Musterlösung Klausur Grundlagen der Elektrotechnik B
23.09.2005

Aufgabe 1: Effektivwertberechnung

1. $u(\omega t) = 2\,\mathrm{V} + 4\,\mathrm{V}\sin(\omega\, t)$
2. $U = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^2(\omega\, t)\,\mathrm{d}(\omega\, \mathrm{t})} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\mathrm{V} + 4\,\mathrm{V}\sin(\omega\, t)\right]^2 \mathrm{d}(\omega\, t)} = \sqrt{12\,\mathrm{V}^2} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{V} \approx 3{,}464\,\mathrm{V}$
3. $k_\mathrm{s} = \frac{\hat{u}}{U} = \frac{6\,\mathrm{V}}{2\sqrt{3}\,\mathrm{V}} = \sqrt{3} \approx 1{,}731$

Aufgabe 2: Ausgleichsvorgang

1. $i_\mathrm{L}(t = 0^-) = 0$ (Spule L ist über R und R2 abmagnetisiert)
2. $i_\mathrm{L}(t = 0^+) = 0$ (Strom in Spule kann sich nicht sprungartig ändern)
3. $i_\mathrm{L}(t \to \infty) = \frac{U_0}{R_1 + R}$ (kein Spannungsabfall über der Spule im stationären Zustand)
4. Maschen- und Bauteilgleichungen:
   $u_\mathrm{L} = L\dot{i}_\mathrm{L}; \quad U_0 = (R_1 + R)i_\mathrm{L} + u_\mathrm{L} = (R_1 + R)i_\mathrm{L} + L\dot{i}_\mathrm{L}$
5. Lösung der homogenen DGL:
   Ansatz: $i_\mathrm{Lh} = k\mathrm{e}^{-t/\tau}$
   $0 = (R_1 + R)k\mathrm{e}^{-t/\tau} - L\frac{k}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{L}{R_1 + R}$
   partikuläre Lösung für $t \to \infty$:
   $U_0 = (R_1 + R)i_\mathrm{Lp} + 0 \Leftrightarrow i_\mathrm{Lp} = \frac{U_0}{R_1 + R}$
   Gesamtlösung: $i_\mathrm{L}(t) = i_\mathrm{Lh} + i_\mathrm{Lp}$
   Bestimmung der Konstanten k aus der Anfangsbedingung für $i_\mathrm{L}(0^+) = 0$:

$$i_L(0^+) = 0 = k + \frac{U_0}{R_1 + R} \Leftrightarrow k = -\frac{U_0}{R_1 + R}$$

Damit: $i_L(t) = \frac{U_0}{R_1 + R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ mit $\tau = \frac{L}{R_1 + R}$

6. Aus der inhomogenen DGL wird eine homogene DGL, da nur die Spannungsquelle U_0 herausgenommen wird:
   $0 = (R_1 + R)i_L + L\dot{i}_L$
   $i_L(t = t_1^+) = I_0; \quad i_L(t \to \infty) = 0$
   Begründung: Wie beim ersten Schaltvorgang

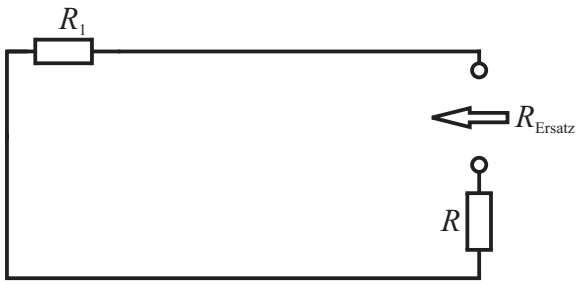
7. $i_{L2}(t) = k_2 e^{-(t-t_1)/\tau}; \quad \tau = \frac{L}{R_2 + R}$
   $i_{L2}(t_1^+) = I_0 = k_2 \Rightarrow i_{L2}(t) = I_0 e^{-(t-t_1)/\tau}$

8. Es handelt sich um einen Tiefsetzsteller.

Alternativlösung zu 5.: Anfangs-Endwert-Methode

a) Bestimmung des Anfangs- und Endwertes:
   $i_0 = i_L(t = 0^+) = 0$
   $i_\infty = i_L(t \to \infty) = \frac{U_0}{R_1 + R}$
   Begründung: Strom in der Induktivität kann sich nicht sprungartig ändern, daher $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$; kein Spannungsabfall über L im stationären Zustand → i_∞.

b) Errechnung des Ersatzwiderstandes zur Bestimmung von τ:



$R_{Ersatz} = R_1 + R$

c) Berechnung von τ: $\tau = L / R_{Ersatz} = \frac{L}{R_1 + R}$

d) Stromverlauf: $i_L(t) = i_\infty + (i_0 - i_\infty)e^{-t/\tau} = \frac{U_0}{R_1 + R} + \left(0 - \frac{U_0}{R_1 + R}\right)e^{-t/\tau} = \frac{U_0}{R_1 + R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Aufgabe 3: Komplexe Wechselstromrechnung, Leistung

1. $P_{\text{Gesamt}} = S_{\text{Gesamt}} \cos\varphi_1 = UI\cos\varphi_1$

   $\cos\varphi_1 = \dfrac{P_{\text{Gesamt}}}{UI} = \dfrac{70\text{ W}}{230\text{ V}\cdot 0{,}8\text{ A}} = 0{,}380; \quad \varphi_1 = \arccos(0{,}380) = 67{,}639°$

2. P_{L} wird an R verbraucht: $U_{\text{R}} = \dfrac{P_{\text{L}}}{I} = \dfrac{58\text{ W}}{0{,}8\text{ A}} = 72{,}5\text{ V}$.

   Wird $\underline{I}$ in die reelle Achse gelegt ($\underline{I} = I$) → $\underline{U}_{\text{R}} = 72{,}5$ V
   Restliche Wirkleistung wird an R_{D} verbraucht:

   $\underline{U}_{\text{RD}} = U_{\text{RD}} = \dfrac{P_{\text{Gesamt}} - P_{\text{L}}}{I} = \dfrac{70\text{ W} - 58\text{ W}}{0{,}8\text{ A}} = 15{,}0\text{ V}$

   Die Blindleistung des Systems wird an L_{D} umgesetzt:

   $Q = UI\sin\varphi_1 = U_{\text{LD}}I \Leftrightarrow U_{\text{LD}} = \dfrac{Q}{I} = U\sin\varphi_1 = 230\text{ V}\sin(67{,}639°) = 212{,}705\text{ V}$

   Die Spannung $\underline{U}_{\text{LD}}$ steht senkrecht auf dem Spulenstrom $\underline{I}$: $\underline{U}_{\text{LD}} = \text{j } 212.705$ V

   alternativer Weg: $\underline{U}_{\text{LD}}$ steht senkrecht auf $\underline{I}$, $\underline{U}_{\text{R}}$ und $\underline{U}_{\text{RD}}$, daher gilt nach Pythagoras:

   $$|\underline{U}|^2 = \left(|\underline{U}_{\text{RD}}| + |\underline{U}_{\text{R}}|\right)^2 + |\underline{U}_{\text{LD}}|^2$$

   $$\Leftrightarrow \underline{U}_{\text{LD}} = \text{j}|\underline{U}_{\text{LD}}| = \text{j}\sqrt{|\underline{U}|^2 - \left(|\underline{U}_{\text{RD}}| + |\underline{U}_{\text{R}}|\right)^2} = \text{j}\sqrt{(230\text{ V})^2 - (15\text{ V} + 72{,}5\text{ V})^2} = \text{j}\,212{,}706\text{ V}$$

   Damit ergibt sich $\underline{U}_{\text{D}} = \underline{U}_{\text{RD}} + \underline{U}_{\text{LD}} = 15\text{ V} + \text{j}\,212{,}706\text{ V}$

3. $\varphi_{\text{D}} = \varphi_{\text{U}_{\text{D}}} - \varphi_{\text{I}} = \arctan\left(\dfrac{U_{\text{LD}}}{U_{\text{RD}}}\right) - 0° = \arctan\left(\dfrac{212{,}706\text{ V}}{15\text{ V}}\right) = 85{,}966°$

   $\cos\varphi_{\text{D}} = 0{,}070$

4. $Q_{\text{D}} = |\underline{U}_{\text{LD}}||\underline{I}| = 212{,}706\text{ V}\cdot 0{,}8\text{ A} = 170{,}165\text{ VA}$

5. $L_{\text{D}} = \dfrac{|\underline{U}_{\text{LD}}|}{\omega\,|\underline{I}|} = \dfrac{212{,}706\text{ V}}{2\pi 50\text{ Hz}\cdot 0{,}8\text{ A}} = 846{,}330\text{ mH}$

6. Die Schaltung zeigt induktives Verhalten ($\varphi_1 > 0$), daher Kompensation mit parallel geschaltetem Kondensator C:
   Wirkleistung P im System bleibt erhalten, aber Schein- und Blindleistung ändern sich: Die neue Blindleistung Q_2 ergibt sich zu

   $Q_2 = S_2\sin\varphi_2 = \dfrac{P_{\text{Gesamt}}}{\cos\varphi_2}\sin\varphi_2 = P_{\text{Gesamt}}\tan\varphi_2 = 70\text{ W}\tan(\arccos 0{,}95) = 23{,}008\text{ VA}$

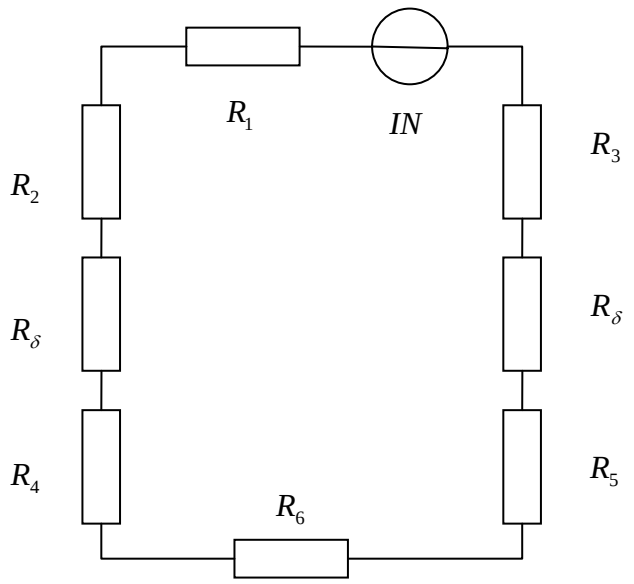
   Die Differenz zu Q wird im Kondensator C umgesetzt:
   $\Delta Q = Q_2 - Q = 23{,}008\text{ VA} - 170{,}165\text{ VA} = -147{,}157\text{ VA}$
   Damit ergibt sich:

   $\Delta Q = Q_{\text{C}} = -U_{\text{C}}I_{\text{C}} = \dfrac{-U^2}{|\underline{Z}_{\text{C}}|} = -U^2\omega C$

   $\Leftrightarrow C = \dfrac{-\Delta Q}{\omega U^2} = \dfrac{+147{,}157\text{ VA}}{2\pi 50\text{ Hz}\,(230\text{ V})^2} = 8{,}855\,\mu\text{F}$

Aufgabe 4: Magnetischer Kreis

1. Ersatzschaltbild



2. Reluktanzen

$$R_m = \frac{l_m}{A_m \mu_o \mu_{rm}}$$

R_i	A_m	l_m	R_m
R_1	$4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$	$0{,}09\ \mathrm{m}$	$17{,}905 \cdot 10^6\ \mathrm{A/Vs}$
$R_2 = R_3$	$2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$	$0{,}03\ \mathrm{m}$	$11{,}937 \cdot 10^6\ \mathrm{A/Vs}$
$R_4 = R_5$	$2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$	$0{,}005\ \mathrm{m}$	$1{,}989 \cdot 10^6\ \mathrm{A/Vs}$
R_6	$2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$	$0{,}09\ \mathrm{m}$	$35{,}810 \cdot 10^6\ \mathrm{A/Vs}$

Magnetischer Widerstand im Material: $R_0 = R_1 + 2R_2 + 2R_4 + R_6 = 8{,}078 \cdot 10^6\ \mathrm{A/Vs}$

Magnetischer Widerstand eines Luftspalts: $R_\delta = \dfrac{\delta}{A_\delta \mu_0}$

Magnetischer Widerstand des Gesamtluftspalts: $R_{2\delta} = 2R_\delta = \dfrac{2\delta}{A_\delta \mu_0}$

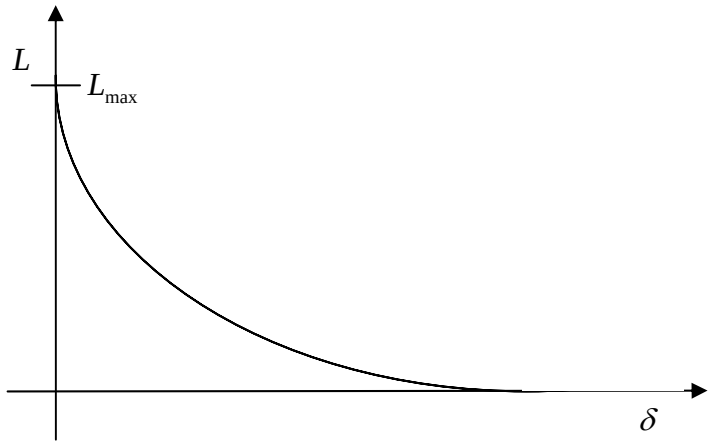
3. Induktivität

a) $L = \dfrac{N^2}{R_m} = \dfrac{N^2}{R_0 + R_\delta} = \dfrac{N^2 A_\delta \mu_0}{R_0 A_\delta \mu_0 + 2\delta}$

b) L maximal für $\delta = 0$ vgl. a)

c) $L_{\max} = \dfrac{N^2}{R_0} = 3{,}065\ \mathrm{mH}$

d)



4.

$$F = 2A_\delta \Delta p \quad \text{mit} \quad \Delta p = \frac{1}{2}\left(b_l h_l - b_m h_m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\mu_0} - \frac{b^2}{\mu_0 \mu_r}\right) = \frac{b^2}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)$$

$$b = \frac{\phi}{A_\delta} = \frac{IN}{R_m A_\delta} \qquad F = mg$$

$$F = \left(\frac{IN}{R_m}\right)^2 \frac{1}{A_\delta \mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \quad \Rightarrow \quad R_m = IN\sqrt{\frac{1 - 1/\mu_r}{A_\delta \mu_0 mg}}$$

$$R_m = 133{,}809 \cdot 10^6 \ \mathrm{A/Vs} = R_0 + R_\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \left(R_{m-} - R_0\right)\frac{A_\delta \mu_0}{2} = 6{,}56 \ \mathrm{mm}$$

5. $\mu_r \to \infty \Rightarrow R_0 \to 0$

a) $F \sim I^2$ d.h. $I \cdot 2 \Rightarrow m \cdot 4$

b) $F \sim N^2$ d.h. $N \cdot 2 \Rightarrow m \cdot 4$

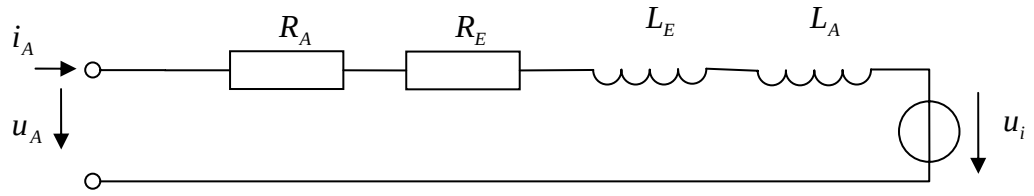
c) $F \sim I^2$ d.h. Kraft und damit Masse sind unabhängig von der Stromrichtung

d) $\delta = 0 \Rightarrow R_m = 0 \Rightarrow F \to \infty \Rightarrow m \to \infty$
$\Rightarrow \mu_r \to \infty$ ist eine unrealistische Näherung

Aufgabe 5: Gleichstrommaschine

1. Kennlinie und Betriebsverhalten

a) Ersatzschaltbild



b) Maschengleichung

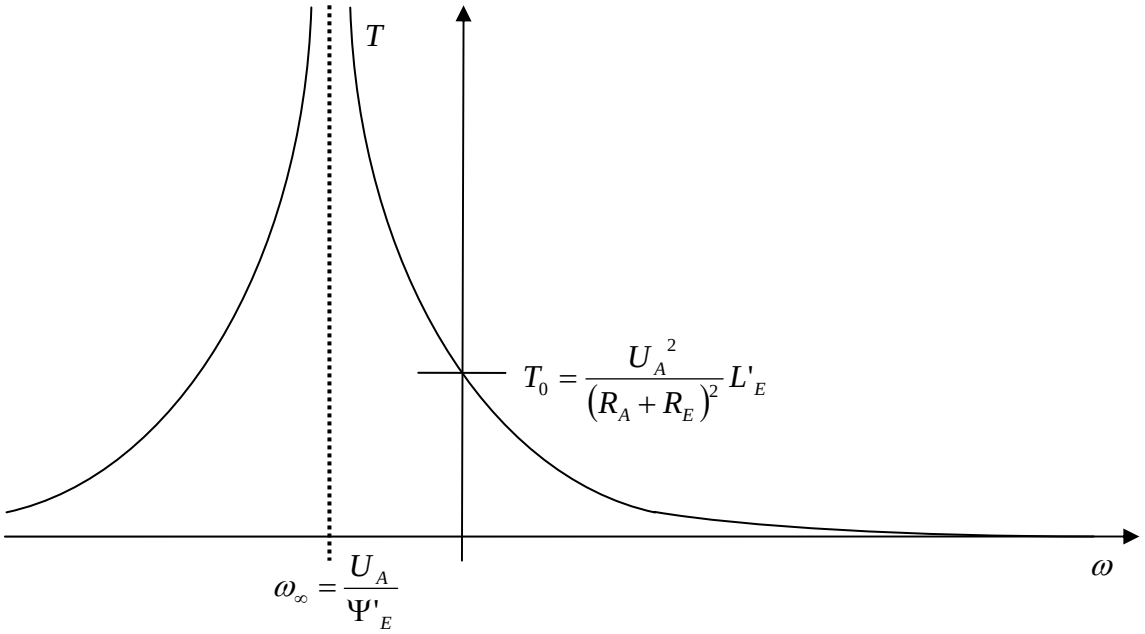
$$u_A = i_A(R_A + R_E) + \frac{di_A}{dt}(L_E + L_A) + u_i$$

c) Kennlinie $\omega = f(T)$

$$\omega L_E' I_A = U_i \qquad I_A^2 L_E' = T \Rightarrow I = \sqrt{\frac{T}{L_E'}}$$

$$U_A = (R_A + R_E) I_A + U_i = \sqrt{\frac{T}{L_E'}}(R_A + R_E + \omega L'_E) \Rightarrow T = \frac{U_A^2}{(R_A + R_E + \omega L'_E)^2} L'_E$$

d) Diagramm



2. Berechnungen zur Gleichstromreihenschlussmaschine

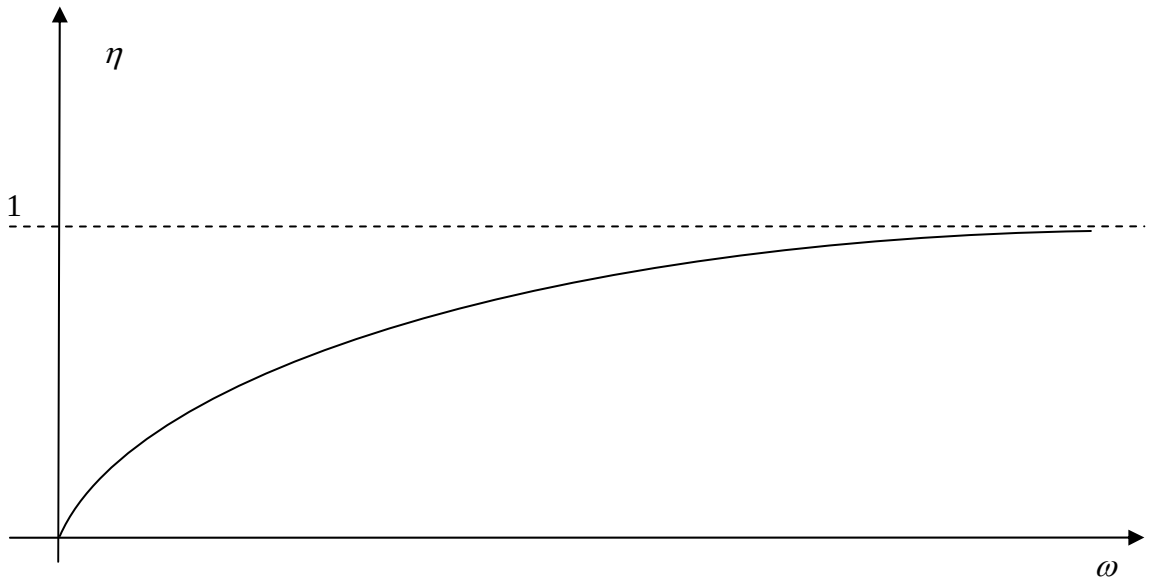
a) $T_N = I^2{}_A L'_E = 20\,\text{Nm}$

$P_N = T_N \omega_N = 5\,\text{kW}$

$\eta = \dfrac{P_N}{U_N I_N} = 83{,}33\%$

b) $\eta = \dfrac{U_i I_A}{U_i I_A + (R_A + R_E) I_A{}^2} = \dfrac{U_i}{U_i + (R_A + R_E) I_A} = \dfrac{\omega L'_E I_A}{\omega L'_E I_A + (R_A + R_E) I_A} = \dfrac{\omega L'_E}{\omega L'_E + (R_A + R_E)}$

$\eta_{\max} \to 1$ bei $\omega_{\max} \to \infty$



c) $I_{A1} = \sqrt{\dfrac{T_1}{L'_E}} = 22{,}36\,\text{A}$ $I_{A1} = \sqrt{\dfrac{T_1}{L'_E}} = 22{,}36\,\text{A}$ $U_{i1} = U_A - I_{A1}(R_A + R_E) = 244{,}1\,\text{V}$

$\omega_1 = \dfrac{U_{i1}}{I_{A1} L'_E} = 218{,}33\,1/\text{s}$

d) $R_v = \dfrac{U_N}{5 I_N} - R_A - R_E = 0{,}5\,\Omega$

e) $U_{i2} = U_N - 5 I_N (R_A + R_E) = 50\,\text{V}$ $\omega_2 = \dfrac{U_{i2}}{5 I_N L'_E} = 10\,1/\text{s} \Rightarrow n_2 = 95{,}5\,1/\text{min}$

f) Durch Umpolen von Erreger- oder Ankerwicklung.