Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik
Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Musterlösung Grundlagen der Elektrotechnik B

24.09.2013

Version vom 26. September 2013

Aufgabe 1: Übertragungsfunktion, komplexe Wechselstromrechnung (13 Punkte)

1. Ermitteln Sie allgemein die komplexen Widerstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ in Abhängigkeit der Bauteilparameter. Berechnen Sie ferner für die gegebenen Bauteilwerte die Kennkreisfrequenz ω_0 und den Kennwiderstand Z_0 für das Netzwerk $\underline{Z}_1$ als auch die Zeitkonstante τ des Netzwerks $\underline{Z}_2$. (*3 Punkte*)

   Für $\underline{Z}_1$ gilt:

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C_1 = \frac{1-\omega^2 C_1 L}{j\omega L}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_1 = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 C_1 L} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}Z_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}},\ Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C_1}}$$

   Zahlenwerte einsetzen liefert:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{10^{-9}\mathrm{F}\cdot 10^{-3}\mathrm{H}}} = 1\cdot 10^6\frac{1}{\mathrm{s}} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{10^{-3}\mathrm{H}}{10^{-9}\mathrm{F}}} = 1\mathrm{k}\Omega$$

   Für $\underline{Z}_2$ gilt:

$$\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C_2} = R\frac{1+j\omega\tau}{j\omega\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = RC_2$$

   Zahlenwerte einsetzen liefert:

$$\tau = 250\mathrm{m}\Omega\cdot 5\mathrm{mF} = 1{,}25\mathrm{ms}$$

2. Zeichnen Sie maßstäblich das komplexe Zeigerdiagramm von $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ für eine Frequenz von f= 50 Hz. Ermitteln Sie graphisch Betrag und Phase der Reihenschaltung $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$. (Maßstab: $0{,}1\Omega \triangleq 1\mathrm{cm}$) (*1,5 Punkte*)

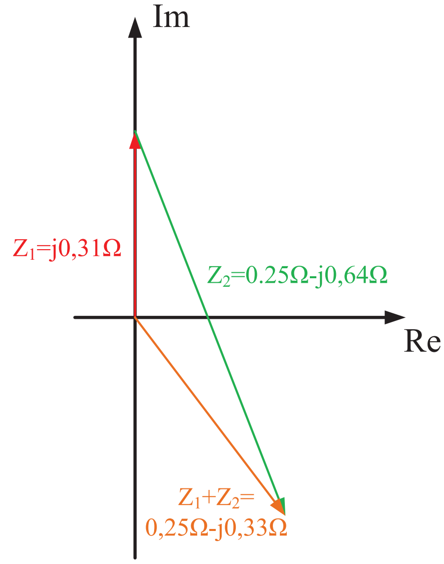


Abbildung 1.1: Lösungsskizze für Aufgabe 1.2

   Einzeichnen der komplexen Zeigen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ in Abb. 1.2 führt zu:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0{,}25\Omega - j0{,}33\Omega = 0{,}414\Omega\cdot \mathrm{e}^{-j52{,}85^\circ}$$

3. Die beiden Netzwerke werden nun parallel geschaltet ($\underline{U}_2 = \underline{U}_3$). Stellen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1}$ allgemein in Abhängigkeit der Bauteilparameter auf. (*2 Punkte*)

   Das Netzwerk $\underline{Z}_1$ hat aufgrund der Parallelschaltung keine Auswirkung auf $\underline{H}(j\omega)$.Es gilt:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} = \frac{\underline{I}_2 R}{\underline{I}_2 \underline{Z}_2} = \frac{R}{\underline{Z}_2} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

4. Untersuchen Sie das Verhalten von $\underline{H}(j\omega)$ für $\omega >> 1/\tau$ und $\omega << 1/\tau$. Ermitteln Sie hierzu die Geradennäherung für beide Frequenzbereiche und skizzieren Sie diese jeweils getrennt nach Betrag und Phase in logarithmischer Darstellung. (*2,5 Punkte*)

   Zunächst Aufteilung nach Real- und Imaginärteil:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{(\omega\tau)^2 + j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

   Dann Darstellung von Betrag und Phase:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\omega\tau\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}{1 + (\omega\tau)^2} \qquad \angle\underline{H}(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

   Berechnung des Amplituden- und Phasengangs für kleine und große Frequenzen anhand der Geradennäherung:

$$\begin{aligned}
\omega\tau >> 1 : |\underline{H}(j\omega)|_{\text{dB}} &\approx 20\text{dB}\log(1) = 0\text{dB} \\
\angle\underline{H}(j\omega) &\approx \arctan(0) = 0^\circ \\
\omega\tau << 1 : |\underline{H}(j\omega)|_{\text{dB}} &\approx 20\text{dB}\log(\omega\tau) \\
\angle\underline{H}(j\omega) &\approx \arctan(\infty) = 90^\circ
\end{aligned}$$

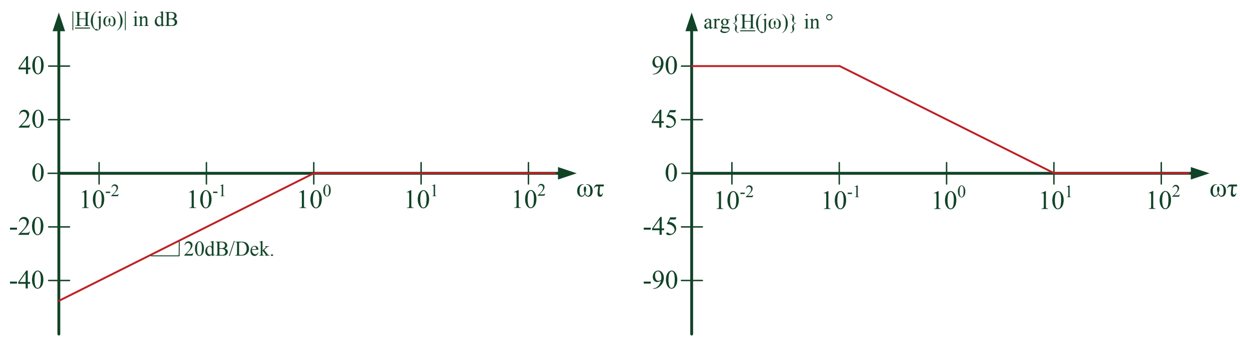


Abbildung 1.2: Lösungsskizze für Aufgabe 1.4

5. Das weiterhin parallel geschaltete Gesamtnetzwerk werde nun an eine Spannungsquelle $\underline{U}_1 = 50\ \text{V}e^{j\phi_0 t}$ mit $\phi_0 = 0^\circ$ und der Frequenz $\omega = \omega_0$ angeschlossen. Erläutern Sie allgemein (ohne Rechnung), ob und warum das Netzwerk in diesem Fall kapazitives oder induktives Verhalten aufzeigt. (*1 Punkt*)

   Da auf das Netzwerk eine Wechselspannung mit der Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$ geschaltet wird, befindet sich $\underline{Z}_1$ in Resonanz. Daher kompensieren sich L und C_1. Es verbleibt das RC-Glied $\underline{Z}_2$, sodass die Gesamtschaltung ebenfalls kapazitives Verhalten aufzeigt.

Aufgabe 2: Ausgleichsvorgang, Schwingkreis **(13 Punkte)**

1. a)

$$C = \frac{Q}{U_0} \implies U_0 = \frac{Q}{C} = \frac{225 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-6}} \frac{\cancel{As}\,\mathrm{V}}{\cancel{As}} = 450\,\mathrm{V}$$

b)

$$u_L(t = 0^+) = U_0$$

Da die Spannung $u_L(t)$ an der Kapazität C zum Zeitpunkt $t = 0^+$ stetig verlaufen muss.

c)

$$i_L(t = 0^+) = 0$$

Da der Strom $i_L(t)$ durch die Induktivität L zum Zeitpunkt $t = 0^+$ stetig verlaufen muss.

2.

$$u_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$$
$$-i_L(t) = C\,\frac{du_L(t)}{dt}$$
$$0 = \frac{1}{L\,C}\,u_L(t) + \frac{d^2u_L(t)}{dt^2}$$

Allgemeiner Lösungsansatz:

$$u_L(t) = e^{s\,t}$$
$$0 = (\frac{1}{L\,C} + s^2)\,e^{s\,t}$$
$$\underline{s} = \pm\,j\sqrt{\frac{1}{L\,C}}$$
$$\underline{u_L(t)} = A\,e^{+j\,\sqrt{\frac{1}{L\,C}}\,t} + B\,e^{-j\,\sqrt{\frac{1}{L\,C}}\,t}$$
$$\underline{u_L(t)} = (A+B)\,\cos(\sqrt{\frac{1}{L\,C}}\,t) + j\,(A-B)\,\sin(\sqrt{\frac{1}{L\,C}}\,t)$$

Anfangsbedingungen:

$$u_L(t = 0) = U_0$$

Ausserem muss die Spannung an einer Kapazität muss stetig verlaufen!

$$\implies u_L(t) = \Re(\underline{u_L(t)})$$
$$u_L(t) = U_0\,\cos(\omega_0\,t)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}$ und $A + B = U_0$.

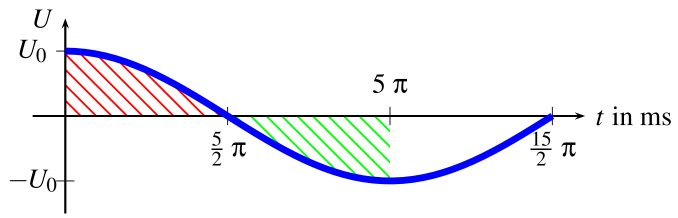
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t)\, dt$$
$$i_L(t) = \frac{U_0}{Z_0} \sin(\omega_0\, t)$$
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{\frac{\mathrm{V}^2\, \cancel{s}}{\mathrm{A}^2\, \cancel{s}}} = 10\,\Omega$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L\,C}} = \sqrt{\frac{1}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^{-9}}} \sqrt{\frac{\cancel{VA}}{\cancel{VA}\, s^2}} = 200\, \frac{1}{s}$$

3.

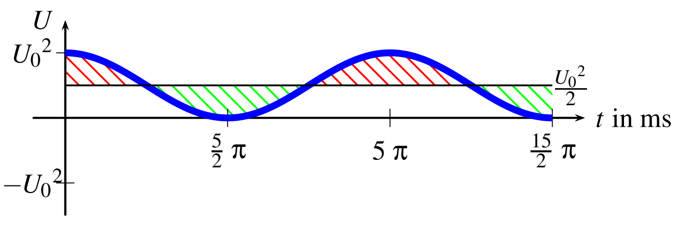
$$t_1 = \frac{3\,\pi}{2\,\omega_0} = \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot\ 200}\,\mathrm{s} = \frac{15}{2}\,\pi\,\mathrm{ms}$$

$$\bar{u_L} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_L(t)\, dt = \frac{2\,\omega_0}{3\,\pi} \int_0^{\frac{3\,\pi}{2\,\omega_0}} U_0\, \cos(\omega_0\, t)\, dt$$

Aus Skizze wird ersichtlich, dass



$$\bar{u_L} = -\frac{U_0\, 2\,\omega_0}{3\,\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\,\omega_0}} \cos(\omega_0\, t)\, dt = -\frac{U_0\, 2\,\cancel{\omega_0}}{3\,\pi\,\cancel{\omega_0}} = \frac{450 \cdot 2}{3 \cdot \pi}\,\mathrm{V} \approx 95{,}5\,\mathrm{V}$$
$$U_L{}^2 = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_L(t)^2\, dt = \frac{2\,\omega_0}{3\,\pi} \int_0^{\frac{3\,\pi}{2\,\omega_0}} U_0^2\, \cos^2(\omega_0\, t)\, dt$$



$$U_L{}^2 = \frac{2\,\omega_0\, U_0^2}{3\,\pi} \left(\int_0^{\frac{3\,\pi}{2\,\omega_0}} \frac{1}{2}\, dt + \int_0^{\frac{3\,\pi}{2\,\omega_0}} \frac{1}{2} \cos(2\,\omega_0\, t)\, dt \right) = \frac{U_0^2}{2}$$
$$U_L = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{450}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V} \approx 318{,}2\,\mathrm{V}$$

4.

$$
\begin{aligned}
u_L(t^*) &= L\,\frac{di_L(t^*)}{dt^*} \\
-u_L(t^*) &= R\,i_L(t^*) \\
0 &= \frac{R}{L}\,i_L(t^*) + \frac{di_L(t^*)}{dt^*}
\end{aligned}
$$

Allgemeiner Lösungsansatz:

$$
\begin{aligned}
u_L(t^*) &= e^{s\,t^*} \\
0 &= (\frac{R}{L} + s)\,e^{s\,t^*} \\
s &= -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau} \\
i_L(t^*) &= A\,e^{-\frac{t^*}{\tau}}
\end{aligned}
$$

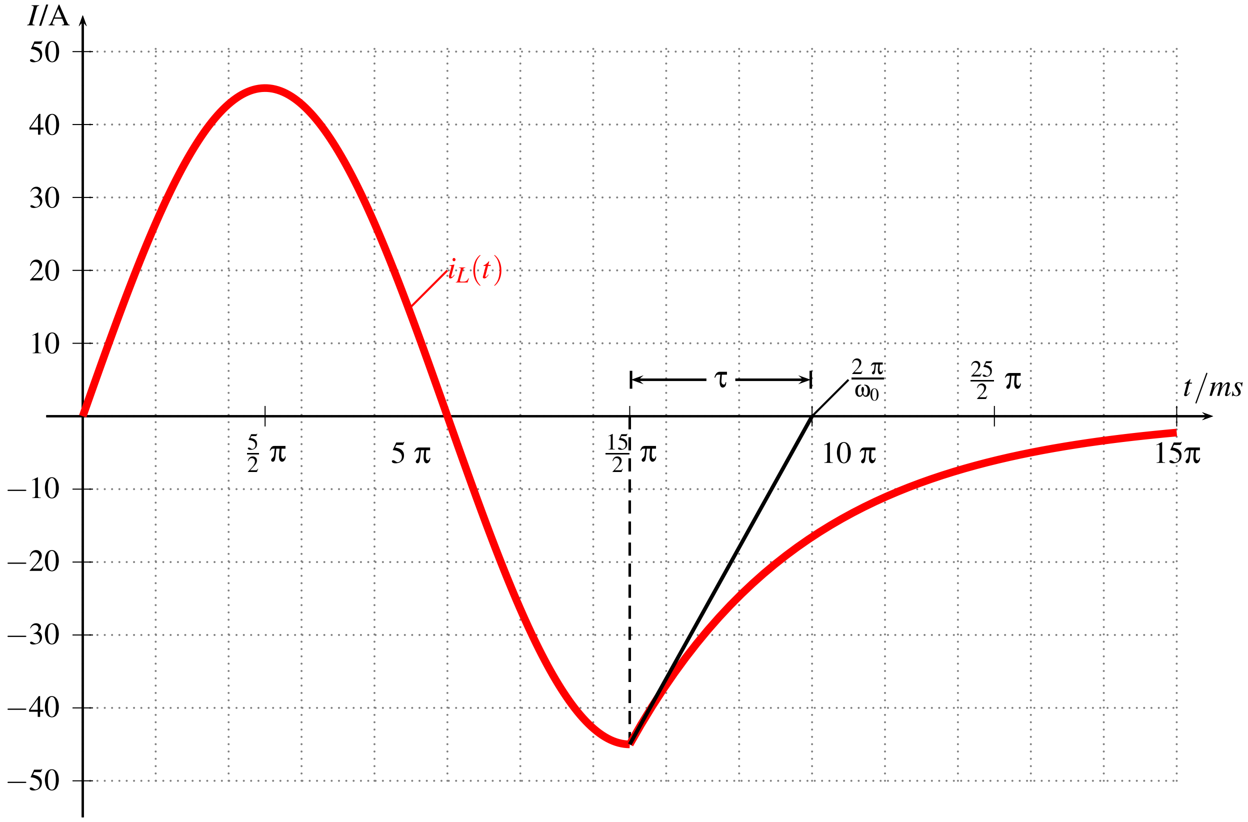
Anfangsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
i_L(t^* = 0) &= -\frac{U_0}{Z_0} = A \\
i_L(t^*) &= -\frac{U_0}{Z_0}\,e^{-\frac{t^*}{\tau}}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\tau = \frac{L}{R} = \frac{50\cdot 10^{-}3\cdot\pi}{20}\,\frac{\cancel{VA}\,s}{\cancel{VA}} = \frac{5}{2}\,\pi\,\mathrm{ms} = \frac{t_1}{3}
$$

5.


I/A
50
40
30
20
10
−10
−20
−30
−40
−50
$i_L(t)$
τ
$\frac{2\pi}{\omega_0}$
$\frac{25}{2}\pi$
t/ms
$\frac{5}{2}\pi$
5 π
$\frac{15}{2}\pi$
10 π
15π

Aufgabe 3: Tiefsetzssteller (13 Punkte)

1. Tiefsetzsteller
2. $0\,\mathrm{V} \leq U_2 \leq 50\,\mathrm{V}$
3. Siehe Abbildung 3.1
4.

$$\begin{aligned}
\Delta i_L &= I_{L_{max}} - I_{L_{min}} = \dot{i}_L \cdot DT_S = \frac{u_L\,(T_1 = an)}{L} DT_S = \frac{U_1 - U_2}{L} DT_s \\
\Leftrightarrow \Delta i_L &= \frac{1}{L} D(1-D)\,U_1 T_s = \frac{1}{L} U_1 T_s \left(D - D^2\right) \\
\Leftrightarrow \Delta i_L &= max \Rightarrow \frac{d\Delta i_L}{dD} \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{d\Delta i_L}{dD} &= \frac{1}{L} U_1 T_s\,(1-2D) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= 1 - 2D \Leftrightarrow 2D = 1 \Leftrightarrow D = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Delta i_L &= \frac{1}{L} U_1 T_s \left(D - D^2\right) \\
\Leftrightarrow L &= \frac{1}{\Delta i_L} U_1 T_s \left(D - D^2\right) \\
\Leftrightarrow L &= \frac{1}{0{,}4\,\mathrm{A}} 50\,\mathrm{V} \frac{1}{20\,\mathrm{kHz}} \left(0{,}5 - 0{,}25\right) = 1{,}5625\,\mathrm{mH}
\end{aligned}$$

6.
   - Schnell
     Über Formfaktor Dreiecksfunktion:
     $I_C = \frac{\hat{i}_C}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}2\mathrm{A}}{\sqrt{3}} = 115{,}47\mathrm{mA}$
   - Clever

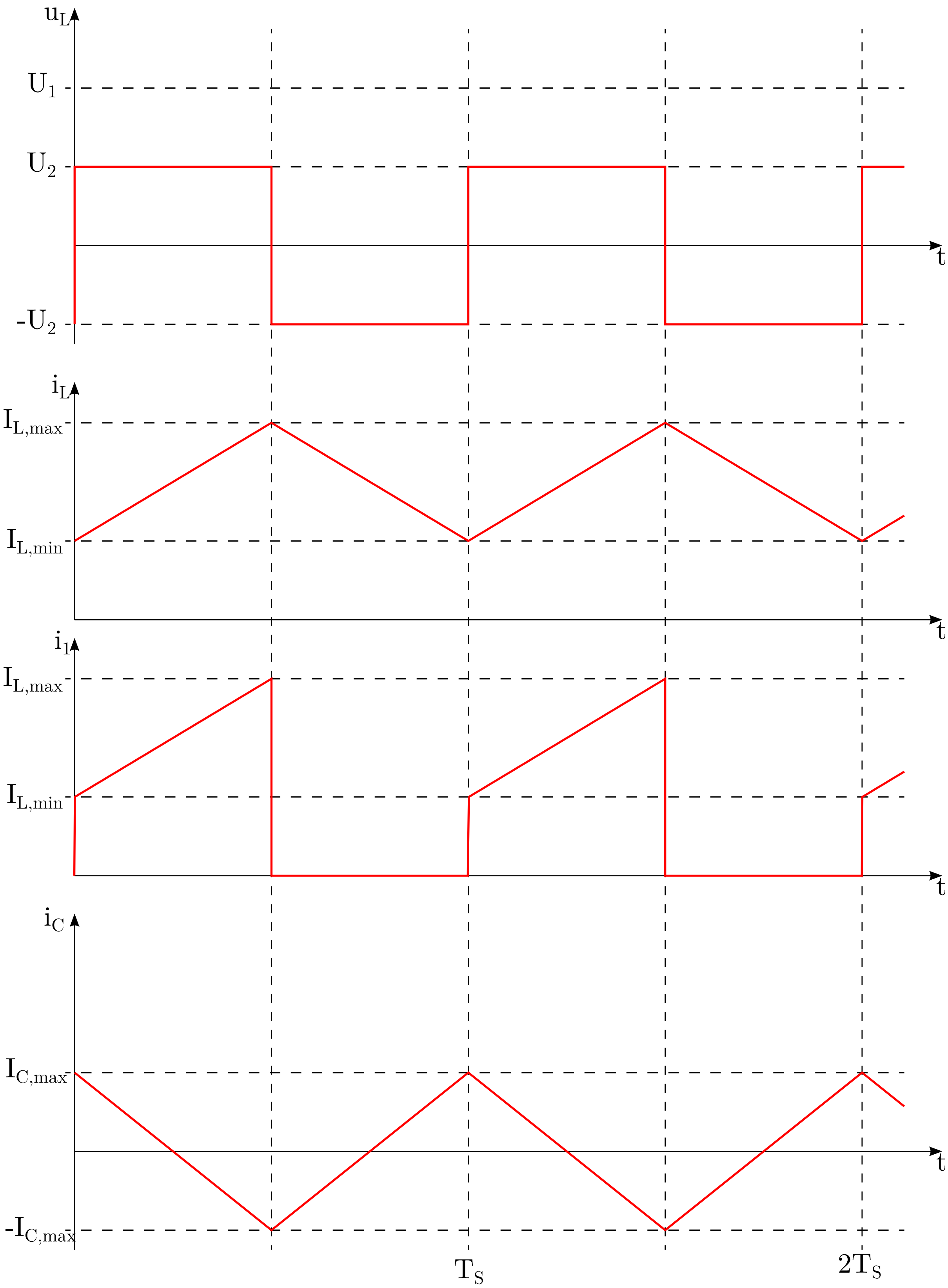


Abbildung 3.1: Lösung Teilaufgabe 3

$$
\begin{aligned}
I_C &= \sqrt{\frac{1}{T_S}\int_0^{T_S} i_C^2(\tau)d\tau} \\
I_C &= \sqrt{\frac{1}{T_S}\left(\int_0^{0{,}5DT_S} i_C^2(\tau)d\tau + \int_{0{,}5DT_S}^{DT_S} i_C^2(\tau)d\tau + \int_{DT_S}^{1{,}5DT_S} i_C^2(\tau)d\tau + \int_{1{,}5DT_S}^{T_S} i_C^2(\tau)d\tau\right)} \\
D &= 0{,}5 \Rightarrow \text{ 4 identische Flächen} \Rightarrow I_C = \sqrt{\frac{4}{T_S}\int_{0{,}75T_S}^{T_S} i_L^2(\tau)d\tau} \\
\Leftrightarrow I_C &= \sqrt{\frac{4}{T_S}\int_{0{,}75T_S}^{T_S}\left[\frac{4i_{C,max}}{T_S}(\tau-0{,}75T_S)\right]^2 d\tau} \\
\Rightarrow I_C &= \sqrt{\frac{4}{T_S}\int_0^{0{,}25T_S}\left(\frac{4i_{C,max}}{T_S}\tau\right)^2 d\tau} \\
\Leftrightarrow I_C &= \sqrt{\frac{64i_{C,max}^2}{T_S^3}\int_0^{0{,}25T_S}\tau^2 d\tau} \\
\Leftrightarrow I_C &= \sqrt{\frac{64i_{C,max}^2}{T_S^3}\left(\frac{1}{3}\tau^3\right)\Big|_0^{0{,}25T_S}} \\
\Leftrightarrow I_C &= \sqrt{\frac{64i_{C,max}^2}{T_S^3}\frac{1}{3}\frac{T_S^3}{64}} \\
\Leftrightarrow I_C &= \sqrt{\frac{1}{3}i_{C,max}^2} \\
\Leftrightarrow I_C &= \frac{1}{\sqrt{3}}i_{C,max} \\
i_{C,max} &= \frac{\Delta i_L}{2} \\
\Leftrightarrow I_C &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\Delta i_L}{2} \\
\Leftrightarrow I_C &= \frac{1}{\sqrt{3}}0{,}2\mathrm{A} = 115{,}47\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

- Zu Fuß

$$
\begin{aligned}
I_C &= \sqrt{\frac{1}{T_S}\int_0^{T_S} i_C^2(\tau)d\tau} \\
\Leftrightarrow I_C &= \sqrt{\frac{1}{T_S}\left(\int_0^{DT_S} i_C^2(\tau)d\tau + \int_{DT_S}^{T_S} i_C^2(\tau)d\tau\right)} \\
\Leftrightarrow I_C^2 T_S &= \int_0^{DT_S}\left(\frac{\Delta i_L}{2} - \frac{\Delta i_L}{DT_S}\tau\right)^2 d\tau + \int_{DT_S}^{T_S}\left(-\frac{3\Delta i_L}{2} + \frac{\Delta i_L}{DT_S}\tau\right)^2 d\tau \\
\Leftrightarrow I_C^2 T_S &= \int_0^{0{,}5T_S}\left(\frac{\Delta i_L}{2} - \frac{2\Delta i_L}{T_S}\tau\right)^2 d\tau + \int_{0{,}5T_S}^{T_S}\left(-\frac{3\Delta i_L}{2} + \frac{2\Delta i_L}{0{,}5T_S}\tau\right)^2 d\tau \\
\Leftrightarrow I_C^2 T_S &= \int_0^{0{,}5T_S}\left(\frac{\Delta i_L^2}{4} - 2\frac{\Delta i_L^2}{T_S}\tau + \frac{4\Delta i_L^2}{T_S^2}\tau^2\right) d\tau + \int_{0{,}5T_S}^{T_S}\left(\frac{9\Delta i_L^2}{4}\tau - \frac{6\Delta i_L^2}{T_S} + \frac{4\Delta i_L^2}{T_S}\tau^2\right) d\tau \\
\Leftrightarrow I_C^2 T_S &= \frac{\Delta i_L^2}{4}\tau\Big|_0^{0{,}5T_S} - 2\frac{\Delta i_L^2}{T_S}\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^{0{,}5T_S} + \frac{4\Delta i_L^2}{T_S^2}\frac{\tau^3}{3}\Big|_0^{0{,}5T_S} \\
&\quad + \frac{9\Delta i_L^2}{4}\tau\Big|_{0{,}5T_S}^{T_S} - \frac{6\Delta i_L^2}{T_S}\frac{\tau^2}{2}\Big|_{0{,}5T_S}^{T_S} + \frac{4\Delta i_L}{T_S}\frac{\tau^3}{3}\Big|_{0{,}5T_S}^{T_S} \\
\Leftrightarrow I_C^2 T_S &= \frac{\Delta i_L^2}{8}T_S - 2\frac{\Delta i_L^2}{T_S}\frac{T_S^2}{8} + \frac{4\Delta i_L^2}{T_S^2}\frac{T_S^3}{24} \\
&\quad + \frac{9\Delta i_L^2}{4}T_S - \frac{9\Delta i_L^2}{8}T_S - \frac{6\Delta i_L^2}{T_S}\frac{T_S^2}{2} + \frac{6\Delta i_L^2}{T_S}\frac{T_S}{8} + \frac{4\Delta i_L^2}{T_S}\frac{T_S^3}{3} - \frac{4\Delta i_L^2}{T_S}\frac{T_S}{24} \\
\Leftrightarrow I_C^2 &= \frac{1}{8}\Delta i_L^2 - \frac{1}{4}\Delta i_L^2 + \frac{1}{6}\Delta i_L^2 + \frac{9}{4}\Delta i_L^2 - \frac{9}{8}\Delta i_L^2 - 3\Delta i_L^2 + \frac{3}{4}\Delta i_L^2 + \frac{4}{3}\Delta i_L^2 - \frac{1}{6}\Delta i_L^2 \\
\Leftrightarrow I_C^2 &= \frac{1}{12}\Delta i_L^2 \\
\Rightarrow I_C &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\Delta i_L = \frac{1}{\sqrt{3}}0{,}2\mathrm{A} = 115{,}47\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Magnetischer Kreis **(13 Punkte)**

Gegegeben sei der in Abbildung 4.1 dargestellte magnetische Kreis. Der Querschnitt A kann in der gesamten Anordnung als konstant angenommen werden. Weiterhin kann die Streuung des magnetischen Flusses vernachlässigt werden. Die Senkundärwicklung N_2 wird nicht belastet.

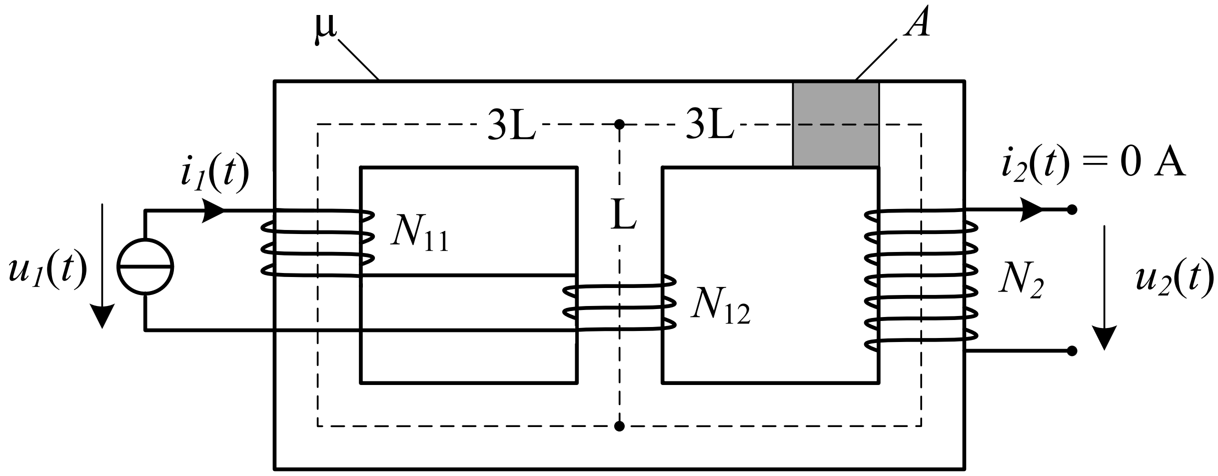


Abbildung 4.1: Magnetischer Kreis

Der Eingangsstrom sei gegeben durch folgenden Verlauf.

$$i_1(t) = I_0 sin(\omega t) \tag{4.1}$$

Bestimmen Sie alle Ausdrücke allgemein, ohne Zahlenwerte.

1. *Zeichnen Sie das Reluktanzmodell des magnetischen Kreises und bestimmen Sie die magnetischen Widerstände.*

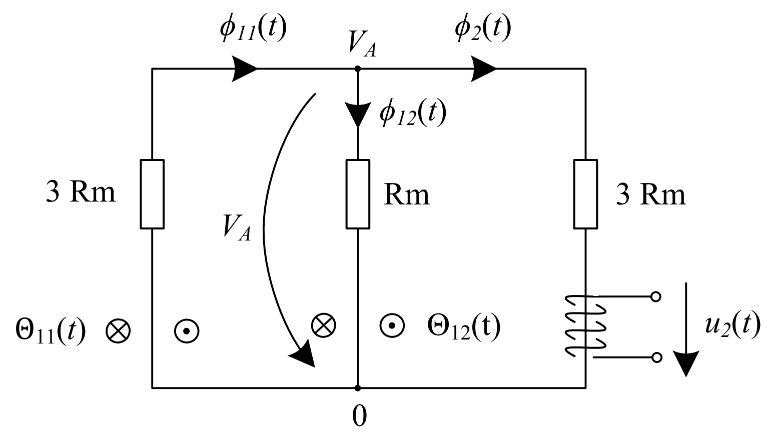


Abbildung 4.2: Gefordertes Reluktanzmodell

Der magnetische Widerstand berechnet sich zu:

$$\boxed{R_m = \frac{L}{\mu A}} \tag{4.2}$$

2. *Bestimmen Sie den magnetischen Fluss, der durch die Wicklung N_2 fließt.*

   Berechnung mit dem Knotenpotentialverfahren:

   Hierzu wird eine neue magnetische Verbraucherspannung V_A zwischen dem oberen und unterem Knotenpunkt definiert. Der Knotenpunktsatz ergibt sich nun zu:

$$\frac{\Theta_1 - V_A}{3R_m} - \frac{\Theta_2 - V_A}{R_m} - \frac{V_A}{3R_m} = 0 \tag{4.3}$$

   Die Auflösung nach V_A ergibt:

$$V_A = \frac{(N_{11} - 3N_{12})i(t)}{5} \tag{4.4}$$

   Mit Hilfe dieser Knotenspannung kann der Fluss $\phi_2(t)$ direkt bestimmt werden:

$$\boxed{\phi_2(t) = \frac{V_A}{3R_m} = \frac{(N_{11} - 3N_{12})i(t)}{15R_m}} \tag{4.5}$$

3. *Bestimmen Sie die Spannung $u_2(t)$.*

   Bei Beachtung der Lenz'schen Regel erhält man:

$$u_2(t) = \frac{d\Psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = \boxed{\frac{N_2 I_0 \omega(N_{11} - 3N_{12})}{15R_m} cos(\omega t)} \tag{4.6}$$

4. *Bei welchem Verhältnis $\frac{N_{11}}{N_{12}}$ hat die Spannung $u_2(t)$ den geringsten Scheitelwert $\hat{u}_2$?*

   Bei $N_{11} - 3N_{12} = 0$ ist der Scheitelwert $\hat{u}_2 = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{N_{11}}{N_{12}} = 3} \tag{4.7}$$

5. *Bestimmen Sie den Spannungsverlauf $u_1(t)$ an der Stromquelle.*

   Die Spannung an der Stromquelle kann mit Hilfe des Maschensatzes aus den Teilspannungen der Wicklungen N_{11} und N_{12} bestimmt werden.

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) \tag{4.8}$$

   Um die Teilspannungen zu erhalten werden zunächst die beiden Flüsse ϕ_{11} und ϕ_{12} bestimmt. Zu deren Ermittlung kann abermals die Knotenspannung V_A verwendet werden:

$$\phi_{11} = \frac{N_{11}i(t) - V_A}{3R_m} = \cdots = \frac{4N_{11} + 3N_{12}}{15R_m} i(t) \tag{4.9}$$

$$\phi_{12} = \frac{N_{12}i(t) + V_A}{R_m} = \cdots = \frac{N_{11} + 2N_{12}}{5R_m} i(t) \tag{4.10}$$

Mit diesen Flüssen kann nun die Spannung $u_1(t)$ berechnet werden:

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = \frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt} = N_{11}\frac{d\phi_{11}}{dt} + N_{12}\frac{d\phi_{12}}{dt} \tag{4.11}$$

$$= \frac{N_{11}(4N_{11} + 3N_{12})}{15R_m}\frac{di(t)}{dt} + \frac{N_{12}(N_{11} + 2N_{12})}{5R_m}\frac{di(t)}{dt} \tag{4.12}$$

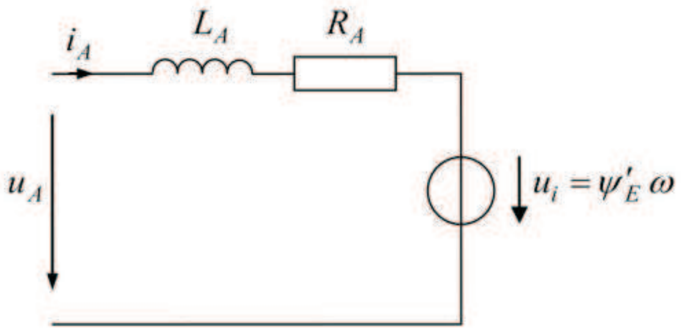
$$\Rightarrow \boxed{u_1(t) = \left(\frac{4}{3}N_{11}^2 + 2N_{11}N_{12} + 2N_{12}^2\right)\frac{\omega I_0}{5R_m} cos(\omega t)} \tag{4.13}$$

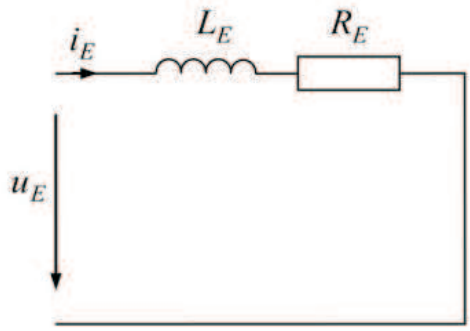
Aufgabe 5: Gleichstrommaschine (15 Punkte)

In dieser Aufgabe soll ein fremderregter Gleichstrommotor untersucht werden. Bitte gehen Sie bei allen Aufgabenteilen vom eingeschwungenen Zustand aus. Folgende Parameter seien vorab über den Motor bekannt:

$$L_\mathrm{E} = 5\ \mathrm{mH} \qquad N_\mathrm{E} = 50$$

1. Skizzieren Sie das Ersatzschaltbild des fremderregten Gleichstrommotors.





2. Zunächst sei der Motor blockiert ($\omega = 0$). Eine Messung ergibt folgende Werte:

$$U_\mathrm{A} = 3\mathrm{V} \qquad I_\mathrm{A} = 10\mathrm{A} \qquad I_\mathrm{E} = 1{,}5\mathrm{A} \qquad T = 0{,}018\mathrm{Nm}$$

Beachten Sie für diesen Aufgabenteil außerdem den Bürstenspannungsabfall U_B, welcher jeweils 1 V beträgt. Bestimmen Sie den Ankerwiderstand R_A und die Maschinenkonstante c_M.

<u>Hinweis:</u> $\Psi'_\mathrm{E} = c_\mathrm{M}\,\phi_\mathrm{E}$

$$R_\mathrm{A} = \frac{U_A - 2U_B}{I_A} = 0{,}1\Omega$$
$$c_\mathrm{M} = \frac{T}{\phi_\mathrm{E}\,I_A}$$
$$\phi_\mathrm{E} = \frac{L_E}{N_E} I_E\ ,\ c_\mathrm{M} = 12$$

3. Im Folgenden kann sich der Motor drehen und eine mechanische Last wird angeschlossen. Der Spannungsabfall an den Bürsten kann von nun an vernachlässigt werden. Eine Messung ergibt folgende Werte:

$$U_\mathrm{A} = 12\mathrm{V} \qquad I_\mathrm{A} = 8\mathrm{A} \qquad U_\mathrm{E} = 20\mathrm{V} \qquad I_\mathrm{E} = 1{,}5\mathrm{A}$$

Berechnen Sie das Drehmoment und die Drehzahl in diesem Arbeitspunkt.

$$\phi_\mathrm{E} = 1{,}5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{Vs}$$
$$T = c_\mathrm{M}\,\phi_\mathrm{E}\,I_\mathrm{A} = 14{,}4\ \mathrm{mNm}$$
$$U_A = I_\mathrm{A}\,R_\mathrm{A} + U_\mathrm{iA} = I_\mathrm{A}\,R_\mathrm{A} + c_\mathrm{m}\,\phi_\mathrm{E}\,\omega$$
$$\omega = \frac{U_\mathrm{A} - I_\mathrm{A}\,R_\mathrm{A}}{c_\mathrm{M}\,\phi_\mathrm{E}} = 6222{,}22\ \frac{1}{s}$$
$$n = 990{,}3\ \frac{1}{s}$$

4. Berechnen Sie den Gesamtwirkungsgrad des Motors für diesen Arbeitspunkt.

$$\eta = \frac{T\ \omega}{U_\mathrm{A}\ I_\mathrm{A} + U_\mathrm{E}\ I_\mathrm{E}} = 71{,}11\%$$

5. Bei welchem Ankerstrom ergibt sich der maximale Wirkungsgrad, wenn der Erregerstrom und die Drehzahl konstant bleiben sollen. Leiten Sie den Zusammenhang allgemein her und geben Sie den Ankerstrom für den betrachteten Fall an.

   Hinweis: Beachten Sie, dass sich für diesen Ankerstrom entsprechend eine Ankerspannung und ein Drehmoment einstellt.

$$\eta = \frac{c_\mathrm{M}\ \phi_\mathrm{E}\ I_\mathrm{A}\ \omega}{R_\mathrm{A}\ I_\mathrm{A}^2 + U_{iA}\ I_A + U_\mathrm{E}\ I_\mathrm{E}}$$

$$\eta = \frac{C_1\ I_\mathrm{A}}{C_2 I_\mathrm{A}^2 + C_3 I_A + C_4}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial I_\mathrm{A}} = \frac{C_1\left(C_2\ I_\mathrm{A}^2 + C_3 I_\mathrm{A} + C4\right) - C_1\ I_\mathrm{A}\left(2C_2\ I_A + C_3\right)}{\left(C_2\ I_\mathrm{A}^2 + C_3 I_\mathrm{A} + C4\right)}$$

$$\left.\frac{\partial\eta}{\partial I_\mathrm{A}}\right|_{\eta_{max}} = 0 = -C_2\ I_\mathrm{A}^2 + C_4$$

$$I_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{C_4}{C_2}}$$

$$I_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{U_\mathrm{E}\ I_\mathrm{E}}{I_\mathrm{R}}} = 17{,}32A$$