \frac{l_1}{A\mu_r\mu_0} \quad \text{mit } A = 10\,\text{mm}\cdot 10\,\text{mm} = 100\cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$R_{l1} = R_{l2} = 795775\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \qquad R_{l3} = 397887\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$L_{11} = L_{22} = \frac{N^2}{R_m} \quad \text{mit } N = N_1 = N_2 \text{ und } R_m = R_{m1} = R_{m2} = R_{l1} + \frac{R_{l2}\cdot R_{l3}}{R_{l2}+R_{l3}} = 1061033\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$L_{11} = L_{22} = 9{,}425\ \text{mH}$$

3. $\phi_{11} = \frac{L_{11}}{N_1}\cdot i_1(t)$

$$\phi_{21}(t) = \frac{1/R_{l2}}{1/R_{l2} + 1/R_{l3}}\cdot\phi_{11}(t) = \frac{\phi_{11}(t)}{3} = \frac{L_{11}}{3N_1}\cdot i_1(t) \qquad \left(= \frac{Ni_1}{R_\text{m}}\cdot\frac{R_3}{R_3+R_2} = 31{,}42\,\frac{\mu\text{Vs}}{\text{Am}^2}\right)$$

4. $$\begin{bmatrix}\Psi_1(t)\\ \Psi_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1(t)\\ i_2(t)\end{bmatrix}$$

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\Psi_{21}(t)}{i_1(t)} = \frac{N_2\cdot\phi_{21}(t)}{i_1(t)} = \frac{L_{11}N_2}{3N_1} = 3{,}1416\ \text{mH}$$

5.

c. $$\begin{bmatrix}\Psi_1(t)\\ \Psi_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1(t)\\ i_2(t)\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{d}{dt}\big(\Psi(t)\big) = L\frac{d}{dt}\big(i(t)\big)$$

Kurzschluss an (c)-(d): $u_2(t) = 0 = L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{L_{21}}{L_{22}}\frac{di_1}{dt}$

$$\Rightarrow\quad i_2(t) = -\frac{L_{21}}{L_{22}}\cdot\hat{i}_1\cdot\sin(\omega t)$$

d. Kurzschluss an (c)-(d): $u_2(t) = 0 \Rightarrow U_2 = 0$

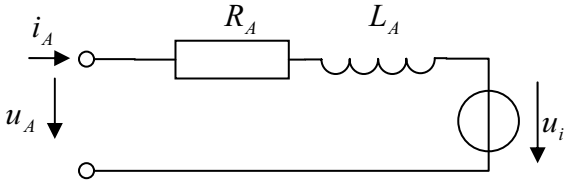
$$u_1(t) = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} = \left(L_{11} - \frac{L_{12}L_{21}}{L_{22}}\right)\frac{di_1}{dt} = \left(L_{11} - \frac{L_{12}L_{21}}{L_{22}}\right)\cdot\omega\cdot\hat{i}_1\cdot\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U_1 = \left(L_{11} - \frac{L_{12}L_{21}}{L_{22}}\right)\cdot\omega\cdot\hat{i}_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 5{,}93\ \text{V}$$

Aufgabe 5: Fremderregte Gleichstrommaschine (20 Punkte)

1. Kennlinie und Betriebsverhalten

b) Ersatzschaltbild



a. Maschengleichung

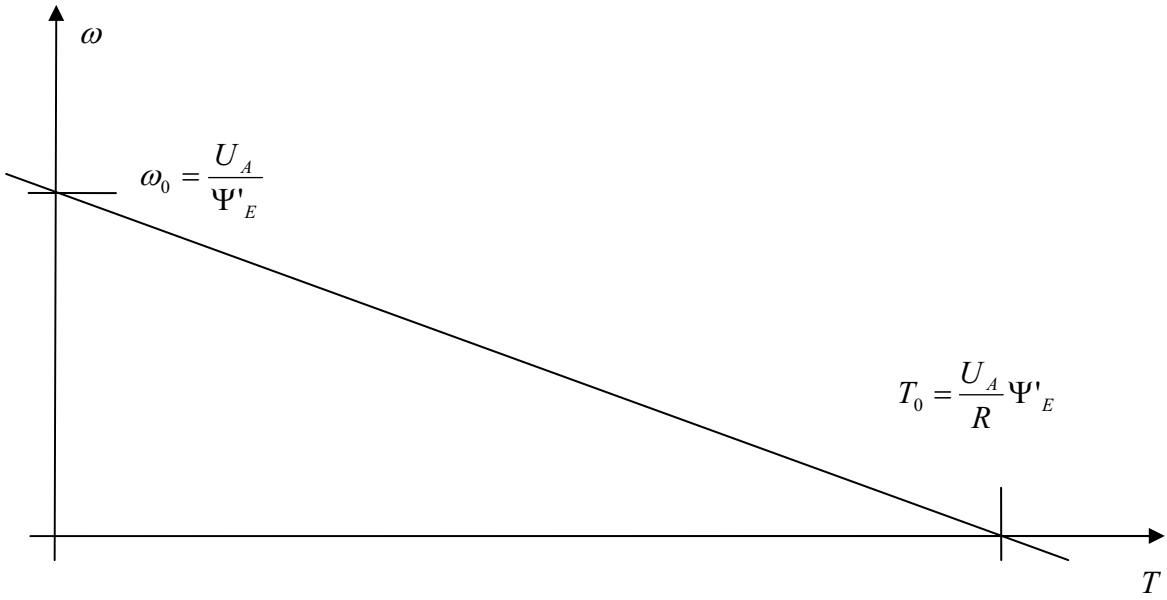
$$u_A = i_A R_A + \frac{di_A}{dt} L_A + u_i$$

c) Kennlinie $\omega = f(T)$

$$\omega \Psi'_E = U_i \;, I_A \Psi'_E = T \Rightarrow I = \frac{T}{\Psi'_E}$$

$$U = R_A I_A + U_i = \frac{T}{\Psi'_E} R_A + \omega \Psi'_E \Rightarrow \omega = \frac{U_A}{\Psi'_E} - T \frac{R}{\Psi'^{\,2}_E}$$

d) Diagramm $\omega = f(T)$



1. Berechnungen zur fremderregten Gleichstrommaschine

e)

$$\Psi'_E = \frac{U_{iN}}{\omega_N} = 0{,}3266\ \text{Vs}$$

$$T_N = I_A \Psi'_E = 6{,}533\ \text{Nm}$$

$$P_N = T_N \omega_N = 3920\ \text{W}$$

$$\eta = \frac{P_N}{U_N I_N} = 98\%$$

f)

$$\omega = \frac{U_A}{\Psi'_E} - T\frac{R}{\Psi'^{\,2}_E}$$

$$\omega(T = 0) = 612{,}37\ ^1/_s$$

$$\omega(T = 50\ \text{Nm}) = 518{,}62\ ^1/_s$$

$$\omega(T = -50\ \text{Nm}) = 706{,}12\ ^1/_s$$

g)

$$R_V = \frac{U_N}{5I_N} - R_A = 1{,}8\,\Omega$$

h)

$$U_{iN4} = U_N - 5I_N R_A \Rightarrow \omega_4 = \frac{(U_N - 5I_N R_A)}{\Psi'_E} = 551{,}13\ ^1/_s \Leftrightarrow n_4 = 5262\ ^1/_{\text{min}}$$