Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik
Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Musterlösung Grundlagen der Elektrotechnik B

31.03.2014

Aufgabe 1: Gleichstrommaschine **(14 Punkte)**

LÖSUNG Reihenschlussmotor

Folgende Parameter sind über den Motor bekannt:

$U = 250$ V	$c_\mathrm{M} = 25$	$R_\mathrm{A} = 1{,}2\ \Omega$	$R_\mathrm{E} = 7\ \Omega$
$L_\mathrm{A} = 50$ mH	$L_\mathrm{E} = 200$ mH	$N_\mathrm{E} = 10$	$I_\mathrm{N} = 10$ A

1. Geben Sie allgemein an, wie der Strom I und das Drehmoment T im **stationären Betriebsfall** bestimmt werden können, wenn von dem Motor nur die oben angegebenen Variablen, der Vorwiderstand R_V1 und die Drehfrequenz ω bekannt ist (S1 geschlossen, S2 und S3 offen). Hinweis: $L'_\mathrm{E} = c_\mathrm{M}\frac{L_\mathrm{E}}{N_\mathrm{E}}$

$$U = I(R_\mathrm{V1} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A}) + U_\mathrm{i} \tag{1.1}$$

$$U_\mathrm{i} = c_\mathrm{M}\phi_\mathrm{E}\omega \tag{1.2}$$

$$\phi_\mathrm{E} = \frac{L_\mathrm{E}}{N_\mathrm{E}} I \tag{1.3}$$

$$U = I\left(R_\mathrm{V1} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A} + c_\mathrm{M}\frac{L_\mathrm{E}}{N_\mathrm{E}}\omega\right) \tag{1.4}$$

$$\boxed{I = U\left(R_\mathrm{V1} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A} + c_\mathrm{M}\frac{L_\mathrm{E}}{N_\mathrm{E}}\omega\right)^{-1}} \tag{1.5}$$

$$T = c_\mathrm{M}\phi_\mathrm{E} I \tag{1.6}$$

$$\boxed{T = c_\mathrm{M}\frac{L_\mathrm{E}}{N_\mathrm{E}} I^2} \tag{1.7}$$

2. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Motors, wenn sich im stationärem Betriebsfall eine Drehzahl von $n = 400\ \mathrm{min}^{-1}$ eingestellt hat und S3 dabei geschlossen ist.

$$L'_\mathrm{E} = c_\mathrm{M}\frac{L_\mathrm{E}}{N_\mathrm{E}} = 0{,}5\mathrm{H} \tag{1.8}$$

$$I = U\left(R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A} + L'_\mathrm{E}\omega\right)^{-1} = 250\mathrm{V}\left(7\Omega + 1{,}2\Omega + 0{,}5\mathrm{H}\ 2\pi\ \frac{20}{3}\ s^{-1}\right)^{-1} \tag{1.9}$$

$$I = 8{,}58\mathrm{A} \tag{1.10}$$

$$T = L'_\mathrm{E}\ I^2 = 0{,}5\mathrm{H}\ 8{,}58^2\mathrm{A}^2 = 36{,}8\mathrm{Nm} \tag{1.11}$$

$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{el}} = \frac{\omega T}{UI} = \frac{2\pi\ \frac{20}{3}s^{-1}\ 36{,}8\mathrm{Nm}}{250\mathrm{V}\ 8{,}58\mathrm{A}} = \frac{1541{,}14W}{2144{,}53W} \tag{1.12}$$

$$\boxed{\eta = 71{,}86\%} \tag{1.13}$$

3. * Bestimmen Sie den Vorwiderstand R_V1 so, dass nach dem Schließen von S1 der Anlaufstrom $I = 1{,}3\ I_\mathrm{N}$ erreicht (S2 und S3 offen).

$$U \overset{!}{=} 1{,}3\ I_N\ (R_\mathrm{V1} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A}) \tag{1.14}$$

$$R_\mathrm{V1} = \frac{U}{1{,}3\ I_N} - R_\mathrm{E} - R_\mathrm{A} = \frac{250\mathrm{V}}{13\mathrm{A}} - 7\Omega + 1{,}2\Omega \tag{1.15}$$

$$\boxed{R_\mathrm{V1} = 11{,}03\Omega} \tag{1.16}$$

4. * Im Anlaufvorgang erhöht sich nun die Drehzahl des Motors. Dabei verringert sich der Strom I. Sobald der Strom $I = I_\mathrm{N}$ erreicht, soll ebenfalls S2 geschlossen werden. Wie muss der Widerstand R_V2 gewählt werden, damit der Strom beim Zuschalten von R_V2 erneut auf $I = 1{,}3\ I_\mathrm{N}$ begrenzt wird? (S1 geschlossen, S3 offen).

$$\omega_b = \frac{U - I_N(R_\mathrm{V1} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A})}{L'_\mathrm{E}\ I} = 11{,}538\mathrm{s}^{-1} \tag{1.17}$$

$$1{,}3\ I_N \overset{!}{=} \frac{U - U_i}{\widetilde{R}_\mathrm{V} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A}} \tag{1.18}$$

$$\widetilde{R}_\mathrm{V} = \frac{U - U_i}{1{,}3\ I_N} - R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A} = \frac{U - L'_\mathrm{E}\ \omega\ 1{,}3\ I_N}{1{,}3\ I_N} - R_\mathrm{E} + R_\mathrm{A} \tag{1.19}$$

$$\widetilde{R}_\mathrm{V} = 5{,}26\Omega \tag{1.20}$$

$$R_\mathrm{V2} = \frac{R_\mathrm{V1}\ \widetilde{R}_\mathrm{V}}{R_\mathrm{V1} - \widetilde{R}_\mathrm{V}} \tag{1.21}$$

$$\boxed{R_\mathrm{V2} = 10{,}06\Omega} \tag{1.22}$$

Aufgabe 2: Signalanalyse **(13 Punkte)**

Gegeben sei der folgende Verlauf des Stroms $i(t)$, der durch einen ohmschen Widerstand $R = 10\,\Omega$ fließt. Der Verlauf des Stroms setze sich im ersten und dritten Teilintervall aus Sinusviertelschwingungen gleicher Amplitude zusammen. Im zweiten Teilintervall sei der Strom konstant.

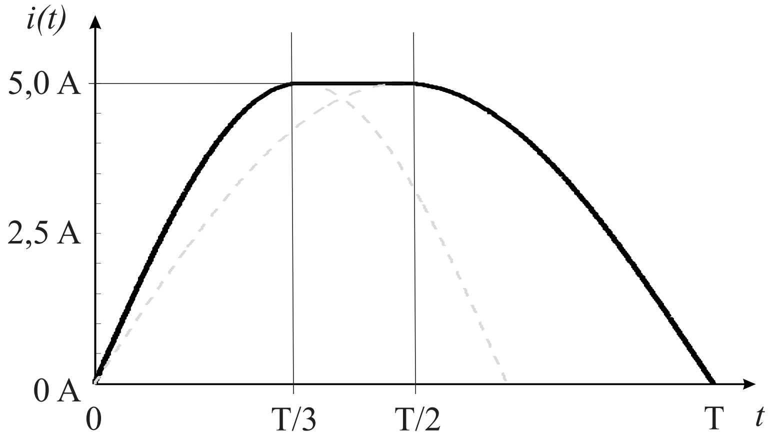

Abbildung 2.1: Verlauf des Stroms $i(t)$

1. Geben Sie die Gleichungen des Stroms $i(t)$ der drei Einzelintervalle an.

   Lösung:

$$i(t) = \begin{cases} 5\,\mathrm{A} \cdot \sin(\frac{3\pi t}{2T}) & 0 < t < \frac{T}{3} \\ 5\,\mathrm{A} & \frac{T}{3} < t < \frac{T}{2} \\ 5\,\mathrm{A} \cdot \sin(\frac{\pi t}{T}) & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

2. Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert der Spannung $u(t)$ sowie des Stroms $i(t)$ im Zeitintervall [0,T].

   Lösung:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \tag{2.1}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \left(\underbrace{\int_0^{T/3} u_1(t)dt}_{\text{Intervall 1}} + \underbrace{\int_{T/3}^{T/2} u_2(t)dt}_{\text{Intervall 2}} + \underbrace{\int_{T/2}^{T} u_3(t)dt}_{\text{Intervall 3}} \right) \tag{2.2}$$

Für Intervall 1 folgt:

$$\int_0^{T/3} u_1(t)dt = \int_0^{T/3} \left(50\,\mathrm{V}\cdot\sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)\right)dt \tag{2.3}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\int_0^{T/3} \sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)dt \tag{2.4}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\left[-\frac{2T}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)\right]_0^{T/3} \tag{2.5}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\left(-\frac{2T}{3\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2T}{3\pi}\cos(0)\right) \tag{2.6}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\left(\frac{2T}{3\pi}\right) \tag{2.7}$$

$$= 10{,}61\,\mathrm{V}\cdot T \tag{2.8}$$

Für Intervall 2 folgt:

$$\int_{T/3}^{T/2} u_2(t)dt = \int_{T/3}^{T/2} (50\,\mathrm{V})\,dt \tag{2.9}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\int_{T/3}^{T/2} dt \tag{2.10}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\,[t]_{T/3}^{T/2} \tag{2.11}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{3}\right) \tag{2.12}$$

$$= 8{,}33\,\mathrm{V}\cdot T \tag{2.13}$$

Für Intervall 3 folgt:

$$\int_{T/2}^{T} u_3(t)dt = \int_{T/2}^{T} \left(50\,\mathrm{V}\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)dt \tag{2.14}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\int_{T/2}^{T} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt \tag{2.15}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\left[-\frac{T}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right]_{T/2}^{T} \tag{2.16}$$

$$= 50\,\mathrm{V}\left(-\frac{T}{\pi}\cos(\pi)\right) \tag{2.17}$$

$$= 15{,}92\,\mathrm{V}\cdot T \tag{2.18}$$

Somit ergibt sich für den Gesamtausdruck:

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/3} u_1(t)dt + \int_{T/3}^{T/2} u_2(t)dt + \int_{T/2}^{T} u_3(t)dt\right) \tag{2.19}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\left(10{,}61\,\mathrm{V}\cdot T + 8{,}33\,\mathrm{V}\cdot T + 15{,}92\,\mathrm{V}\cdot T\right) \tag{2.20}$$

$$\bar{u} = 34{,}86\,\mathrm{V} \rightarrow \bar{i} = \frac{\bar{u}}{R} = 3{,}49\,\mathrm{A} \tag{2.21}$$

3. Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung $u(t)$ im selben Intervall.

   Lösung:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \tag{2.22}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\underbrace{\int_0^{T/3} u_1^2(t)dt}_{\text{Intervall 1}} + \underbrace{\int_{T/3}^{T/2} u_2^2(t)dt}_{\text{Intervall 2}} + \underbrace{\int_{T/2}^{T} u_3^2(t)dt}_{\text{Intervall 3}}\right)} \tag{2.23}$$

Für Intervall 1 folgt:

$$\int_0^{T/3} u_1^2(t)dt = \int_0^{T/3} \left(50\,\mathrm{V}\cdot\sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)\right)^2 dt \tag{2.24}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \int_0^{T/3} \left(\sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)\right)^2 dt \tag{2.25}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{T}{6\pi}\sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)\right]_0^{T/3} \tag{2.26}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \left(\frac{T}{6} - \frac{T}{6\pi}\sin(\pi)\right) \tag{2.27}$$

$$= 416{,}67\,\mathrm{V}^2\cdot T \tag{2.28}$$

Für Intervall 2 folgt:

$$\int_{T/3}^{T/2} u_2^2(t)dt = \int_{T/3}^{T/2} (50\,\mathrm{V})^2\, dt \tag{2.29}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \int_{T/3}^{T/2} dt \tag{2.30}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2\, [t]_{T/3}^{T/2} \tag{2.31}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{3}\right) \tag{2.32}$$

$$= 416{,}67\,\mathrm{V}^2\cdot T \tag{2.33}$$

Für Intervall 3 folgt:

$$\int_{T/2}^{T} u_3^2(t)dt = \int_{T/2}^{T} \left(50\,\mathrm{V}\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)^2 dt \tag{2.34}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \int_{T/2}^{T} \left(\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)^2 dt \tag{2.35}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_{T/2}^{T} \tag{2.36}$$

$$= 2500\,\mathrm{V}^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4}\right) \tag{2.37}$$

$$= 625\,\mathrm{V}^2\cdot T \tag{2.38}$$

Somit ergibt sich für den Gesamtausdruck:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/3} u_1^2(t)dt + \int_{T/3}^{T/2} u_2^2(t)dt + \int_{T/2}^{T} u_3^2(t)dt\right)} \quad (2.39)$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\left(416{,}67\,\mathrm{V}^2 \cdot T + 416{,}67\,\mathrm{V}^2 \cdot T + 625\,\mathrm{V}^2 \cdot T\right)} \quad (2.40)$$

$$U = 38{,}18\,\mathrm{V} \quad (2.41)$$

Punktaufteilung:

1. 3 Punkte
2. 5 Punkte
3. 5 Punkte

Aufgabe 3: Übertragungsfunktion, komplexe Wechselstromrechnung (13 Punkte)

1. Ermitteln Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ in Abhängigkeit der Bauteilparameter in allgemeiner Form. Geben Sie ferner die konkreten Werte für $\underline{Z}$ bei $f = 100$ Hz nach Betrag und Phase an. (*2,0 Punkte*)

   Für die beiden parallel geschalteten RC-Glieder gilt:

   $$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R - j\frac{1}{\omega C} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} \tag{3.1}$$

   Für die Gesamtimpedanz folgt:

   $$\underline{Z} = \underline{Z}_1 || \underline{Z}_2 = \frac{1 + j\omega RC}{j2\omega C} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\omega RC} \tag{3.2}$$

   Einsetzen der Bauteilwerte für die gegebene Frequenz ergibt:

   $$\underline{Z} = 0{,}5\Omega - j\frac{1}{4\pi 100\frac{1}{s}1\Omega 1mF} = 0{,}5\Omega - j0{,}796\Omega = 0{,}94\Omega \mathrm{e}^{-j57{,}87^\circ} \tag{3.3}$$

2. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ unter der Annahme, dass das Netzwerk an eine Spannungsquelle $\underline{U}_1 = 50\mathrm{V}e^{j\varphi_0}$ mit $\varphi_0 = 0^\circ$ und der Frequenz $f = 100$ Hz angeschlossen sei (Maßstab: 1 cm$\hat{=}$ 10 V$\hat{=}$10 A). (*3,5 Punkte*)

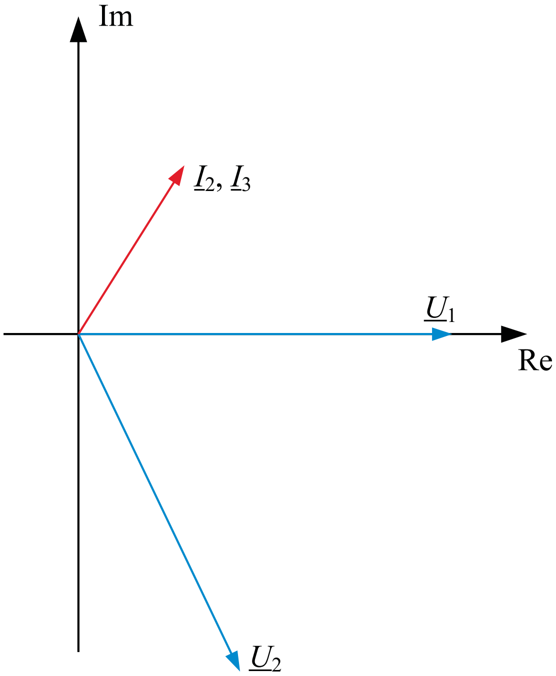

Abbildung 3.1: Zeigerdiagramm zur Aufgabe 3.2

   Für die Ströme gilt:

   $$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \tag{3.4}$$

Die Impedanz $\underline{Z}_1$ beträgt:

$$\underline{Z}_1 = R - j\frac{1}{\omega C} = 1\Omega - j1{,}59\Omega = 1{,}88\Omega e^{-j57{,}83^\circ} \tag{3.5}$$

Demnach folgt:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \frac{50V e^{j0^\circ}}{1{,}88\Omega e^{-j57{,}83^\circ}} = 26{,}6A e^{j57{,}83^\circ} \tag{3.6}$$

Die Spannung $\underline{U}_2$ kann dann wie folgt berechnet werden:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\frac{1}{j\omega C} - \underline{I}_3 R = -\underline{I}_2(R + j\frac{1}{\omega C}) = -26{,}6A e^{j57{,}83^\circ} 1{,}88\Omega e^{j57{,}83^\circ} \tag{3.7}$$

$$= -50V e^{j115{,}66^\circ} = 50V e^{-j64{,}4^\circ} \tag{3.8}$$

3. Stellen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ allgemein in Abhängigkeit der Bauteilparameter auf. Geben Sie hierbei ihr Ergebnis getrennt nach Real- und Imaginärteil an (arithmetische Form).(*2,0 Punkte*)

   Analog zu vorherigen Aufgabe kann $\underline{U}_2$ über die Ströme berechnet werden:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\frac{1}{j\omega C} - \underline{I}_3 R = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}(R + j\frac{1}{\omega C}) = \underline{U}_1\frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}(R + j\frac{1}{\omega C}) \tag{3.9}$$

$$= \underline{U}_1\frac{1 - \mathrm{j}\omega RC}{1 + j\omega RC} \tag{3.10}$$

   Für die Übertragungsfunktion folgt entsprechend:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1-(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2} - j\frac{2\omega RC}{1+(\omega RC)^2} = \frac{1-(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2} - j\frac{2\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{3.11}$$

   mit $\tau = RC$.

4. Skizzieren Sie für $\underline{H}(j\omega)$ das Bode-Diagramm (Achten Sie dabei auf eine geeignete Skalierung der Abszisse). Untersuchen Sie hierfür zunächst das Verhalten der Übertragungsfunktion für charakteristische Kreisfrequenzen. (*3,5 Punkte*)

   Zunächst Berechnung des Betrags von $\underline{H}(j\omega)$:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 1 \tag{3.12}$$

   Dies entspricht in logarithmischer Darstellung:

$$|\underline{H}(j\omega)|_{\mathrm{db}} = 20\mathrm{db}\log 1 = 0\mathrm{db} \tag{3.13}$$

   Für die Phase $\underline{H}(j\omega)$ muss eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Realteils berücksichtigt werden:

$$\angle\underline{H}(j\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-\omega\tau}{1-(\omega\tau)^2}\right), & \omega\tau \leq 1 \\ \arctan\left(\frac{-\omega\tau}{1-(\omega\tau)^2}\right) - \frac{\pi}{2}, & \omega\tau > 1 \end{cases} \tag{3.14}$$

Demnach handelt es sich bei dem zu analysierenden Netzwerk um einen sog. idealen Phasenschieber. Ausrechnen charakteristischer Punkte für $\angle\underline{H}(j\omega)$:

$$\angle\underline{H}(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega\tau = 1 \\ 0, & \omega\tau \to 0 \\ -\pi, & \omega\tau \to \infty \end{cases} \tag{3.15}$$

Abschließende Darstellung des Bode-Diagramms:

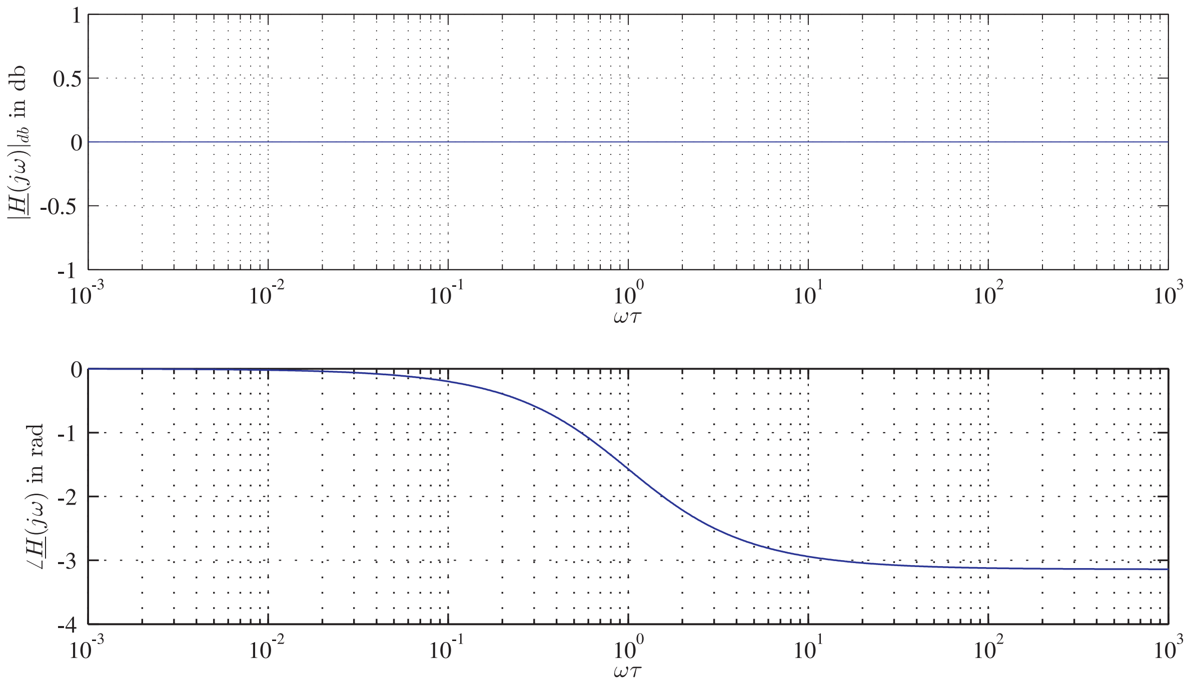

Abbildung 3.2: Bodediagramm zur Aufgabe 3.4

5. Zeichen Sie die Ortskurve von $\underline{H}(j\omega)$. (*2,0 Punkt*)

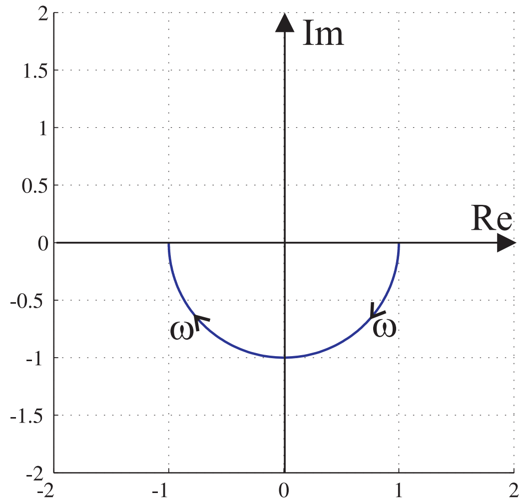

Abbildung 3.3: Ortskurve zur Aufgabe 3.5

Aufgabe 4: Ausgleichsvorgang, Schwingkreis (13 Punkte)

1. a) $u_C(t=0^+) = 0$
   Da die Spannung $u_C(t)$ an der Kapazität C zum Zeitpunkt $t=0^+$ stetig verlaufen muss.

   b) $i_L(t=0^+) = 0$
   Da der Strom $i_L(t)$ durch die Induktivität L zum Zeitpunkt $t=0^+$ stetig verlaufen muss.

2. $u_2(t) = u_\mathrm{R}(t) - u_\mathrm{L}(t)$
   $u_\mathrm{R}(t) = U_1\, e^{-\frac{t}{\tau_1}}$
   $u_\mathrm{L}(t) = U_1\, e^{-\frac{t}{2\tau_1}}$
   $u_2(t) = U_1\,(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{2\tau_1}})$

3. a) $u_2(t=0^+) = U_1\,(e^0 - e^0) = 0$

   b) $\lim\limits_{t\to\infty} u_2(t) = U_1\,(0-0) = 0$

   c) $\frac{\mathrm{d}\,u_2(t)}{dt} = U_1 \left(-\frac{e^{-\frac{t_\mathrm{max}}{\tau_1}}}{\tau_1} + \frac{e^{-\frac{t_\mathrm{max}}{2\tau_1}}}{2\tau_1} \right)$
   $2\,e^{-\frac{t_\mathrm{max}}{\tau_1}} = e^{-\frac{t_\mathrm{max}}{2\tau_1}}$
   $-\frac{t_\mathrm{max}}{2} = \tau_1\,\ln(2) - t_\mathrm{max}$
   $t_\mathrm{max} = 2\,\tau_1\,\ln(2)$
   $u_{2\mathrm{max}} = U_1\,(e^{-\frac{2\tau_1\,\ln(2)}{\tau_1}} - e^{-\frac{2\tau_1\,\ln(2)}{2\tau_1}}) = U_1\,(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}\,U_1$

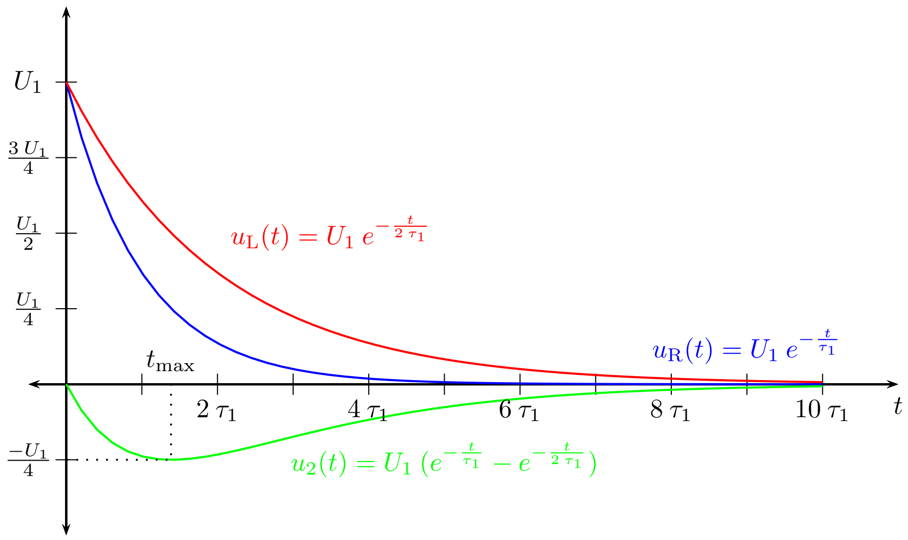

Abbildung 4.1: Lösung Aufgabe 4.4

4.

Aufgabe 5: Stromkompensierende Drossel **(14 Punkte)**

Gegegeben sei der in Abbildung 5.1 dargestellte magnetische Kreis. Der Querschnitt A_1 gilt für den oberen und unteren Schenkel, der Querschnitt A_2 für den mittleren Schenkel. Weiterhin kann die Streuung des magnetischen Flusses vernachlässigt werden.

Hinweis: Achten Sie auf den Wicklungssinn!

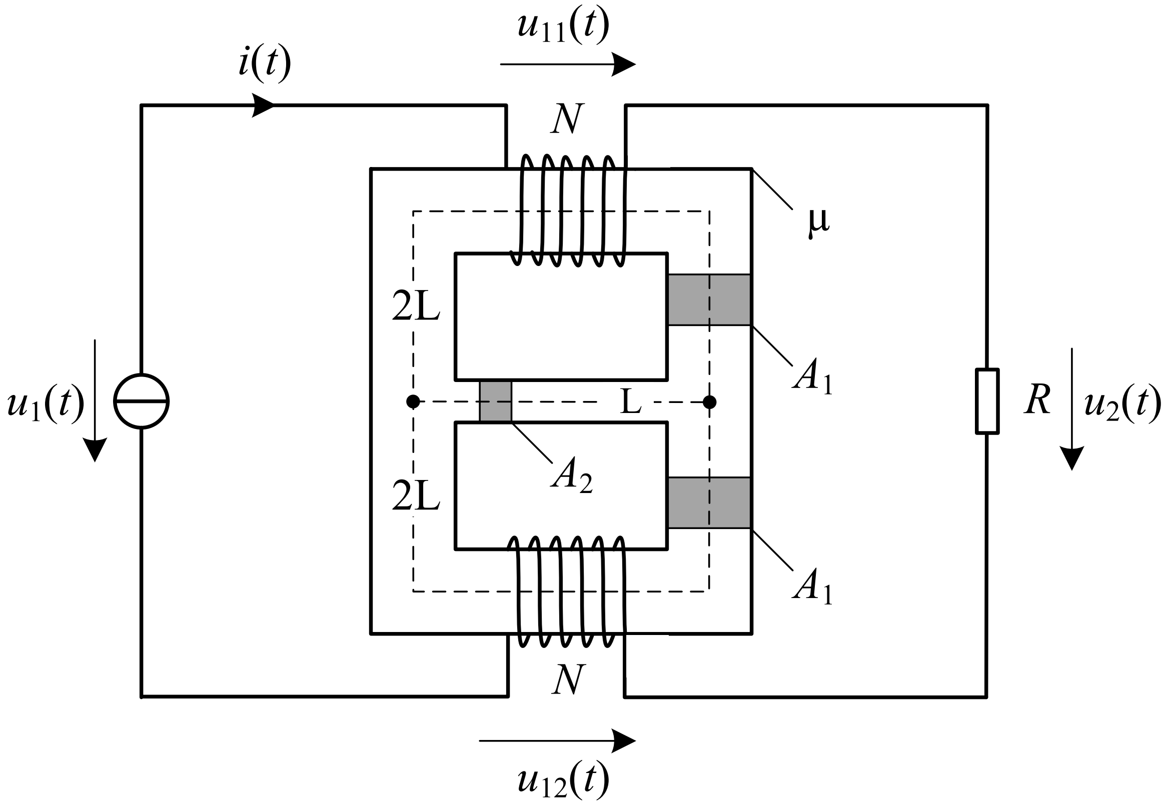

Abbildung 5.1: Magnetischer Kreis

Der Eingangsstrom sei gegeben durch folgenden Verlauf.

$$i(t) = I_0 \, sin(\omega t) \tag{5.1}$$

Bestimmen Sie alle Ausdrücke allgemein, ohne Zahlenwerte.

1. *Bestimmen Sie die Spannung $u_2(t)$.*

   Aus der Anwendung des ohmschen Gesetzes folgt direkt:

   $$\boxed{u_2(t) = R I_0 \sin(\omega t)} \tag{5.2}$$

2. *Zeichnen Sie das Reluktanzmodell des magnetischen Kreises und bestimmen Sie die magnetischen Widerstände.*

   Der magnetische Widerstände berechnen sich zu:

   $$\boxed{R_{m1} = \frac{2L}{\mu A_1}, R_{m2} = \frac{L}{\mu A_2}} \tag{5.3}$$

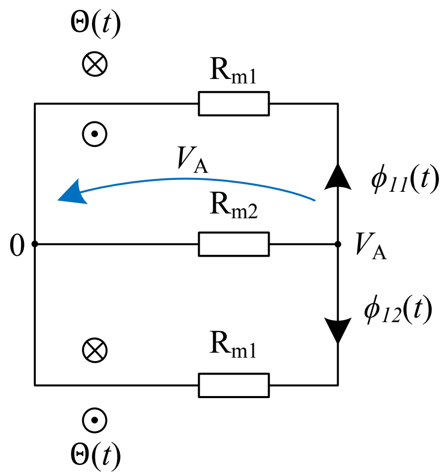

Abbildung 5.2: Gefordertes Reluktanzmodell

3. *Bestimmen Sie die magnetischen Flüsse durch den oberen und unteren Schenkel.*

   Die Berechnung des Flusses ϕ_{11} kann bspw. mit dem Knotenpotentialverfahren geschehen:

   Hierzu wird eine magnetische Verbraucherspannung V_A zwischen dem rechten und linken Knotenpunkt definiert. Der Knotenpunktsatz ergibt sich nun zu:

$$\frac{V_A+\Theta}{R_{m1}}+\frac{V_A}{R_{m2}}+\frac{V_A+\Theta}{R_{m1}}=0 \tag{5.4}$$

   Die Auflösung nach V_A ergibt:

$$V_A=-\frac{\Theta}{1+\frac{R_{m1}}{2R_{m2}}} \tag{5.5}$$

   Nach einsetzen der mag. Widerstände ergibt sich:

$$V_A=-\frac{\Theta}{1+\frac{A_2}{A_1}} \tag{5.6}$$

   Mit Hilfe dieser Knotenspannung kann der Fluss $\phi_{11}(t)$ bestimmt werden:

$$\boxed{\phi_{11}(t)=\frac{V_A+\Theta}{R_{m1}}=\frac{N\,i(t)}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}} \tag{5.7}$$

   $\phi_{12}(t)$ lässt sich bestimmen zu:

$$\boxed{\phi_{12}(t)=\frac{V_A+\Theta}{R_{m1}}=\phi_{11}(t)=\frac{N\,i(t)}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}} \tag{5.8}$$

4. *Bestimmen Sie die Spannungen $u_{11}(t)$ und $u_{12}(t)$.*

   Nach lenzscher Regel kann die Spannung $u_{11}(t)$ wie folgt formuliert werden:

$$u_{11}(t) = N\frac{\mathrm{d}\phi_{11}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.9}$$

   Nach Einsetzten von $\phi_{11}(t)$ und anschließender Vereinfachung folgt:

$$u_{11}(t) = \frac{N^2 I_0}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{5.10}$$

$$= \frac{N^2 I_0\,\omega}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}\cos(\omega t) \tag{5.11}$$

   Die Spannung $u_{12}(t)$ kann nach Induktionsgesetz wie folgt bestimmt werden:

$$u_{12}(t) = -N\frac{\mathrm{d}\phi_{12}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.12}$$

   Da der Fluss $\phi_{12}(t)$ bereits bestimmt wurde folgt hieraus:

$$\boxed{u_{12}(t) = -u_{11}(t) = -\frac{N^2 I_0\,\omega}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}\cos(\omega t)} \tag{5.13}$$

5. *Bestimmen Sie die Spannung $u_1(t)$.*

   Durch Anwendung des Maschensatzes folgt:

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_2(t) - u_{12}(t) = 2\,u_{11}(t) + u_2(t) \tag{5.14}$$

$$= \frac{2N^2 I_0\,\omega}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}\cos(\omega t) + R I_0 \sin(\omega t) \tag{5.15}$$

6. *Bestimmen Sie die Spannung $u_1(t)$ für $A_2 \to 0$.*

$$\boxed{\lim_{A_2\to 0} u_1(t) = \underbrace{\frac{2N^2 I_0\,\omega}{R_{m1}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)}}_{\to 0}\cos(\omega t) + R I_0 \sin(\omega t) = u_2(t)} \tag{5.16}$$

   Hinweis: Das Lernresultat soll sein, dass eine stromkompensierende Drossel nur dann keinen Einfluss auf die Spannungübertragung hat, wenn keine Streuung vorliegt.

Aufgabe 6: Gleichstromsteller **(18 Punkte)**

1. Hochsetzsteller
2. Siehe Abbildung 6.1

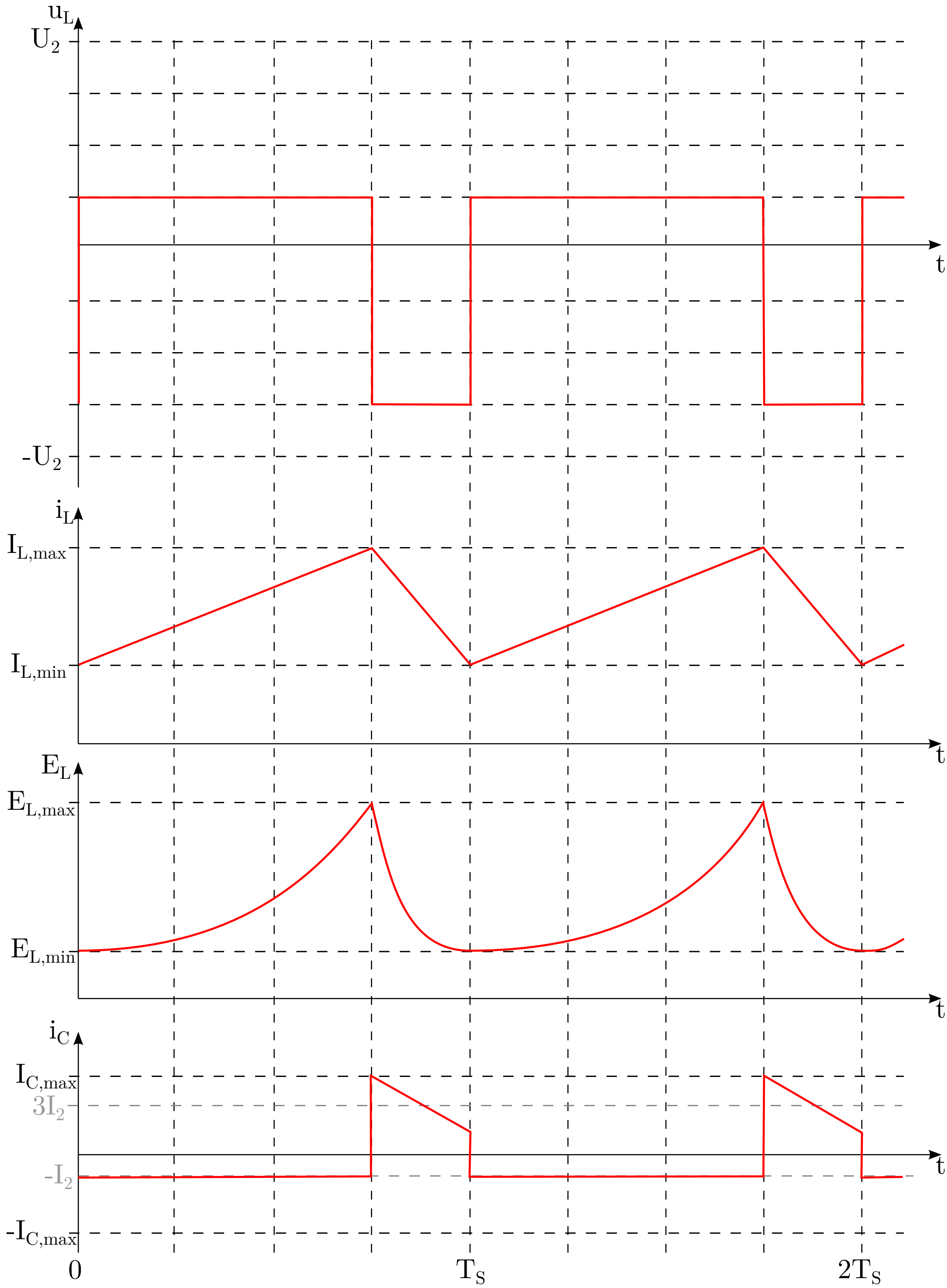

Abbildung 6.1: Lösung zu Teilaufgabe 2

3.

$$\begin{aligned}
U &= L\frac{\Delta i_L}{\Delta t}\\
\Delta i_L &= \frac{U\cdot\Delta t}{L}\\
U &= U_1 \text{ für } 0 \le t < DT\\
U &= U_1 - U_2 \text{ für } DT \le t < T\\
\Delta i_L &= \frac{U\cdot\Delta t}{L} = \frac{U_1\cdot DT}{L} = -\frac{(U_1-U_2)\cdot(1-D)\,T}{L}\\
U_1\cdot D &= (U_2-U_1)\cdot(1-D)\\
U_1\left(D+(1-D)\right) &= U_2\cdot(1-D)\\
U_2 &= \frac{1}{1-D}U_1
\end{aligned}$$

4. Siehe Abbildung 6.1

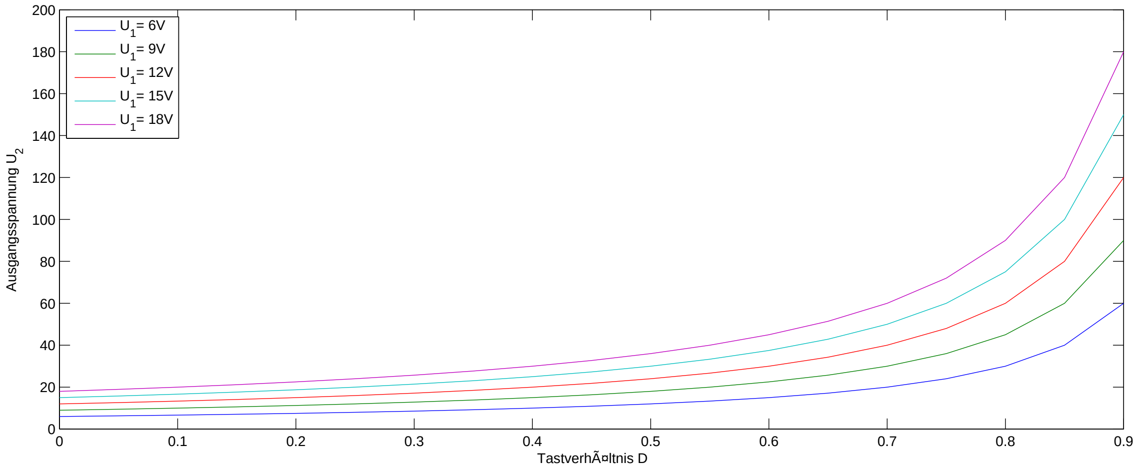

Abbildung 6.2: Lösung zu Teilaufgabe 4

5. $U_{2,min} = U_1 = 12\,\mathrm{V}$

6.

$$\begin{aligned}
U_L &= L\frac{\Delta i_L}{\Delta t}\\
L &= U_L\frac{\Delta t}{\Delta i_L}\\
L &= U_1\frac{DT}{\Delta i_{L,pp,max}}\\
L &= \frac{DU_1}{f_s\cdot\Delta i_{L,pp,max}}\\
L &= \frac{0{,}5\cdot 12\,\mathrm{V}}{30\,\mathrm{kHz}\cdot 0{,}2\,\mathrm{A}}\\
L &= 1\,\mathrm{mH}
\end{aligned}$$

7.

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{1-D}U_1 \\
U_2 &= \frac{1}{1-0{,}25}12\,\mathrm{V} = 16\,\mathrm{V} \\
\frac{\Delta i_L,pp\,(D)}{D} &= const. \\
\Delta i_L,pp\,(D=0{,}25) &= \Delta i_L,pp\,(D=0{,}5)\,\frac{0{,}25}{0{,}5} = 100\,\mathrm{mA} \\
\text{An der Lückgrenze gilt: } \bar{i_L} &= \frac{\Delta i_{L,pp}}{2} = 50\,\mathrm{mA} \\
I_R &= \bar{i_L}\,(1-D) = 50\,\mathrm{mA}\cdot 0{,}75 = 37{,}5\,\mathrm{mA} \\
R &= \frac{U_2}{I_R} = \frac{16\,\mathrm{V}}{37{,}5\,\mathrm{mA}} = 427\,\Omega
\end{aligned}
$$

Bepunktung:

1. 1
2. 4
3. 3
4. 3
5. 1
6. 3
7. 3

Aufgabe 7: Leistungsberechnung im RLC-Netzwerk (14 Punkte)

Ein aus dem öffentlichen Stromnetz gespeister Wechselstrommotor ($U = 230\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$) nimmt eine Wirkleistung $P = 1\,\mathrm{kW}$ bei einem Leistungsfaktor $\lambda = 0{,}75$ auf. Der ohmsche Widerstand der Motorwicklung beträgt $R = 31\,\Omega$. Die Schaltung befindet sich im eingeschwungenen Zustand.

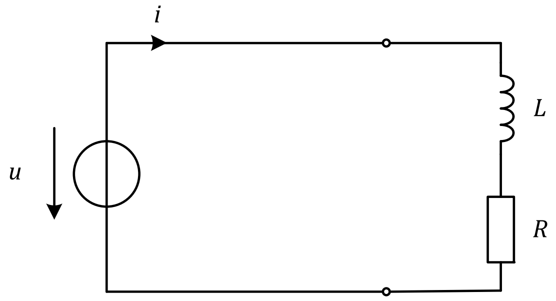

Abbildung 7.1: Netzwerk

1. Berechnen Sie den Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Strom und Spannung. Geben Sie das Vorzeichen an (mit Begründung).

$$\lambda = \frac{P}{S} = cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = arccos(\lambda) = arccos(0{,}75) = 41{,}4°$$

φ positiv, da Strom Spannung nachläuft.

2. Welche Blindleistung nimmt die Schaltung auf?

$$\frac{Q}{P} = tan(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow Q = P \cdot tan(\varphi) = 1\mathrm{kW} \cdot 0{,}882 = 882\mathrm{VA}$$

3. Für welchen Effektivstrom ist die Zuleitung auszulegen?

$$S = U \cdot I$$

$$\Rightarrow I = \frac{S}{U}$$

$$cos(\varphi) = \lambda = \frac{P}{S}$$

$$\Rightarrow S = \frac{P}{\lambda} = \frac{1\mathrm{kW}}{0{,}75} = 1{,}33\mathrm{kVA}$$

$$I = \frac{1{,}33\mathrm{kVA}}{230\mathrm{V}} = 5{,}797\mathrm{A}$$

4. Wie groß ist die Induktivität L der Schaltung?

$$Q = X \cdot I^2 = \omega \cdot L \cdot I^2$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{Q}{\omega \cdot I^2} = \frac{882\mathrm{VA}}{2 \cdot \Pi \cdot 50\mathrm{Hz} \cdot 5{,}797^2\mathrm{A}^2} = 0{,}0835\mathrm{H} = 83{,}5\mathrm{mH}$$

oder

$$tan(\varphi) = \frac{\omega \cdot L}{R}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{R \cdot tan(\varphi)}{2 \cdot \Pi \cdot f} = 87\text{mH}$$

Nun soll die Blindleistung der Schaltung kompensiert werden.

5. Wie kann die Blindleistung kompensiert werden? Zeichnen sie das dafür benötigte Bauteil in die Schaltskizze (Abbildung 7.1) ein.

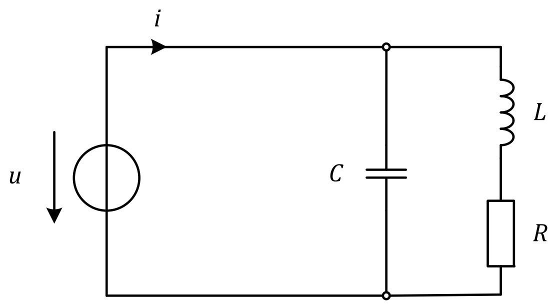

Abbildung 7.2: Netzwerk mit Blindleistungskompensation

6. Berechnen Sie die Größe des Bauteils aus Aufgabenteile.

$$\underline{Z} = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{(\frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}) \cdot (R + j(\frac{1}{\omega C} - \omega L))}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$= \frac{\frac{RL}{C} + \frac{R}{\omega C} \cdot (\frac{1}{\omega C} - \omega L) + j(\frac{L}{C}(\frac{1}{\omega C} - \omega L) - \frac{R^2}{\omega C})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$= \frac{\frac{RL}{C} + \frac{R}{\omega^2 C^2} - \frac{RL}{C} + j(\frac{L}{\omega C^2} - \frac{\omega L^2}{C} - \frac{R^2}{\omega C})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \frac{\frac{R}{\omega^2 C^2} + j(\frac{L}{\omega C^2} - \frac{\omega L^2}{C} - \frac{R^2}{\omega C})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\lambda = cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0^\circ \Rightarrow Im(\underline{Z}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\omega C} - \frac{\omega L^2}{C} - \frac{R^2}{\omega C} = 0!$$

$$\Leftrightarrow \frac{L - \omega^2 C L^2 - R^2 C}{\omega C^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow L - C(\omega^2 L^2 + R^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{L}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{0{,}0835^2\text{H}^2}{4 \cdot \Pi \cdot 50^2\text{Hz}^2 \cdot 0{,}0835^2\text{H}^2 + 31^2\Omega^2} = 0{,}000591\text{F} = 591\mu\text{F}$$

7. Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für die komplexen Ströme (auch in Blind- und Wirkstrom aufgeteilt) vor und nach der Kompensation in das jeweilige untere Koordinatensystem (Abbildung 7.3) ein.

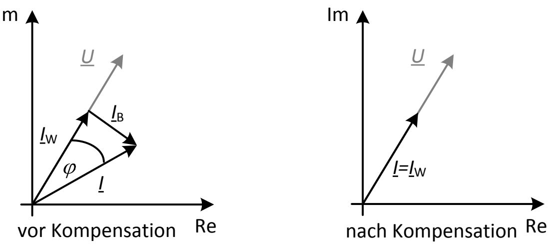

Abbildung 7.3: Zeigerdiagramm

8. Für welchen Effektivstrom muss die Zuleitung nun ausgelegt werden?

$$S = P = U \cdot I \Leftrightarrow I = \frac{P}{U}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1\text{kW}}{230\text{V}} = 4{,}347\text{A}$$