UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft
Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik
Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Musterlösung GetB-Klausur SS09

15.09.2009

Aufgabe 1: Ausgleichsvorgang

1.1: Spannung vor Schalten in S1

$u_C(t = 0^-) = 0$, Kondensator ist über den Widerstand R_2 entladen

1.2: Spannung nach Schalten in S1

$u_C(t = 0^+) = 0$, Spannung am Kondensator kann sich nicht sprunghaft ändern

1.3: Abklingen des Ausgleichsvorgangs in S1

$u_C(t \to \infty) = U_0$, Stationärer Zustand: Es fließt kein Strom über den Kondensator

1.4: Aufladevorgang (S1): Aufstellen der Differentialgleichung

Bauteilgleichungen:

$$u_{R_1}(t) = R_1 \cdot i_{R_1}(t)$$
$$i_C(t) = C \cdot \dot{u}_C(t)$$

Maschengleichung:

$$U_0 = u_{R_1}(t) + u_C(t)$$

Für den Strom gilt:

$$i_{R_1}(t) = i_C(t) = i(t)$$

Einsetzen und Umformen:

$$\begin{aligned} U_0 &= R_1 \cdot i_{R_1}(t) + u_C(t) \\ &= R_1 \cdot i_C(t) + u_C(t) \\ &= R_1 \cdot C \cdot \dot{u}_C(t) + u_C(t) \quad \text{(inhomogene DGL 1. Ordnung)} \end{aligned}$$

1.5: Aufladevorgang (S1): Lösen der Differentialgleichung

Lösung der homogenen DGL

$$R_1 \cdot C \cdot \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$$

Exponentialansatz: $u_{Ch}(t) = U_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

$$\Rightarrow R_1 C \cdot \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \cdot U_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + U_{Ch0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0$$

$$\Rightarrow R_1 C \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \tau_1 = R_1 \cdot C$$

$$\Rightarrow u_{Ch} = U_{Ch0} e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$u_{Cp} = u_C(t \to \infty) = R_1 C \cdot \underbrace{\dot{u}_C(t \to \infty)}_{=0} + u_C(t \to \infty) = U_0$$

Gesamtlösung der DGL:

$$u_C(t) = u_{Ch} + u_{Cp} = U_0 + U_{Ch0} e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

Bestimmung der Konstanten U_{Ch0} über Anfangsbed. $u_C(t = 0) = 0$:

$$0 = U_0 + U_{Ch0} e^0 \quad \Rightarrow U_{Ch0} = -U_0$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right)$$

1.6: Verhältnis der Zeitkonstanten für Auflade- und Entladevorgang

In Schalterposition 2 fließt der Strom über R_2 und C.

$$\Rightarrow \tau_2 = R_2 \cdot C \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R_1 \cdot C}{R_2 \cdot C} = \frac{R_1 \cdot C}{0,2 \cdot R_1 \cdot C} = 5$$

1.7: Entladevorgang (S2): Lösen der Differentialgleichung

Endwert des Aufladevorganges:

$$U_1 = u_C(t = \tau_1) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{R_1 C}}\right) = U_0 \left(1 - e^{-1}\right) = 0,632 \cdot U_0$$

Spannungsverlauf $u_C(t > \tau_1)$ während des Entladevorganges: Direktes Aufstellen der DGL mit Hilfe folgender Überlegungen:

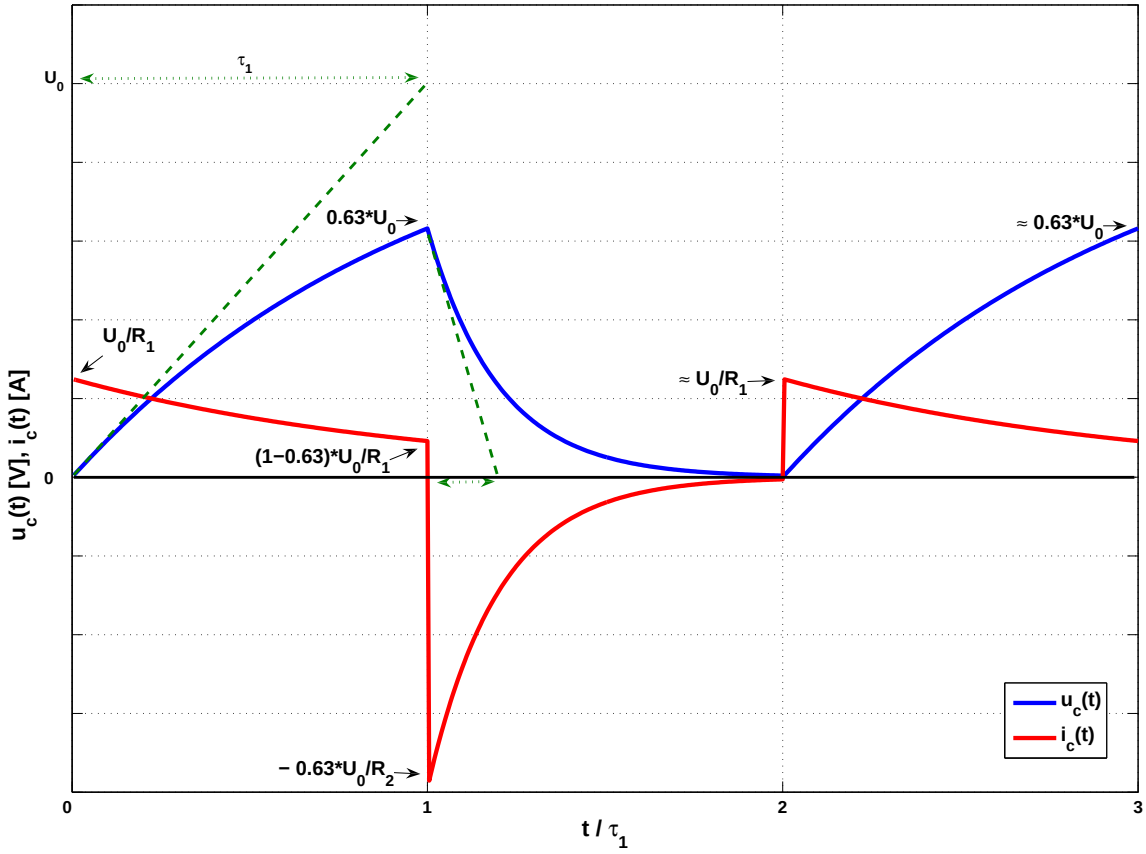
- Exponentieller Spannungsabfall von $u_C(t)$ (analog zum exponentiell steigenden Spannungsverlaufes während des Aufladevorganges)
- Zeitkonstante: $\tau_2 = R_2 \cdot C$
- Endwert des Aufladevorganges ($U_1 = u_C(t = \tau_1^-)$) entspricht dem Anfangswert des Entladevorganges ($U_2 = u_C(t = \tau_1^+)$), da sich die Spannung am Kondensator nicht sprunghaft ändern kann $\Rightarrow U_2 = U_1 = u_C(t = \tau_1) = 0,632 \cdot U_0$

$$\Rightarrow u_C(t > \tau_1) = U_2 e^{-\frac{(t-\tau_1)}{\tau_2}} = 0,632 \cdot U_0 e^{-\frac{(t-\tau_1)}{R_2 C}}$$

Endwert des Endladevorganges:

$$\Rightarrow U_3 = u_C(t = 2 \cdot \tau_1) = U_2 e^{-\frac{\tau_1}{R_2 C}} = U_2 e^{-\frac{5\tau_2}{\tau_2}} = 0,632 \cdot U_0 \cdot e^{-5} = 0,0043 \cdot U_0 \approx 0$$

1.8: Strom- und Spannungsverläufe



Aufgabe 2: Komplexe Wechselstromrechnung, Leistung

2.1:

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega(C_1 + C_2)}$$
$$= (R_1 + R_2) + \frac{R}{1 + R^2\omega^2(C_1 + C_2)^2} + j\left[\omega(L_1 + L_2) - \frac{R^2\omega(C_1 + C_2)}{1 + R^2\omega^2(C_1 + C_2)^2}\right]$$

2.2:

$$\underline{Z} = 5,941 + j6,654\Omega$$
$$|\underline{Z}| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\underline{Z}) + \mathrm{Im}^2(\underline{Z})} = 8,921\ \Omega$$
$$\varphi_{\underline{Z}} = \arctan\frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})} = 0,842$$
$$\underline{Z} = 8,921e^{j0,842}\ \Omega$$

2.3:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = 25,783e^{-j0,842}\ \mathrm{A} = 17,171 - j19,233\ \mathrm{A}$$

2.4:

$$\varphi_{\underline{U}_0} = 0$$
$$\varphi_{\underline{I}_0} = \arctan\frac{\mathrm{Im}(\underline{I}_0)}{\mathrm{Re}(\underline{I}_0)} = -0,842$$
$$\varphi = \varphi_{\underline{U}_0} - \varphi_{\underline{I}_0} = 0,842$$

2.5:

$$P_0 = |\underline{U}_0|\,|\underline{I}_0|\cos(\varphi) = 3,949 \text{ kW}$$
$$Q_0 = |\underline{U}_0|\,|\underline{I}_0|\sin(\varphi) = 4,424 \text{ kVA}$$
$$\underline{S}_0 = P_0 + jQ_0 = 3,949 + j4,424 \text{ kVA} = 5,935e^{j0,842} \text{ kVA}$$

oder

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = 3,949 + j4,424 \text{ kVA} = 5,935e^{j0,842} \text{ kVA}$$

2.6:

Da die Spannung dem Strom vorauseilt (Induktive) und die Leistungsfaktor sei

$$\cos\varphi = \frac{P_0}{S_0} = \frac{3,949\text{kW}}{5,935\text{kVA}} = 0,67 < \cos\varphi^{'} = 0,85,$$

is ein Kondensator dafür zu wählen.

2.7:

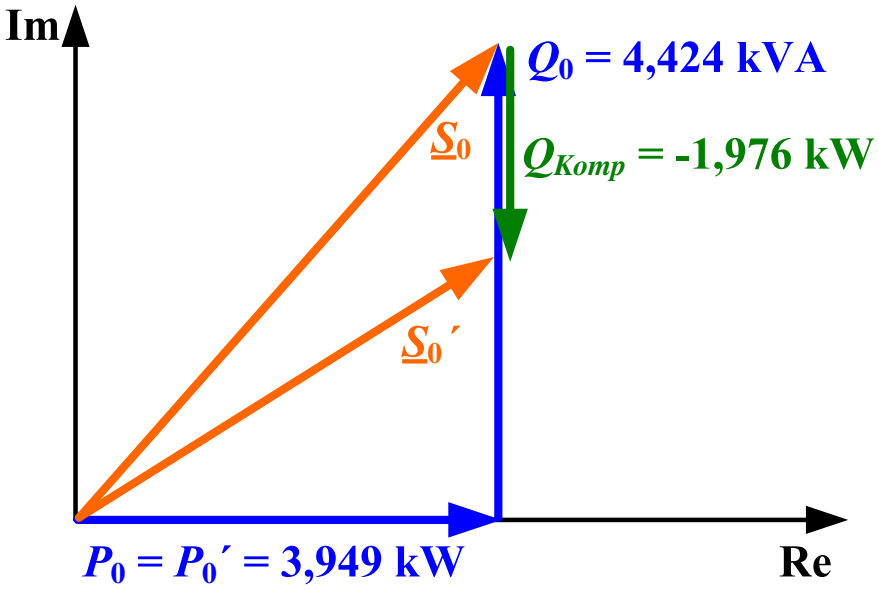
Vor der Kompensation:

$$P_0 = 3,949 \text{ kW},\ Q_0 = 4,424 \text{ kVA}$$

Nach der kompensation:

$$\varphi^{'} = \arccos 0,85 = 0,55$$
$$P_0^{'} = P_0 = 3,949 \text{ kW},\ Q_0^{'} = P_0^{'}\tan\varphi^{'} = 2,448 \text{ kVA}$$
$$Q_{Komp} = Q_0^{'} - Q_0 = -1,976 \text{ kVA}$$
$$C_{Komp} = \frac{-Q_{Komp}}{2\pi f U_0^2} = 118,9\ \mu\text{F}$$

2.8:


Im
Q_0 = 4,424 kVA
$\underline{S}_0$
Q_{Komp} = -1,976 kW
$\underline{S}_0$´
$P_0 = P_0$´ = 3,949 kW
Re

Aufgabe 3: Frequenzweiche für eine 2-Wege Lautsprecherbox

3.1:

$$\underline{Z_{Lh}} \| \underline{Z_{Rh}} = \frac{\underline{Z_{Lh}}\,\underline{Z_{Rh}}}{\underline{Z_{Lh}} + \underline{Z_{Rh}}} \text{ mit } \underline{Z_{Lh}} = j\omega L_h \text{ und } \underline{Z_{Rh}} = R_h$$

Einsetzen liefert:

$$\underline{Z_{Lh}} \| \underline{Z_{Rh}} = \frac{j\omega L_h R_h}{R_h + j\omega L_h}$$

3.2:

Spannungsteilerregel:

$$\frac{\underline{u_{ah}}}{\underline{u_e}} = \underline{H_h}(j\omega) = \frac{\underline{Z_{Rh}} \| \underline{Z_{Lh}}}{\underline{Z_{Ch}} + \underline{Z_{Rh}} \| \underline{Z_{Lh}}}$$

Einsetzen:

$$\underline{H_h}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega L_h R_h}{R + j\omega L_h}}{\frac{j\omega L_h R_h}{R + j\omega L_h} + \frac{1}{j\omega C_h}}$$

Multiplizieren mit $R + j\omega L_h$:

$$= \frac{j\omega L_h R_h}{j\omega L_h R_h + \frac{R + j\omega L_h}{j\omega C_h}}$$

Multiplizieren mit $j\omega C_h$:

$$= \frac{(j\omega)^2 L_h C_h R_h}{R + j\omega L_h + (j\omega)^2 L_h C_h R_h}$$

Dividieren durch R_h:

$$= \frac{(j\omega)^2 L_h C_h}{1 + j\omega \frac{L_h}{R_h} + (j\omega)^2 L_h C_h} = \frac{-\omega^2 L_h C_h}{1 + j\omega \frac{L_h}{R_h} - \omega^2 L_h C_h}$$

3.3:

Mit $\left|\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\right| = \frac{|\underline{Z_1}|}{|\underline{Z_2}|}$ für $\underline{Z_2} \neq 0$:

$$H_h(\omega) = \sqrt{\frac{(-\omega^2 L_h C_h)^2}{(1-\omega^2 L_h C_h)^2 + (\omega \frac{L_h}{R_h})^2}}$$

3.4:

$$\underline{Z_{Ct}} \| \underline{Z_{Rt}} = \frac{\underline{Z_{Ct}}\,\underline{Z_{Rt}}}{\underline{Z_{Ct}} + \underline{Z_{Rt}}} \text{ mit } \underline{Z_{Ct}} = \frac{1}{j\omega C_t} \text{ und } \underline{Z_{Rt}} = R_t$$

Einsetzen und multiplizieren mit $j\omega C_t$ liefert:

$$\underline{Z_{Lt}} \| \underline{Z_{Rt}} = \frac{\frac{R_t}{j\omega C_t}}{R_t + \frac{1}{j\omega C_t}} = \frac{R_t}{1 + j\omega C_t R_t}$$

3.5:

Spannungsteilerregel:

$$\frac{\underline{u_{at}}}{\underline{u_e}} = \underline{H_t}(j\omega) = \frac{\underline{Z_{Rt}} \| \underline{Z_{Ct}}}{\underline{Z_{Lt}} + \underline{Z_{Rt}} \| \underline{Z_{Ct}}}$$

Einsetzen:

$$\underline{H_t}(j\omega) = \frac{\frac{R_t}{1+j\omega C_t R_t}}{\frac{R_t}{1+j\omega C_t R_t} + j\omega L_t}$$

Multiplizieren mit $1 + j\omega C_t R_t$:

$$\underline{H_t}(j\omega) = \frac{R_t}{R_t + j\omega L_t + (j\omega)^2 L_t C_t R_t}$$

Dividieren durch R_t:

$$\underline{H_t}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_t}{R_t} + (j\omega)^2 L_t C_t} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_t}{R_t} - j\omega^2 L_t C_t}$$

3.6:

Mit $\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$ für $\underline{Z}_2 \neq 0$:

$$H_t(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1-\omega^2 L_t C_t)^2 + (\omega \frac{L_t}{R_t})^2}}$$

3.7:

Kennfrequenz:

$$\frac{1}{\omega_{0h}^2} = L_h C_h \;\Rightarrow\; \omega_{0h} = \frac{1}{\sqrt{L_h C_h}} \;\Rightarrow\; f_{0h} = \frac{\omega_{0h}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_h C_h}} = 4,98\,\text{kHz}$$

Dämpfungsgrad:

$$\frac{2d_h}{\omega_{0h}} = \frac{L_h}{R_h} \;\Rightarrow\; d_h = \frac{\omega_{0h}}{2}\frac{L_h}{R_h} = \frac{1}{2\sqrt{L_h C_h}}\frac{L_h}{R_h} = \frac{1}{2R_h}\sqrt{\frac{L_h}{C_h}} = 0,587$$

Flankensteilheit:

$$\lim_{\omega\to 0} H_h(\omega) = \sqrt{\frac{(-\omega^2 L_h C_h)^2}{(1-\omega^2 L_h C_h)^2 + (\omega\frac{L_h}{R_h})^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{(1-\omega^2 L_h C_h)^2 + (\omega\frac{L_h}{R_h})^2}{(-\omega^2 L_h C_h)^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\omega^2 L_h C_h}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega R_h C_h}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega^2 L_h C_h}\right)^2}} = \omega^2 L_h C_h$$

$$20\log\left(\omega^2 L_h C_h\right) = 40\log(\omega) + 20\log(L_h C_h)$$

Der frequenzabhängige Term $40\log(\omega)$ wächst mit 40 dB pro Dekade.

3.8:

Kennfrequenz:

$$\frac{1}{\omega_{0t}^2} = L_t C_t \;\Rightarrow\; \omega_{0t} = \frac{1}{\sqrt{L_t C_t}} \;\Rightarrow\; f_{0t} = \frac{\omega_{0t}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_t C_t}} = 1{,}52\ \text{kHz}$$

Dämpfungsgrad:

$$\frac{2d_t}{\omega_{0t}} = \frac{L_t}{R_t} \;\Rightarrow\; d_t = \frac{\omega_{0t}}{2}\frac{L_t}{R_t} = \frac{1}{2\sqrt{L_t C_t}}\frac{L_t}{R_t} = \frac{1}{2R_t}\sqrt{\frac{L_t}{C_t}} = 0{,}596$$

Flankensteilheit:

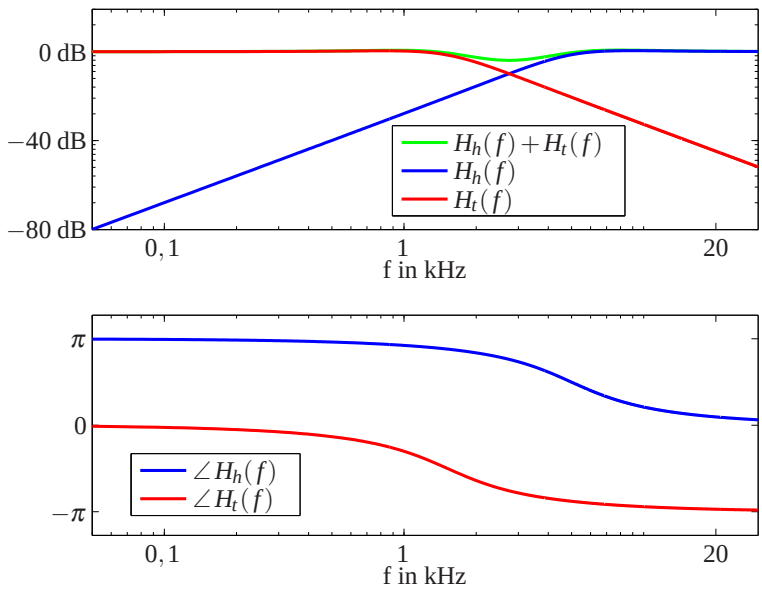
$$\lim_{\omega\to\infty} H_t(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1-\omega^2 L_t C_t)^2 + (\omega\frac{L_t}{R_t})^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{(-\omega^2 L_t C_t)^2}} = \frac{1}{\omega^2 L_t C_t}$$

$$20\log\left(\frac{1}{\omega^2 L_t C_t}\right) = -40\log(\omega) + 20\log(L_t C_t)$$

Der frequenzabhängige Term $-40\log(\omega)$ fällt mit 40 dB pro Dekade.

3.9: Frequenzgang

(Der Freqeuzgang war nicht Teil der Aufgabenstellung.)



Aufgabe 4: Gleichstromsteller, Kenngrößenberechnung

4.1:

Hochsetzsteller (siehe Skript)

4.2:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1-D} \tag{1}$$

$$\Rightarrow D = \frac{U_2 - U_1}{U_2} \tag{2}$$

$$\Rightarrow D = \frac{2}{3} \tag{3}$$

4.3:

$$I_2 = \bar{i}_2 \tag{4}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} \tag{5}$$

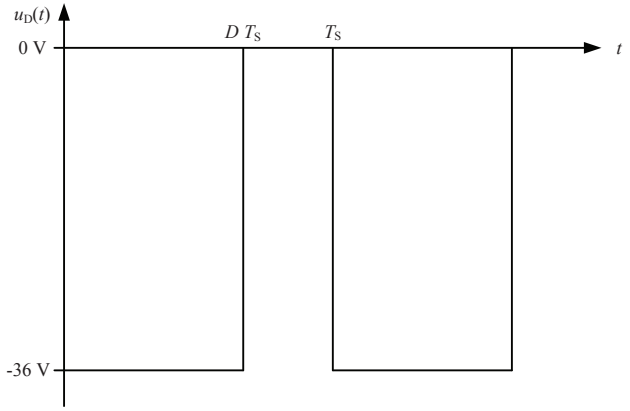
$$I_2 = 10\ \mathrm{A} \tag{6}$$

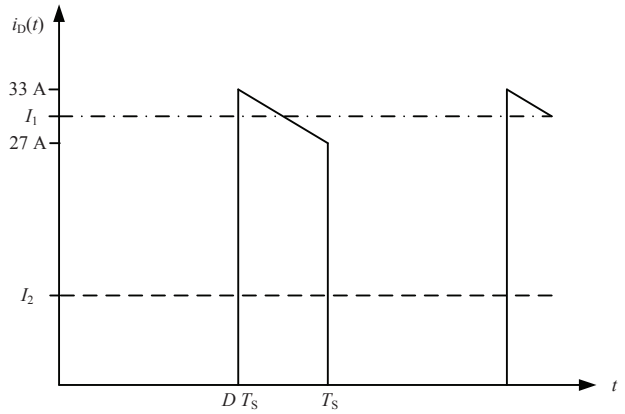
4.4:

$$P_1 = P_2 \tag{7}$$
$$I_1 = \frac{P_2}{U_1} = 30\ \text{A} \tag{8}$$
$$\Delta i_L = 0{,}2 I_1 \tag{9}$$
$$\Delta i_L = 6\ \text{A} \tag{10}$$
$$\Delta i_L = I_{L,max} - I_{L,min} \tag{11}$$
$$\Delta i_L = \left| -\frac{1}{L} U_1 T_e \right| \tag{12}$$
$$\Delta i_L = \left| -\frac{1}{L} U_1 D T_s \right| \tag{13}$$
$$L = \left| \frac{U_1}{\Delta i_L} D T_s \right| = \left| \frac{U_1 - U_2}{\Delta i_L} (1-D) T_s \right| \tag{14}$$
$$L = 66{,}67\ \mu\text{H} \tag{15}$$

4.5:

$$\bar{i}_D = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} i_D(t)\,dt \tag{16}$$
$$\bar{i}_D = I_2 \tag{17}$$





4.6:

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{T_S}\int_0^{T_S} U_D^2(t)dt} \tag{18}$$

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{T_S}\int_0^{DT_S} U_2^2 dt} \tag{19}$$

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{T_S} DT_S U_2^2} \tag{20}$$

$$U_D = \sqrt{D} U_2 \tag{21}$$

$$U_D = 29{,}39\ \text{V} \tag{22}$$

4.7:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{T_S}\int_0^{T_s} i_2(t)dt \\
I_2 &= \frac{\frac{1}{2}\Delta i_L T_a}{T_S} \\
I_2 &= \frac{\frac{1}{2}\Delta i_L (1-D) T_S}{T_S} \\
I_2 &= \frac{1}{2}\Delta i_L (1-D) \\
I_2 &= \frac{1}{2} 6\ \mathrm{A}\left(1-\frac{2}{3}\right) \\
I_2 &= 1\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

4.8:

$$\Delta u_C = U_{max} - U_{min} \tag{23}$$

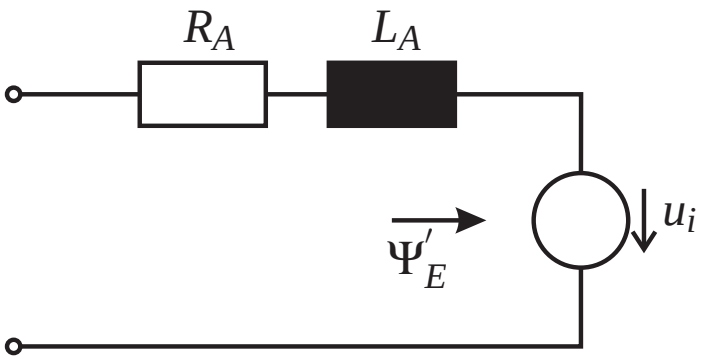
$$\Delta u_C = \frac{I_2 D T_S}{C} \tag{24}$$

$$C = \frac{I_2 D T_S}{\Delta u_C} \tag{25}$$

$$C = 185{,}16\ \mu\mathrm{F} \tag{26}$$

Aufgabe 5: Gleichstrommotor

5.1: Ersatzschaltbild



5.2: Nenndrehmoment und Nennstrom

Die elektrisch aufgenommene Leistung $P_{n,el}$ beträgt 5 W:

$$i_n = \frac{P_{n,el}}{U_n} = 0,417 \text{ A}$$

Die mechanische Leistung ergibt sich aus der elektrischen Leistung und dem Wirkungsgrad:

$$P_{n,mech} = P_{n,el} * \eta_n = 3 \text{ W}$$

Die mechanische Nennwinkelgeschwindigkeit beträgt:

$$\omega_n = n_n \frac{2\pi}{60} = 104,72 \text{ s}^{-1}$$

Daraus ergibt sich dann wiederum das Nenndrehmoment:

$$T_n = \frac{P_{n,mech}}{\omega_n} = 0,02865 \text{ Nm}$$

5.3: Ankerwiderstand, Erregerfluss, Ankerinduktivität

Der Erregerfluss ergibt sich aus dem Drehmoment:

$$\psi'_E = \frac{T_n}{i_n} = 68,75 \text{ mVs}$$

Die induzierte Spannung beträgt:

$$u_{i,n} = \omega_n \psi'_E = 7,2 \text{ V}$$

Die restliche Spannung fällt im stationären Betrieb über dem Widerstand R_A ab:

$$R_a = \frac{U_n - u_{i,n}}{i_n} = 11,52\ \mathrm{V}$$

Das Drehmoment ist über den konstanten Erregerfluss proportional zum Ankerstrom, daher entspricht die Zeitkonstante, die beim Drehmomentensprung ermittelt wurde der elektrischen Zeitkonstante der Maschine:

$$\tau = \frac{L_A}{R_A} = 4\ \mathrm{ms} \qquad \Leftrightarrow \qquad L_A = \tau R_A = 46,1\ \mathrm{mH}$$

5.4: Drehzahl-Dremoment-Kennlinie

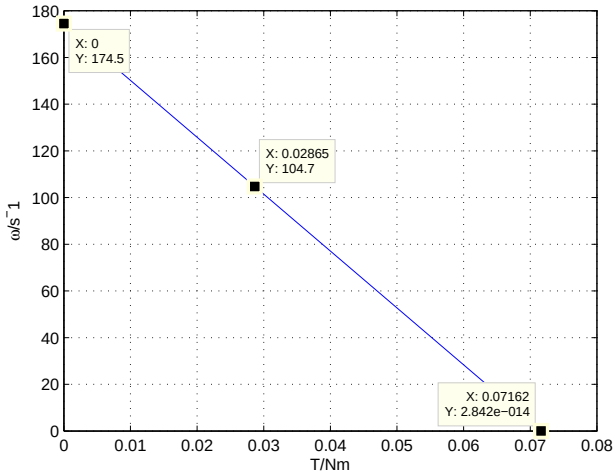
Die Spannungsgleichung lautet:

$$U = R_A i_A + u_i = R_A \frac{T}{\psi'_E} + u_i = R_A \frac{T}{\psi'_E} + \omega \psi'_E$$

Umgestellt nach ω:

$$\omega = \frac{U}{\psi'_E} - R_A \frac{T}{(\psi'_E)^2}$$

5.5: Diagramm



Ausgesuchte Punkte

Siehe Diagramm.