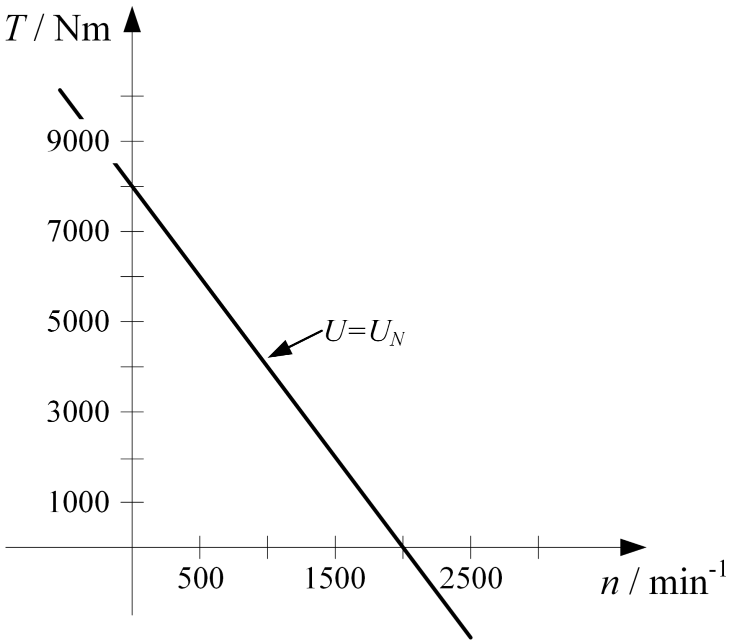
Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik
Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Musterlösung Grundlagen der Elektrotechnik B

27.03.2017

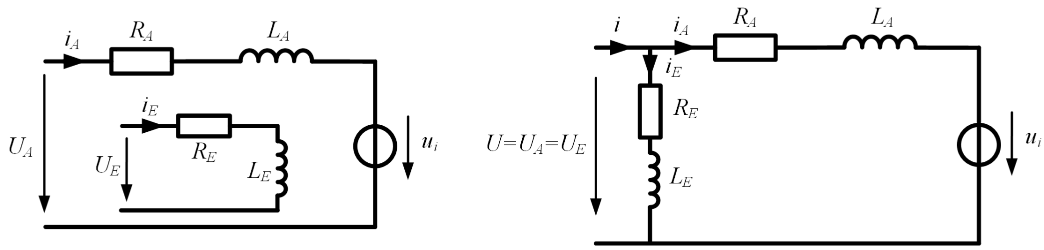
Aufgabe 1: Gleichstrommaschine **(20 Punkte)**

Gegeben sei eine Gleichstrommaschine mit der dargestellten Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik. Die Nennspannung betrage $U_\mathrm{N} = 400\,\mathrm{V}$, die Nenndrehzahl $n_\mathrm{N} = 1952\,\mathrm{min}^{-1}$.



1. Bei welchen Schaltungsarten zeigt der Gleichstrommotor das skizzierte Drehmoment-Drehzahl-Verhalten? Zeichnen Sie das dynamische Ersatzschaltbild einer Schaltungsart. (4 Punkte)

   - Nebenschlussmaschine
   - Fremderregte \ permanenterregte Gleichstrommaschine



2. Bestimmen Sie den effektiven Erregerfluss Ψ'_E, der sich bei Nennspannung ergibt. (4 Punkte)

$$\Psi'_\mathrm{E} = \frac{U_\mathrm{N}}{\omega_0} = \frac{U_\mathrm{N}}{2\pi n_0} = \frac{400\mathrm{V}}{2\pi\ 2000\,{}^1\!/\!_\mathrm{s}} 60 = 1{,}91\mathrm{Vs} \tag{1.1}$$

3. Wie groß ist der Ankerwiderstand R_A des Motors? (4 Punkte)

$$T_0 = \frac{\Psi'_\mathrm{E}}{R_\mathrm{A}} U_\mathrm{A} \Leftrightarrow R_\mathrm{A} = \frac{\Psi'_\mathrm{E}}{T_0} U_\mathrm{N} = \frac{1{,}91\mathrm{Vs}}{8000\mathrm{Nm}} 400\mathrm{V} = 95{,}5\mathrm{m}\Omega \tag{1.2}$$

4. Welcher Ankerstrom I_{AN} und welches Drehmoment T_{N} stellen sich im Nennpunkt ein? (5 Punkte)

$$\omega_{\mathrm{N}} = \frac{2\pi n_{\mathrm{N}}}{60} = 204{,}41\,{}^{1}/_{\mathrm{s}} \tag{1.3}$$

$$U_{\mathrm{N}} = R_{\mathrm{A}} I_{\mathrm{AN}} + \Psi'_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{N}} \Leftrightarrow I_{\mathrm{AN}} = \frac{U_{\mathrm{N}} - \Psi'_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{N}}}{R_{\mathrm{A}}} = 100{,}53\mathrm{A} \tag{1.4}$$

$$T_{\mathrm{N}} = \Psi'_{\mathrm{E}} I_{\mathrm{AN}} = 192\mathrm{Nm} \tag{1.5}$$

5. Nehmen Sie an, dass Erreger- und Ankerkreis durch dieselbe Spannungsquelle gespeist werden. Dann fließe im Nennpunkt der Gesamtstrom $I_{\mathrm{N}} = 120\,\mathrm{A}$. Wie groß ist der ohmsche Widerstand R_{E} der Erregerwicklung? (3 Punkte)

$$I_{\mathrm{E}} = I_{\mathrm{N}} - I_{\mathrm{AN}} \tag{1.6}$$

$$R_{\mathrm{E}} = \frac{U_{\mathrm{E}}}{I_{\mathrm{E}}} = \frac{U_{\mathrm{N}}}{I_{\mathrm{E}}} = \frac{U_{\mathrm{N}}}{I_{\mathrm{N}} - I_{\mathrm{AN}}} = \frac{400\mathrm{V}}{120{,}00\mathrm{A} - 100{,}53\mathrm{A}} = 20{,}55\Omega \tag{1.7}$$

Aufgabe 2: Gleichstromsteller **(20 Punkte)**

1. Der Effektivwert berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
I &= \sqrt{\frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} i^2(t)\mathrm{d}t} \\
I &= \sqrt{\frac{1}{100\mathrm{\mu s}}\int_0^{60\mathrm{\mu s}}\left(\frac{5\mathrm{A}}{60\mathrm{\mu s}}t+10\mathrm{A}\right)^2\mathrm{d}t} \\
I &= \sqrt{\frac{1}{100\mathrm{\mu s}}\int_0^{60\mathrm{\mu s}}\left(\frac{25\mathrm{A}^2}{60\mathrm{\mu s}}t^2+\frac{100\mathrm{A}^2}{60\mathrm{\mu s}}t+100\mathrm{A}\right)\mathrm{d}t} \\
I &= \sqrt{\frac{1}{100\mathrm{\mu s}}\left(\frac{1}{3}\frac{25\mathrm{A}^2}{60\mathrm{\mu s}}t^3+\frac{50\mathrm{A}^2}{60\mathrm{\mu s}}t^2+100\mathrm{A}t\right)\Bigg|_0^{60\mathrm{\mu s}}} \\
I &= \sqrt{\frac{1}{100\mathrm{\mu s}}\left(\frac{1}{3}\frac{25\mathrm{A}^2}{60\mathrm{\mu s}}(60\mathrm{\mu s})^3+\frac{50\mathrm{A}^2}{60\mathrm{\mu s}}(60\mathrm{\mu s})^2+100\mathrm{A}60\mathrm{\mu s}\right)} \\
I &= \sqrt{\frac{1}{100\mathrm{\mu s}}\left(500\mathrm{A}^2\mathrm{\mu s}+3000\mathrm{A}^2\mathrm{\mu s}+6000\mathrm{A}^2\mathrm{\mu s}\right)} \\
I &= \sqrt{95\mathrm{A}^2} \\
I &= 9{,}75\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

2. Der Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ werden am Transistor gemessen.
   Bei der Schaltungstopologie handelt es sich um eine Hochsetzsteller.

3. Die GröSSen lassen sich aus dem Diagramm ablesen oder berechnen.

$$
\begin{aligned}
T_s &= 100\mathrm{\mu s} \\
f_s &= \frac{1}{T_s} = 10\mathrm{kHz} \\
T_e &= 60\mathrm{\mu s} \\
T_a &= T_s - T_e = 40\mathrm{\mu s} \\
D &= \frac{T_e}{T_s} = 0{,}6 \\
U_2 &= 120\mathrm{V} \\
U_1 &= U_2(1-D) = 48\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

4. Die Induktivtät der Drossel berechnet sich aus der der Maschengleichung für den eingeschalteten Transistor:

$$U_1 - U_L = 0$$
$$U_1 = U_L = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow L = \frac{U_1 \Delta t}{\Delta i}$$
$$L = \frac{48\mathrm{V}60\mathrm{\mu s}}{5\mathrm{A}}$$
$$L = 576\mathrm{\mu H}$$

5. Der Stromverlauf ist in der Abbildung 2.1 zu finden.

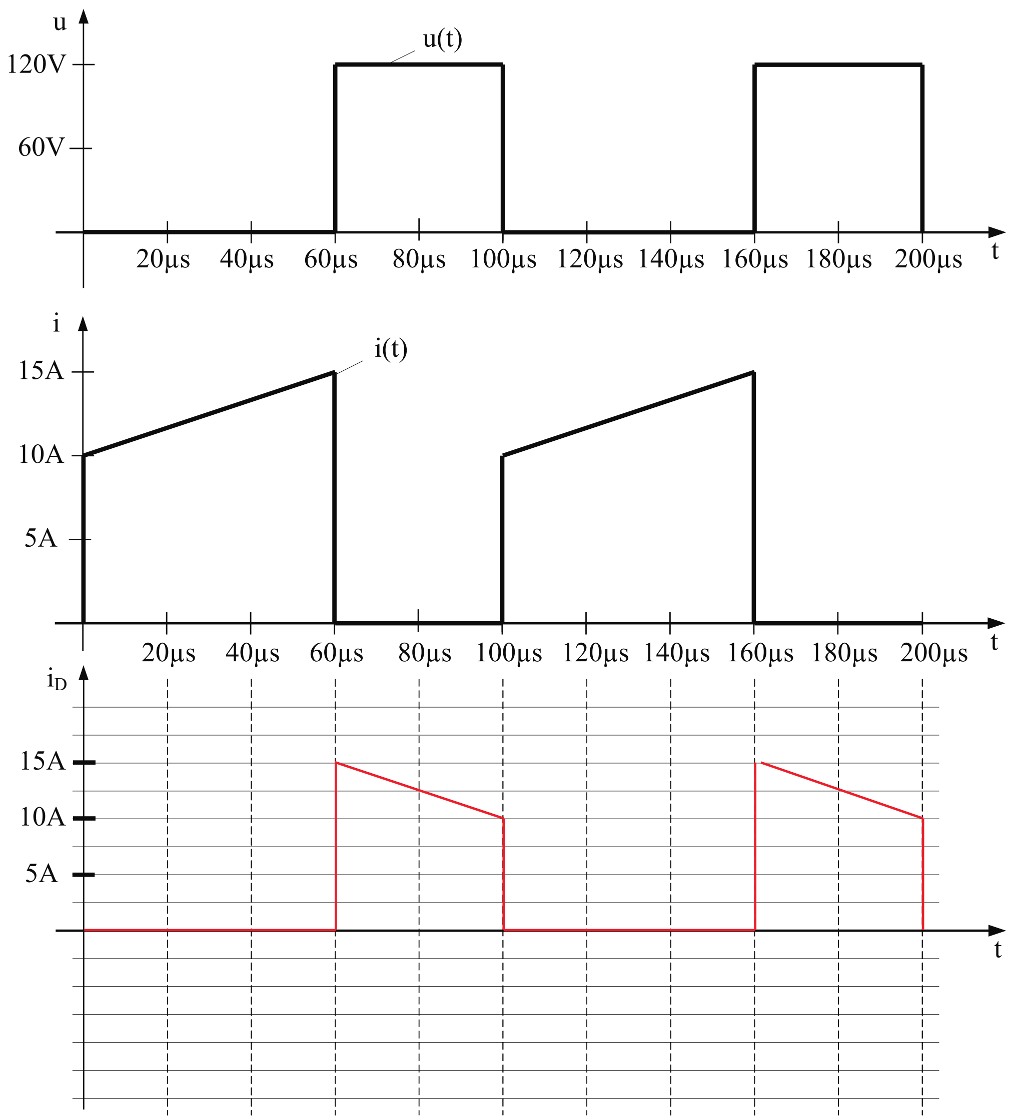


Abbildung 2.1: Stromverlauf durch Diode

6. Der Mittelwert des Diodenstromes ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\bar{i}_D &= \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} i_D(t)\mathrm{d}t \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\int_0^{40\mu\mathrm{s}} \left(-\frac{5\mathrm{A}}{40\mu\mathrm{s}}t + 15\mathrm{A}\right)\mathrm{d}t \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\left(-\frac{5\mathrm{A}}{2\,40\mu\mathrm{s}}t^2 + 15\mathrm{A}\,t\right)\Big|_0^{40\mu\mathrm{s}} \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\left(-\frac{5\mathrm{A}}{2\,40\mu\mathrm{s}}(40\mu\mathrm{s})^2 + 15\mathrm{A}\,40\mu\mathrm{s}\right) \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\left(-100\mathrm{A}^2\mu\mathrm{s} + 600\mathrm{A}^2\mu\mathrm{s}\right) \\
\bar{i}_D &= 5\mathrm{A}
\end{aligned}$$

7. Der Lastwiderstand R kann aus der Ausgangsspannung U_2 und dem Mittelwert des Diodenstromes $\bar{I}_D$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
R &= \frac{U_2}{I_2} \\
R &= \frac{U_2}{\bar{i}_D} \\
R &= \frac{120\mathrm{V}}{5\mathrm{A}} \\
R &= 24\Omega
\end{aligned}$$

8. Die Schaltung befinde sich an der Lückgrenze. Für den Spulenstrom gilt hierbei: $i_L(T_S) = i_D(T_S) = 0$.

$$\begin{aligned}
\bar{i}_D &= \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} i_D(t)\mathrm{d}t \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\int_0^{40\mu\mathrm{s}} \left(-\frac{5\mathrm{A}}{40\mu\mathrm{s}}t + 5\mathrm{A}\right)\mathrm{d}t \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\left(-\frac{5\mathrm{A}}{2\,40\mu\mathrm{s}}t^2 + 5\mathrm{A}t\right)\Big|_0^{40\mu\mathrm{s}} \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}\left(-\frac{5\mathrm{A}}{240\mu\mathrm{s}}(40\mu\mathrm{s})^2 + 5\mathrm{A}\,40\mu\mathrm{s}\right) \\
\bar{i}_D &= \frac{1}{100\mu\mathrm{s}}(-100\mathrm{A}^2\mu\mathrm{s} + 200\mathrm{A}^2\mu\mathrm{s}) \\
\bar{i}_D &= 1\mathrm{A} \\
\Rightarrow R &= \frac{120\mathrm{V}}{1\mathrm{A}} \\
R &= 120\Omega
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Komplexe Wechselstromrechnung (20 Punkte)

Gegeben sei ein System bestehend aus Spannungsquelle, zwei Spulen und zwei Kondensatoren. Es darf das vereinfachte Ersatzschaltbild aus Abbildung 3.1 verwendet werden:

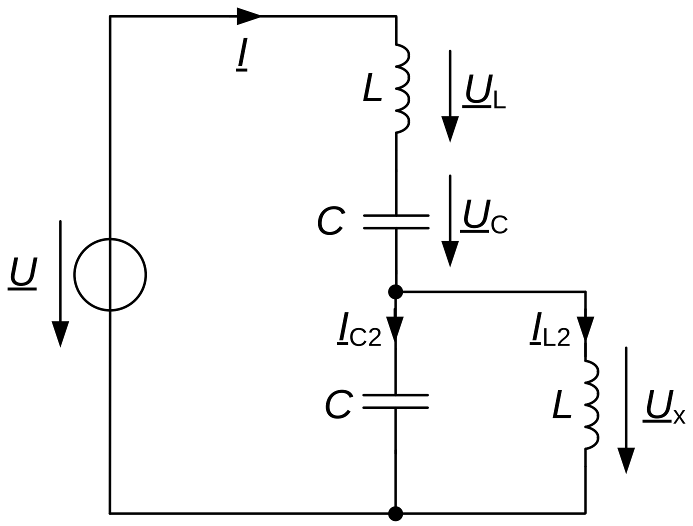


Abbildung 3.1: Ersatzschaltbild

Berechnen Sie alle Ergebnisse allgemein, ohne konkrete Zahlenwerte.

1. Leiten Sie die Impedanz $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ der Schaltung in Abhängigkeit von L, C und ω her. (6 Punkte)

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \frac{L/C}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \left(\frac{2 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \right) \tag{3.2}$$

2. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für Spannungen und Ströme der Schaltung. (6 Punkte)

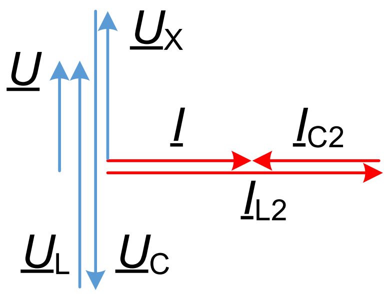


Abbildung 3.2: Zeigerdiagramm

3. Leiten Sie die Spannung $\underline{U}_\mathrm{x}$ in Abhängigkeit von $\underline{U}$, C, L und ω her. (6 Punkte)

$$\underline{U}_\mathrm{x} = \underline{U}\frac{1}{3-\omega^2 LC - \frac{1}{\omega^2 LC}} \tag{3.3}$$

4. Geben Sie die Spannung $\underline{U}_\mathrm{x}$ an für den Fall $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (1 Punkt)

$$\underline{U}_\mathrm{x} = \underline{U} \tag{3.4}$$

5. Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$ für den Fall $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (1 Punkt)

$$\underline{I} = 0\,\mathrm{A} \tag{3.5}$$

Aufgabe 4: Ausgleichsvorgang **(20 Punkte)**

Gegeben sei die in Abbildung 4.1 dargestellte Schaltung:

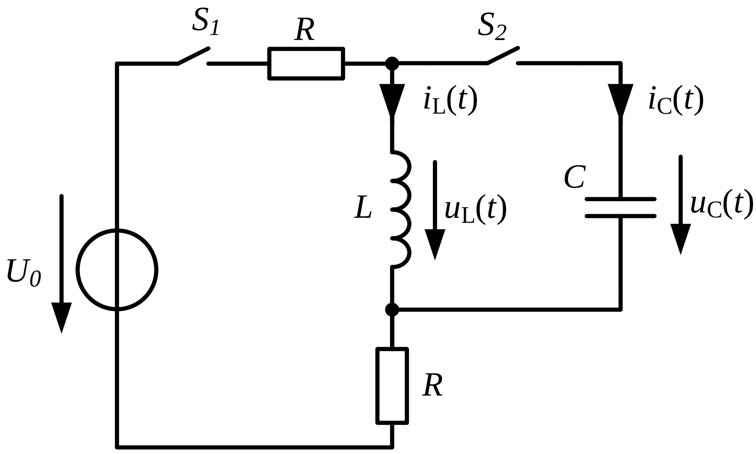


Abbildung 4.1: Schaltbild zu Aufgabe 4

Die Schalter S_1 und S_2 sind für $t \leq 0$ s geöffnet. Die Spule L sowie der Kondensator C sind vollständig entladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Der Schalter S_2 bleibt weiterhin geöffnet. U_0 ist eine Gleichspannung.

1. Geben Sie die Werte der Grösen $i_\mathrm{L}(t = 0^-)$, $u_\mathrm{L}(t = 0^-)$ und $u_\mathrm{C}(t = 0^-)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

   $i_\mathrm{L}(t = 0^-) = 0$, da die Spule laut Aufgabenstellung vollständig entladen ist.

   $u_\mathrm{L}(t = 0^-) = 0$, da Kondensator und Spule laut Aufgabenstellung vollständig entladen sind und Schalter S_1 geöffnet ist.

   $u_\mathrm{C}(t = 0^-) = 0$, da der Kondensator laut Aufgabenstellung vollständig entladen ist.

2. Geben Sie die Werte der Grösen $i_\mathrm{L}(t = 0^+)$, $u_\mathrm{L}(t = 0^+)$ und $u_\mathrm{C}(t = 0^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

   $i_\mathrm{L}(t = 0^+) = 0$, da sich der Strom durch eine Spule nicht sprungförmig ändern kann.

   $u_\mathrm{L}(t = 0^+) = U_0$, da der Strom noch Null ist und daher keine Spannung an den Widerständen abfällt. U_0 muss also vollständig an u_L anliegen.

   $u_\mathrm{c}(t = 0^+) = 0$, da sich die Spannung am Kondensator nicht sprungartig ändern kann.

3. Leiten Sie die Differentialgleichung für den Strom $i_\mathrm{L}(t)$ her! (3 Punkte)

   Bauteilgleichungen:

$$u_\mathrm{R}(t) = i_\mathrm{L}(t)2R$$
$$u_\mathrm{L}(t) = L\frac{di_\mathrm{L}(t)}{dt}$$

   Maschengleichung:

$$U_0 = u_\mathrm{L}(t) + u_\mathrm{R}(t)$$

   Einsetzen und Umstellen:

$$U_0 = L\frac{di_\mathrm{L}(t)}{dt} + i_\mathrm{L}(t)2R$$
$$\frac{di_\mathrm{L}(t)}{dt} + \frac{2R}{L}i_\mathrm{L}(t) = \frac{U_0}{L}$$

4. Lösen Sie die Differenzialgleichung. Wie groß ist die maßgebliche Zeitkonstante der Schaltung? (4 Punkte)

   Allgemeine Lösung des homogenen Teils $\frac{di_{\mathrm{Lh}}(t)}{dt} + \frac{2R}{Lh} i_{\mathrm{L}}(t) = 0$: Exponentialansatz mit $i_{\mathrm{Lh}}(t) = Ae^{st}$ und $\frac{di_{\mathrm{Lh}}(t)}{dt} = Ase^{st}$

$$Ase^{st} + \frac{2R}{L} Ae^{st} = 0$$
$$s + \frac{2R}{L} = 0$$
$$s = -\frac{2R}{L}$$
$$i_{\mathrm{Lh}}(t) = Ae^{-\frac{2R}{L}t}$$

   Lösung des inhomogenen Teils: Erraten einer beliebigen Lösung. Annahme: $i_{\mathrm{Li}}(t) = const.$ Daher: $\frac{di_{\mathrm{Li}}(t)}{dt} = 0$

$$\frac{di_{\mathrm{Li}}(t)}{dt} + \frac{2R}{L} i_{\mathrm{Li}}(t) = \frac{U_0}{L}$$
$$\frac{2R}{L} i_{\mathrm{Li}}(t) = \frac{U_0}{L}$$
$$i_{\mathrm{Li}}(t) = \frac{U_0}{2R}$$

   Zusammenführen der allgemeinen homogenen und speziellen inhomogenen Lösung:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_{\mathrm{Lh}}(t) + i_{\mathrm{Li}}(t)$$
$$i_{\mathrm{L}}(t) = Ae^{-\frac{2R}{L}t} + \frac{U_0}{2R}$$

   Einsetzen der Anfangswerte:

$$i_{\mathrm{L}}(t=0) = 0 = Ae^{0} + \frac{U_0}{2R}$$
$$A = -\frac{U_0}{2R}$$
$$i_{\mathrm{L}}(t) = -\frac{U_0}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} + \frac{U_0}{2R}$$
$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{U_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{2R}{L}t}\right)$$
$$\text{mit } \tau = \frac{L}{2R}$$

5. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u_{\mathrm{L}}(t)$ sowie den Stromverlauf $i_{\mathrm{L}}(t)$ für $t \geq 0$. Kennzeichnen Sie in Ihrer Zeichnung die Zeitkonstante τ. (3 Punkte)

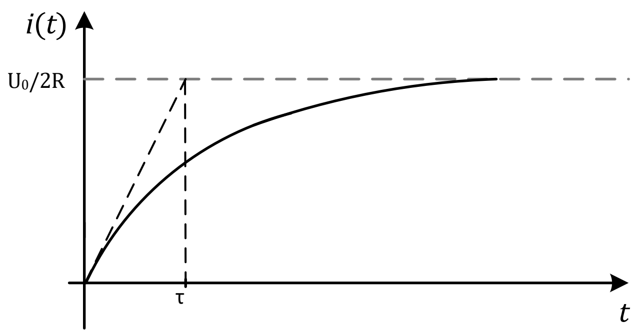


Abbildung 4.2: Stromverlauf

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird der Schalter S_1 wieder geöffnet. Der Ausgleichsvorgang sei zu diesem Zeitpunkt vollständig abgeschlossen. Zeitgleich wird der Schalter S_2 geschlossen.

6. Geben Sie die Werte der Größen $i_{\mathrm{L}}(t = t_1^+)$ und $u_{\mathrm{L}}(t = t_1^+)$ sowie von $u_{\mathrm{C}}(t = t_1^+)$ und $i_{\mathrm{C}}(t = t_1^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

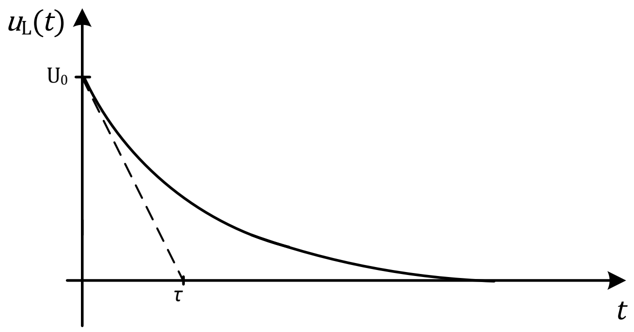


Abbildung 4.3: Spannungsverlauf

$i_L(t = t_1^+) = \frac{U_0}{2R}$, da die Spule durch den Ausgleichsvorgang vollständig geladen wurde.
$u_L(t = t_1^+) = 0$, da nach dem Ausgleichsvorgang keine Stromänderung mehr stattfindet.
$u_C(t = t_1^+) = u_L(t = t_1^+) = 0$, gleiche Spannung wie an der Spule (Masche).
$i_C(t = t_1^+) = -iL = -\frac{U_0}{2R}$, betragsmäßig gleicher, aber entgegengesetzter Strom wie bei der Spule (Knoten).

7. Leiten Sie die Differentialgleichung für $i_L(t)$ für $t \geq t_1$ her. (3 Punkte)

   Bauteilgleichungen:

$$C\dot{u}_C(t) = i_C$$
$$L\dot{i}_L(t) = u_L$$

   Maschen- und Knotengleichung:

$$u_L = u_C$$
$$i_L = -i_C$$
$$i(t) = i_L = -i_C = -C\dot{u}_L(t) = -LC\ddot{i}_L$$
$$LC\ddot{i}(t) + i(t) = 0$$

8. Skizzieren Sie den Stromverlauf $i_L(t)$ für $t \geq t_1 = 0$. (2 Punkte)

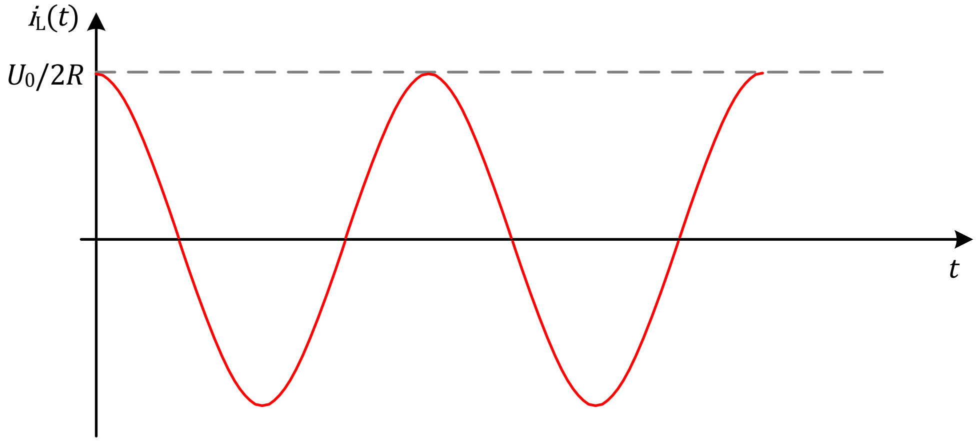


Abbildung 4.4: Stromverlauf

9. Liegt hier eine gedämpfte Schwingung vor? Begründen Sie! (1 Punkt)

   Nein, da sich kein Widerstand im Schwingkreis befindet.

Aufgabe 5: Magnetischer Kreis **(20 Punkte)**

In Abbildung 5.1 ist eine Spule dargestellt, die auf einen Eisenkern mit Luftspalt gewickelt ist. Die mittlere Länge im Eisen betrage $l_{\mathrm{Fe}} = 22$ cm und die Querschnittsfläche $A_{\mathrm{Fe}} = 44\,\mathrm{cm}^2$. In der Spule soll bei einer sinusförmigen Spannung von $U = 60\,\mathrm{V}$ und einer Frequenz von $f = 50\,\mathrm{Hz}$ ein Strom von $I = 0{,}75\,A$ fließen. Der Scheitelwert der magnetischen Flussdichte betrage $\hat{B} = 0{,}12$ T . Die relative Permeabilität im Eisen sei gegeben mit $\mu_{\mathrm{r,Fe}} = 4000$. Der Innenwiderstand der Spule sei zu vernachlässigen.

Hinweis: $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

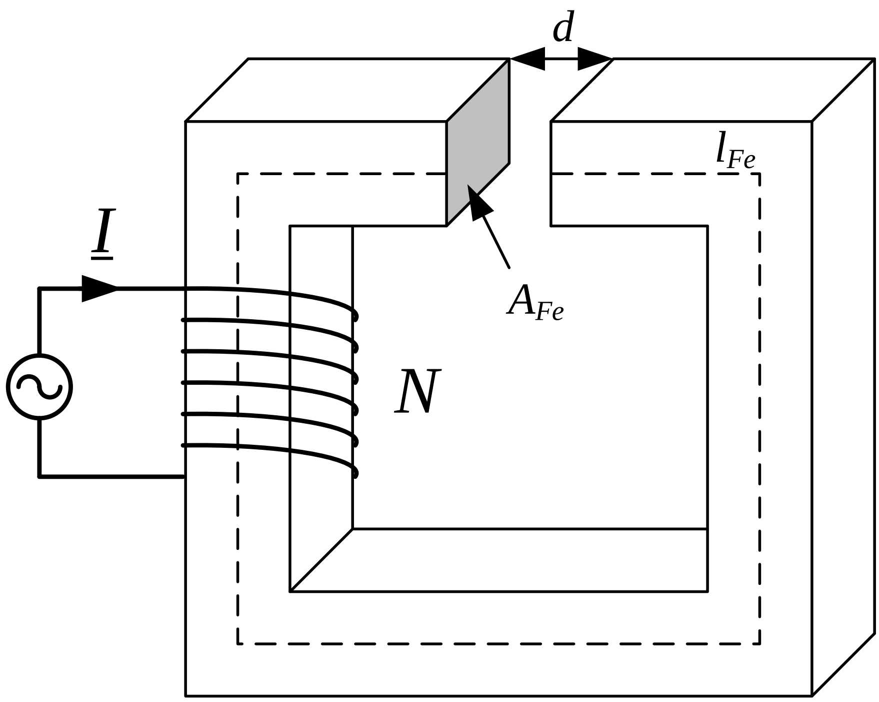


Abbildung 5.1: Magnetischer Kreis

1. Berechnen Sie die benötigte Induktivität in Abhängigkeit der angegebenen Strom- und Spannungswerte.

$$L = \frac{\hat{U}}{\omega \hat{I}}\,\mathrm{H}$$

$$L = \frac{\sqrt{2}\cdot 60}{2\pi\cdot 50\sqrt{2}\cdot 0{,}75A}\,\mathrm{H}$$

$$L = 0{,}2546\,\mathrm{H}$$

2. Geben Sie die Induktivität in Abhängigkeit von der gegebenen Luftspaltlänge d an.

$$L = \frac{N^2}{R_{Fe} + R_L}$$
$$L = \frac{N^2}{R_{Fe} + \frac{d}{\mu_0 A}}$$

3. Berechnen Sie die Reluktanz des Eisenkerns.

$$R_{Fe} = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_r A}$$
$$R_{Fe} = \frac{0{,}22\,m}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 4000 \cdot 0{,}0044 m^2}$$
$$R_{Fe} = 9{,}9472 \frac{kA}{Vs}$$

Hinweis: Nehmen Sie für die Spannung $u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t)$ an.

4. Leiten Sie die Formel für den Scheitelwert des Verkettungsflusses $\hat{\psi}$ her.

$$u(t) = \dot{\psi}$$
$$\psi = \int \sqrt{2} \cdot U sin(\omega t) dt$$
$$\psi = -\frac{\sqrt{2} \cdot U}{\omega} cos(\omega t)$$

Daraus ergibt sich:

$$\hat{\psi} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{\omega}$$
$$\hat{\psi} = \frac{\sqrt{2} \cdot 60V}{2\pi \cdot 50\,Hz}$$
$$\hat{\psi} = 0{,}2701\,Vs$$

Alternativer Lösungsweg:

$$\hat{\psi} = L \cdot \hat{I}$$
$$\hat{\psi} = 0{,}2546\,\mathrm{H} \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}75\,A$$
$$\hat{\psi} = 0{,}2701\,Vs$$

5. Berechnen Sie die Anzahl der benötigten Windungen.

$$\begin{aligned}
\hat{\psi} &= N\phi \\
\hat{\psi} &= N\hat{B}A \\
N &= \frac{\hat{\psi}}{\hat{B}A} \\
N &= \frac{0{,}2701\,Vs}{0{,}12\,T\,0{,}0044\,m^2} \\
N &= 511{,}5
\end{aligned}$$

Wähle daher $N = 512$.

6. Wie groß muss der Luftspalt gewählt werden, um den errechneten Induktivitätswert durch die Anordnung zu gewährleisten.

$$\begin{aligned}
L &= \frac{N^2}{R_{Fe} + \frac{d}{\mu_0 A}} \\
d &= \frac{N^2 \mu_0 A}{L} \\
d &= \frac{512^2 4\pi \cdot 10^-7 \frac{Vs}{Am}\,0{,}0044\,m^2}{0{,}2701\,H} \\
d &= 0{,}0053\,m
\end{aligned}$$

$d \approx 5mm$