

# **Geregelte Drehstromantriebe**

**Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker**

Skript zur Vorlesung

Stand vom 26.01.2016

Universität Paderborn

Fachgebiet Leistungselektronik und  
Elektrische Antriebstechnik

---

## Vorwort

Die Veranstaltung „Geregelte Drehstromantriebe“ widmet sich dem System des elektrischen Antriebs. Der elektrische *Antrieb* besteht nicht nur aus der elektrischen Maschine, dem Motor, sondern nach modernem Verständnis außerdem aus Stromrichter, Sensoren, Regelung und Leittechnik.

Nach einer Übersicht und Begriffsbestimmungen beginnt der Zugang zu dieser Thematik zunächst mit der Analyse einer elektrischen Maschine. Dies soll und kann in diesem Kontext aber nicht in der Tiefe erfolgen, wie es in einer Lehrveranstaltung zu elektrischen Maschinen der Fall wäre. Der Permanentmagnet-Synchronmotor wird als Einstieg gewählt, weil dieser wegen seiner hohen Drehmoment- und Leistungsdichte viele Anwendungsbereiche erobert hat und mittlerweile große Bedeutung besitzt. Außerdem lässt sich das wichtige Prinzip der *flussorientierten Regelung* an diesem Motor besonders übersichtlich entwickeln. Später wird dies auf den Asynchronmotor übertragen und erweitert. Neben den Regelungsprinzipien werden in Folge die Stromrichtertechnik, die Pulsweitenmodulation und die digitale Implementierung der Regelung diskutiert.

Obwohl sich dieser Kurs auf die Beispiele des Permanentmagnet-Synchronmotors und des Asynchronmotors beschränkt, sollten die Teilnehmer dann in der Lage sein, die dargestellten Prinzipien auch auf andere Antriebssysteme wie z. B. mit dem fremderregten Synchronmotor zu übertragen, welcher aus Gründen des Stoffumfangs in dieser Veranstaltung nicht behandelt wird.

Paderborn, im März 2009

Joachim Böcker

---

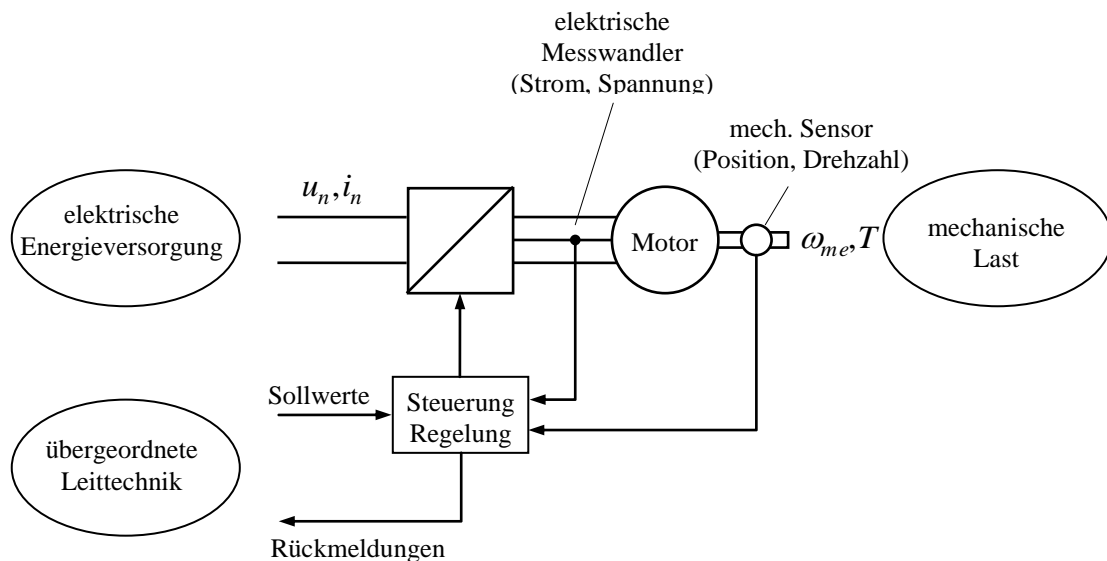
# Inhalt

<b>1</b>	<b>Der elektrische Antrieb</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Aufbau und Modellierung von Permanentmagnet-Synchronmotoren (PMSM)</b>	<b>7</b>
2.1	Modellierung eines vereinfachten Motors mit orthogonalen Wicklungen	7
2.2	Das mitdrehende rotorfeste Koordinatensystem	12
2.3	Der dreisträngige Motor	16
2.4	Transformationen von dreisträngigen in orthogonale Komponenten	18
2.5	Abbildung des dreisträngigen auf das orthogonale zweisträngige Modell	22
2.6	Messtechnische Bestimmung des Ständerwiderstands und der Ständerinduktivität	24
2.7	Mehrpole Motoren	24
2.8	Wicklungsaufbau	27
2.9	Zusammenhang zwischen Motorgeometrie und Drehmomentausbeute	38
2.10	Stationäres Betriebsverhalten	41
<b>3</b>	<b>Umrichter</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>Pulsweitenmodulation</b>	<b>59</b>
4.1	Einsträngige Pulsweitenmodulation	59
4.2	Dreisträngige Pulsweitenmodulation	62
4.3	Vektormodulation	68
4.4	Regular Sampling	76
4.5	Totzeit des digitalen Regelkreises	82
4.6	Spannungsfehler aufgrund von Wechselsperrzeiten	84
4.7	Dynamische Mittelwertmodellierung des pulsweitenmodulierten Umrichters	89
4.8	Oberschwingungen	91
4.8.1	Oberschwingungen bei konstantem Sollwert	91
4.8.2	Oberschwingungen bei sinusförmigem Sollwert	94
<b>5</b>	<b>Regelung des Permanentmagnet-Synchronmotors in mitdrehenden Koordinaten</b>	<b>97</b>
5.1	Stromregelung	97
5.2	Zeitdiskrete Reglerrealisierung	99
5.3	Gesamtstruktur der Regelung	100
<b>6</b>	<b>Direkte Drehmoment-Regelung (DTC)</b>	<b>101</b>
6.1	Regelungskonzept	101
6.2	Fluss- und Drehmomentbeobachter	106

---

<b>7</b>	<b>Schutzmaßnahmen</b>	<b>110</b>
7.1	Pulssperre oder Motorkurzschluss	111
7.2	Stationäre Kurzschlussströme	111
7.3	Transiente Kurzschlussströme	113
<b>8</b>	<b>Modellierung von Asynchronmotoren</b>	<b>117</b>
8.1	Modellierung mit orthogonalen Wicklungen	117
8.2	Drehmomentbildung	124
8.3	Flussorientierte Koordinatensysteme	126
8.4	Dynamische Modellierung in rotorflussorientierten Koordinaten	127
8.5	Transformation der Streuinduktivitäten	132
8.5.1	Modell mit ständerseitig konzentrierter Streuung	133
8.5.2	Modell mit rotorseitig konzentrierter Streuung	134
8.6	Berücksichtigung des realen Magnetisierungsverhaltens	136
8.7	Stationäres Betriebsverhalten	137
8.7.1	Spannungsgleichungen und Zeigerdiagramm	137
8.7.2	Stationäres Ersatzschaltbild	139
8.7.3	Drehmoment bei Speisung mit konstanter Spannung und konstanter Frequenz	140
8.7.4	Verlustminimaler Betrieb	143
8.7.5	Betrieb an der Stromgrenze	146
8.7.6	Betrieb an der Spannungsgrenze, Flussschwächung	149
8.8	Regelungsstruktur	153
<b>9</b>	<b>Gegenüberstellung der Darstellungen mit zweidimensionalen Vektoren und mit komplexen Zeigern</b>	<b>154</b>
<b>10</b>	<b>Fourier- und Laplace-Transformation von zweidimensionalen Zeitfunktionen</b>	<b>155</b>
<b>11</b>	<b>Deutsch-englisches Glossar</b>	<b>158</b>
<b>12</b>	<b>Literatur</b>	<b>161</b>

# 1 Der elektrische Antrieb



**Fig. 1-1:** Grundstruktur des elektrischen Antriebs

Der moderne elektrische Antrieb besteht aus den *Grundkomponenten*:

- Motor als elektromechanischer Energiewandler
- Umrichter (Leistungselektronik) zur Umformung der elektrischen Energie, der Umrichter ist das Stellglied der Steuerung und Regelung
- Steuerung und Regelung (antriebsnahe Leittechnik)
- Messwandler und Sensoren

*Systemgrenzen:*

Die genannten Komponenten bilden den Kern des elektrischen Antriebssystems. Je nach Aufgabenstellung und Systemabgrenzung können zum Antriebssystem gerechnet werden:

- Komponenten der elektrischen Energieversorgung, z. B. elektrische Filter, Transformatoren, ggf. wird auch das stationäre und dynamische Verhalten der Energieversorgung (dies kann sowohl eine Batterie sein wie auch ein öffentliches Energieversorgungsnetz) einbezogen
- Komponenten des mechanischen Antriebsstrangs und der Last wie z. B. Getriebe, Berücksichtigung der Trägheiten und Steifigkeiten, detailliertes Verhalten der angetriebenen Last
- Komponenten der übergeordneten Leittechnik zur Realisierung komplexer antriebstechnischer Aufgaben

## Äußere Schnittstellen des Antriebs

### - im Leistungsfluss:

- zur elektrischen Energieversorgung (Gleich-, Wechsel- oder Drehspannung)
- zur mechanischen Last
- 

### - im Informationsfluss:

- Sollwerte und ggf. weitere Informationen von der übergeordneten Leittechnik oder vom Bediener
- Rückmeldungen über innere Zustände oder Messwerte zur übergeordneten Leittechnik

Der Antrieb ist ein *steuerbarer* elektromechanischer Energiewandler. Die funktionelle Integration von Leistungs- und Informationsfluss charakterisiert den elektrischen Antrieb als mechatronisches System.

### Leistungsfluss:

Bei vielen antriebstechnischen Aufgabenstellungen wird nur ein unidirektionaler Leistungsfluss (von der Energieversorgung zur Last) benötigt, oft ist der Leistungsfluss aber auch bidirektional, z.B. zur Rekuperation von Bremsleistung, oder die wesentliche Betriebsart ist die Gewinnung elektrischer Energie aus mechanischer.

Die Struktur derartiger moderner elektrischer Energieerzeugung unterscheidet sich häufig nicht von der antriebstechnischen Grundstruktur. Im Gegensatz dazu werden Generatoren zur elektrischen Energieerzeugung z. B. in konventionellen Wasser- und Wärmekraftwerken ohne die Zwischenstufe der elektrischen Umformung direkt am Netz betrieben. Die notwendige Steuerung und Regelung des Systems wird nicht elektrisch, sondern durch die Regulierung der zugeführten mechanischen Leistung (Schaufelstellung der Turbine, Drosselung durch Ventile usw.) bewerkstelligt.

### Beispiele:

- unidirektional elektrisch → mechanisch: Pumpen, Lüfter
- unidirektional mechanisch → elektrisch: Generatoren (Windkraft, Wasserkraft, Dampfturbinen)
- bidirektional elektrisch ↔ mechanisch: Traktionsantriebe für Bahnen, Antriebe in Walzstraßen, Papiermaschinen

### Antriebstechnische Grundaufgaben:

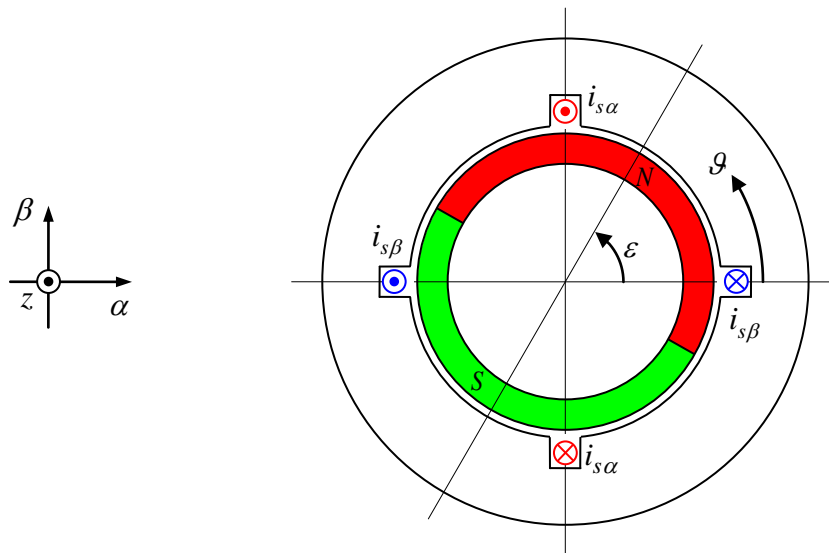
- Einstellung eines Drehmoments
- Einstellung einer Drehzahl
- Einstellung einer Position

Meistens werden solche Aufgaben durch kaskadierte Strukturen gelöst: Die Einstellung einer Position bedient sich einer unterlagerten Drehzahlregelung, diese wiederum einer unterlagerten Drehmomentregelung.

Neben diesen drei Grundaufgaben gibt es zahlreiche komplexe antriebstechnische Aufgabenstellungen, die sich nicht eindeutig einer der Grundaufgaben zuordnen lassen, sondern Mischformen darstellen wie beim Aufzug: Positionsregelung beim Halten, Geschwindigkeitsregelung während der Fahrt.

## 2 Aufbau und Modellierung von Permanentmagnet-Synchronmotoren (PMSM)

### 2.1 Modellierung eines vereinfachten Motors mit orthogonalen Wicklungen



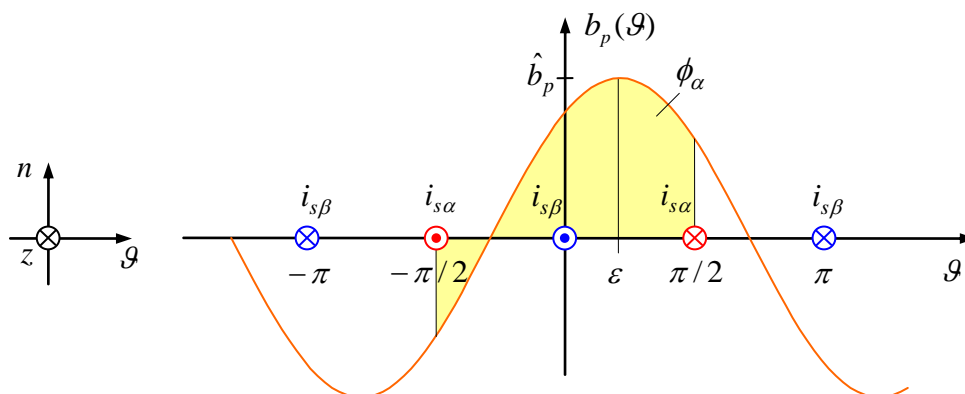
**Fig. 2-1:** Idealisierter Permanentmagnet-Motor mit zwei orthogonalen Wicklungen

$\varepsilon$  : Drehwinkel des Rotors gegenüber dem Stator

$\vartheta$  : statorfeste Umfangskoordinate

Annahme: Die vom Permanentmagneten verursachte Normalkomponente der magnetischen Flussdichte sei über dem Umfang sinusförmig verteilt, die Verschiebung dieser Sinuskurve ergibt sich aufgrund der Rotorstellung  $\varepsilon$  :

$$b_p(\vartheta) = \hat{b}_p \cos(\vartheta - \varepsilon) \quad (2.1)$$



**Fig. 2-2:** Verteilung der magnetischen Flussdichte über der Statorumfangskoordinate  $\vartheta$  sowie in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\varepsilon$

Bemerkung zur Wahl der Zählrichtungen in der abgewickelten Darstellung: Die Händigkeit (Rechts-/Linkssystem) des ursprünglichen obigen Schnittbildes soll auch in der abgewickelten Darstellung nicht verändert werden. Wird die  $\mathcal{G}$ -Achse nach rechts, die Normalenachse  $n$  nach oben orientiert, muss die  $z$ -Achse, die Motorlängsachse, in die Darstellungsebene der Abwicklung nach unten positiv gezählt werden. Daraus resultieren die Zählrichtungen der dargestellten Ströme. Geometrisch entspricht dieses Vorgehen einem Blick von hinten auf die Schnittskizze. Daher erscheinen die Zählrichtungen der Ströme gespiegelt.

Der Fluss durch die Leiterschleife  $\alpha$  ist nun:

$$\phi_{p\alpha} = rl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b_p(\mathcal{G}) d\mathcal{G} \quad (2.2)$$

Die beteiligten Parameter sind:

- $r$  effektiver Radius
- $l$  magnetisch wirksame Länge des Motors

Es ergibt sich

$$\phi_{p\alpha} = rl\hat{b}_p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\mathcal{G} - \varepsilon) d\mathcal{G} = 2rl\hat{b}_p \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 2rl\hat{b}_p \cos \varepsilon = \phi_p \cos \varepsilon \quad (2.3)$$

mit

$$\phi_p = 2rl\hat{b}_p \quad (2.4)$$

Ähnliches ergibt sich für die Leiterschleife  $\beta$

$$\phi_{p\beta} = rl\hat{b}_p \int_0^{\pi} \cos(\mathcal{G} - \varepsilon) d\mathcal{G} = 2rl\hat{b}_p \sin \varepsilon = \phi_p \sin \varepsilon \quad (2.5)$$

Berücksichtigt man die Windungszahl  $N$  der Statorwicklungen, ergeben sich die mehrfach verketteten Flüsse

$$\psi_{p\alpha} = N\phi_{p\alpha} = \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.6)$$

$$\psi_{p\beta} = N\phi_{p\beta} = \psi_p \sin \varepsilon \quad (2.7)$$

mit

$$\psi_p = N\phi_p = 2Nrl\hat{b}_p \quad (2.8)$$



Nach dem Faradayschen Induktionsgesetz werden folgende Spannungen induziert:

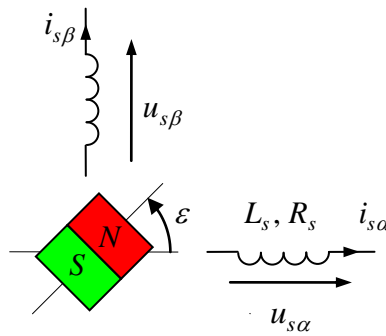
$$e_\alpha = \dot{\psi}_{s\alpha} \quad (2.9)$$

$$e_\beta = \dot{\psi}_{s\beta} \quad (2.10)$$

wobei die Flüsse  $\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta}$ , die die Leiterscheiben durchsetzen, sich aus dem Fluss des Permanentmagneten und dem durch die Leiterströme über die Selbstinduktivität hervorgerufenen Fluss zusammensetzen:

$$\psi_{s\alpha} = L_s i_{s\alpha} + \psi_{p\alpha} = L_s i_{s\alpha} + \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.11)$$

$$\psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + \psi_{p\beta} = L_s i_{s\beta} + \psi_p \sin \varepsilon \quad (2.12)$$



Weiterhin ist noch der Innenwiderstand der Wicklungen zu berücksichtigen. Dies führt auf die Spannungsgleichungen

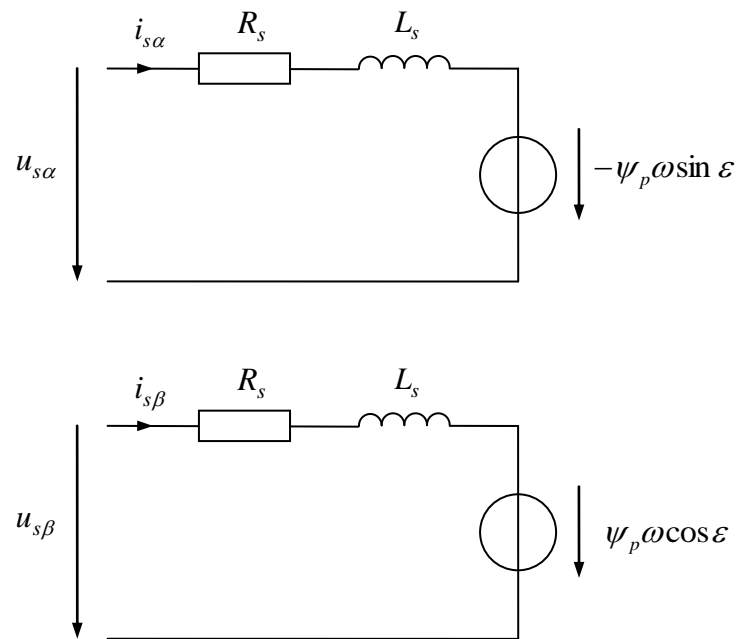
$$u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + \dot{\psi}_{s\alpha} \quad (2.13)$$

$$u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + \dot{\psi}_{s\beta} \quad (2.14)$$

$$u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + L_s \dot{i}_{s\alpha} + u_{i\alpha} = R_s i_{s\alpha} + L_s \dot{i}_{s\alpha} - \psi_p \omega \sin \varepsilon \quad (2.15)$$

$$u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + L_s \dot{i}_{s\beta} + u_{i\beta} = R_s i_{s\beta} + L_s \dot{i}_{s\beta} + \psi_p \omega \cos \varepsilon \quad (2.16)$$

$$\omega = \dot{\varepsilon} \quad (2.17)$$



**Fig. 2-3:** Ersatzschaltbild des Permanentmagnet-Synchronmotors

Bestimmung des Drehmoments aus der Leistungsbilanz, Multiplikation der Spannungsgleichungen mit den Strömen:

$$u_{s\alpha} i_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha}^2 + L_s \dot{i}_{s\alpha} i_{s\alpha} - i_{s\alpha} \psi_p \omega \sin \varepsilon \quad (2.18)$$

$$u_{s\beta} i_{s\beta} = R_s i_{s\beta}^2 + L_s \dot{i}_{s\beta} i_{s\beta} + i_{s\beta} \psi_p \omega \cos \varepsilon \quad (2.19)$$

Addition und Identifikation der Terme

$$P_{el} = P_V + \dot{E}_{mag} + P_{me} \quad (2.20)$$

mit

$$P_{el} = u_{s\alpha} i_{s\alpha} + u_{s\beta} i_{s\beta} \quad (2.21)$$

$$P_V = R_s i_{s\alpha}^2 + R_s i_{s\beta}^2 \quad (2.22)$$

$$P_{me} = \omega T = -i_{s\alpha} \psi_p \omega \sin \varepsilon + i_{s\beta} \psi_p \omega \cos \varepsilon \quad (2.23)$$

Im Ersatzschaltbild lässt sich die mechanische Leistung als die an den Ersatzspannungsquellen umgesetzte Leistung interpretieren.

Drehmoment:

$$T = -i_{s\alpha}\psi_p \sin \varepsilon + i_{s\beta}\psi_p \cos \varepsilon \quad (2.24)$$

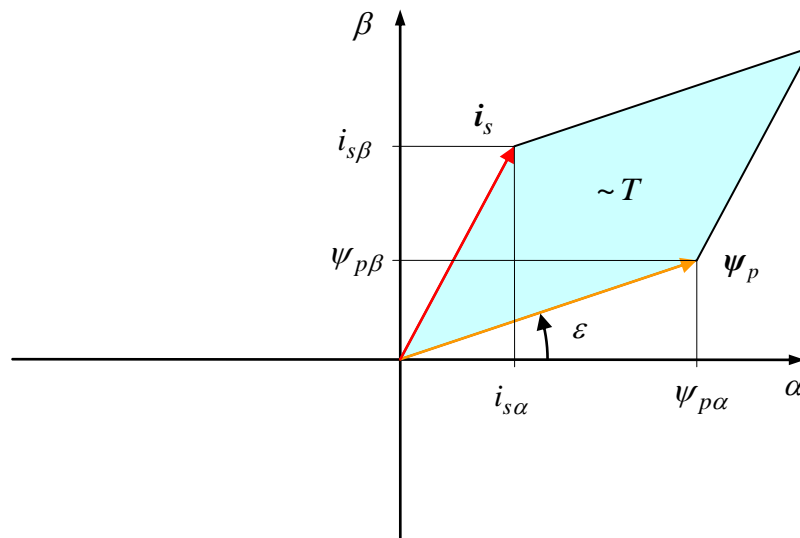
Einführung der Vektorschreibweise:

$$\mathbf{i}_s = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_p = \begin{bmatrix} \psi_{p\alpha} \\ \psi_{p\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_p \cos \varepsilon \\ \psi_p \sin \varepsilon \end{bmatrix} = \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

Damit Drehmoment:

$$T = \psi_{p\alpha}i_{s\beta} - \psi_{p\beta}i_{s\alpha} = [\boldsymbol{\psi}_p, \mathbf{i}_s] = \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s \quad (2.25)$$

Die Klammer [ , ] oder das Kreuz  $\times$  bezeichnet das sogenannte äußere Produkt zweier ebener Vektoren. Das äußere Produkt ist geometrisch als Flächeninhalt des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms interpretierbar.





In den mitdrehenden  $d/q$ -Koordinaten kann das Drehmoment besonders einfach ausgedrückt werden:

$$T = \psi_p i_{sq} \quad (2.26)$$

Die Komponente  $i_{sd}$  beeinflusst das Drehmoment nicht. Wird das Drehmoment  $T$  vorgegeben, muss hierfür also der Strom

$$i_{sq} = \frac{T}{\psi_p} \quad (2.27)$$

eingestellt werden. Soll das Drehmoment mit einem Stromvektor kleinsten Betrags eingestellt werden, ist

$$i_{sd} = 0 \quad (2.28)$$

zu wählen.

Die Benennung der Koordinaten des mitdrehenden Systems rührt von englisch *direct axis* und *quadrature axis*, also die zu der  $d$ -Achse rechtwinklige Achse, her.

Transformation eines allgemeinen Vektors  $\mathbf{x}$  zwischen dem statorfesten  $\alpha/\beta$ -Koordinatensystem und dem mitdrehenden rotorfesten  $d/q$ -System:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix}$$

Mit der Drehtransformationsmatrix

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

Im Bereich elektrischer Maschinen wird diese ebene Drehung als *Park-Transformation* bezeichnet. Für die Umkehrtransformation gilt

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}$$

Später wird noch die Zeitableitung der Drehmatrix benötigt. Es gilt

$$\dot{\mathbf{Q}}(\varepsilon) = \dot{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{Q}(\varepsilon) = \omega \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon & -\cos \varepsilon \\ \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \end{bmatrix} = \omega \mathbf{J} \mathbf{Q}(\varepsilon) = \omega \mathbf{Q}(\varepsilon) \mathbf{J}$$

mit

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformation der Spannungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} &= R_s \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \frac{d}{dt} \left( \mathbf{Q}(\varepsilon) \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \right) \\ &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \mathbf{Q}(\varepsilon) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}(-\varepsilon) \dot{\mathbf{Q}}(\varepsilon) \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \\ &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \omega \mathbf{J} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \\ &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\psi_{sq} \\ \psi_{sd} \end{bmatrix} \\ &= R_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \omega L_s \begin{bmatrix} -i_{sq} \\ i_{sd} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_p \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.29}$$

In Komponenten-Schreibweise:

$$u_{sd} = R_s i_{sd} + \dot{\psi}_{sd} - \omega \psi_{sq} \tag{2.30}$$

$$u_{sq} = R_s i_{sq} + \dot{\psi}_{sq} + \omega \psi_{sd} \tag{2.31}$$

Transformation der Flussgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} &= L_s \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \psi_p \mathbf{Q}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} &= L_s \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.32}$$

also in Komponenten

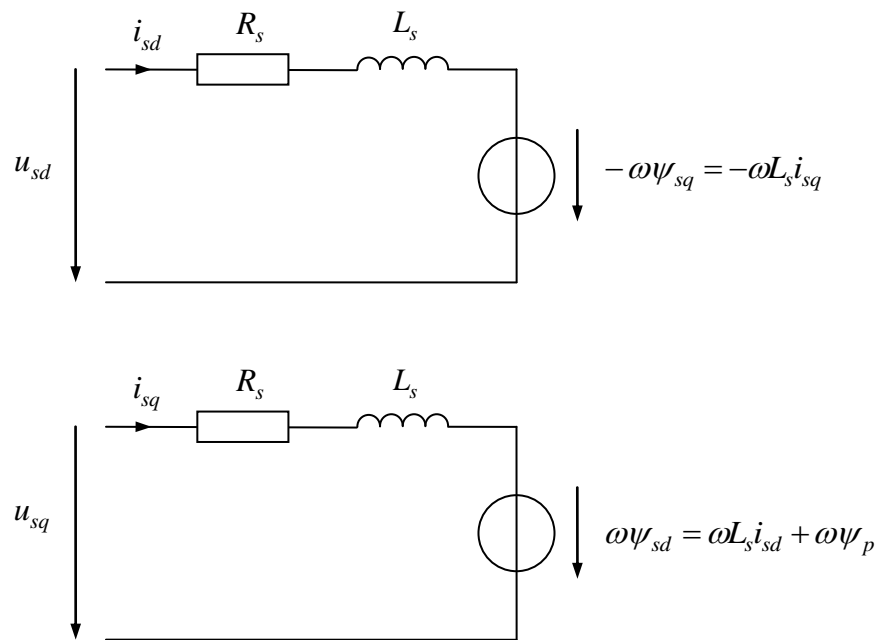
$$\psi_{sd} = L_s i_{sd} + \psi_p \tag{2.33}$$

$$\psi_{sq} = L_s i_{sq} \tag{2.34}$$

Ersetzt man in obigen Spannungsgleichungen die Fluss- durch die Stromableitungen, erhält man

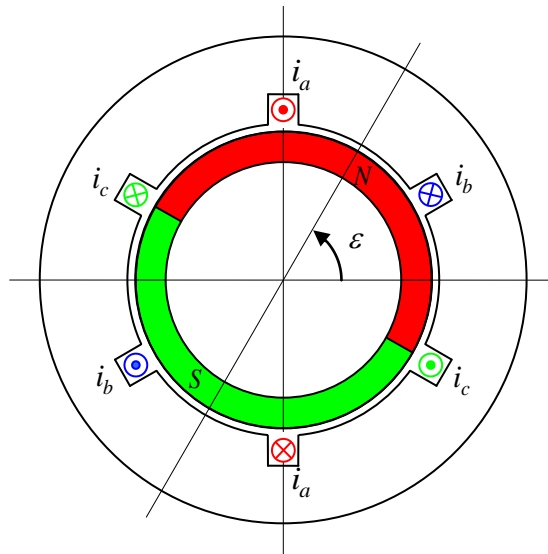
$$u_{sd} = R_s i_{sd} + L_s \dot{i}_{sd} - \omega L_s i_{sq} \quad (2.35)$$

$$u_{sq} = R_s i_{sq} + L_s \dot{i}_{sq} + \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p \quad (2.36)$$

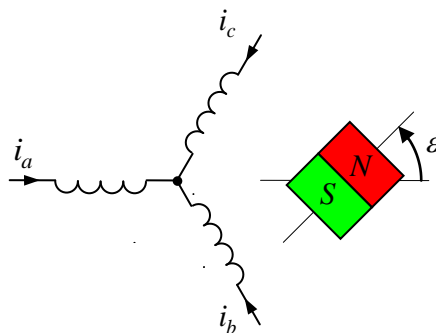


**Fig. 2-5:** Ersatzschaltbild des Permanentmagnet-Synchronmotors in  $d/q$ -Koordinaten

## 2.3 Der dreisträngige Motor



**Fig. 2-6:** Dreisträngiger Motor mit jeweils um 120° versetzten Wicklungen



**Fig. 2-7:** Schaltbild des dreisträngigen Motors

Für die von einer sinusförmigen Flussdichteverteilung des Permanentmagnet-Motors herrührenden Flussanteile in den Wicklungen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ergeben sich ganz ähnlich wie beim zweisträngigen, orthogonalen Motor

$$\psi_{pa} = \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.37)$$

$$\psi_{pb} = \psi_p \cos \left( \varepsilon - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.38)$$

$$\psi_{pc} = \psi_p \cos \left( \varepsilon + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.39)$$

Für die Spannungen gilt



$$u_a = R^w i_a + \dot{\psi}_a \quad (2.40)$$

$$u_b = R^w i_b + \dot{\psi}_b \quad (2.41)$$

$$u_c = R^w i_c + \dot{\psi}_c \quad (2.42)$$

Beim Motor mit orthogonalen Wicklungen kann es aus Symmetriegründen keine Kopplung der beiden Wicklungen geben. Die Hauptinduktivität zwischen diesen Wicklungen ist dann Null. Beim dreisträngigen Motor mit jeweils um  $120^\circ$  versetzten Wicklungen hat jede der Wicklungen eine Selbstinduktivität  $L^w$ , aber jeweils zwei der Wicklungen sind untereinander zusätzlich durch einen Fluss verkettet, was durch die Hauptinduktivität  $L_h^w$  ausgedrückt wird. Aufgrund der Symmetrie des Motors müssen alle diese paarweisen Verkopplungen von gleicher Größe sein. Wegen der eingeführten Zählpfeilrichtungen hat diese Kopplung negatives Vorzeichen. Dies wird durch das negative Vorzeichen vor der als positiv angenommenen Hauptinduktivität ausgedrückt.

$$\psi_a = L^w i_a - L_h^w (i_b + i_c) + \psi_{pa} \quad (2.43)$$

$$\psi_b = L^w i_b - L_h^w (i_c + i_a) + \psi_{pb} \quad (2.44)$$

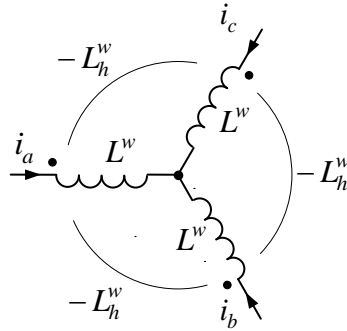
$$\psi_c = L^w i_c - L_h^w (i_a + i_b) + \psi_{pc} \quad (2.45)$$

Für den Fall, dass die Motor so konstruiert ist, dass der Fluss  $\psi_a$  jeweils hälftig über Wege durch die Spulen  $b$  und  $c$  zurück geführt wird, ergibt sich zwischen Selbst- und Hauptinduktivität der Zusammenhang

$$L_h^w = \frac{1}{2} L^w \quad (2.46)$$

Im allgemeinen wird sich Fluss aber nicht vollständig über die benachbarten Spulen  $b$  und  $c$  schließen, sondern wird auch Rückwege finden, die nicht mit diesen Spulen verkettet sind, so dass die Hauptinduktivität kleiner ausfällt. In diesem Fall ergibt sich immerhin die obere Abschätzung

$$L_h^w \leq \frac{1}{2} L^w \quad (2.47)$$



**Fig. 2-8:** Selbst- und Hauptinduktivitäten der drei Stränge

## 2.4 Transformationen von dreisträngigen in orthogonale Komponenten

Die drei Komponenten  $x_a, x_b, x_c$ , die als Vektor zusammengefasst werden, werden durch die Transformation

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

in die beiden orthogonalen Komponenten  $x_\alpha, x_\beta$  und die Nullkomponente  $x_0$  überführt. Für die Nullkomponente ist auch die alternative Definition

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_a + x_b + x_c) \quad (2.49)$$

gebräuchlich. In diesem Fall wäre die Nullkomponente der arithmetische Mittelwert der Strangkomponenten. Die hier gewählte Definition für  $x_0$ , die sich vom Mittelwert lediglich um den Faktor  $\sqrt{2}$  unterscheidet, besitzt jedoch Vorteile bei der Darstellung von Leistungstermen (s. u.).

Die Umkehrung der Transformation ergibt

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Skalarprodukte, wie sie bei Leistungstermen auftreten, werden folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}^T \mathbf{T}^{-T} \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} y_\alpha \\ y_\beta \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c = \frac{3}{2} (x_\alpha y_\alpha + x_\beta y_\beta + x_0 y_0)$$

$\mathbf{T}^{-T}$  bezeichne die transponierte inverse Matrix. Es gilt im Übrigen

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{3}{2} \mathbf{T}^T, \quad \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \frac{2}{3} \mathbf{I}_3 \quad (2.52)$$

Anmerkung: Statt der hier definierten Transformation könnte man auch

$$\tilde{\mathbf{T}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{T} \quad (2.53)$$

verwenden. Diese Matrix ist im Gegensatz zu  $\mathbf{T}$  *orthogonal*, besitzt also die Eigenschaft

$$\tilde{\mathbf{T}}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^T \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{T}}^T = \mathbf{I}_3 \quad (2.54)$$

Diese modifizierte Transformation  $\tilde{\mathbf{T}}$  nennt man auch *leistungsinvariant*, da bei der Transformation der inneren Produkte der Skalierungsfaktor  $3/2$  nicht mehr auftritt. Nachteil dieser Transformation ist aber, dass sich die Projektionen der Zeiger auf die entsprechenden Achsen nicht mehr direkt als Strangkomponenten interpretieren lassen (s. u.). Daher hat sich die hier vorgestellte Transformation  $\mathbf{T}$  allgemein durchgesetzt.

Falls vorausgesetzt werden kann, dass keine Nullkomponente auftritt, vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

und

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{32} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \mathbf{T}_{23}^T \quad (2.57)$$

Für die reduzierten Transformationsmatrizen gilt

$$\mathbf{T}_{23} \mathbf{T}_{32} = \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

aber

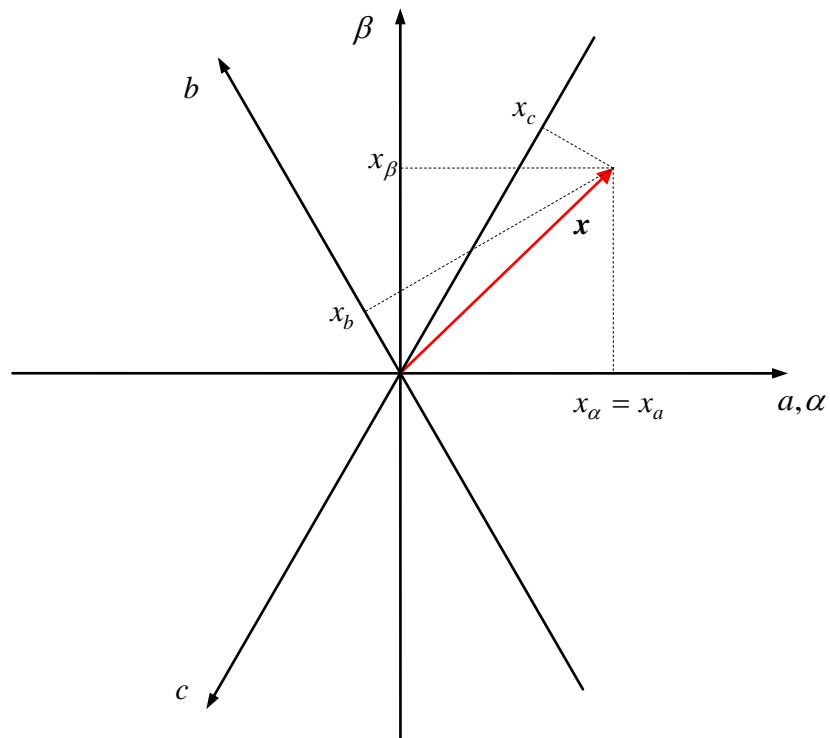
$$\mathbf{T}_{32} \mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Nützlich sind auch die Beziehungen zwischen den Differenzen der Strangkomponenten (so genannte verkettete Größen oder Außenleitergrößen)

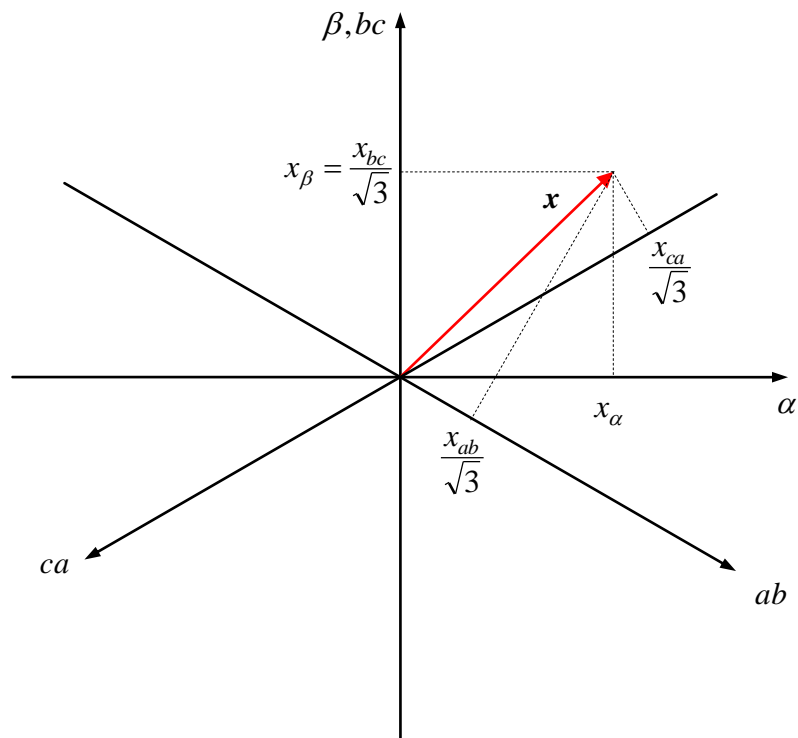
$$\begin{aligned} x_{ab} &= x_a - x_b \\ x_{bc} &= x_b - x_c \end{aligned} \quad (2.60)$$

und den orthogonalen Komponenten:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ab} \\ x_{bc} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_{ab} \\ x_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (2.61)$$



**Fig. 2-9:** Geometrische Interpretation der Transformation für nullkomponentenfreie Größen



**Fig. 2-10:** Geometrische Interpretation für die verketteten Komponenten

## 2.5 Abbildung des dreisträngigen auf das orthogonale zweisträngige Modell

Gleichungen des dreisträngigen Motors in vektorieller Form, Induktionsgesetz:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Flussgleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} &= \mathbf{L}^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{pa} \\ \psi_{pb} \\ \psi_{pc} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{L}^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \cos(\varepsilon - 2\pi/3) \\ \cos(\varepsilon + 2\pi/3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

mit der Induktivitätsmatrix

$$\mathbf{L}^w = \begin{bmatrix} L^w & -L_h^w & -L_h^w \\ -L_h^w & L^w & -L_h^w \\ -L_h^w & -L_h^w & L^w \end{bmatrix} = (\mathbf{L}^w + L_h^w) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - L_h^w \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Annahme: Sternschaltung der Motorwicklungen:

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (2.65)$$

D.h. die Stromkomponenten sind frei von einer Nullkomponente

$$i_0 = 0$$

Schnell übersieht man, dass dann auch gilt

$$u_0 = 0$$

$$\psi_0 = 0$$

gilt. Man beachte, dass unter Berücksichtigung entweder von Sättigung oder von konstruktiven Asymmetrien im Motor die Nullkomponente des Flusses und dann auch der Spannung nicht mehr verschwindet und berücksichtigt werden müsste. Im Folgenden wird jedoch von nullkomponentenfreien Größen ausgegangen, so dass die Darstellung jeweils mit zweidimensionalen Vektoren möglich ist.

*Übung: Unter welchen Voraussetzungen verschwinden auch bei Dreieckschaltung die Nullkomponenten?*

Anwendung der Transformation  $\mathbf{T}_{23}$  auf die Spannungsgleichungen:

$$\mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R^w \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \mathbf{T}_{23} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} = R^w \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Das bedeutet, der Widerstand des orthogonalen Modells ist gleich dem Wicklungswiderstand des dreisträngigen Modells:

$$R_s = R^w$$

Flussgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \psi_p \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \cos(\varepsilon - 2\pi/3) \\ \cos(\varepsilon + 2\pi/3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \mathbf{T}_{32} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \mathbf{T}_{32} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{bmatrix} + \psi_p \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Auswertung der Transformation der Induktivitätsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{23} \mathbf{L}^w \mathbf{T}_{32} &= (\mathbf{L}^w + \mathbf{L}_h^w) \mathbf{T}_{23} \mathbf{I}_3 \mathbf{T}_{32} - \mathbf{L}_h^w \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{L}^w + \mathbf{L}_h^w) \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Hieraus wird die Ersatzinduktivität des orthogonalen Modells zu

$$L_s = L^w + L_h^w \quad (2.69)$$

bestimmt.

Beim dreisträngigen Modell wurde bislang nicht das Drehmoment identifiziert. Mit dem Formalismus der Transformationsmatrizen gelingt dies nun sehr schnell wieder über Betrachtung von Leistungen. Nach Abschnitt 2.4 muss der Faktor 3/2 berücksichtigt werden, wenn eine Leistung eines dreisträngigen Systems durch Produkte der orthogonalen Komponenten ausgedrückt wird. Für das Drehmoment des dreisträngigen Motors folgt also

$$T = \frac{3}{2} (\psi_{p\alpha} i_{s\beta} - \psi_{p\beta} i_{s\alpha}) = \frac{3}{2} \psi_p i_{sq} \quad (2.70)$$

Merkregel: Die Leistung bzw. das Drehmoment des zweisträngigen Modells muss auf drei Stränge umgerechnet werden, also  $3/2$ .

## 2.6 Messtechnische Bestimmung des Ständerwiderstands und der Ständerinduktivität

Die Parameter  $R_s$  und  $L_s$  können durch Vermessung einer einzelnen Wicklung zwischen einem Anschluss und dem Sternpunkt bestimmt werden, wie im vorangegangenen Absatz dargestellt. Oft ist der Sternpunkt jedoch nicht zugänglich, so dass nur zwischen zwei Außenleiter-Anschlüssen Messungen durchgeführt werden können. Unter der Annahme, dass der dritte Anschluss offen bleibt, ergibt sich für den Widerstand zwischen den Anschlüssen  $a$  und  $b$  des

$$R_{ab} = 2R^w = 2R_s$$

und wegen  $i_a = -i_b$  für die Induktivität

$$L_{ab} = 2L^w + 2L_h^w = 2L_s.$$

## 2.7 Mehrpolige Motoren

Wiederholt sich die Anordnung von wechselseitig magnetisierten Magneten mehrfach über den Rotorumfang, handelt es sich um *mehrpole* Motoren. Dementsprechend werden auch die Statorwicklungen ausgeführt. Statt der Polzahl wird die Polpaarzahl  $p$  als charakterisierende Größe verwendet, da es keine Monopole des magnetischen Feldes gibt.

Entlang des Umfangs hat dann das magnetische Feld wie auch die Wicklungsanordnung eine Periodizität in dem Winkel  $2\pi/p$ . Wir definieren nun die Winkelvariable

$$\varepsilon = p\varepsilon_{me} \quad (2.71)$$

so dass bei Verwendung dieser Winkelvariable weiterhin mit Größen gearbeitet werden kann, die in  $2\pi$  periodisch sind. Wir nennen  $\varepsilon$  den auf das elektrische System bezogenen Drehwinkel.





da sich eine Leiterschleife beim mehrpoligen Motor statt über  $\pi$  nur über den mechanischen Winkel  $\pi/p$  spannt. Summiert man über alle Leiterschleifen einer Wicklung, so ist mit der Gesamtzahl der Windungen zu multiplizieren, da alle Schleifen einer Wicklung, unabhängig davon, über welchem der magnetischen Pole sie positioniert sind, stets den gleichen Flussbeitrag liefern. Die gesamte Flussverkettung der Wicklungen ist demnach

$$\psi_{pa} = \psi_p \cos \varepsilon \quad (2.74)$$

$$\psi_{pb} = \psi_p \cos \left( \varepsilon - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.75)$$

$$\psi_{pc} = \psi_p \cos \left( \varepsilon + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.76)$$

mit

$$\psi_p = N\phi_p = \frac{2Nrl\hat{b}_p}{p} \quad (2.77)$$

Hierbei ist  $N$  die gesamte Zahl der Windungen pro Strang. Auf ein Polpaar fallen also  $N/p$  Windungen. Verwendet man den oben eingeführten, auf das elektrische System bezogenen Drehwinkel  $\varepsilon$ , bekommen die Beziehungen das gleiche Aussehen wie beim Motor mit Polpaarzahl  $p=1$ .

Die weitere Vorgehensweise bezüglich des Übergangs von drei Strängen auf zwei orthogonale Koordinaten und Transformation in das mitdrehende  $d/q$ -System ändert sich nicht mit Ausnahme des Drehmoments. Dieses erhält man wieder aus der Leistungsbilanz, wobei nun zwischen mechanischer Kreisfrequenz  $\omega_{me}$  und elektrischer Kreisfrequenz  $\omega$  zu unterscheiden ist:

$$P_{me} = \omega_{me} T = \frac{\omega}{p} T = \frac{3}{2} \omega \psi_p i_{sq} \quad (2.78)$$

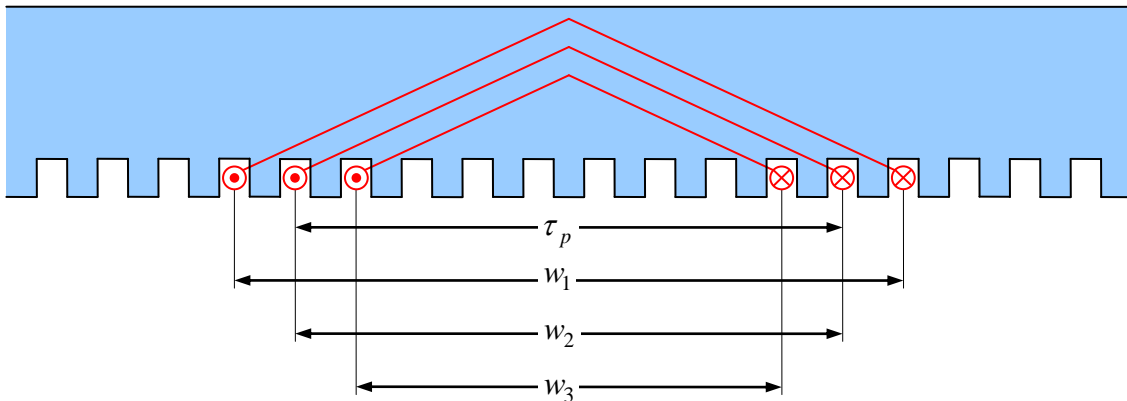
Also

$$T = \frac{3}{2} p \psi_p i_{sq} \quad (2.79)$$

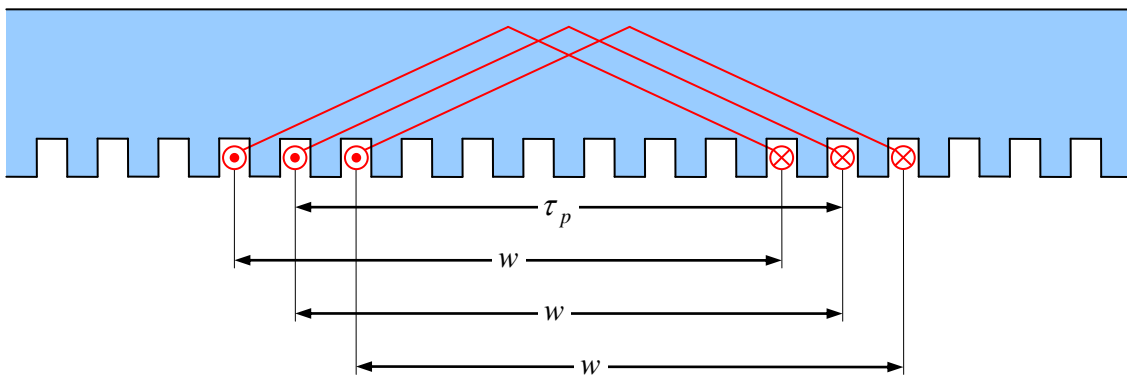


$$\begin{aligned}
 p & \quad \text{Polpaarzahl} \\
 \tau_p = \frac{2\pi}{2p} & \quad \text{Polteilung} \\
 q = \frac{Q}{2pm} & \quad \text{Lochzahl (Zahl der Nuten je Pol und Strang)}
 \end{aligned}$$

Ist  $q$  ganzzahlig, spricht man von *Ganzlochwicklung*, andernfalls von *Bruchlochwicklung*.



**Fig. 2-14:** Ausführung der verteilten Wicklung  $a$  durch konzentrische Wicklung mit unterschiedlichen Spulenbreiten



**Fig. 2-15:** Ausführung der verteilten Wicklung  $a$  durch Wicklungen gleicher Spulenbreite  $w = \tau_p$

Flussverkettung von verteilten Wicklungen: Die Wicklungen können bei gleicher Verteilung auf die Nuten unterschiedlich ausgeführt werden, die Unterschiede betreffen aber nur die Wickelköpfe, weshalb von Leiterschleifen gleicher Breite  $w$  ausgegangen werden kann. Der Fluss einer einzelnen Leiterschleife ist (vgl. oben):

$$\phi = \phi_p \cos(\varepsilon - p\theta_0) \quad (2.80)$$

Nun sind die Leiter nicht mehr an einer Position konzentriert, sondern über die Zonenbreite  $\zeta$  verteilt, wobei bei einer gleichmäßigen Aufteilung auf  $m$  Stränge (auf den elektrischen Winkel bezogen) gilt

$$\zeta = \frac{2\pi}{2m} \quad (2.81)$$

Der Verkettungsfluss ergibt sich nun nicht mehr einfach aus dem Fluss einer Windung durch Multiplikation mit der Windungszahl, sondern über die Summation der Flüsse der einzelnen Windungen, die unterschiedliche Winkelausrichtungen besitzen. Vereinfachend kann von der konkreten Nutzahl abstrahiert werden und die Summation durch eine Mittelwertbildung über die Zonenbreite genähert werden. Beispielsweise für Wicklung  $a$  folgt:

$$\begin{aligned} \psi_{pa} &= N\phi_p \frac{1}{\zeta/p} \int_{-\zeta/2p}^{\zeta/2p} \cos p(\varepsilon_{me} - \vartheta_0) d\vartheta_0 \\ &= N\phi_p \frac{1}{\zeta} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \cos(\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon_0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon_0 = p\theta_0, \varepsilon = p\varepsilon_{me} \\ &= N\phi_p \frac{1}{\zeta} [-\sin(\varepsilon - \varepsilon_0)]_{\varepsilon_0=-\zeta/2}^{\zeta/2} \\ &= N\phi_p \frac{1}{\zeta} [-\sin(\varepsilon - \zeta/2) + \sin(\varepsilon + \zeta/2)] \\ &= N\phi_p \frac{2}{\zeta} \sin \frac{\zeta}{2} \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (2.82)$$

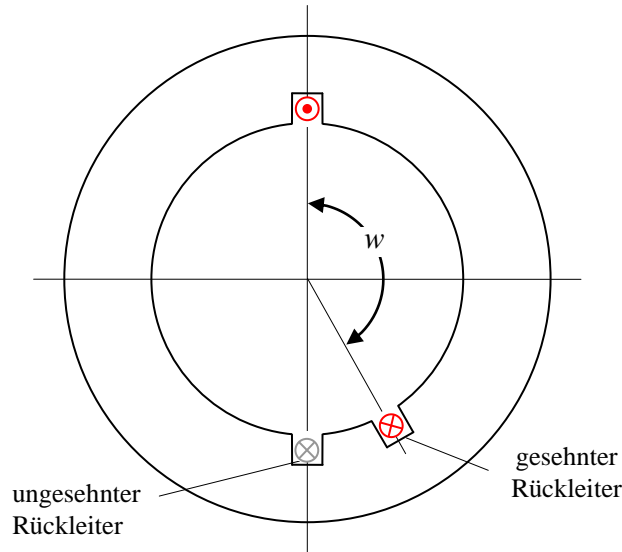
Der Term

$$\xi_z = \frac{2}{\zeta} \sin \frac{\zeta}{2} \quad (2.83)$$

heißt *Wicklungsfaktor*. Er gibt an, welcher Anteil des Flusses einer idealisierten Wicklung mit maximaler Spanne durch die tatsächliche Wicklungsanordnung erreicht wird. Für den Fall der gleichmäßig verteilten dreisträngigen Wicklung ergibt sich der Wert

$$\xi_z = \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{6}{\pi} \frac{1}{2} = \frac{3}{\pi} = 0,955$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Zahl der Nuten so groß ist, dass vereinfacht von einer kontinuierlichen Stromverteilung ausgegangen werden kann. Die Berechnung von Wicklungsfaktoren mit diskreten Nuten wird weiter unten erläutert.



**Fig. 2-16:** Zum Begriff der Sehnung, hier dargestellt für  $p = 1$

Unter *Sehnung* versteht man den Fall, dass die Spulenbreite kleiner als die Polteilung ist. Wir definieren den Sehnungsfaktor

$$s = \frac{w}{\tau_p} \quad (2.84)$$

Zur Berechnung des Wicklungsfaktors bedienen wir uns zweckmäßigerweise wegen der kompakteren Schreibweise der komplexen Rechnung. Die tatsächliche Flussverteilung sei dann der Realteil des komplexen Werts. Hin- und Rückleiter seien an den geometrischen Winkeln

$$\vartheta_{1,2} = \mp \frac{\pi}{p} \frac{w}{2\tau_p} \quad (2.85)$$

positioniert, wobei auch die Polpaarzahl  $p$  berücksichtigt wird. Die resultierende Flussverkettung mit einer Leiterschleife ist

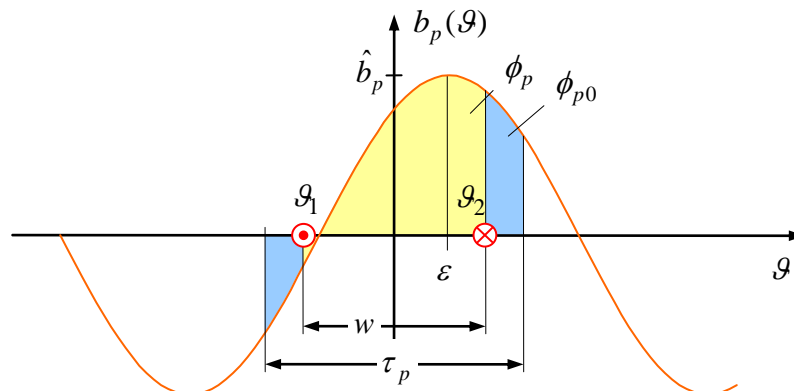
$$\begin{aligned} \phi_p &= r\hat{b}_p \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos(p(\varepsilon - \vartheta)) d\vartheta = r\hat{b}_p \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \operatorname{Re} e^{jp(\varepsilon - \vartheta)} d\vartheta = r\hat{b}_p \operatorname{Re} \left[ e^{jp\varepsilon} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{-jp\vartheta} d\vartheta \right] \\ &= \frac{r\hat{b}_p}{p} \operatorname{Re} \left[ e^{jp\varepsilon} \frac{e^{-jp\vartheta_2} - e^{-jp\vartheta_1}}{-j} \right] = \frac{r\hat{b}_p}{p} \operatorname{Re} e^{jp\varepsilon} \cdot 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{w}{\tau_p} \right) \end{aligned}$$

die ideale Flussverkettung bei voller, ungesehnter Spulenweite wäre dagegen

$$\phi_{p0} = r\hat{b}_p \operatorname{Re} \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} e^{jp(\vartheta-\varepsilon)} d\vartheta = r\hat{b}_p \operatorname{Re} e^{jp\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} e^{-jp\vartheta} d\vartheta = \frac{r\hat{b}_p}{p} \operatorname{Re} e^{jp\varepsilon} \cdot 2,$$

Als Wicklungsfaktor ergibt sich also

$$\xi_s = \frac{\phi_p}{\phi_{p0}} = \frac{e^{jp\vartheta_2} - e^{jp\vartheta_1}}{2j} = \sin p\vartheta_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{w}{\tau_p}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \quad (2.86)$$



**Fig. 2-17:** Flussverkettung einer gesehten Wicklung

Fasst man die beiden Effekte der Zonenwicklung und der Sehnung zusammen, ergibt sich der Gesamt-Wicklungsfaktor<sup>1</sup>

$$\xi = \xi_z \xi_s = \frac{\sin \zeta / 2}{\zeta / 2} \sin\left(\frac{w}{\tau_p} \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.87)$$

Die Sehnung kommt u.a. in Mehrlagenwicklungen zum Einsatz, üblich sind jedoch nur Zweilagewicklungen. Das bedeutet, dass in einer Nut Leiter von zwei verschiedenen Wicklungssträngen liegen können. Der Nutzen eines solchen aufwändigen Wicklungsschemas liegt darin, die Wicklungsverteilung eine Sinusform besser anzunähern. Dadurch können sich ggf. vorhandene Oberwellen der Feldverteilung weniger stark ausprägen (weiter unten werden die Oberwellen-Wicklungsfaktoren eingeführt; man vergleiche deren Werte in der Tabelle am Schluss des Abschnitts für die Zonenwicklungen ohne und mit Sehnung).

<sup>1</sup> Ein weiterer Einfluss auf den Wicklungsfaktor ergibt sich aus der *Schrägung*, worauf hier nicht eingegangen wird





$$q = \frac{Q}{2pm} = \frac{1}{2} \quad (2.88)$$

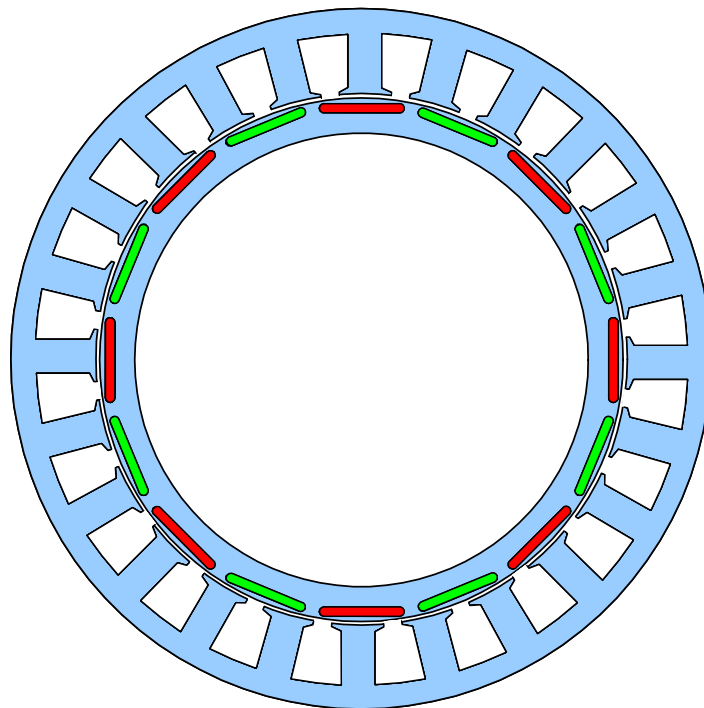
Es handelt sich also um eine *Bruchlochwicklung*. Die Sehnung der Wicklung ist

$$s = \frac{2}{3} \quad (2.89)$$

Die Wicklung ist nicht über eine Zone verteilt, die Leiter werden in jeweils nur einer Nut konzentriert. Der Gesamtwicklungsfaktor ergibt sich zu

$$\xi = \sin \frac{s\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

Die Sehnung verursacht also eine nicht zu vernachlässigende Reduktion der theoretisch möglichen Flussverkettung. Die Vorteile wiegen diesen Nachteil auf: Die Wicklungen können auf Wickelmaschinen gewickelt werden und vorgefertigt über die Zähne geschoben werden. Ein entscheidender weiterer wichtiger Vorteil der konzentrischen Zahnwicklungen ist, dass der Wickelkopf<sup>3</sup> auf ein Minimum reduziert wird.

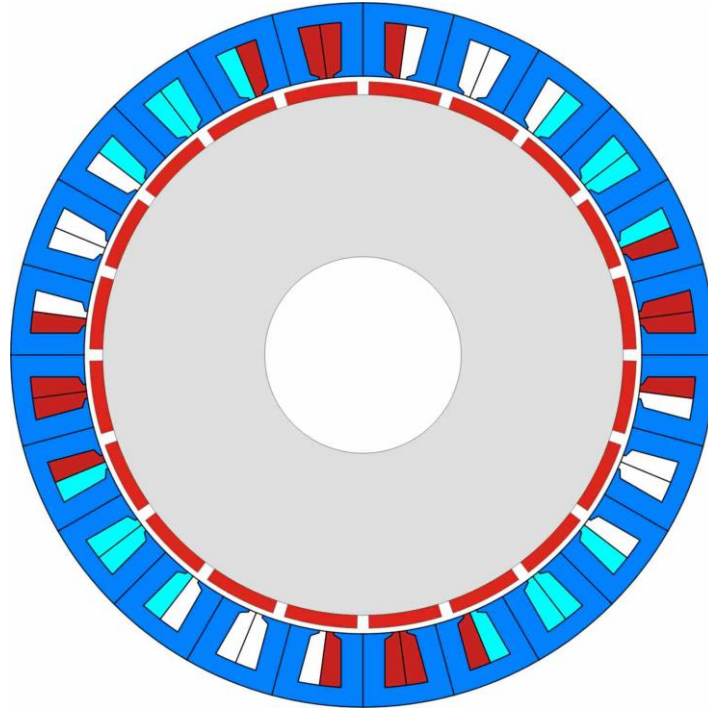


**Fig. 2-20:** Schnittskizze eines PMSM mit in den Rotor eingebetteten Magneten und konzentrischen Wicklungen (im Bild nicht dargestellt)

$$p = 8, Q = 24, q = 1/2, s = 2/3, \xi = 0,866$$

<sup>3</sup> Die Verbindung zwischen den Hin- und Rückleitern in den Nuten heißt *Wickelkopf*. Obwohl diese elektrische Verbindung zwingend ist, trägt sie nicht zur Bildung des Drehmoments bei. Der Wickelkopf vergrößert allerdings den Innenwiderstand der Wicklung und beansprucht erheblichen Bauraum innerhalb des Motors.

Bei den bislang betrachteten Wicklungsschemata wiederholt sich die Wicklungsanordnung über ein magnetisches Polpaar periodisch. Dies ist jedoch nicht zwingend notwendig. Das folgende Bild zeigt aber ein Schema, bei dem sich die Wicklungsanordnung erst nach 5 Polpaaren wiederholt. Dasselbe Schema, aber in linearer Darstellung ist weiter unten noch einmal dargestellt.



**Fig. 2-21:** Wicklungsschema, welches sich erst über 5 Polpaarteilungen periodisch wiederholt (die drei Phasen sind durch unterschiedliche Farben dargestellt, der Wicklungssinn geht aus diesem Bild nicht hervor, siehe dazu die folgende lineare Darstellung)

Zur Bestimmung des Wicklungsfaktors solcher Anordnungen ist die Flussverkettung mit allen Leitern einer Wicklung zu bestimmen. Wir benutzen dabei wie schon bei der Bestimmung des Sehnungs-Wicklungsfaktors die kompakte komplexe Darstellung. Als Verallgemeinerung des dortigen Ergebnisses erhält man für den Strang  $a$  den Wicklungsfaktor

$$\underline{\xi}_a = \frac{1}{2jN_a} \sum_{i=1}^Q N_{ai} e^{jp\theta_i} \quad (2.90)$$

Hierbei wird über alle Nuten  $i$  summiert, wobei der Winkel  $\theta_i$  die mechanische Winkellage der Nut im Stator angibt. Die Nuten sind zwar typischerweise längs des Umfangs äquidistant verteilt,  $\theta_i = 2\pi i / Q$ . Die Anwendung der Formel ist aber auch für Spezialfälle mit nicht-äquidistanten Nuten möglich.  $N_{ai}$  sei die Zahl der Leiter des Stranges  $a$  in der jeweiligen Nut, wobei die Orientierung des Leiters durch das Vorzeichen von  $N_{ai}$  zu berücksichtigen ist. Sind keine Leiter von  $a$  in der  $i$ -ten Nut vorhanden, wird dies durch  $N_{ai} = 0$  ausgedrückt. Für die Stränge  $b$  und  $c$  werden die Wicklungsfaktoren ebenso bestimmt.

Die Gesamtzahl der Leiter führt auf die Gesamt-Windungszahl  $N_a$  der Wicklung  $a$ , wobei berücksichtigt werden muss, dass sich eine Windung typischerweise aus je einem Hin- und einem Rückleiter zusammensetzt, also

$$N_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Q |N_{ai}| \quad (2.91)$$

Der Wicklungsfaktor wird abweichend vom bisherigen Vorgehen hier als komplexe Zahl verstanden, wobei der Winkel des komplexen Wicklungsfaktors Auskunft über die Phasendrehung gibt.

Auf gleiche Weise bestimmt man die Wicklungsfaktoren  $\underline{\xi}_b, \underline{\xi}_c$  für die anderen Stränge. Diese müssen vom Betrage gleich und eine definierte Phasenverschiebung von  $120^\circ$  aufweisen, damit sich ein symmetrisches Drehstromsystem ergibt:

$$\xi = |\underline{\xi}_a| = |\underline{\xi}_b| = |\underline{\xi}_c| \quad \text{bzw.} \quad \underline{\xi}_a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \underline{\xi}_b = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \underline{\xi}_c .$$

Auf diese Weise können sogar Wicklungsanordnungen, bei denen die Geometrie des Schemas bezüglich der drei Stränge nicht symmetrisch ist, dahingehend geprüft werden, ob trotzdem ein elektrisch symmetrisches Drehstromsystem entsteht. Auch können Fehler in eigentlich symmetrischen Schemata hinsichtlich Wicklungssinn oder Phasenfolge durch Prüfung dieser Gleichungen aufgedeckt werden.

Auf ähnliche Weise werden auch die Wicklungsfaktoren der bislang nicht betrachteten Oberwellen<sup>4</sup> bestimmt, wobei  $k$  deren Ordnungszahl ist:

$$\underline{\xi}_{ak} = \frac{1}{2jN_a} \sum_{i=1}^Q N_{ai} e^{-jkp\theta_i} \quad (2.92)$$

Ziel bei der Auswahl eines Wicklungsschemas kann es auch sein, bestimmte unerwünschte Oberwellen zu eliminieren oder wenigstens zu minimieren (s. Tabelle am Ende dieses Abschnitts).

Das nachfolgende Bild zeigt - diesmal in linearer Darstellung - das schon oben vorgestellte Wicklungsschema, welches sich nicht über ein Polpaar, sondern erst nach 5 Polpaarteilungen wiederholt (im Bild ist nur etwas mehr als die Hälfte dieser Periode dargestellt). Das Verhältnis von Nuten und Polen ist hier  $6/5$ , so dass eine Lochzahl von  $q=0,4$  resultiert. Auch bei diesem Schema kommen konzentrische Wicklungen (Zahnspulen) mit den schon diskutierten Vorteilen zum Einsatz. Der Wicklungsfaktor bestimmt sich nach obiger Formel zu

<sup>4</sup> Unter *Wellen* versteht man periodische Wiederholungen in einer *Ortsvariablen*, während *Schwingungen* periodische Vorgänge in der *Zeit* sind. Dementsprechend ist zwischen den Begriffen *Oberschwingungen* und *Oberwellen* zu unterscheiden. Hier geht es um Abweichungen der ortsabhängigen Feldverteilung von der Sinusform, also um Oberwellen. Die Auswirkung dieser Oberwellen mittels der magnetischen Induktion auf die zeitlichen Vorgänge an den Motorklemmen sind Oberschwingungen.



---

Die Ergebnisse gelten genauso auch für Vielfache der angegebenen Polpaar- und Nutzzahlen. Die Wicklungsfaktoren für geradzahlige Ordnungen sind nicht aufgeführt. Bei den meisten Wicklungsschemata ist ohnehin aus Symmetriegründen  $\xi_{2k} = 0$ , z. B. aber nicht bei den Schemata Nr. 6 und 8. Da man aber in der Regel von einer symmetrischen Feldverteilung ausgehen darf, bei der keine Oberwellen der Ordnung  $2k$  auftreten, ist dies ohne Belang. Oberwellen der Ordnungszahlen  $3k$  treten aber sehr wohl mit von Null verschiedenen Wicklungsfaktoren auf. Die elektrische Verschaltung der Wicklungen im Stern oder Dreieck führt aber dazu, dass keine Oberschwingungen der Ordnungen  $3k$  in den Klemmengrößen auftreten. Daher sind auch diese Wicklungsfaktoren unerheblich und deshalb nicht aufgeführt. Es sind also nur die Ordnungszahlen 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw., also die Ordnungszahlen  $6k \pm 1$ , von Interesse.

## 2.9 Zusammenhang zwischen Motorgeometrie und Drehmomentausbeute

Die Drehmomentgleichung

$$T = \frac{3}{2} p \psi_p i_{sq} \quad (2.93)$$

suggestiert, dass Motoren mit großer Polpaarzahl  $p$  für die Erzeugung großer Drehmomente günstig seien. Das soll einer genaueren Betrachtung unterzogen werden. Nach dem vorangegangenen Kapitel gilt

$$\psi_p = N \phi_p = \frac{2N\xi r l \hat{b}_p}{p} \quad (2.94)$$

also

$$T = 3\xi r l \hat{b}_p N i_{sq} \quad (2.95)$$

Unter der Annahme, dass  $i_{sd} = 0$  ist, gibt allein  $i_{sq}$  den Scheitelwert der Strangströme  $i_a, i_b, i_c$  an,

$$\hat{i}_a = \hat{i}_b = \hat{i}_c = i_{sq} \quad (2.96)$$

Für die Effektivwerte aller drei Stränge ergibt sich also

$$I_a = I_b = I_c = \frac{1}{\sqrt{2}} i_{sq} \quad (2.97)$$

Nehmen wir an, dass jeder Wicklung  $a, b, c$  für Hin- bzw. Rückleiter jeweils  $1/6$  der Umfangslänge  $2\pi r$  zur Verfügung steht, was bei der Zonenwicklung genau geometrisch zutrifft, bezüglich des Problems der Wärmeableitung aber auch für alle anderen Wicklungsarten angesetzt werden darf. Dann ergibt sich eine effektive Stromdichte von

$$A = \frac{N I_a}{2\pi r / 6} = \frac{6N}{\sqrt{2} 2\pi r} i_{sq} = \frac{3N}{\sqrt{2} \pi r} i_{sq} \quad (2.98)$$

Die maximal mögliche effektive Stromdichte ist eine von der Bauart des Motors, insbesondere durch die Kühlungsart bestimmte charakteristische Größe und kann für Motoren unterschiedlicher Größe, aber gleicher Bauart überschlägig als Konstante betrachtet werden. Typische Werte liegen in der Größenordnung von

$$A_{\max} \approx 40 \dots 80 \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

Mit dieser Größe erhält die maximale mögliche Drehmomentausbeute nun folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
T_{\max} &= \frac{3}{2} p \psi_p i_{sq \max} = \frac{3}{2} p \frac{2N\xi r l \hat{b}_p}{p} \frac{\sqrt{2} \pi r}{3N} A_{\max} \\
&= \sqrt{2} \xi \hat{b}_p \pi r^2 l A_{\max} = \sqrt{2} \xi \hat{b}_p A_{\max} V_{\text{rotor}}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

wobei

$$V_{\text{rotor}} = \pi r^2 l \tag{2.100}$$

das Volumen des magnetischen aktiven Teils des Rotors ist.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man unter Betrachtung der mittleren Schubspannung  $\bar{\sigma}$ , die ein Flächenelement des Rotors aufgrund der Lorentzkraft erfährt. Die mittlere Schubspannung kann direkt durch das Produkt der Effektivwerte der Strom- und Flussdichten gebildet werden, wobei der Wicklungsfaktor  $\xi$  die Abweichung von geometrisch nicht idealen Anordnungen berücksichtigt, also

$$\bar{\sigma} = \xi \frac{\hat{b}_p}{\sqrt{2}} A \tag{2.101}$$

Die Integration der Schubspannung über die Rotormantelfläche  $2\pi r l$  und Multiplikation mit dem Hebelarm  $r$  führt dann zur bereits bekannten Formel für die maximale Drehmomentausbeute

$$T_{\max} = \sqrt{2} \pi r l r \xi \hat{b}_p A = \sqrt{2} \xi \hat{b}_p V_{\text{rotor}} A_{\max} \tag{2.102}$$

Das bedeutet, die Drehmomentausbeute eines Motors hängt neben den von Bauart und Material bestimmten Konstanten  $A_{\max}$ ,  $\hat{b}_p$ ,  $\xi$  im Wesentlichen vom Rotorvolumen  $V_{\text{rotor}}$  ab. Mit  $\hat{b}_p \approx 1\text{T}$  und  $\xi \approx 0,9$  folgen also typische Drehmomentdichten von

$$\frac{T_{\max}}{V_{\text{rotor}}} = \sqrt{2} \xi \hat{b}_p A_{\max} = 2\bar{\sigma}_{\max} \approx 50 \dots 100 \frac{\text{kNm}}{\text{m}^3}$$

Von der Polpaarzahl hängt dieses Ergebnis also *nicht* ab.

Die Polpaarzahl nimmt jedoch über einen anderen Weg Einfluss auf die resultierende Motorgröße: Der von einem Polpaar erzeugte magnetische Fluss ist nach obigen Zusammenhängen

$$\phi_p = \frac{2\xi r l \hat{b}_p}{p} \tag{2.103}$$

Dieser Fluss muss über das Statorjoch von einem magnetischen Pol zum nächsten mit entgegengesetzter Magnetisierung zurückgeleitet werden. Je größer die Polpaarzahl, desto kleiner wird der Flussbeitrag eines einzelnen Polpaares. Das Statorjoch kann dementsprechend dünner ausgelegt werden. Die Polpaarzahl hat demnach über die Dicke des

---

Stators nicht unerheblichen Einfluss auf den äußeren Durchmesser des Motors. Durch geringere Jochdicke wird darüber hinaus die Wärmeableitung verbessert, so dass dadurch ggf. sogar eine größere Stromdichte möglich wird.

Ein weiterer Einfluss der Polpaarzahl ergibt sich über die *Wickelköpfe*: Je höher die Polpaarzahl, desto kürzer sind die Leitungswege, um Hin- und Rückleiter einer Windung an den Motorenden zu einer geschlossenen Windung zu verbinden. Bei hoher Polpaarzahl können die Wickelköpfe klein ausgeführt werden und verkürzen auf diese Weise die *Baulänge* des Motors.

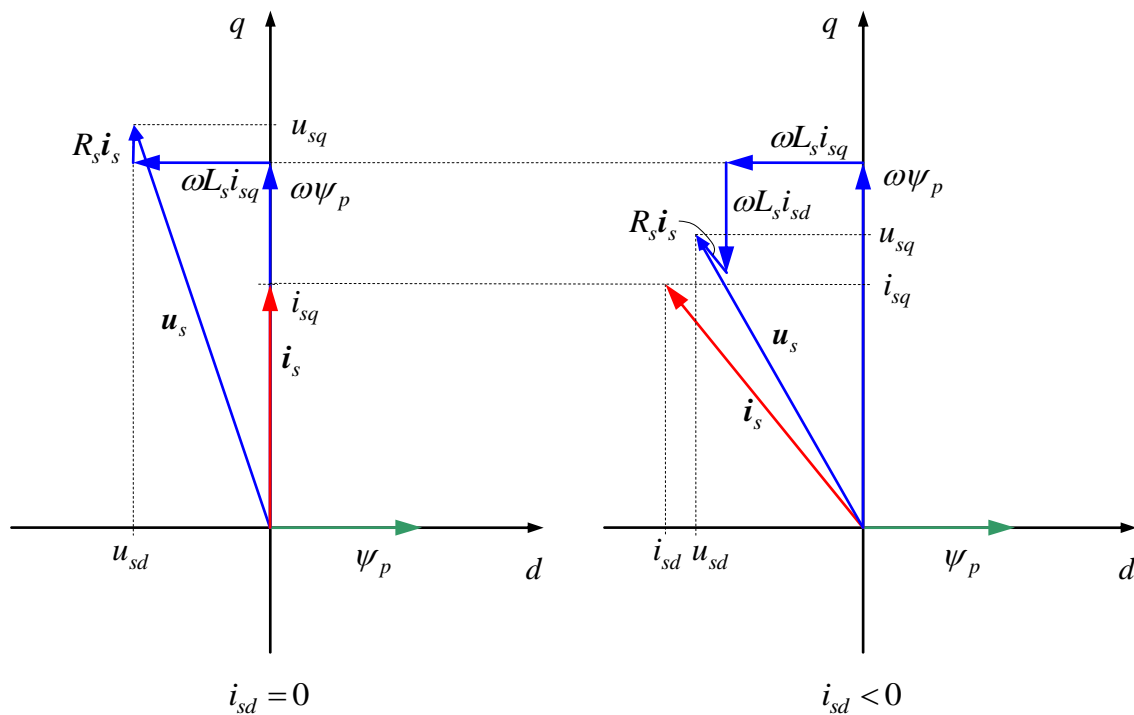


## 2.10 Stationäres Betriebsverhalten

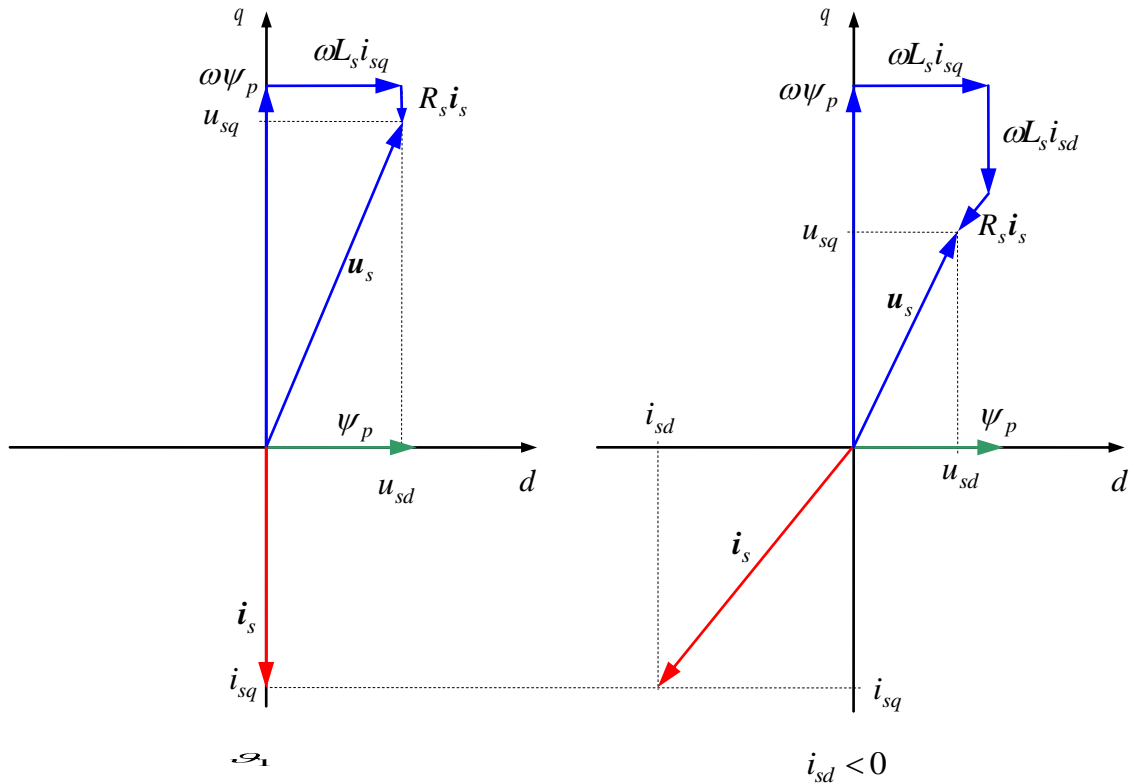
Stationäre Spannungsgleichungen:

$$u_{sd} = R_s i_{sd} - \omega \psi_{sq} = R_s i_{sd} - \omega L_s i_{sq} \quad (2.104)$$

$$u_{sq} = R_s i_{sq} + \omega \psi_{sd} = R_s i_{sq} + \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p \quad (2.105)$$



**Fig. 2-23:** Stationäre Zeigerdiagramme für jeweils gleiche Drehzahl und gleiches motorisches Drehmoment, links ohne und rechts mit negativem  $d$ -Strom



**Fig. 2-24:** Stationäre Zeigerdiagramme für jeweils gleiche Drehzahl und gleiches generatorisches Drehmoment, links ohne und rechts mit negativem  $d$ -Strom

Bestehen keine Einschränkungen in der Wahl der beiden Stromkomponenten  $i_{sd}, i_{sq}$ , wird für ein gegebenes Drehmoment  $T^*$  der Betrieb mit minimalen Verlusten (also minimalem Gesamtstrom) bei

$$i_{sq} = \frac{2}{3p\psi_p} T^*, \quad i_{sd} = 0 \quad (2.106)$$

erreicht. Insbesondere mit einem negativen  $i_{sd}$  kann aber bei gleichem Drehmoment die resultierende Ständerspannung reduziert werden. Dies geht natürlich auf Kosten der Verluste, ist aber für den Betrieb an der Spannungsgrenze bedeutsam. Da sich der Fluss in der  $d$ -Richtung über

$$\psi_{sd} = L_s i_{sd} + \psi_p \quad (2.107)$$

bestimmt, schwächt ein negativer Strom  $i_{sd}$  also den Anteil des Magneten. Daher wird diese Stromkomponente auch als *flussschwächend* bezeichnet. Im Übrigen erkennt man aus obigem Bild, dass der Permanentmagnet-Synchronmotor sowohl induktives Verhalten (Spannungszeiger eilt dem Stromzeiger voraus) als auch kapazitives Verhalten (Stromzeiger eilt voraus) aufweisen kann. Durch passende Wahl von  $i_{sd}$  ist auch der Betrieb mit Leistungsfaktor 1 möglich.

## Betrieb an der Strom- und Spannungsgrenze

Der den Motor speisende Umrichter, jedoch auch der Motor selbst, ist in seiner Stromtragfahigkeit und Spannung begrenzt:

$$i_s^2 = i_{sd}^2 + i_{sq}^2 \leq i_{\max}^2 \quad (2.108)$$

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 \leq u_{\max}^2 \quad (2.109)$$

Bei kleinen Drehzahlen ist die Spannung entsprechend klein; dort spielt die Spannungsbegrenzung keine Rolle. Dieser Betriebsbereich wird als *Spannungsstellbereich* oder in Anlehnung an die Begriffe des Gleichstrommotors als *Ankerstellbereich* bezeichnet. Wenn der Motor also mit  $i_{sd} = 0$  betrieben wird, schränkt die Stromgrenze das verfügbare Drehmoment auf

$$|T| \leq T_{\max 0} = \frac{3}{2} p \psi_p i_{\max} \quad (2.110)$$

ein. Das maximal erreichbare Drehmoment ist im Spannungsstellbereich unabhängig von der Drehzahl.

Mit zunehmender Drehzahl wächst die Spannung und kann die Spannungsgrenze erreichen. Das Einsetzen der stationären Spannungsgleichungen in die Spannungsbeschrankung liefert, sofern man für diese Betrachtung die ohmschen Spannungsabfälle vernachlässigt:

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 = \omega^2 \left( (L_s i_{sd} + \psi_p)^2 + L_s^2 i_{sq}^2 \right) \leq u_{\max}^2 \quad (2.111)$$

Die Vernachlässigung der ohmschen Anteile ist für Maschinen ab einer gewissen Leistungsklasse von einigen 10 kW zu rechtfertigen. Bei kleinen Motoren von einigen Watt Leistung sind die ohmschen Abfälle auch bei hoher Drehzahl ggf. in der gleichen Größenordnung wie EMK und Ankerrückwirkung. In diesem Fall kann die nachfolgende Rechnung nur als grobe Näherung betrachtet werden.

Die Spannungsbegrenzung kann also in eine Bedingung an die zulässigen Ströme umgeformt werden:

$$\left( L_s i_{sd} + \psi_p \right)^2 + L_s^2 i_{sq}^2 \leq \frac{u_{\max}^2}{\omega^2} \quad (2.112)$$

Geometrisch lässt sich dies als ein Kreis in der  $i_d, i_q$ -Ebene mit Mittelpunkt bei

$$i_{d0} = -\frac{\psi_p}{L_s}, \quad i_{q0} = 0 \quad (2.113)$$

und einem Radius von

$$i_U = \frac{u_{\max}}{L_s |\omega|} \quad (2.114)$$

interpretieren. Die Größe

$$i_0 = -i_{d0} = \frac{\psi_p}{L_s} \quad (2.115)$$

ist im Übrigen gerade der flussschwächende Strom, der den Permanentfluss  $\psi_p$  vollständig *abbaut*. Unter Vernachlässigung des ohmschen Widerstands ist die Größe  $i_0$  auch gleich dem Kurzschlussstrom des Motors; wie im Abschnitt 7.2 ausgeführt wird.

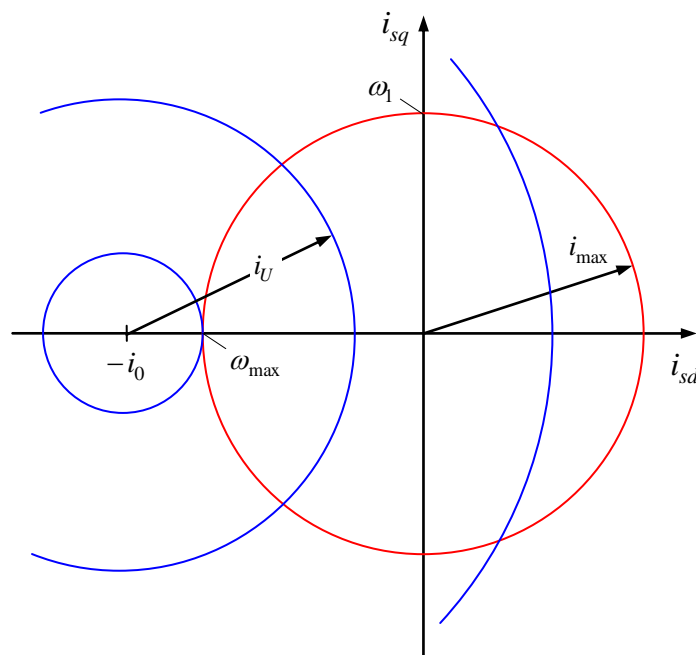
Für das Folgende wird der Auslegungsparameter

$$k = \frac{i_0}{i_{\max}} = \frac{\psi_p}{L_s i_{\max}} \quad (2.116)$$

und die Bezugsfrequenz

$$\omega_0 = \frac{u_{\max}}{\psi_p} \quad (2.117)$$

eingeführt. Die Frequenz  $\omega_0$  charakterisiert die Drehzahl, bei der im Leerlauf gerade die Spannungsgrenze erreicht wird. Oberhalb dieser Frequenz wird unabhängig vom Drehmoment, also auch im Leerlauf, immer flussschwächender Strom benötigt.



**Fig. 2-25:** Begrenzungen von Strom und Spannung für den Fall  $i_0 > i_{\max}$

Das Bild zeigt in der  $i_d, i_q$ -Ebene sowohl die Strombegrenzung als auch die aus der Spannungsbegrenzung resultierenden Begrenzungskreise. Für kleine Drehzahlen ist der Radius  $i_U$  groß, so dass er nicht zum Tragen kommt und der Strom nur die Stromgrenze  $i_{\max}$  einhalten muss. Für steigende Drehzahl reduziert sich jedoch der Radius  $i_U = u_{\max}/\omega$ , so dass negativer Strom  $i_d$  eingestellt werden muss.

Im Folgenden soll das maximal erreichbare Drehmoment im Flussschwächbereich bestimmt werden. Das heißt, sowohl die Strom- als auch die Spannungsgrenze werden erreicht. Es ergibt sich aus der Spannungsbegrenzung:

$$\begin{aligned}\frac{u_{\max}^2}{L_s^2 \omega^2} &= (i_{d \max} + i_0)^2 + i_{q \max}^2 \\ i_0^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} &= i_{d \max}^2 + 2i_{d \max} i_0 + i_0^2 + i_{q \max}^2 = i_{\max}^2 + i_0^2 + 2i_{d \max} i_0 \\ 0 &= i_{\max}^2 + i_0^2 \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right) + 2i_{d \max} i_0\end{aligned}$$

mit der normierten Drehzahl

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.118)$$

Dies lässt sich nach dem benötigten flussschwächenden Strom auflösen:

$$i_{d \max} = -\frac{i_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right) - \frac{i_{\max}^2}{2i_0} = -\frac{1}{2} i_{\max} \left(\frac{1}{k} + k \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right)\right) \quad (2.119)$$

Der Einsatzpunkt der Flussschwächung (bei dem bei maximalem Strom bzw. Drehmoment erstmalig ein flussschwächender Strom benötigt wird) bestimmt sich zu

$$\omega_1 = \frac{u_{\max}}{L_s \sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}} \quad (2.120)$$

bzw.

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (2.121)$$

Mit dem obigen flussschwächenden Strom ergibt sich nun für den drehmomentbildenden Strom

$$i_{q\max} = \sqrt{i_{\max}^2 - i_{d\max}^2} = I_{\max} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.122)$$

und für das Drehmoment

$$T_{\max} = \frac{3}{2} p \psi_p I_{\max} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.123)$$

bzw. in bezogener Form

$$\frac{T_{\max}}{T_{\max 0}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.124)$$

Für die weitere Betrachtung des Flussschwächbereichs sollen die beiden Fälle unterschieden werden, die dadurch charakterisiert werden, ob der Kurzschlussstrom  $i_0$  kleiner als der Maximalstrom  $i_{\max}$  ist oder nicht, ob also der Fall  $k < 1$  oder  $k > 1$  vorliegt.

### Fall beschränkter Drehzahl, $i_0 > i_{\max}$ , bzw. $k > 1$

In diesem Fall liegt der Mittelpunkt des Kreises  $i_U$  außerhalb des Strombegrenzungskreises. Oberhalb einer gewissen Drehzahl findet sich keine Schnittmenge der beiden Kreise mehr. Das bedeutet, dass allein aus den elektrischen Beschränkungen eine maximale Drehzahl resultiert. Diese ist erreicht, wenn der Kreis  $i_U$  den Strombegrenzungskreis  $i_{\max}$  gerade noch berührt. Dann gilt

$$i_0 = i_U + i_{\max} = \frac{u_{\max}}{\omega_{\max} L_s} + i_{\max} \quad (2.125)$$

$$\omega_{\max} = \frac{u_{\max}}{L_s} \frac{1}{i_{\max} - i_0} \quad (2.126)$$

bzw.

$$\Omega_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{i_0}{i_{\max} - i_0} = \frac{k}{k-1} \quad (2.127)$$

Die oben hergeleitete Formel für das maximal verfügbare Drehmoment

$$\frac{T_{\max}}{T_{\max 0}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.128)$$

gilt also für den Drehzahlbereich

$$\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}.$$

Welche maximale Leistung ist nun in Abhängigkeit der Drehzahl verfügbar? Im Spannungsstellbereich  $\Omega < \Omega_1$  ist die maximale Leistung

$$P_{\max} = \omega_{me} T_{\max 0} = \frac{1}{p} \omega T_{\max 0} \quad (2.129)$$

sie steigt also linear mit Drehzahl. Im Folgenden wird die Leistung auf die maximal verfügbare Scheinleistung des Stromrichters bezogen werden. Diese ist

$$S_{\max} = \frac{3}{2} u_{\max} i_{\max} \quad (2.130)$$

Damit definieren wir die normierte Leistung

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\max}} \quad (2.131)$$

Diese Größe ist im Allgemeinen nicht der Leistungsfaktor, denn die *aktuelle* Wirkleistung wird hier nicht auf die *aktuelle* Scheinleistung, sondern auf die *maximal* mögliche Scheinleistung des Umrichters bezogen. Nur beim Betrieb an Strom- und Spannungsgrenze wird die maximal mögliche Scheinleistung auch voll ausgenutzt, so dass in diesem Fall  $\lambda$  gleich dem Leistungsfaktor ist. Allgemein kann die Größe  $\lambda$  als Maß für die Ausnutzung der installierten Stromrichterleistung angesehen werden. Sie wird als *Stromrichternutzungsgrad* bezeichnet.

Für den Spannungsstellbereich  $\Omega < \Omega_1$  folgt als normierte maximale Leistung bzw. Stromrichternutzungsgrad also

$$\lambda = \frac{\omega \psi_p}{u_{\max}} = \Omega \quad (2.132)$$

Im Flussschwäcbereich  $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$  folgt dagegen:

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\max}} = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.133)$$

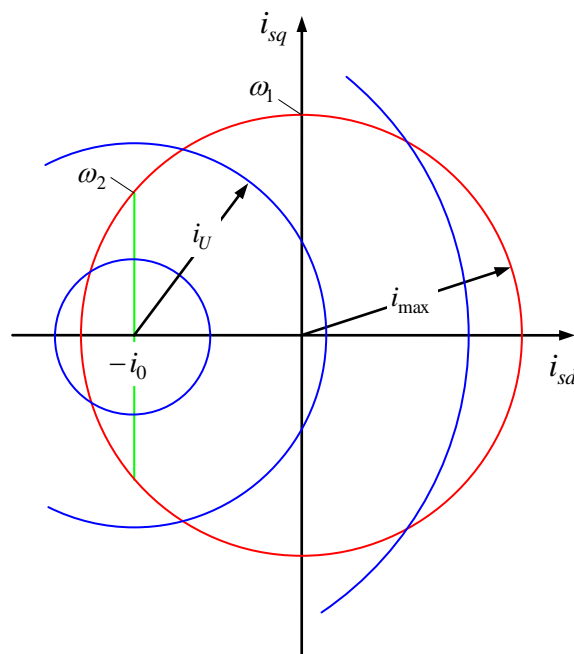
Die Drehzahl, bei der die größtmögliche Leistung abgegeben wird, lässt sich durch einige Rechenschritte zu

$$\Omega_{p_{\max}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \quad (2.134)$$

bestimmen. An dieser Stelle ist  $\lambda = 1$  bzw.  $P_{\max} = S_{\max}$ .

Antriebe mit  $k > 1$  besitzen keinen Konstant-Leistungsbereich. Für Pumpen oder Lüfter, deren Leistungsbedarf ohnehin mit wachsender Drehzahl immer weiter steigt, ist ein Konstant-Leistungsbereich auch nicht erforderlich. Soll der Antrieb aber einen Konstant-Leistungsbereich aufweisen, ist  $k < 1$  zu wählen:

**Fall unbeschränkter Drehzahl,  $i_0 < i_{\max}$ , bzw.  $k < 1$**



**Fig. 2-26:** Begrenzungen von Strom und Spannung für den Fall  $i_0 < i_{\max}$

Im Spannungsstellbereich  $\Omega < \Omega_1$  gibt es keinen prinzipiellen Unterschied zum zuvor besprochenen Fall. Zwar ist auch das Verhalten beim Eintritt in die Flusschwächung zunächst noch ähnlich, doch ergibt sich für wachsende Drehzahlen ein qualitativ andersartiges Verhalten: Anders als im zuerst besprochenen Fall gibt es bei  $i_0 < i_{\max}$ , also  $k < 1$ , für *jede beliebige* Drehzahl eine Schnittmenge der beiden Begrenzungskreise; für jede Drehzahl finden sich also mögliche Betriebspunkte. Die Drehzahl wird durch das elektrische Verhalten *nicht* beschränkt.

Der Flusschwächbereich  $\Omega > \Omega_1$  kann in zwei Bereiche eingeteilt werden. Im unteren Flusschwächbereich wird für ein maximales Drehmoment der Motor an Strom- und Spannungsgrenze betrieben. Das Drehmoment ist wie schon oben berechnet



$$\frac{T_{\max}}{T_{\max 0}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.135)$$

Die maximale Leistung ist

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\max}} = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + k \left( 1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \right)^2} \quad (2.136)$$

Dieser Betrieb ist jedoch nur bis zu einer Grenze  $\Omega < \Omega_2$  sinnvoll. Die Grenze  $\Omega_2$  wird erreicht, wenn der flussschwächende Strom  $i_d$  den Wert  $-i_0$  annimmt. Diese Grenze bestimmt sich zu

$$\omega_2 = \frac{u_{\max}}{L_s \sqrt{i_{\max}^2 - i_0^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}} \quad (2.137)$$

bzw.

$$\Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}} \quad (2.138)$$

Es ist nicht sinnvoll, bei weiter steigender Drehzahl  $i_d$  unter den Wert  $-i_0$  zu senken, da dann die maximale Drehmomentausbeute verringert werden würde. Für Drehzahlen  $\Omega > \Omega_2$  wird das maximale Drehmoment stets bei einem flussschwächendem Strom

$$i_{d \max} = -i_0 = -k i_{\max} \quad (2.139)$$

und einem aus der Spannungsbegrenzung resultierenden drehmomentbildenden Strom von

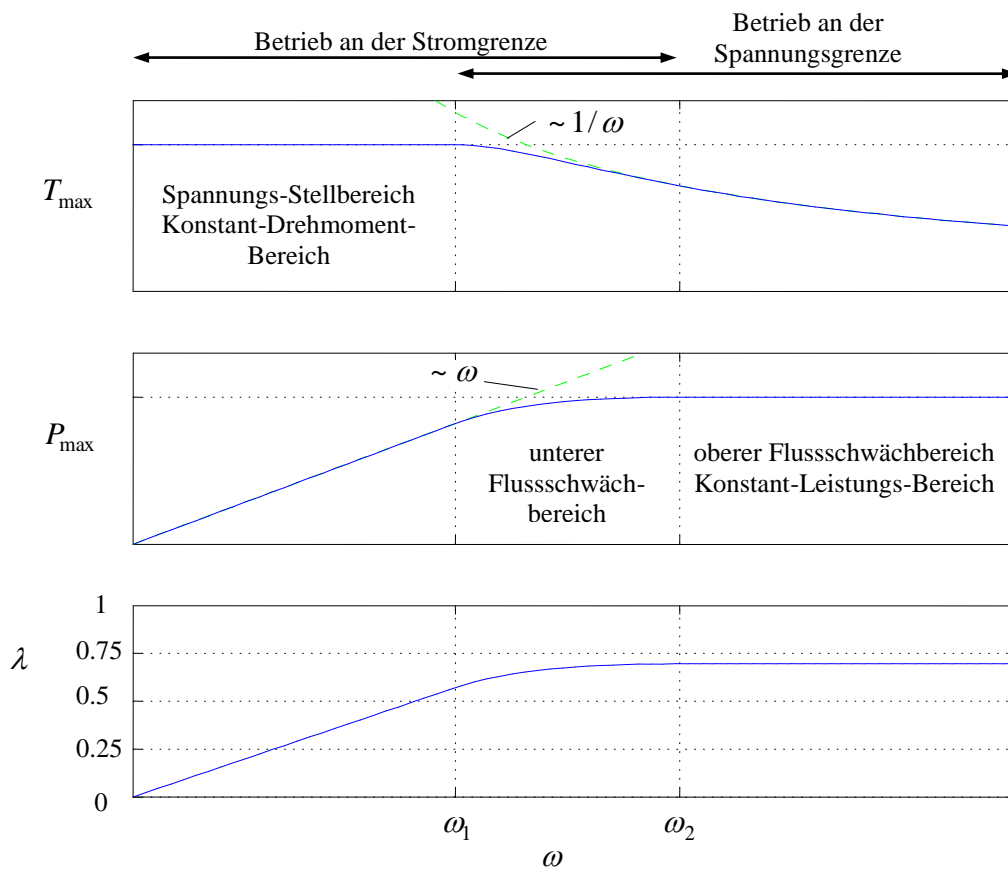
$$i_{q \max} = \frac{u_{\max}}{L_s \omega_{rs}} = \frac{1}{\Omega} i_0 = \frac{k}{\Omega} i_{\max} \quad (2.140)$$

erreicht. Das Drehmoment und die Leistung resultieren dann zu

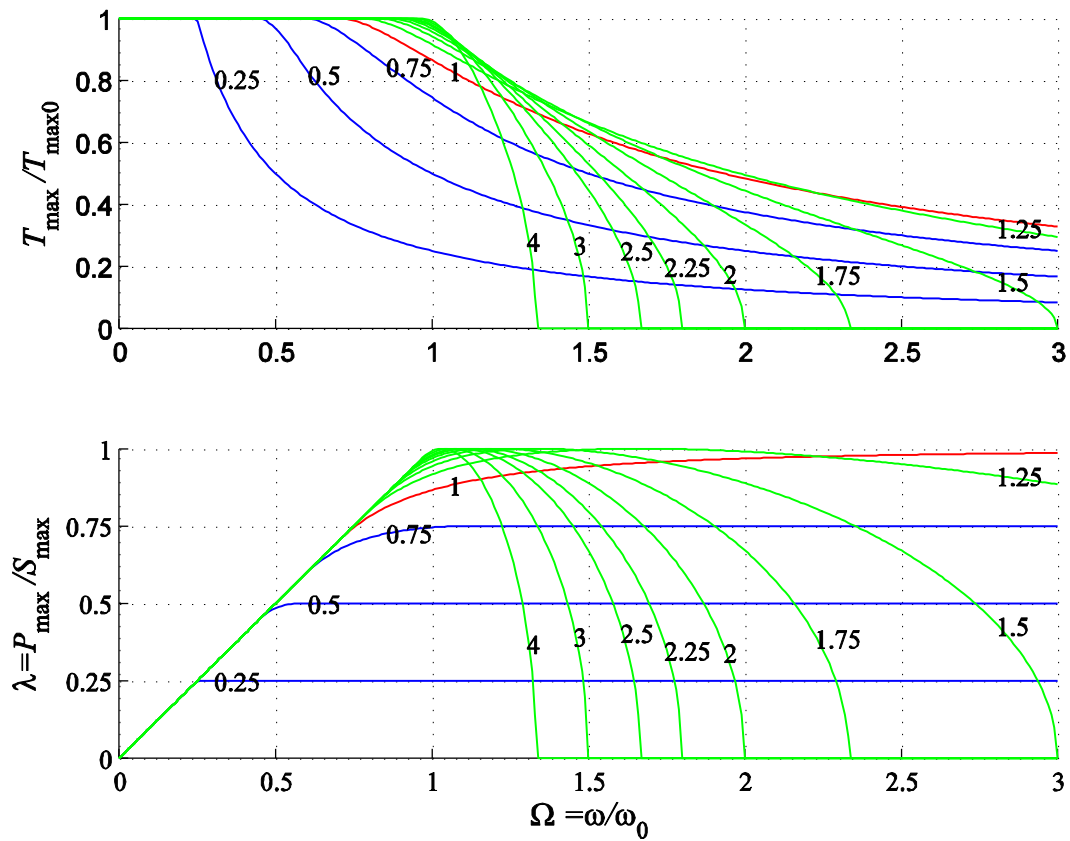
$$T_{\max} = \frac{3}{2} p \psi_p \frac{k}{\Omega} I_{\max} = \frac{k}{\Omega} T_{\max 0} \quad (2.141)$$

$$\lambda = \frac{P_{\max}}{S_{\max}} = k \quad (2.142)$$

Dieser Bereich, in dem die verfügbare Leistung konstant ist, wird als *oberer Flussschwächbereich* bezeichnet. Die letzte Gleichung zeigt, dass der Stromrichternutzungsgrad höchstens gleich dem Auslegungsparameter  $k$  sein kann. Die Stromrichterausnutzung ist mit einem kleinen  $k$  folglich schlecht. Für eine technisch-wirtschaftlich optimierte Auslegung eines Antriebs mit einem Konstant-Leistungsbereich zum Beispiel für automobiler Anwendungen wird man folglich ein  $k$  nahe 1 anstreben. Häufig findet man  $k = 0,8 \dots 0,9$ .



**Fig. 2-27:** Maximales Drehmoment, maximale Leistung und normierte Leistung (Stromrichternutzungsgrad  $\lambda$ ) über der Drehzahl für einen Motor mit  $k < 1$



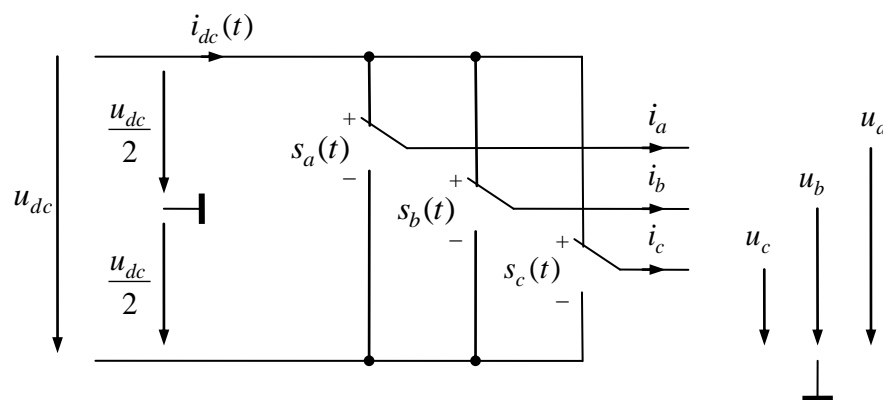
**Fig. 2-28:** Maximales Drehmoment und maximale Leistung über der Drehzahl in normierter Darstellung. Parameter der Kurvenscharen ist der Auslegungsparameter  $k = i_0/i_{\max}$ .

### 3 Umrichter

Stand der Technik ist heute die Speisung von Drehstrommotoren über Umrichter aus einer Gleichspannungsquelle, dem *Spannungszwischenkreis* (kurz: *U-Umrichter*, englisch *voltage-source inverter, VSI*).

Bei Drehstrommotoren sehr großer Leistung von rund 10 MW oder darüber kommen auch Umrichter mit *Stromzwischenkreis* (*I-Umrichter*, *current-source inverter, CSI*) sowie Direktumrichter (*cyclo converter*) oder Matrixumrichter in Betracht. In diesem Rahmen konzentrieren wir uns ausschließlich auf den gleichspannungsgespeisten Umrichter, der auch als *Pulswechselrichter* bezeichnet wird.

Der Umrichter mit Spannungszwischenkreis ist eine dreisträngige Brückenschaltung (B6). Das Funktionsprinzip kann mit idealen Schaltern wie im Bild dargestellt werden.



**Fig. 3-1:** Idealisierter Umrichter mit Gleichspannungsspeisung



**Fig. 3-2:** Gebräuchliche Schaltsymbole für den Umrichter mit Gleichspannungsspeisung

Die Schalterstellungen werden durch die *Schaltfunktionen*  $s_a(t)$ ,  $s_b(t)$ ,  $s_c(t)$  beschrieben. Hierbei stehe  $s_{a,b,c} = +1$  für die obere,  $s_{a,b,c} = -1$  für die untere Schalterposition. Am Eingang (Gleichspannungsseite) des Umrichters kann eine Gleichspannung eingepreßt werden, am Ausgang (Wechselspannungsseite, Motorseite) werden durch die induktive Last Ströme eingepreßt. Abhängig von den Schalterstellungen bestimmen sich die Ausgangsspannungen sowie der eingangsseitige Strom über die Schaltfunktionen nach

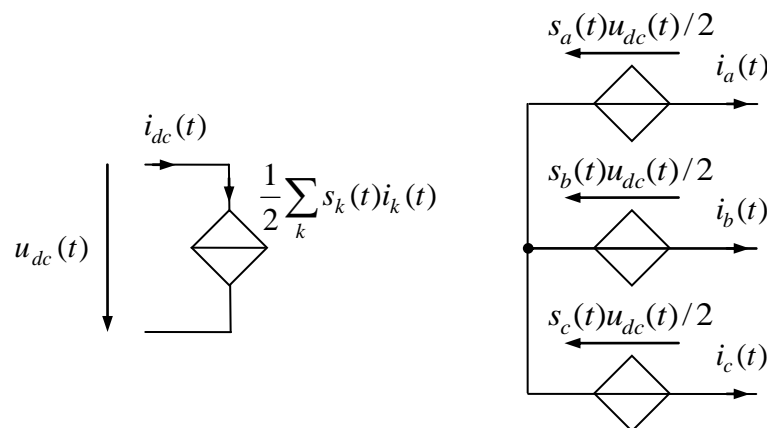
$$u_{a,b,c}(t) = \frac{1}{2} s_{a,b,c}(t) u_{dc}(t) \quad (3.1)$$

$$i_{dc}(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} s_k(t) i_k(t) \quad (3.2)$$

Das Bezugspotential für die Ausgangsspannungen wird der Einfachheit halber gedanklich auf den Mittelpunkt der Eingangsgleichspannung festgelegt. Schaltungstechnisch existiert dieser Punkt üblicherweise nicht. Insbesondere findet auch kein Stromausgleich über dieses Potential statt. Der angeschlossene Motor sei stets im Stern oder Dreieck geschaltet, so dass

$$\sum_{a,b,c} i_k(t) = 0$$

gilt.



**Fig. 3-3:** Ersatzschaltbild des Umrichters mit gesteuerten Strom und Spannungsquellen

Die tatsächliche Ausführung des Umrichters mit Hilfe von Transistoren zeigt das folgende Bild. Je nach Leistungs- und Spannungsbereich kommen im Wesentlichen drei leistungselektronische Bauelemente als Schalter in Betracht:

- MOSFET (*Metal Oxide Field Effect Transistor*)
- IGBT (*Isolated Gate Bipolar Transistor*)
- Abschaltbare Thyristoren wie der GTO-Thyristor (*Gate Turn Off*) oder der IGCT (*Integrated Gate-Commutated Thyristor*)

Jedes dieser drei Bauelemente wird durch eine antiparallele Diode ergänzt, so dass ein Schaltelement entsteht, welches den Strom bidirektional führen kann. (Eine Ausnahme bildet der MOSFET, der aufgrund seines Aufbaus eine sogenannte Body-Diode beinhaltet, so dass im Prinzip auf eine separate Diode verzichtet werden kann.) Spannung kann dieses Element aber nur in einer Richtung aufnehmen, was aber ausreichend ist, weil sich die Polarität der speisenden Gleichspannung üblicherweise nicht ändert. Auf der Gleichspannungsseite muss örtlich dicht an den Leistungshalbleitern ein Kondensator vorgesehen werden, da sich der

Strom  $i_{dc}$  bei einer Umschaltung sprungförmig ändert und nicht über eine lange, mit Induktivitäten behaftete Leitung zu der speisenden Spannungsquelle geführt werden darf.

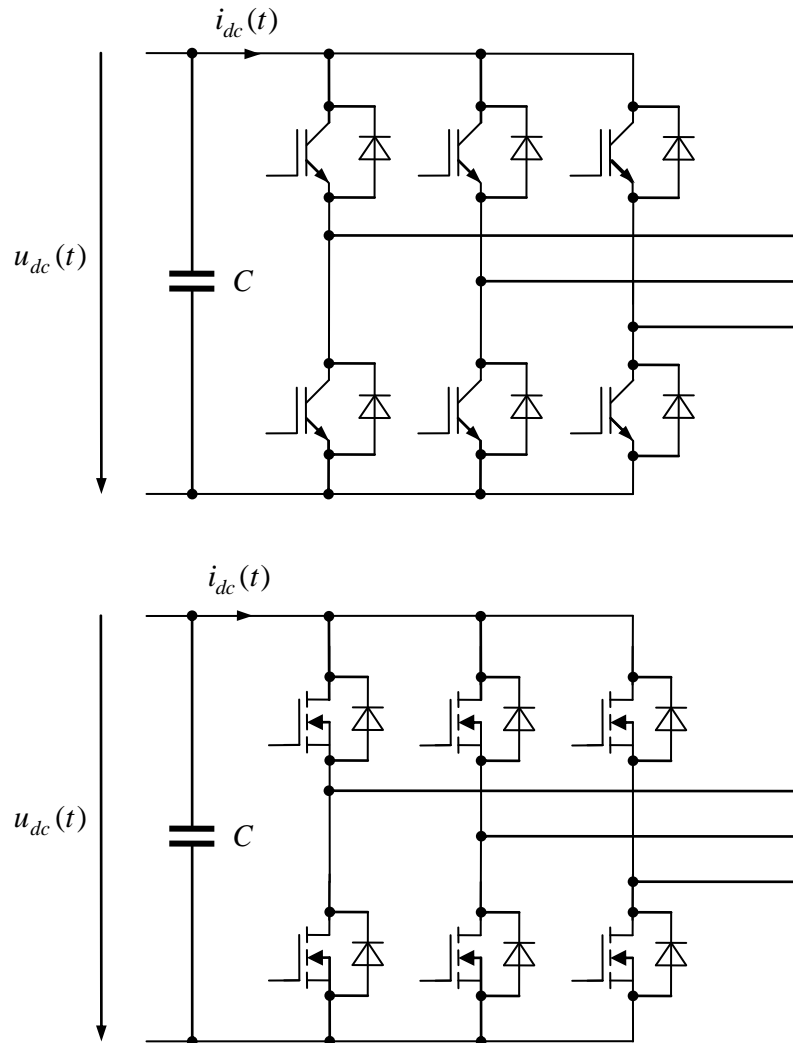
Der Anwendungsbereich dieser drei Typen kann durch folgende Daten charakterisiert werden:

	MOSFET	IGBT	GTO/IGCT
Spannungen <sup>3</sup>	600 V <sup>1</sup> 1600 V <sup>2</sup>	600 V/1200 V <sup>1</sup> 6500 V <sup>2</sup>	6000 V
Ströme	1 - 50 A <sup>1</sup> 690 A <sup>2</sup>	50 - 400 A <sup>1</sup> 2400 A <sup>2</sup>	4000 A
typische Schaltfrequenz	10 - 1000 kHz	2 - 20 kHz	0.2 - 1 kHz

<sup>1</sup> Typische Standardelemente

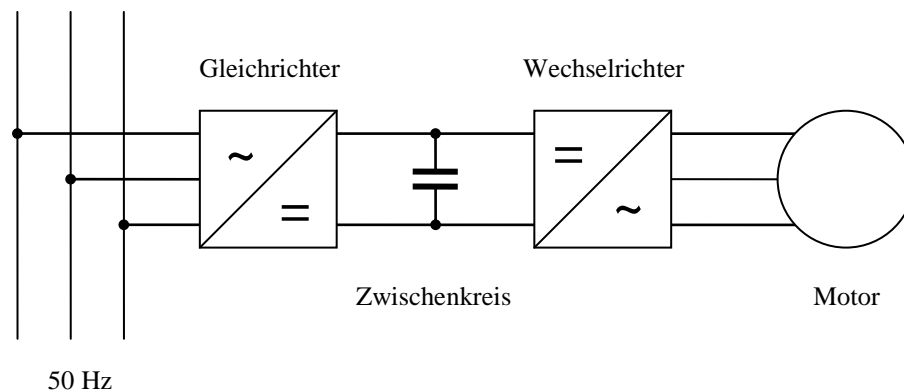
<sup>2</sup> Grenzdaten der Technologie (Stand ca. 2008)

<sup>3</sup> Hier sind die maximalen Sperrspannungen angegeben. Es muss berücksichtigt werden, dass die Betriebsspannung eines Umrichters die maximale Sperrspannung der Bauelemente typischerweise nur zu etwa 65-80% ausnutzt, da eine Spannungsreserve zur Beherrschung transientser Spannungsspitzen während der Kommutierung benötigt wird.



**Fig. 3-4:** Dreisträngiger Umrichter mit IGBT (oben) oder MOSFET (unten)

Den Gleichspannungskreis bezeichnet man als *Zwischenkreis*, wenn die Gleichspannung selbst durch Umformung, beispielsweise durch Gleichrichtung eines Wechsel- oder Drehspannungsnetzes bereitgestellt wird (s. Bild). Der Gleichrichter kann aus einer einfachen Diodenbrücke bestehen. Bei aufwändigeren Systemen, insbesondere dann, wenn eine Rückspeisung elektrischer Leistung in das Versorgungsnetz möglich sein soll, kann für den Gleichrichter dieselbe (gespiegelte) Schaltung wie für den motorseitigen Umrichter verwendet werden.



**Fig. 3-5:** Anordnung mit Spannungszwischenkreis

Ein dreisträngiger Umrichter kann lediglich  $2^3 = 8$  Schaltzustände annehmen. Die resultierenden Ausgangsspannungen  $u_a, u_b, u_c$  können unter Anwendung der Transformation  $\mathbf{T}$  auf zwei orthogonale Komponenten  $u_\alpha, u_\beta$  und die Nullkomponenten  $u_0$  abgebildet werden. Die Nullkomponente beschreibt das Gleichtaktverhalten der Umrichter-Ausgangsspannungen. Üblicherweise sind die Motorwicklungen, die an den Umrichter angeschlossen werden, isoliert. Die Nullkomponente, die alle drei Motorpotentiale im Gleichtakt verschiebt, hat somit keine Auswirkung und braucht also nicht betrachtet zu werden.

Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass der Nullkomponente sehr wohl eine Bedeutung zukommt. Diese ist nämlich für Verschiebungsströme über parasitäre Kapazitäten zwischen den Motorleitungen bzw. -wicklungen und dem Gehäuse, der Schirmung bzw. der Masse verantwortlich. Im Rahmen dieser elementaren Modellierung wird die Nullkomponente aber nicht berücksichtigt.

Die durch die acht Schaltzustände erzeugten elementaren Spannungsvektoren in orthogonalen  $\alpha/\beta$ -Komponenten werden mit  $\mathbf{v}_i$  bezeichnet. Über die Transformation

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \\ u_{ci} \end{bmatrix} = \frac{u_{dc}}{2} \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} s_{ai} \\ s_{bi} \\ s_{ci} \end{bmatrix}$$

werden sie aus den Schaltzuständen  $s_{a,b,c} = -1, +1$  berechnet. Der Einfachheit halber sei im Folgenden die normierten elementaren Vektoren

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{u_{dc}/2} = \mathbf{T}_{23} \begin{bmatrix} s_{ai} \\ s_{bi} \\ s_{ci} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

übergegangen. Mit der Transformationsmatrix



$$\mathbf{T}_{23} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

erhalten wir die nachfolgende Tabelle

	$s_a$	$s_b$	$s_c$	$\tilde{v}_{i\alpha}$	$\tilde{v}_{i\beta}$
$\tilde{\mathbf{v}}_0$	-1	-1	-1	0	0
$\tilde{\mathbf{v}}_1$	+1	-1	-1	+4/3	0
$\tilde{\mathbf{v}}_2$	+1	+1	-1	+2/3	+2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_3$	-1	+1	-1	-2/3	+2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_4$	-1	+1	+1	-4/3	0
$\tilde{\mathbf{v}}_5$	-1	-1	+1	-2/3	-2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_6$	+1	-1	+1	+2/3	-2/√3
$\tilde{\mathbf{v}}_7$	+1	+1	+1	0	0

Der Nullspannungsvektor ist durch zwei verschiedene Schalterstellungen realisierbar,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_7 = \mathbf{0}$ . Stellt man die elementaren Vektoren geometrisch in der  $\alpha/\beta$ -Ebene dar, spannen sie ein reguläres Sechseck auf.

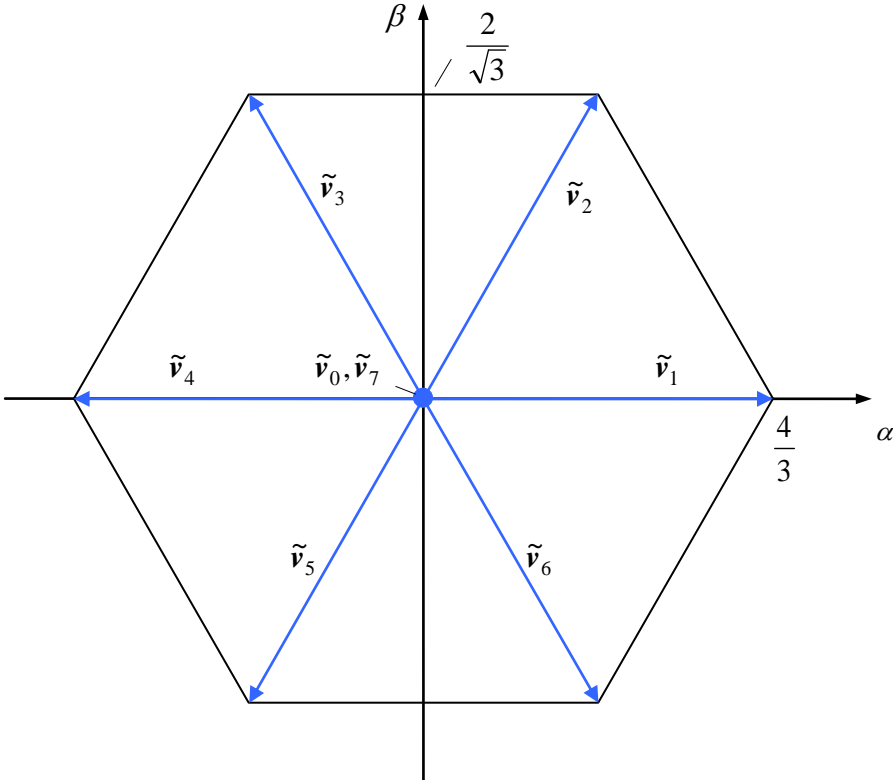


Fig. 3-6: Elementare Vektoren in der orthogonalen Ebene

## 4 Pulsweitenmodulation

Da ein Umrichter nur diskrete Schaltzustände annimmt und damit nur 7 verschiedene Ausgangsspannungen erzeugen kann, bedient man sich zur Realisierung von Spannungswerten der Pulsweitenmodulation. Das Prinzip wird zunächst am einsträngigen Beispiel eingeführt und dann auf drei Stränge erweitert.

### 4.1 Einsträngige Pulsweitenmodulation

Der normierte Spannungswert

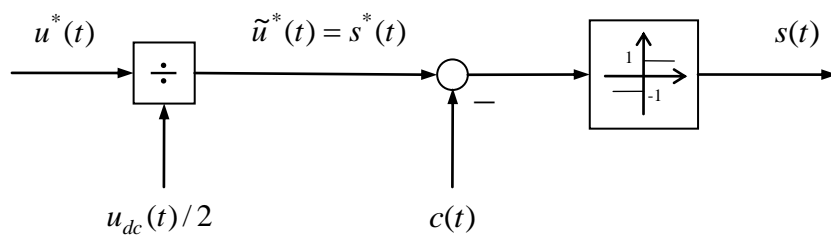
$$\tilde{u}^* = \frac{u^*}{u_{dc}/2} \quad (4.1)$$

ist die Eingangsgröße, der Sollwert der Schaltfunktion für die Pulsweitenmodulation,

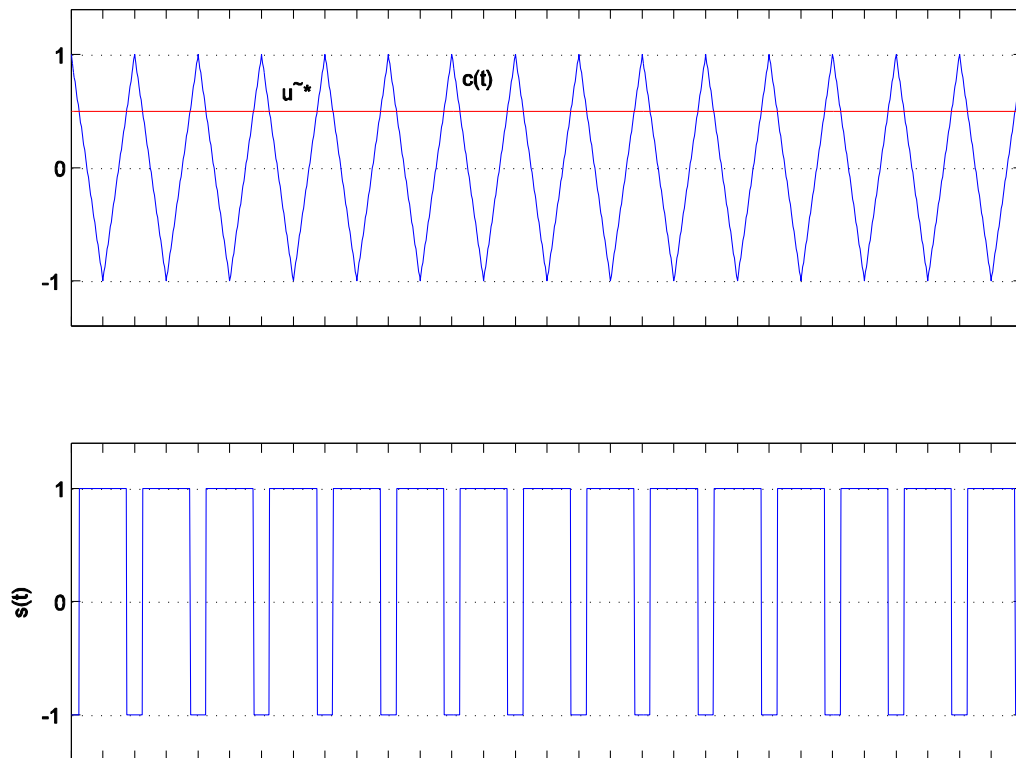
$$s^* = \tilde{u}^* \quad (4.2)$$

Die Schaltfunktion  $s(t)$  wird erzeugt, indem der normierte Spannungswert mit einem dreiecksförmigen Modulationsträger verglichen wird. Der Ausgang des Komparators ist unmittelbar die Schaltfunktion. Durch unmittelbare geometrische Interpretation dieses Verfahrens wird klar, dass der zeitliche Mittelwert der Schaltfunktion gleich dem Sollwert ist, zumindest, wenn dieser als konstant bzw. langsam veränderlich vorausgesetzt werden kann (zur genaueren Untersuchung dieses zeitlichen Verhaltens siehe auch Abschnitt 4.8, insbesondere 4.8.2).:

$$\overline{s(t)} = s^*$$



**Fig. 4-1:** Realisierung der Pulsweitenmodulation durch Dreiecksmodulationsträger und Komparator

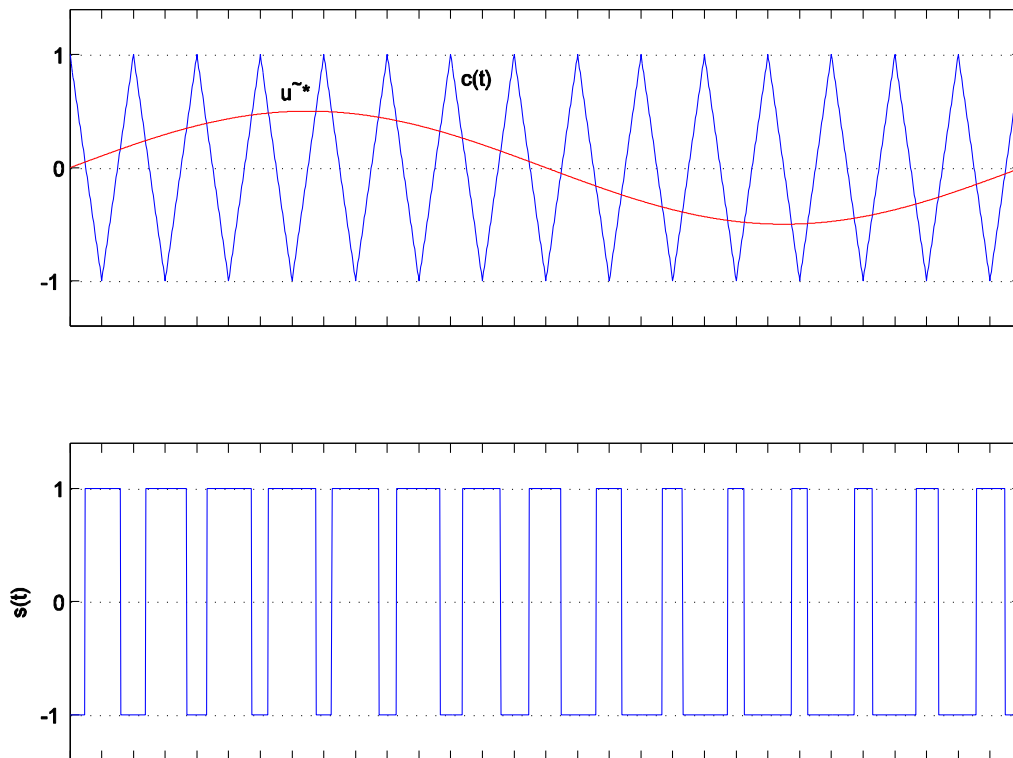


**Fig. 4-2:** Modulation eines konstanten Sollwerts

Das Verfahren wird aufgrund der Form seines Modulationsträgers als *Dreiecksmodulation* bezeichnet. Ebenfalls gebräuchlich, insbesondere im Hinblick auf die unten folgende Betrachtung sinusförmige Sollwerte, sind die Begriffe *Unterschwingungsverfahren* oder *Sinus-Dreieck-Modulation*. Gerade der letzte Begriff unterstellt aber implizit, dass dieses Verfahren nur zur Modulation sinusförmiger Sollwerte geeignet sei. Diese werden im folgenden zwar auch hier als Beispiel betrachtet, doch soll deutlich gemacht werden, dass nicht nur konstante oder sinusförmige Signale, sondern selbstverständlich jeder beliebige transiente Verlauf möglich ist.

Hier werden stets symmetrische Dreiecksfunktionen als Modulationsträger verwendet. Ebenfalls ist es möglich, steigende oder fallende Sägezahnfunktionen zu verwenden.

Die resultierende Schaltfrequenz  $f_s$  der Pulsweitenmodulation wird direkt durch die Frequenz des dreiecksförmigen Modulationsträgers  $c(t)$  bestimmt (englisch *carrier*). Für viele industrielle Standardgeräte hat sich ein Standard von  $f_s = 8 \dots 16$  kHz herausgebildet, doch gibt es sehr wohl Anwendungen im Bereich sehr großer Leistungen, bei denen die Schaltfrequenz nur wenige hundert Hertz beträgt. Bei Spezialanwendungen im Bereich kleiner Leistungen trifft man dagegen Schaltfrequenzen bis zu einigen 10 kHz.



**Fig. 4-3:** Modulation eines sinusförmigen Sollwerts

Als Aussteuerung wird der Scheitelwert der normierten Spannung bezeichnet:

$$A = \max \left| \frac{u^*(t)}{u_{dc}/2} \right| = \max |\tilde{u}^*(t)| \quad (4.3)$$

## 4.2 Dreisträngige Pulsweitenmodulation

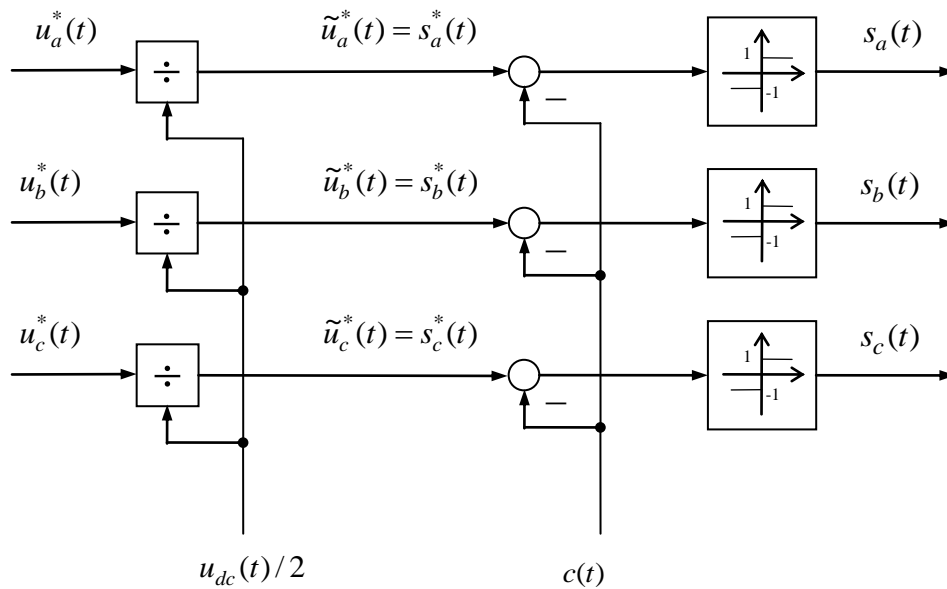


Fig. 4-4: Pulsweitenmodulation mit dreiecksförmigem Modulationsträger für drei Stränge

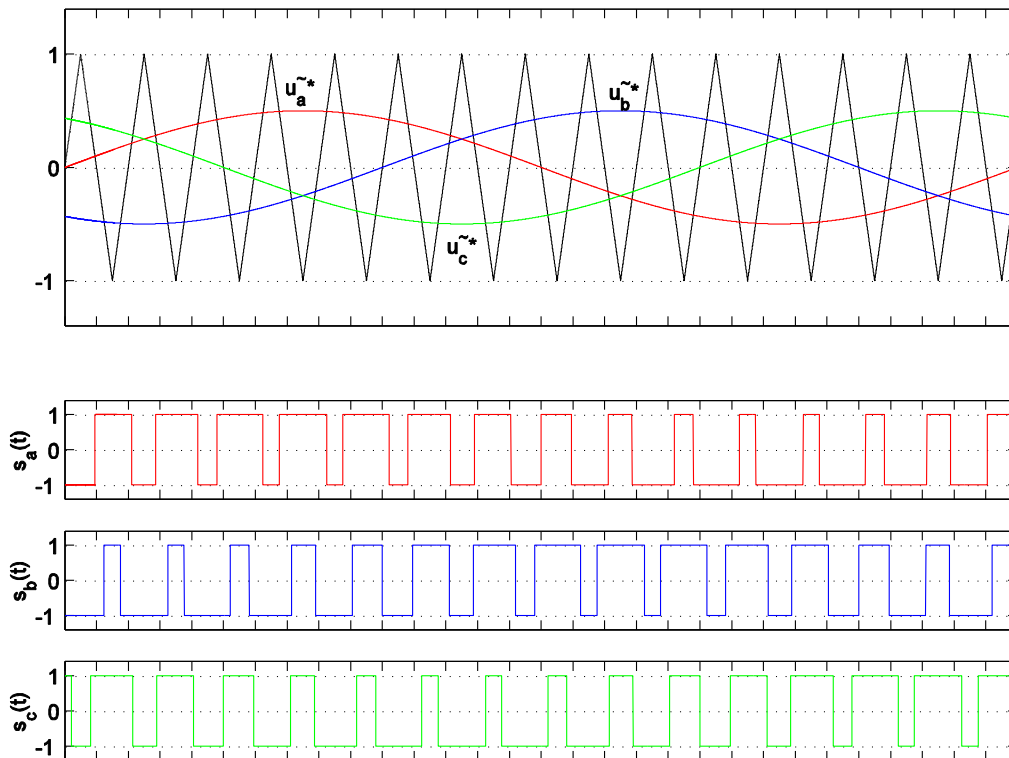
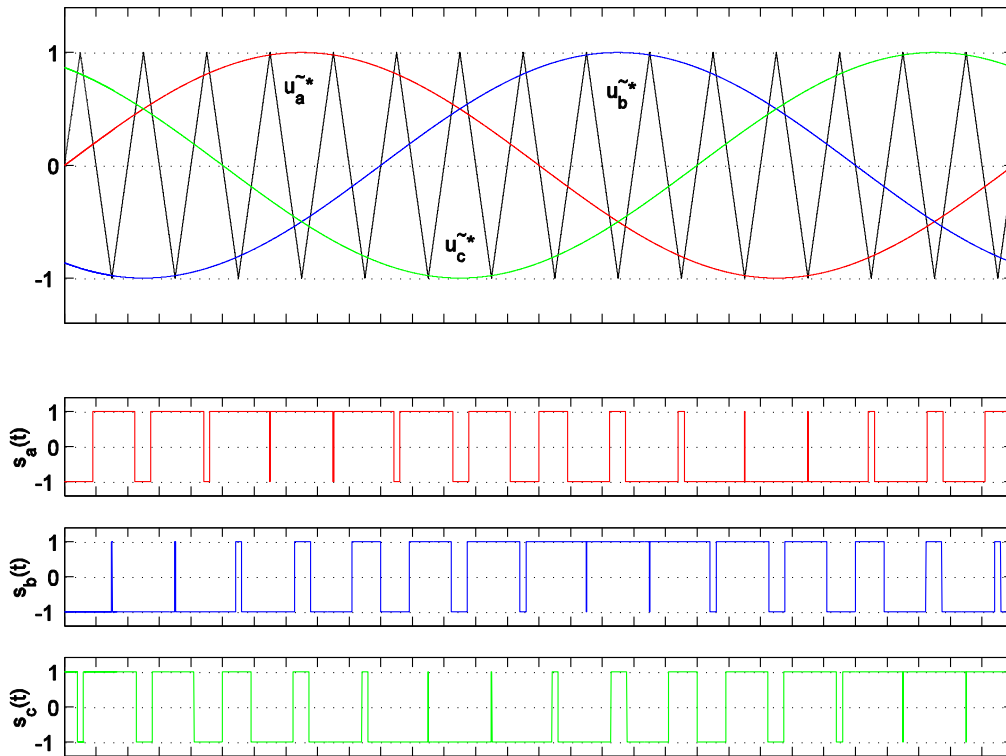


Fig. 4-5: Dreiecksmodulation für sinusförmiges Drehspannungssystem mit Aussteuerung  $A = 0,5$



**Fig. 4-6:** Dreiecksmodulation für sinusförmiges Drehspannungssystem mit Aussteuerung  $A = 1,0$

Der Aussteuerungsbereich ergibt sich zu

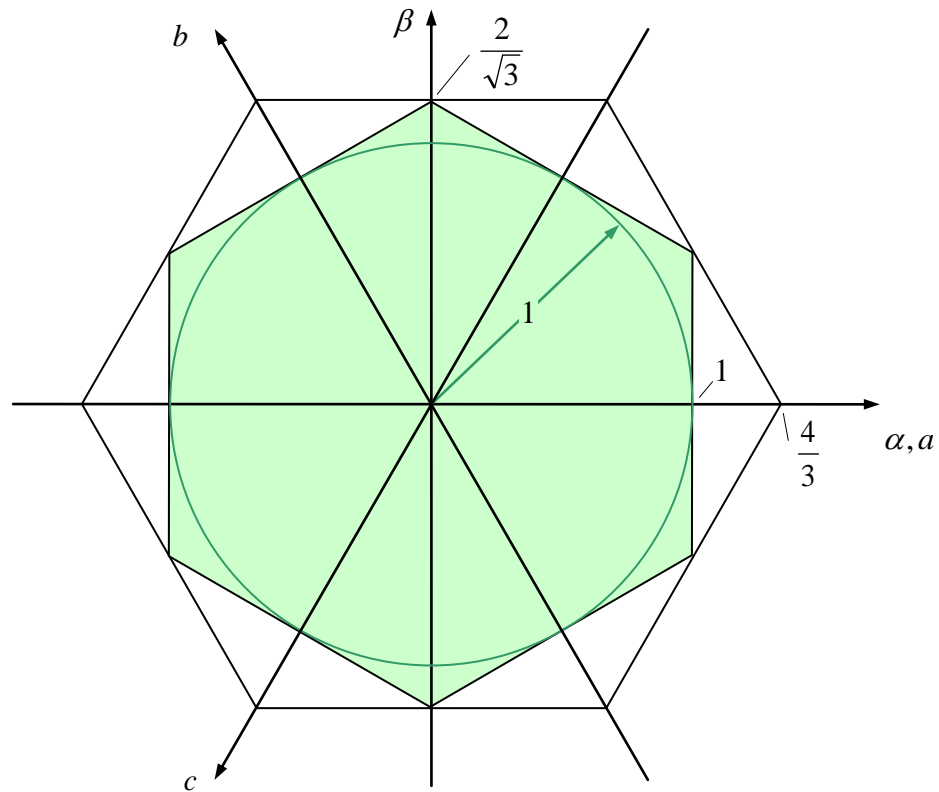
$$|\tilde{u}_{a,b,c}(t)| \leq 1$$

In der Darstellung in der orthogonalen  $\alpha/\beta$ -Ebene führt diese Bedingung jeweils zu einem Streifen um die a, b oder c-Achse, deren Schnitt das skizzierte innere Sechseck ergibt. Jeder Spannungsvektor  $\tilde{u}^*$  dieses Sechsecks ist durch diese Modulation realisierbar. Betrachtet man einfach die Länge des Spannungsvektors unabhängig von seiner Richtung, so ist in jedem Fall ein Vektor mit

$$A = |\tilde{u}^*| \leq A_{\max} = 1$$

durch diese Art der Modulation umsetzbar.

Die maximale verkettete Spannung zwischen zwei Strängen, die der Umrichter auf den Motor schalten kann, ist die Eingangsgleichspannung  $u_{dc}$ . Dieses Potenzial wird aber von dem Modulationsverfahren in der jetzigen Form nicht ausgenutzt.



**Fig. 4-7:** Mit der Dreiecksmodulation realisierbare Spannungsvektoren

Eine Verschiebung des Bezugspotenzials (Addition einer Nullkomponente) verändert die verketteten Spannungen nicht, aber erhöht den Aussteuerungsbereich:

$$u_0(t) = \frac{1}{2} \left[ \max \{ u_a^*(t), u_b^*(t), u_c^*(t) \} + \min \{ u_a^*(t), u_b^*(t), u_c^*(t) \} \right] \quad (4.4)$$

$$u_a^{**}(t) = u_a^*(t) - u_0(t)$$

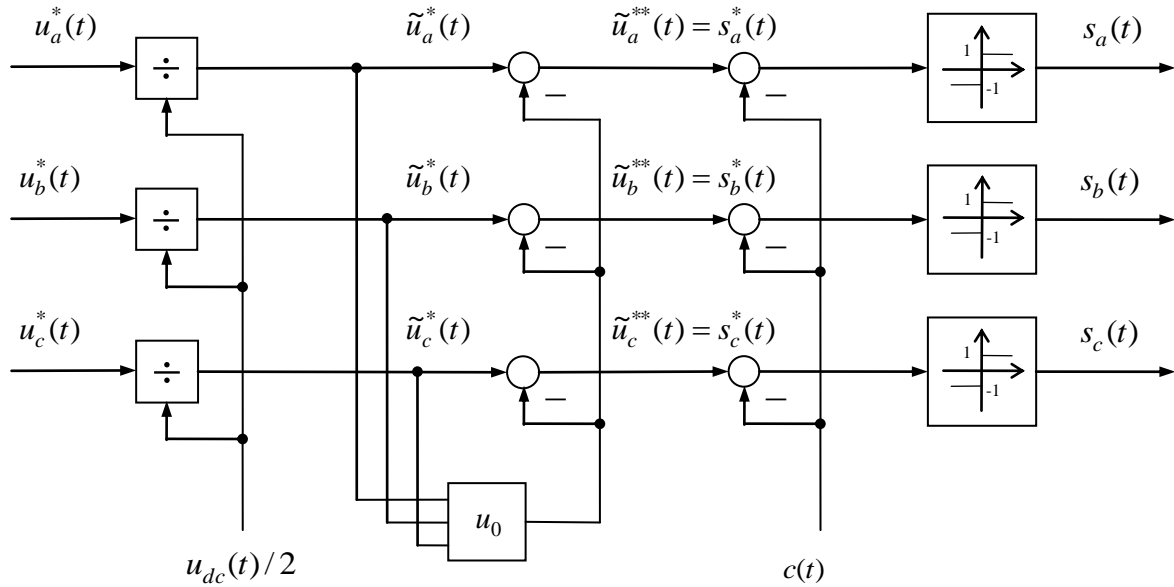
$$u_b^{**}(t) = u_b^*(t) - u_0(t) \quad (4.5)$$

$$u_c^{**}(t) = u_c^*(t) - u_0(t)$$

$$(4.6)$$

$$(4.7)$$





Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung

Mit dieser Verschiebung wird der maximal mögliche Aussteuerungsbereich für die verketteten Spannungen ausgenutzt (s. Bild):

$$\frac{|\mathbf{u}_{ab,bc,ca}(t)|}{u_{dc}} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad |\tilde{\mathbf{u}}_{ab,bc,ca}(t)| \leq 2$$

Unabhängig von der Richtung des Sollspannungsvektors in orthogonalen Koordinaten ist jeder Vektor

$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \frac{\mathbf{u}^*}{u_{dc}/2}$$

$$A = |\tilde{\mathbf{u}}^*| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15 \quad (4.8)$$

realisierbar. Durch die Nullpunktverschiebung wird die Spannungsausnutzung also um 15% gesteigert. Die Strangsollwerte verlieren zwar dadurch ihre gewohnte Sinusform, die verketteten Spannungen bleiben aber unverändert sinusförmig.

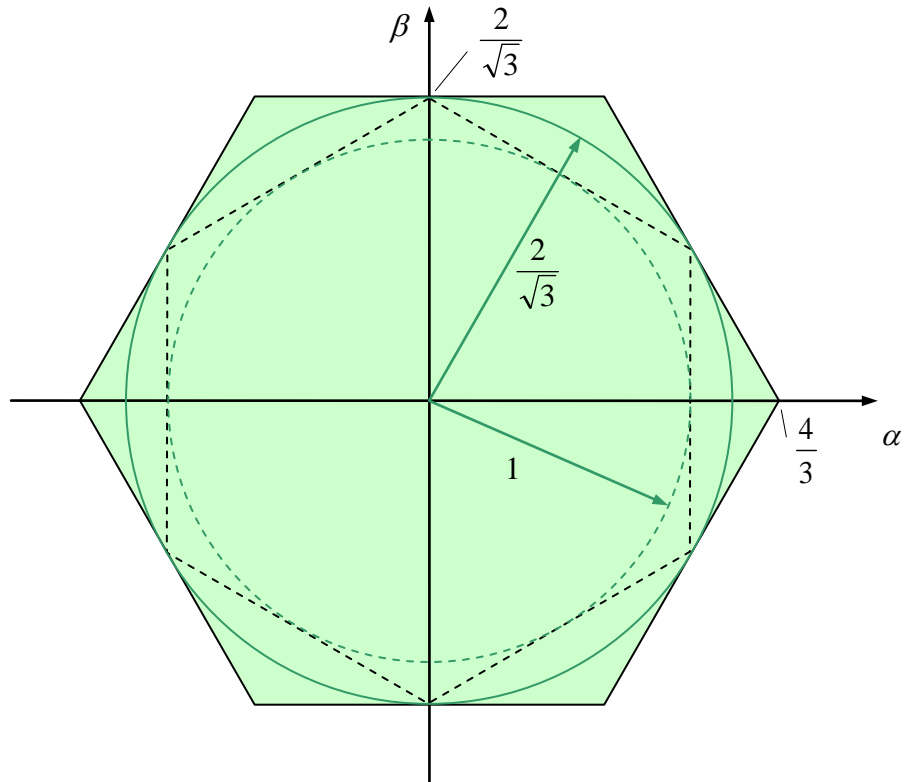


Fig. 4-8: Mit der Dreiecksmodulation und Nullpunktverschiebung realisierbare Spannungsvektoren

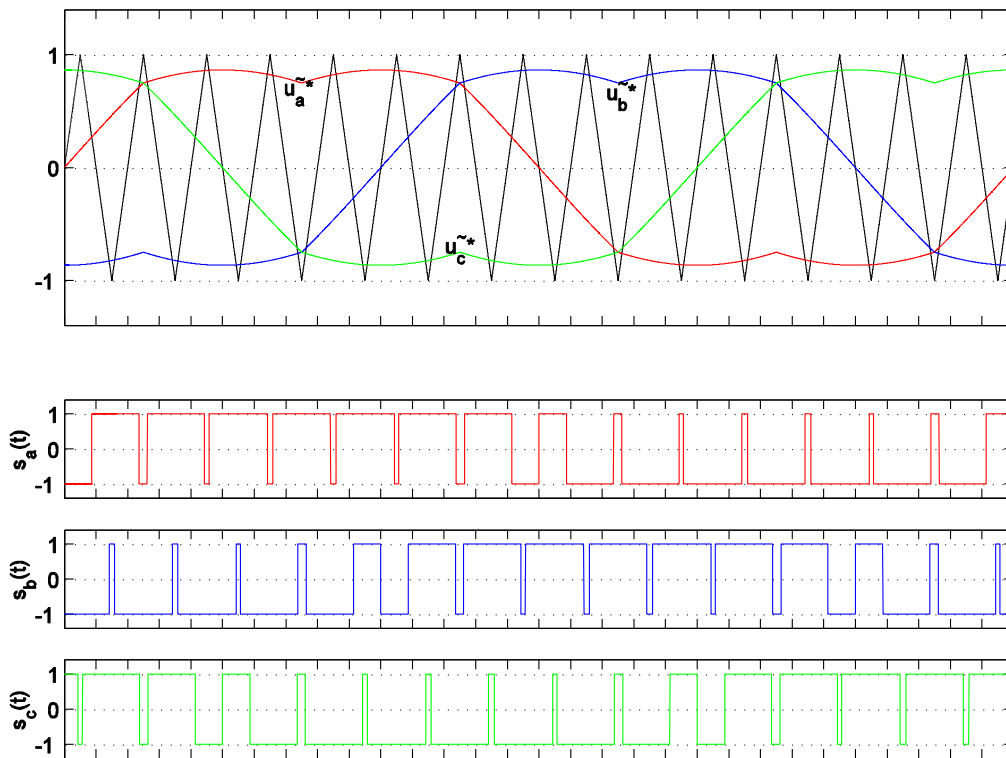
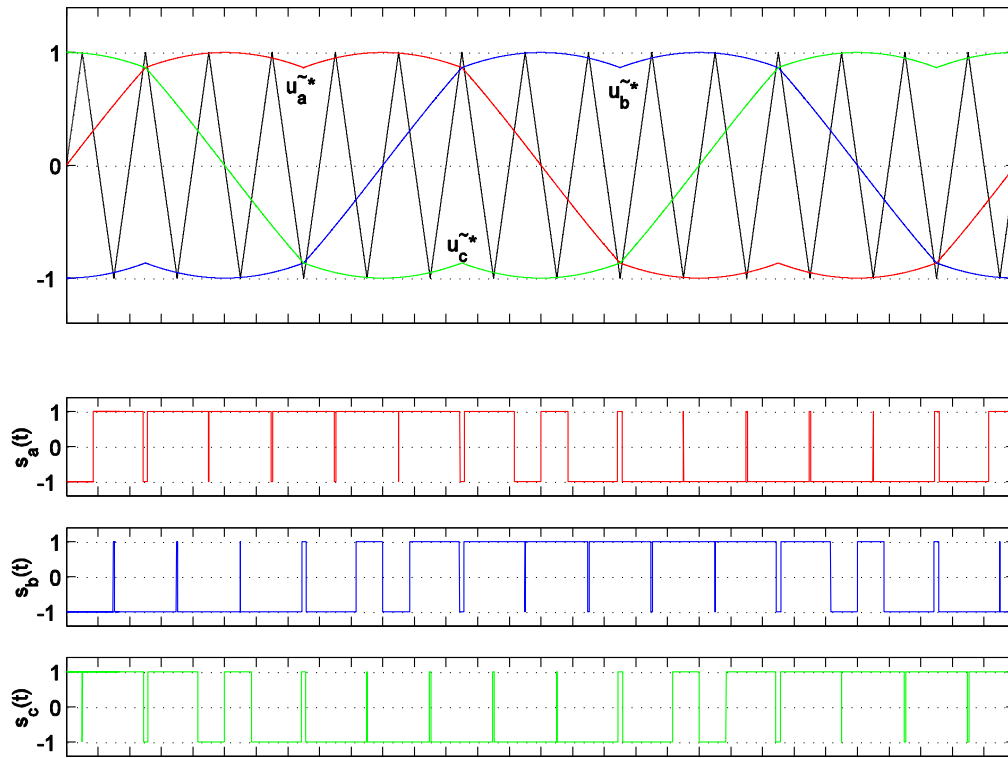


Fig. 4-9: Dreisträngige Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung,  
 $A = 1,0$



**Fig. 4-10:** Dreisträngige Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung,  
 $A = 2/\sqrt{3} = 1,15$

### 4.3 Vektormodulation

Bei der *Vektormodulation* (auch als *Raumzeigermodulation* bezeichnet) geht man anders als bei der Dreiecksmodulation, bei der jeder drei Stränge separat moduliert wird, vom *Vektor* des Spannungssollwerts  $\mathbf{u}^*$  in orthogonalen Komponenten aus: In einem vorgegebenen Zeitintervall der Länge  $T_a$ , dem Abtastintervall, soll der Mittelwert des Umrichterausgangsspannungsvektors  $\mathbf{u}(t)$ , welcher aus einer geeigneten Abfolge der elementaren Spannungsvektoren  $\mathbf{v}_k$  besteht, gleich dem gewünschten Spannungssollwert  $\mathbf{u}^*(k)$  für dieses Zeitintervall sein:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^*(k) &= \frac{1}{T_a} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{T_a} (t_0 \mathbf{v}_0 + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + t_3 \mathbf{v}_3 + t_4 \mathbf{v}_4 + t_5 \mathbf{v}_5 + t_6 \mathbf{v}_6 + t_7 \mathbf{v}_7) \\ &= \tau_0 \mathbf{v}_0 + \tau_1 \mathbf{v}_1 + \tau_2 \mathbf{v}_2 + \tau_3 \mathbf{v}_3 + \tau_4 \mathbf{v}_4 + \tau_5 \mathbf{v}_5 + \tau_6 \mathbf{v}_6 + \tau_7 \mathbf{e}_7\end{aligned}\quad (4.9)$$

mit den normierten Zeiten

$$\tau_i = \frac{t_i}{T_a} \quad (4.10)$$

wobei die Nebenbedingungen

$$\sum_i \tau_i = 1 \quad \text{und} \quad \tau_i \geq 0$$

zu beachten sind. Das heißt, die Summe aller Zeiten muss das zur Verfügung stehende Zeitintervall genau füllen. Man kann obige Gleichung auch mit den bezogenen Vektoren

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(k) = \frac{\mathbf{u}^*(k)}{u_{dc}/2}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{u_{dc}/2}, \quad (4.11)$$

darstellen,

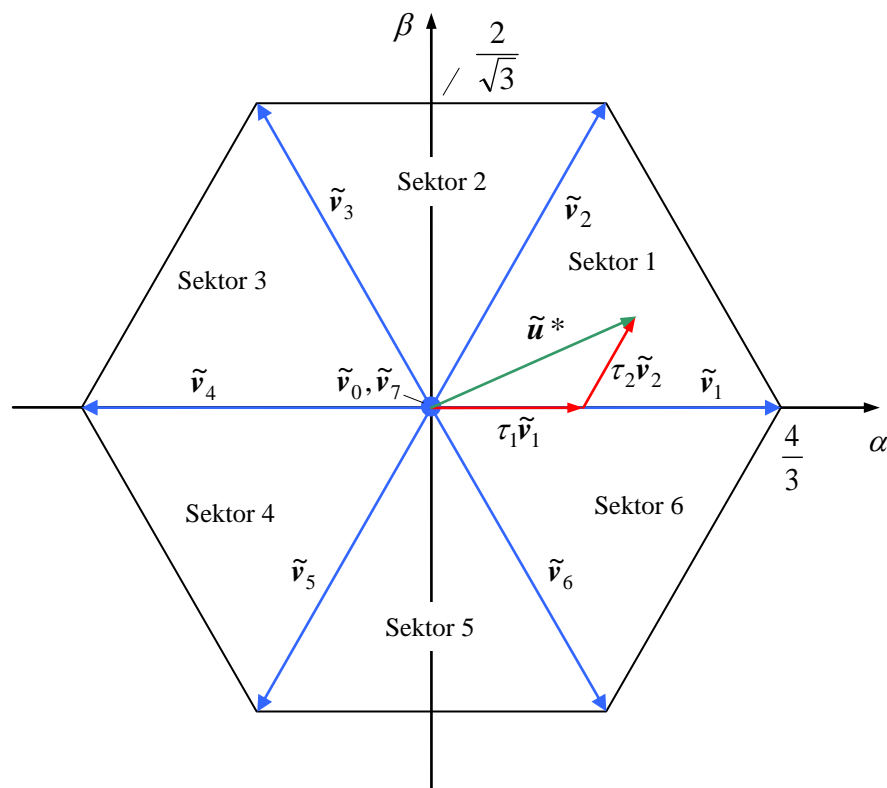
$$\tilde{\mathbf{u}}^*(k) = \frac{1}{T_a} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \tilde{\mathbf{u}}(t) dt = \tau_0 \tilde{\mathbf{v}}_0 + \tau_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tau_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 + \tau_3 \tilde{\mathbf{v}}_3 + \tau_4 \tilde{\mathbf{v}}_4 + \tau_5 \tilde{\mathbf{v}}_5 + \tau_6 \tilde{\mathbf{v}}_6 + \tau_7 \tilde{\mathbf{v}}_7 .$$

Dazu wird der Faktor  $u_{dc}/2$  vor das Integral gezogen, was aber voraussetzt, dass die Spannung  $u_{dc}(t)$  zeitlich konstant ist, sich zumindest aber in Bezug auf das Abtastintervall  $T_a$  nur langsam ändert. Diese Voraussetzung ist zwar bei vielen Anwendungen, jedoch keineswegs immer gegeben. Die speisende Gleichspannung wird meist mit Hilfe eines Kondensators stabilisiert. Wenn dieser Kondensator sehr klein bemessen ist, kann  $u_{dc}(t)$  sich

durchaus sehr schnell verändern und die Voraussetzung einer näherungsweise konstanten Spannung ist dann nicht mehr gegeben. Dies führt zu Fehlern in der gewünschten Motorspannung (s. Abschnitt 4.5).

Je nach Lage des Sollspannungsvektors  $\mathbf{u}^*(k)$  reichen maximal drei der acht Vektoren für die Vektormodulation aus. In dem im Bild dargestellten Fall, wenn der Sollvektor im Sektor 1 des Hexagons liegt, reichen beispielsweise die beiden Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  zusammen mit dem Nullspannungsvektor  $\mathbf{v}_0$  aus:

$$\mathbf{u}^*(k) = \frac{1}{T_a} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{T_a} (t_0 \mathbf{v}_0 + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2) = \tau_0 \mathbf{v}_0 + \tau_1 \mathbf{v}_1 + \tau_2 \mathbf{v}_2 \quad (4.12)$$



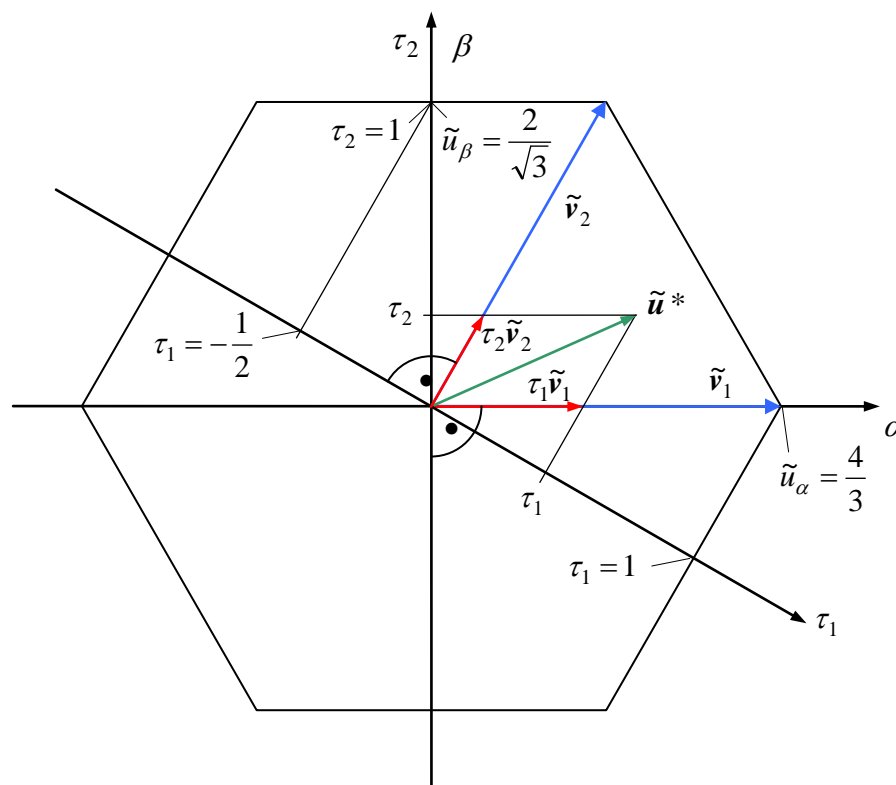
**Fig. 4-11:** Prinzip der Vektormodulation

Für einen gegebenen Vektor  $\mathbf{u}^*(k)$  kann dieses Gleichungssystem nach den Zeiten  $\tau_i$  algebraisch aufgelöst werden. Geometrisch lässt sich dies durch Interpretation der Zeiten  $\tau_i$  als *duale Koordinaten* deuten, die an Achsen abzulesen sind, welche auf den elementaren Vektoren senkrecht stehen. Für das im Bild dargestellte Beispiel des Sektors 1 folgt unmittelbar durch diese geometrische Betrachtung für die Projektionen des Sollvektors auf die dualen  $\tau_1$ -,  $\tau_2$ -Achsen

$$\tau_1 = \frac{\tilde{u}_\alpha^*}{4/3} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_\beta^*}{2/\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4} \tilde{u}_\beta^* \quad (4.13)$$

$$\tau_2 = \frac{\tilde{u}_\beta^*}{2/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{u}_\beta^* \quad (4.14)$$

Entsprechend findet man die Zusammenhänge für die anderen Sektoren, die in einer Tabelle weiter unten zusammen gestellt sind.

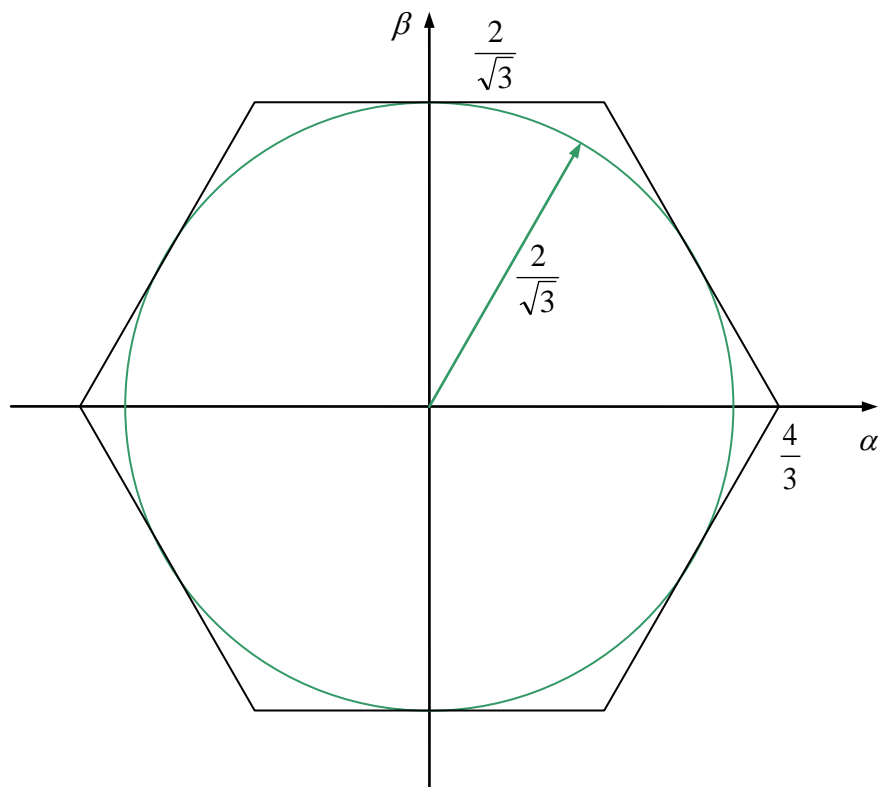


**Fig. 4-12:** Geometrische Konstruktion der Zeiten  $\tau_k$  mit dualen Koordinaten

Durch geeignete Wahl der elementaren Vektoren lassen sich alle Sollvektoren, die in dem durch die elementaren Vektoren aufgespannten Hexagon liegen, realisieren. Der Aussteuerungsbereich der Vektormodulation ist also das gesamte von den elementaren Vektoren aufgespannte Hexagon. Er ist mit dem der dreisträngigen Dreiecksmodulation identisch, wenn bei letzterer die Nullpunktverschiebung angewendet wird. Unabhängig von der Richtung ist jeder Sollvektor der Länge

$$|\tilde{u}^*| < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4.15)$$

realisierbar (s. Bild unten).



**Fig. 4-13:** Zum Aussteuerungsbereich der Vektormodulation

Abhängig davon, in welchem Sektor der Sollvektor liegt, ergeben sich die Pulszeiten nach folgender Tabelle. Angegeben sind jeweils die beiden Zeiten für die aktiven Vektoren in Abhängigkeit von den Komponenten des Sollvektors. Die Zeiten für den Nullspannungsvektor, also  $\tau_0$  oder  $\tau_7$ , müssen die ersten beiden Zeiten zum vollständigen Intervall ergänzen.

Sektor	Zeiten für aktive Vektoren		Nullspannungsvektor
1	$\tau_1 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_2 = +\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_1 - \tau_2$
2	$\tau_2 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_3 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_2 - \tau_3$
3	$\tau_4 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_3 - \tau_4$
4	$\tau_4 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_4 - \tau_5$
5	$\tau_6 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_5 = -\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_5 - \tau_6$
6	$\tau_1 = +\frac{3}{4}\tilde{u}_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{u}_\beta^*$	$\tau_0 + \tau_7 = 1 - \tau_6 - \tau_1$

Der Sektor, in dem ein Sollvektor liegt, kann schnell durch die Prüfung einiger Vorzeichen bestimmt werden:

Sektor	$\tilde{u}_\beta^*$	$\sqrt{3}\tilde{u}_\alpha^* + \tilde{u}_\beta^*$	$\sqrt{3}\tilde{u}_\alpha^* - \tilde{u}_\beta^*$
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	-	-
4	-	-	-
5	-	-	+
6	-	+	+

Obwohl die Zeiten für die aktiven Vektoren eindeutig aus dem vorgegebenen Sollwert bestimmt werden, gibt es einige Freiheitsgrade bei der konkreten Realisierung der Vektormodulation:

- Die Wahl des Nullspannungsvektors  $v_0$  oder  $v_7$
- Die Wahl der Reihenfolge der beteiligten elementaren Vektoren innerhalb des Abtastintervalls. Darüber hinaus wird die Zeit für den Nullspannungsvektor gern auf Anfang und das Ende des Intervalls jeweils hälftig aufgeteilt.

Beispielsweise sind die in der folgenden Tabelle angegebenen Varianten denkbar. Die Reihenfolgen der Vektoren sind nur exemplarisch für die Sektoren 1 und 2 angegeben. Die



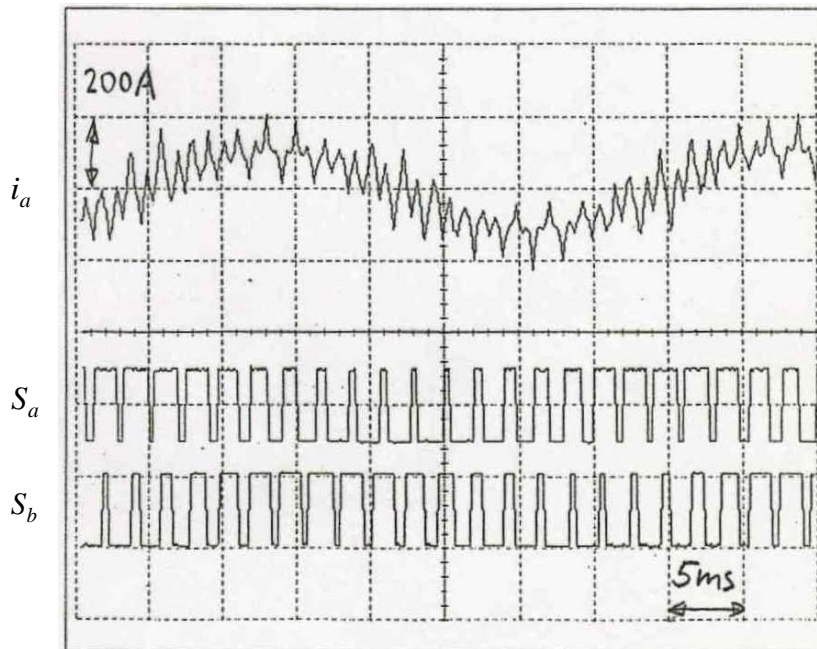
Vektorfolgen für die anderen Sektoren können leicht aus den Symmetrien abgeleitet werden. Angegeben sind jeweils die Indizes  $k$  der elementaren Vektoren  $v_k$ .

Typ	Sektor 1 $i =$	Sektor 2 $i =$
1	0, 1, 2, 7 7, 2, 1, 0 <sup>1</sup>	0, 3, 2, 7 7, 2, 3, 0 <sup>1</sup>
2	7 (bzw. 0 <sup>2</sup> ), 1, 2, 7	0 (bzw. 7 <sup>2</sup> ), 2, 3, 0
3	7 (bzw. 0 <sup>2</sup> ), 2, 1, 7	0 (bzw. 7 <sup>2</sup> ), 3, 2, 0

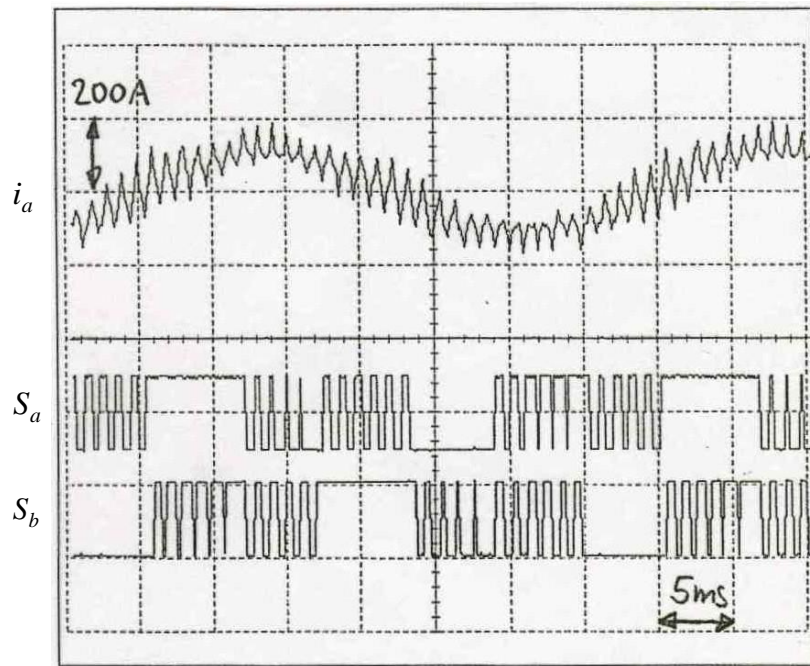
<sup>1</sup> jeweils alternierend

<sup>2</sup> Bei einem Sektorwechsel würde der zuletzt anstehende Nullspannungsvektor durch den neu vorgegebenen ersetzt, ohne dass das eine Auswirkung auf die Motorspannung hätte. Diese überflüssige Umschaltung kann vermieden werden, wenn der zuletzt anstehende Nullspannungsvektor auch bei einem Sektorwechsel unverändert gelassen wird, bis der nächste aktive Vektor geschaltet wird. Erst danach wird in den Vektorfolgen der neue Nullspannungsvektor verwendet.

Der Typ 1 mit hälftig verteilten und alternierenden Nullvektoren entspricht im Ergebnis genau der Dreiecksmodulation mit Nullpunktverschiebung und Anwendung des Regular-Sampling-Prinzips (s. folgendes Bild).



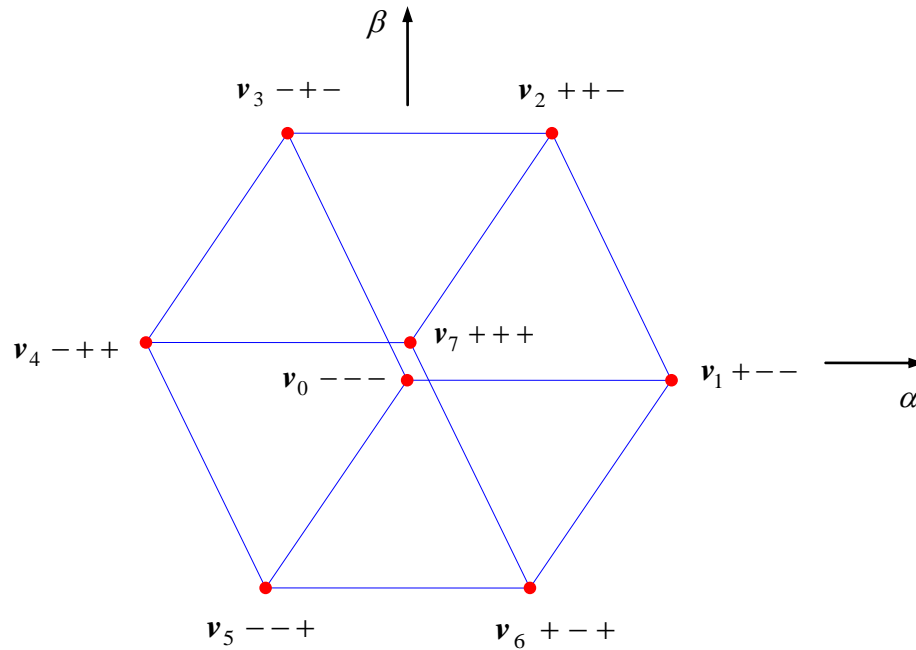
**Fig. 4-14:** Pulsmuster der Vektormodulation nach Typ 1; Alternierendes Pulsmuster, entspricht der Dreiecksmodulation (von den drei Schaltbefehlen sind nur zwei dargestellt)



**Fig. 4-15:** Pulsmuster der Vektormodulation nach Typ 2  
(von den drei Schaltbefehlen sind nur zwei dargestellt)

Bei der Umschaltung von einem elementaren Vektor zu einem anderen sind Umschaltungen von ein, zwei, ggf. auch von drei Strängen notwendig. Die resultierende Schaltfrequenz eines Stranges ist daher nicht unmittelbar die Frequenz, mit der die Vektoren umgeschaltet werden.

Das folgende Diagramm zeigt die Transitionen zwischen Zuständen der elementaren Vektoren. Zwei Zustände sind genau dann durch eine Linie verbunden, wenn die Transition durch die Umschaltung nur eines Stranges möglich ist. Die beiden möglichen Schaltzustände des Nullvektors wurden nicht genau aufeinander liegend dargestellt.



**Fig. 4-16:** Transitionsdiagramm für die elementaren Schaltzustände

Mit Hilfe dieses Transitionsdiagramms ist es einfach, die Zahl der tatsächlichen Umschaltungen der Umrichterstränge zu ermitteln. Der oben skizzierte Typ 1 schaltet beispielsweise in jedem Abtastintervall jeden Strang genau einmal, es gibt also insgesamt 3 Umschaltungen. Bei den Typen 2 und 3 treten hingegen insgesamt 4 Umschaltungen je Intervall auf. Allerdings fallen hierbei einzelne Umschaltungen weg, wenn der Sollvektor von einem Intervall zum nächsten den Sektor wechselt. Sei

$$f_a = \frac{1}{T_a}$$

die Abtastfrequenz und  $f_1$  die Grundfrequenz des zu modulierenden Signals, ergeben je nach Typ folgende Schaltfrequenzen der Umrichterstränge:

Typ der Vektormodulation	Schaltfrequenz eines Strangs
1	$f_s = \frac{1}{2} f_a$
2	$f_s = \frac{2}{3} f_a - f_1$
3	$f_s = \frac{2}{3} f_a - f_1$

#### 4.4 Regular Sampling

Unter *Regular Sampling* versteht man zwei Aspekte im Zusammenspiel zwischen Regelung und Pulsweitenmodulation bzw. Vektormodulation:

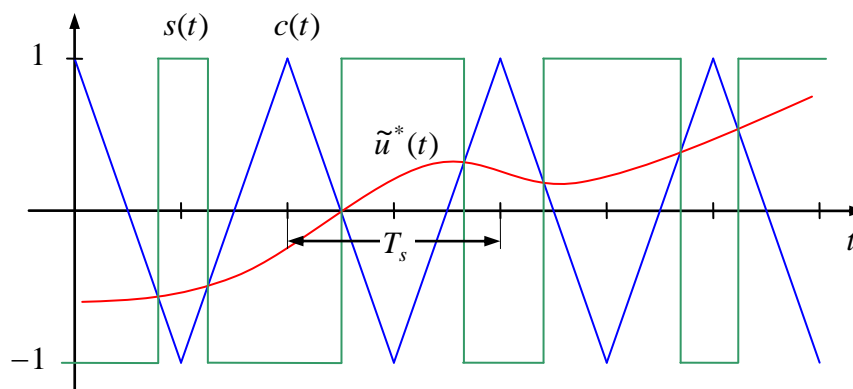
- die Synchronisation des Modulationsträgers mit einer *zeitdiskreten Vorgabe* der Sollspannungen (dies ist bei der Vektormodulation automatisch gegeben)
- die Synchronisation *zeitdiskreter Messwertabtastungen* mit dem Modulationsträger

**Zum ersten Aspekt:** Antriebsregelungen werden heute bis auf wenige Ausnahmen nicht mehr in analoger Schaltungstechnik aufgebaut, welche *zeitkontinuierlich* arbeitet, sondern mit Hilfe von Mikrocontrollern oder Signalprozessoren. Die Regelung arbeitet in Form von rekursiven Regelgesetzen *abtastend* oder *zeitdiskret*, neue Sollwerte werden nur in einem bestimmten Zeittakt bereitgestellt. Da die Regelung nur über den schaltenden Umrichter Einfluss auf den Motor nehmen kann, ist es im Übrigen nicht sinnvoll bzw. nicht ökonomisch, den Regelungszyklus öfter zu durchlaufen, als der Umrichter schalten kann oder soll. Die Abtastzeit  $T_a$  wird daher mit der Schaltperiode  $T_s$  synchronisiert, wobei je nach Ausführung die beiden Varianten

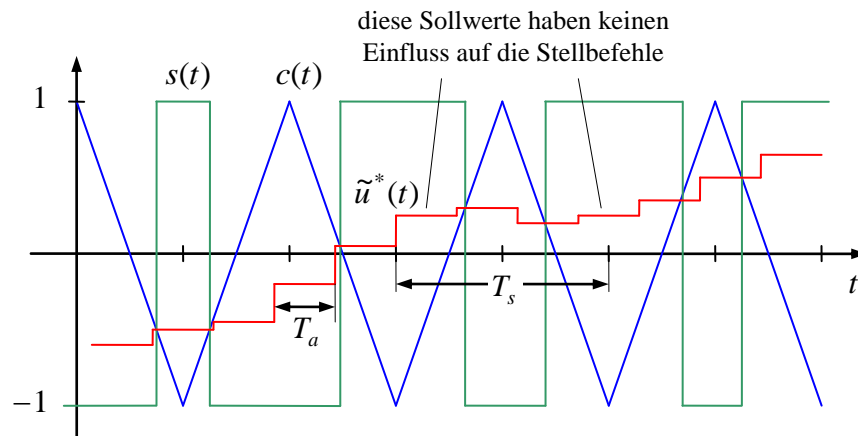
(4.16)

$$T_a = T_s \quad \text{oder} \quad T_a = \frac{1}{2} T_s$$

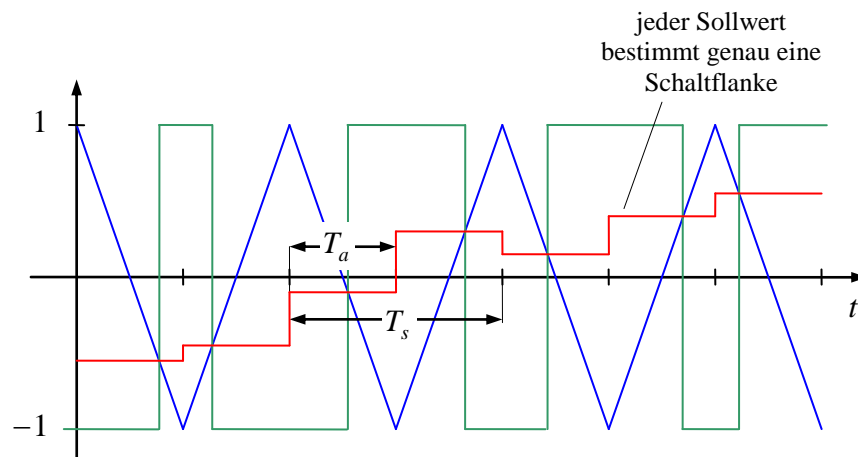
zur Anwendung gelangen können. (s. nachfolgende Bilder). Die Gedanken werden im Folgenden vereinfacht für eine Pulsweitenmodulation an einem Strang entwickelt. Für drei Stränge gelten die Ergebnisse entsprechend.



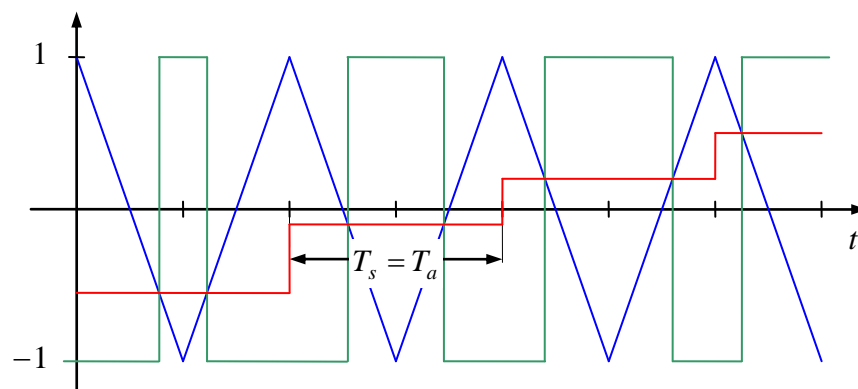
**Fig. 4-17:** Pulsweitenmodulation mit zeitkontinuierlichem Sollwert (bewusst ist kein sinusförmiger, sondern ein beliebiger transients Vorgang dargestellt)



**Fig. 4-18:** Pulsweitenmodulation mit zeitdiskreten, nicht synchronisierten Sollwerten

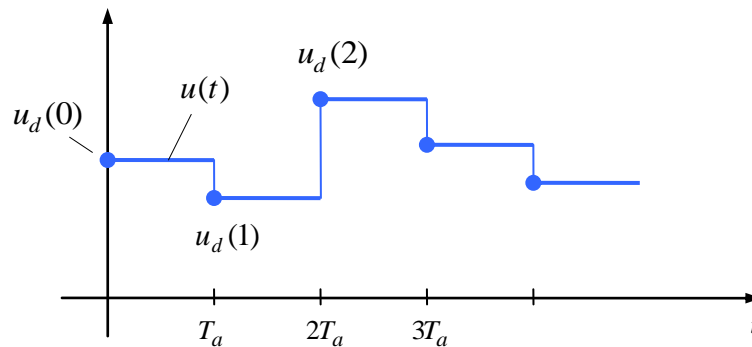


**Fig. 4-19:** Pulsweitenmodulation mit synchronisierten Sollwerten (Regular Sampling) mit  $T_a = T_s / 2$



**Fig. 4-20:** Pulsweitenmodulation mit synchronisierten Sollwerten (Regular Sampling) mit  $T_a = T_s$

Die zeitdiskrete Sollwertvorgabe führt aber zu einer Verzögerung im System, was nun untersucht werden soll:



**Fig. 4-21:** Zeitdiskrete Sollwertvorgabe

Die zeitdiskreten Sollwerte seien  $u_d(k)$ , der zeitkontinuierliche Verlauf  $u(t)$  wird durch Summen zeitverschobener Sprungfunktionen  $\sigma(t - t_0)$  gebildet:

$$u(t) = \sum_k u_d(k) [\sigma(t - kT_a) - \sigma(t - (k+1)T_a)] \quad (4.17)$$

Übergang in den Laplace-Bereich:

$$U(s) = L(u)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{st} dt$$

$$U(s) = \sum_k u_d(k) \frac{1}{s} [e^{-skT_a} - e^{-s(k+1)T_a}] = \sum_k u_d(k) e^{-skT_a} \frac{1}{s} [1 - e^{-sT_a}] \quad (4.18)$$

Die Reihe

$$\sum_k u_d(k) e^{-skT_a} \quad (4.19)$$

ist die  $z$ -Transformierte (oder *Laurent*-Transformierte) der Folge  $u_d(k)$  an der Stelle  $z = e^{sT_a}$ :

$$U_d(z) = \sum_k u_d(k) z^{-k} \quad (4.20)$$

Der Term

$$H(s) = \frac{1}{sT_a} [1 - e^{-sT_a}] \quad (4.21)$$

kann gedanklich als Übertragungsfunktion eines Abtast-Halte-Vorganges aufgefasst werden (obwohl kein zeitkontinuierlicher Sollwert existiert, der abgetastet werden könnte, da der zeitdiskrete Sollwert unmittelbar von einem zeitdiskreten Regler bestimmt wird).

Also:

$$U(s) = T_a H(s) U_d(e^{sT_a}) \quad (4.22)$$

Um den Einfluss auf Amplitude und Phase besser erkennen zu können, kann  $H(j\omega)$  in der Form

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T_a} [1 - e^{-j\omega T_a}] = \frac{1}{j\omega T_a} [e^{j\omega T_a/2} - e^{-j\omega T_a/2}] e^{-j\omega T_a/2} \\ &= \frac{2}{j\omega T_a} \sin\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) e^{-j\omega T_a/2} = \text{Si}\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) e^{-j\omega T_a/2} \end{aligned}$$

bzw.

$$H(j\omega) = \text{Si}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_a}\right) e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_a}} \quad (4.23)$$

mit

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \quad (4.24)$$

Häufig verwendet man Approximationen von  $H(s)$ :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{sT_a} [1 - e^{-sT_a}] = e^{-sT_a/2} \frac{1}{sT_a} [e^{sT_a/2} - e^{-sT_a/2}] \\ &= e^{-sT_a/2} \frac{1}{sT_a} \left[ 1 + \frac{sT_a}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{sT_a}{2}\right)^2 - 1 + \frac{sT_a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{sT_a}{2}\right)^2 + O_3(s) \right] \\ &= e^{-sT_a/2} (1 + O_2(s)) \approx e^{-sT_a/2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$O_n(s)$  bezeichne die Restterme von  $n$ -ter und höherer Ordnung in  $s$ . Das Ergebnis bedeutet, dass  $H(s)$  durch ein Totzeitglied ( $T_t$ -Glieder) mit der Totzeit  $T_a/2$  genähert werden kann, wobei Terme 2. und höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Die Padé-Approximation 1. Ordnung für die Exponentialfunktion

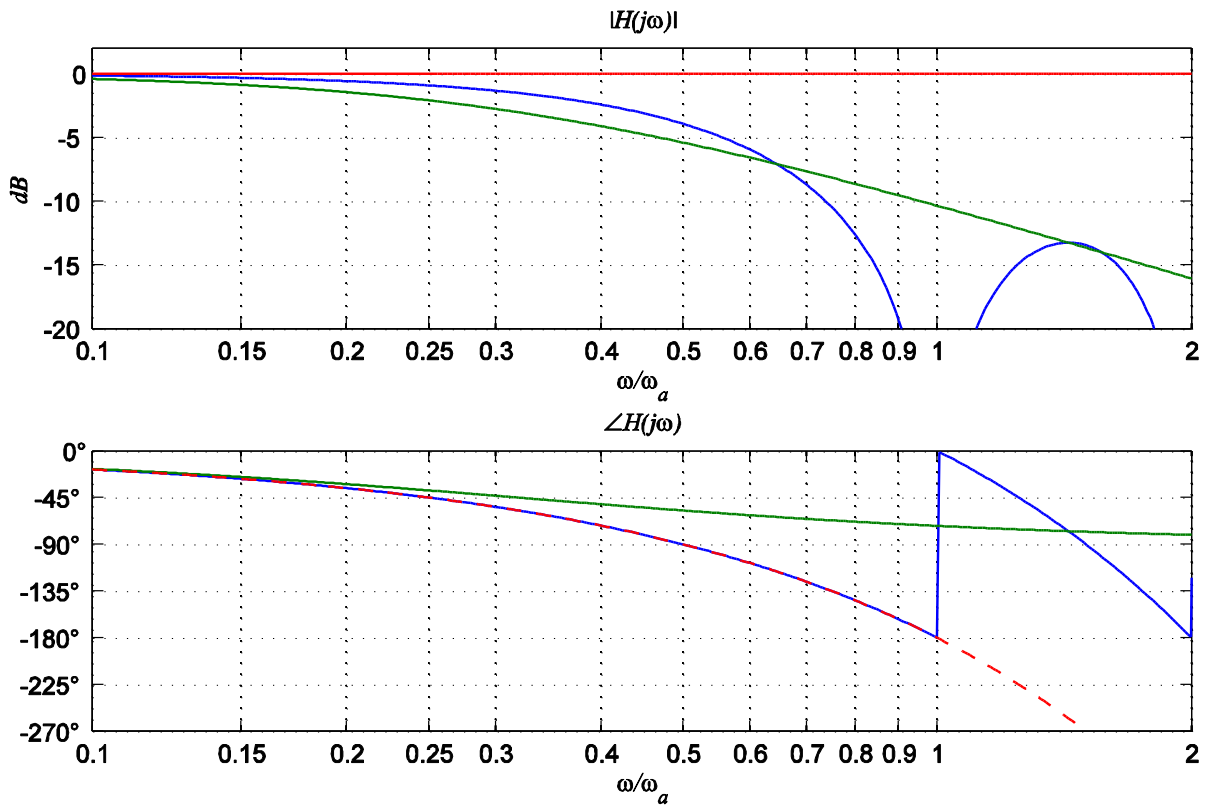
$$e^{-sT_a} \approx \frac{1 - sT_a/2}{1 + sT_a/2} \quad (4.26)$$

liefert als alternative Näherung für  $H(s)$

$$H(s) \approx \frac{1}{sT_a} \left[ 1 - \frac{1 - sT_a/2}{1 + sT_a/2} \right] = \frac{1}{sT_a} \left[ \frac{1 + sT_a/2 - 1 + sT_a/2}{1 + sT_a/2} \right] = \frac{1}{1 + sT_a/2}$$

Hierbei wird  $H(s)$  demnach durch ein  $T_1$ -Glied (Verzögerungsglied 1. Ordnung) mit der Zeitkonstante  $T_a/2$  angenähert.

Die zeitdiskrete Sollwertvorgabe kann also näherungsweise entweder durch ein Totzeitglied oder mit einem Verzögerungsglied angenähert werden, wobei in beiden Fällen als maßgebliche Konstante  $T_a/2$  auftritt.



**Fig. 4-22:** Frequenzkennlinien des Abtast-Halte-Vorgangs und seiner Näherungen

- blau:**  $H(j\omega)$  ohne Näherung
- grün:** Näherung durch  $T_1$ -Glied mit  $T_a/2$  als Zeitkonstante
- rot:** Näherung durch  $T_t$ -Glied mit  $T_a/2$  als Totzeit



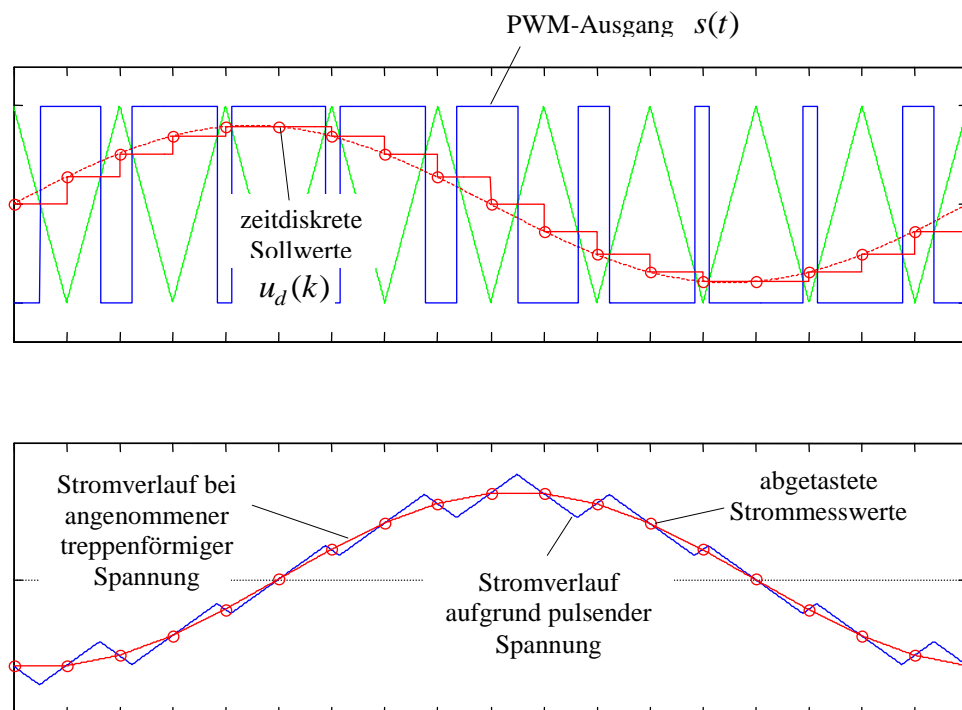
Wie man aus den Frequenzkennlinien erkennt, bilden beide Näherungen das tatsächliche Verhalten des Abtast-Halte-Vorganges unterschiedlich nach.

Die Näherung durch ein Totzeitglied gibt immerhin das Verhalten der Phase (zumindest für Frequenzen unterhalb der zweifachen Nyquistfrequenz  $\omega/\omega_a < 1$ ) exakt wieder. Im Bereich  $\omega/\omega_a < 0,44$  bleibt der Amplitudenfehler kleiner als +3dB.

Der brauchbare Bereich der  $T_1$ -Näherung wird eher durch den Phasenfehler bestimmt, der bis  $\omega/\omega_a < 0,29$  kleiner als  $10^\circ$  ist. In diesem Bereich ist der Amplitudenfehler kleiner als 1,4dB.

### Zum zweiten Aspekt des Regular-Sampling-Verfahrens, der Messwertabtastung:

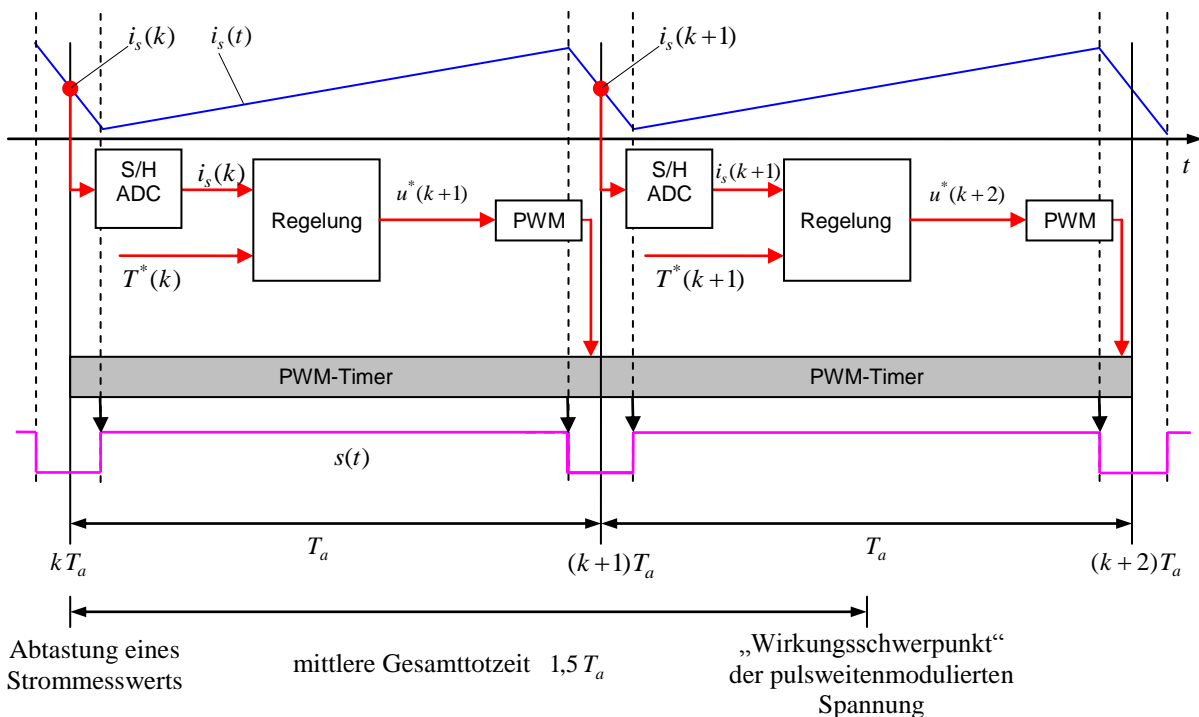
Nimmt man vereinfachend eine rein induktive Last mit konstanter Gegenspannung an, so führt eine mit dem PWM-Träger synchronisierte Stromabtastung dazu, dass die abgetasteten Stromwerte gerade die zeitlich lokalen Strommittelwerte repräsentieren. Die durch die Pulsung verursachte Stromschwankung (engl. *ripple*) wird geschickt durch die Abtastung ausgeblendet, ohne dass eine analoge Filterung notwendig wäre. Ein analoges Vorfilter würde in Gegenteil dazu führen, dass diese Stromabtastmethode nicht mehr wie beabsichtigt funktioniert. Zwar würden die pulsfrequenten Anteile geglättet, doch wird durch ein Vorfilter auch ein der Phasenverzug der Grundschwingung verursacht, was zu Fehlern im Regelkreis führt.



**Fig. 4-23:** Zur Stromabtastung mit dem Regular-Sampling-Verfahren

## 4.5 Totzeit des digitalen Regelkreises

Wird die Regelung auf einem Mikrocontroller oder Mikroprozessor realisiert, benötigt dieser zur Bearbeitung des Regelungsalgorithmus eine gewisse Zeit. Ein Messwert kann sich daher erst nach dieser Zeit auf den neuen Spannungssollwert auswirken. Zweckmäßigerweise synchronisiert man alle diese Abläufe mit dem durch die Pulsweitenmodulation oder Vektormodulation vorgegebenen Takt. Auf diese Weise entsteht durch die digitale Regelung eine Totzeit von einem Abtastschritt. Zusammen mit der zeitdiskreten Sollwertvorgabe für die PWM (Abschnitt 4.4) resultiert dies in einer Gesamtzeit von 1,5 Abtastschritten des Regelkreises.



**Fig. 4-24:** Ablaufdiagramm von Messwertabtastung, Regelungsalgorithmus und PWM

Bei schwankender Eingangsgleichspannung verursacht die Totzeit der zeitdiskreten Arbeitsweise ein weiteres Problem. Sowohl für die Vektormodulation als auch für die Dreiecksmodulation muss der Spannungssollwert  $u^*$  zunächst auf die Eingangsspannung  $u_{dc}$  bezogen werden. Dazu wird der Wert der Gleichspannung verwendet, der zum Zeitpunkt der Bereitstellung des Spannungssollwerts bekannt ist. Wenn die Eingangsspannung synchron zusammen mit den Strommesswerten abgetastet wurde, ist das also der Spannungswert des zurückliegenden Abtastzeitpunktes:

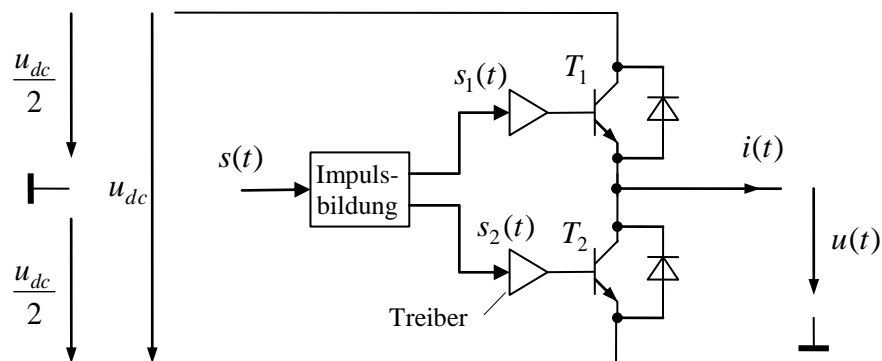
$$\tilde{u}_d^*(k) = \frac{u_d^*(k)}{u_{dc}(k-1)/2} \quad (4.27)$$

---

Dieser normierte Spannungswert wird aber erst im folgenden Abtastintervall in eine entsprechende Pulsfolge umgesetzt. Ändert sich die Eingangsspannung bis dahin nicht oder nur langsam, stellt dies kein Problem dar. Bei einer stark schwankenden Eingangsspannung hingegen wird ein entsprechender Spannungsfehler bei der Pulsweitenmodulation verursacht.

## 4.6 Spannungsfehler aufgrund von Wechselsperrzeiten

Die beiden Transistoren eines Umrichterstranges werden zur Realisierung des schaltenden Verhaltens im Prinzip komplementär angesteuert. Zur Vermeidung von Kurzschlüssen aufgrund von Totzeiten in der Ansteuerung, den Treibern sowie zur Sicherstellung eines geordneten Kommutierungsvorganges wird zunächst der bislang leitende Transistor gesperrt und der komplementäre Transistor erst nach Ablauf einer *Wechselsperrzeit* oder *Schutzzeit* (*interlocking time*)  $t_0$  angesteuert. Der Zeitpunkt der tatsächlichen Stromkommutierung hängt davon ab, ob der Strom von einem Transistor in eine Diode kommutiert oder umgekehrt. Die Vorgänge sind in den folgenden Bildern dargestellt.



**Fig. 4-25:** Impulsbildung und Treiber

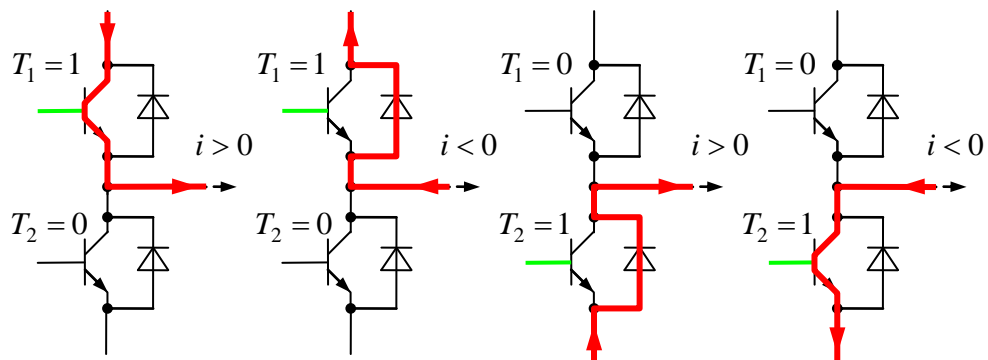
Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Transistorzustände

$T_1$	$T_2$	$u$	
1	0	$+u_{dc}/2$	
0	1	$-u_{dc}/2$	
0	0	$-u_{dc}/2 \operatorname{sgn}(i)$ <sup>1</sup>	gesperrter Zweig <sup>2</sup>
1	1		Zweigkurzschluss <sup>3</sup>

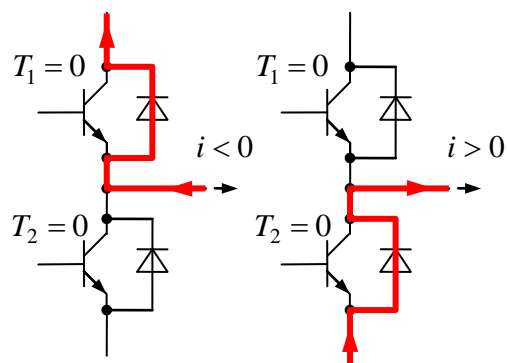
<sup>1</sup> Solange der Strom fließt, bestimmt er über die dann leitende Diode die Ausgangsspannung. Erlischt der Strom, sperren also beide Dioden, wird die Ausgangsspannung nicht mehr vom Umrichter, sondern allein von der Gegenspannung der angeschlossenen Last bestimmt.

<sup>2</sup> Der gesperrte Zustand ist im Allgemeinen auch derjenige, aus dem heraus der Aufrüstvorgang beginnt, und auf den beim Stillsetzen bzw. im Störfall zurück geschaltet wird.

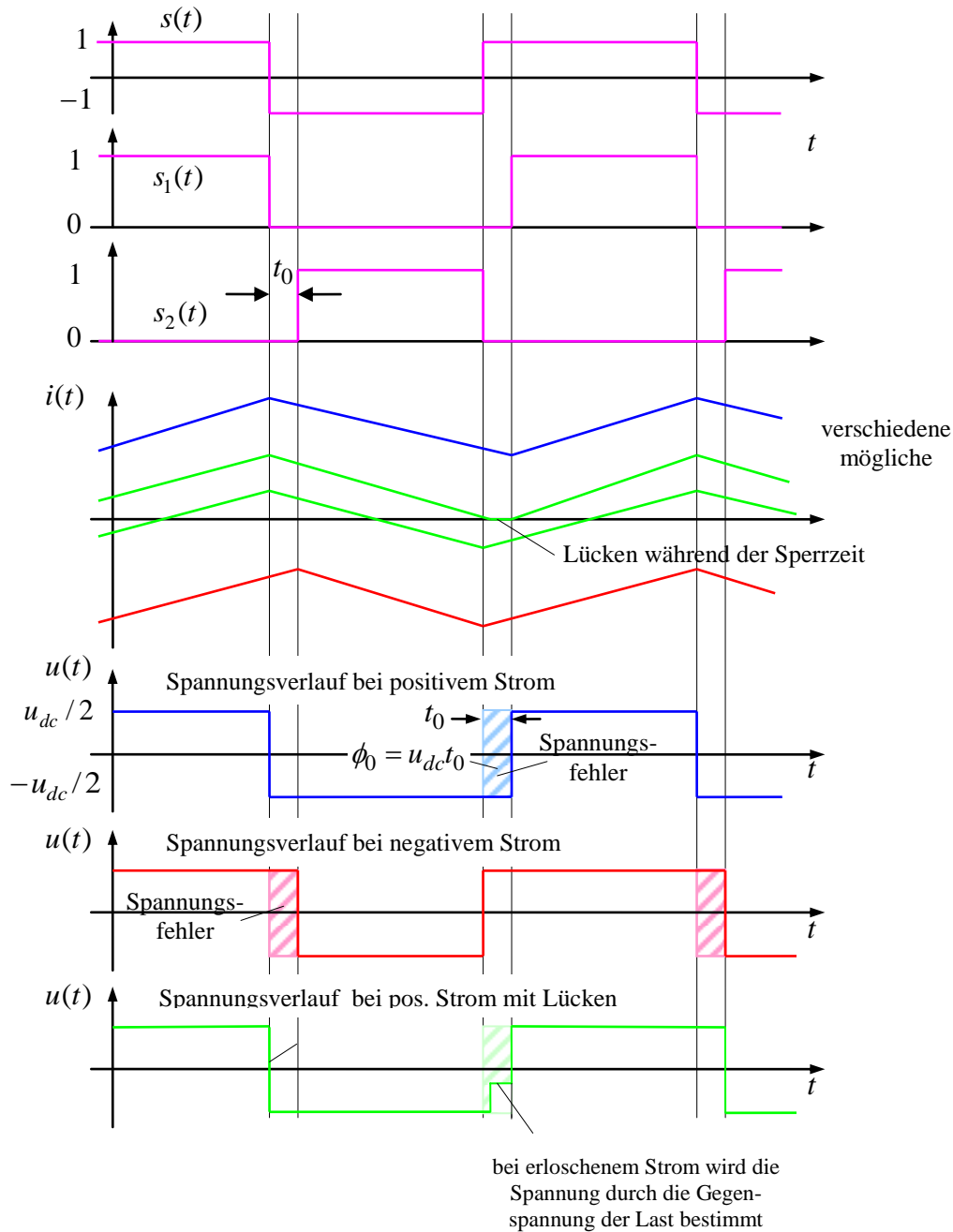
<sup>3</sup> Der Kurzschluss führt in aller Regel zur Zerstörung der Transistoren, wenn nicht in Folge sogar des gesamten Geräts. Dieser muss unter allen Umständen vermieden werden.



**Fig. 4-26:** Strompfade in Abhängigkeit des Schaltzustands und der Stromrichtung bei angesteuerten Transistoren



**Fig. 4-27:** Strompfade in Abhängigkeit der Stromrichtung bei gesperrten Transistoren



**Fig. 4-28:** Abläufe aufgrund der Wechselsperrzeit

Durch die Wechselsperrzeit wird ein Fehler im Mittelwert der Ausgangsspannung verursacht. Der Fehler wirkt dem fließenden Strom stets entgegen (wie eine zusätzliche Last). Sofern das Vorzeichen des Stroms während der Pulsperiode nicht wechselt, gilt in der Mittelwertbetrachtung – bei ansonsten ideal angenommener Kommutierung:

$$\Delta u = \bar{u} - s^* u_{dc} = -\text{sign}(i) \frac{t_0}{T_s} u_{dc} = -\text{sign}(i) t_0 f_s u_{dc} \quad (4.28)$$

Hierbei wird angenommen, dass sich die Gleichspannung  $\Delta u_{dc}$  während einer Pulsperiode nicht wesentlich verändert. Wechselt der Strom innerhalb einer Schaltperiode das Vorzeichen, ist die Fehlergleichung nicht mehr gültig. Ist der Strom nahe Null, kann der Strom während der Wechselperrzeit sogar lücken auftreten. Es sei darauf hingewiesen, dass auch diese Betrachtung nur eine Näherung darstellt, da die Kommutierungen in den einzelnen Transistoren und Dioden weiterhin idealisiert angenommen wurden.

Typische Werte:

Ventil	$f_s$	$t_0$
GTO-Thyristor	200-500 Hz	15–30 $\mu$ s
IGBT	5-15 kHz	2–5 $\mu$ s
MOSFET	20-1000 kHz	$\leq 1 \mu$ s

Daraus resultierende typische Werte des Spannungsfehlers liegen in der Größenordnung von rund 10% oder mehr! Eine Kompensation dieses Fehlers scheint auf den ersten Blick einfach, ist jedoch gerade im Bereich kleiner Ströme, wenn sich also der Strommittelwert in der Größe seiner Schwankungsbreite bewegt, schwierig, da die Vorhersage des Stromnulldurchgangs bzw. des Stromlückens nur mit mäßiger Genauigkeit gelingt.

Die Spannungsfehler wirken in jedem der drei beteiligten Stränge:

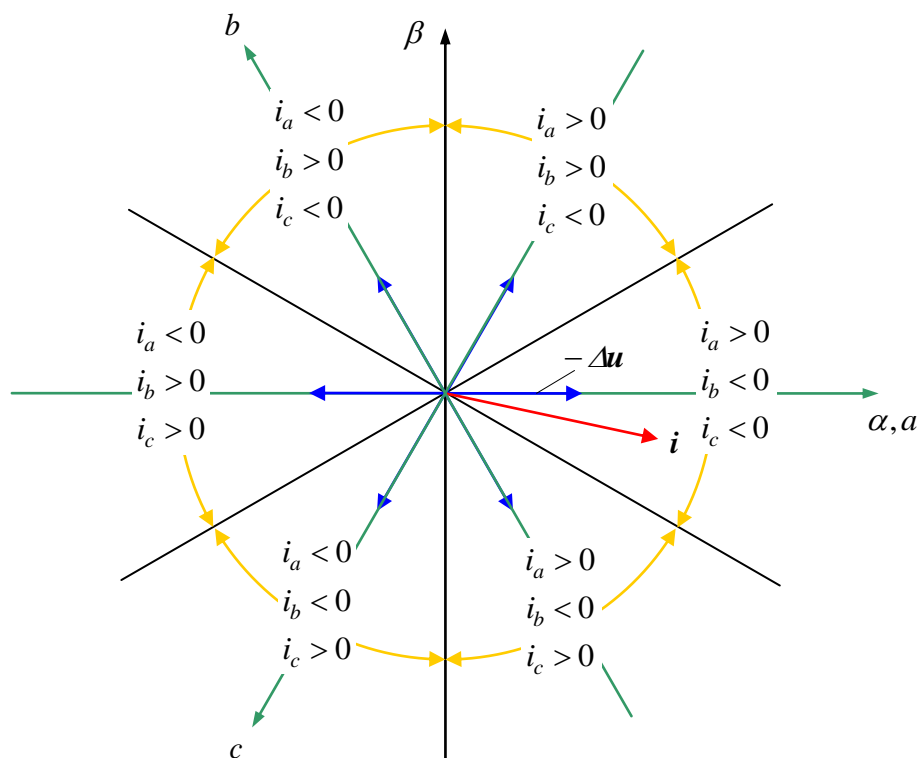
$$\Delta u_{a,b,c} = -\text{sign}(i_{a,b,c}) t_0 f_s u_{dc} \quad (4.29)$$

Aufgrund der Sternpunktschaltung haben stets zwei Ströme unterschiedliches Vorzeichen. Die Transformation der Spannungsfehler der einzelnen drei Stränge in die orthogonale Zeigerdarstellung ergibt einen Fehlspannungsvektor  $\Delta \mathbf{u}$ , dessen Betrag sich über die Transformation  $\mathbf{T}_{23}$  zu

$$|\Delta \mathbf{u}| = \frac{4}{3} \Delta u = \frac{4}{3} t_0 f_s u_{dc} \quad (4.30)$$

ergibt. Die Richtung des Spannungsfehlers bestimmt sich aus den Stromvorzeichen bzw. dem Sektor, in welchem der Stromvektor liegt (s. Bild). Näherungsweise lässt sich der Spannungsfehler in der Gegenrichtung zum Stromvektor ansetzen:

$$\Delta \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{i}|} \frac{4}{3} t_0 f_s u_{dc} \quad (4.31)$$



**Fig. 4-29:** Der Spannungsfehler kann durch eine Aufschaltung auf den Sollwert der PWM kompensiert werden,

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{i}|} \frac{4}{3} t_0 f_s u_{dc} \quad (4.32)$$

Es empfiehlt sich jedoch bei kleinen Strömen, bei denen aufgrund der Stromschwankungsbreite die Richtung der Fehlerrückwirkung unsicher ist, diese Kompensation in Abhängigkeit der Stromamplitude langsam auszublenden.



## 4.7 Dynamische Mittelwertmodellierung des pulsweitenmodulierten Umrichters

Für die Momentanwerte gilt:

$$u_{a,b,c}(t) = \frac{1}{2} s_{a,b,c}(t) u_{dc}(t) \quad (4.33)$$

$$i_{dc}(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} s_k(t) i_k(t) \quad (4.34)$$

Mittelwertbildung über jeweils eine Pulsperiode:

$$\bar{u}_{a,b,c}(t) = \frac{1}{2} \bar{s}_{a,b,c}(t) u_{dc}(t) = \frac{1}{2} s_{a,b,c}^*(t) u_{dc}(t) \quad (4.35)$$

$$\bar{i}_{dc}(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} \bar{s}_k(t) i_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} s_k^*(t) i_k(t) \quad (4.36)$$

Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass sich die Gleichspannung  $u_{dc}(t)$  bzw. die Motorströme  $i_{a,b,c}(t)$  während einer Pulsperiode nicht oder nur vernachlässigbar langsam ändern.

Mittelwertmodell in  $\alpha/\beta$ -Koordinaten:

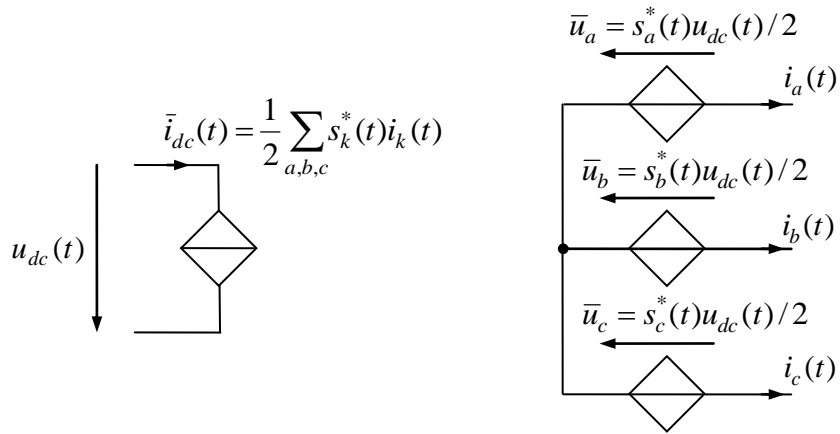
$$\bar{u}_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2} s_{\alpha,\beta}^*(t) u_{dc}(t) \quad (4.37)$$

$$\bar{i}_{dc}(t) = \frac{3}{4} \left( s_{\alpha}^*(t) i_{\alpha}(t) + s_{\beta}^*(t) i_{\beta}(t) \right) \quad (4.38)$$

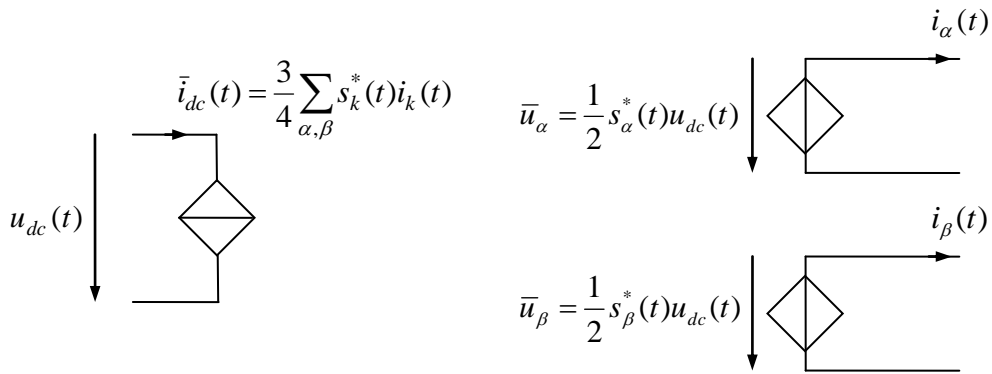
Mittelwertmodell in  $d/q$ -Koordinaten:

$$\bar{u}_{d,q}(t) = \frac{1}{2} s_{d,q}^*(t) u_{dc}(t) \quad (4.39)$$

$$\bar{i}_{dc}(t) = \frac{3}{4} \left( s_d^*(t) i_d(t) + s_q^*(t) i_q(t) \right) \quad (4.40)$$



**Fig. 4-30:** Ersatzschaltbild für Mittelwertmodellierung



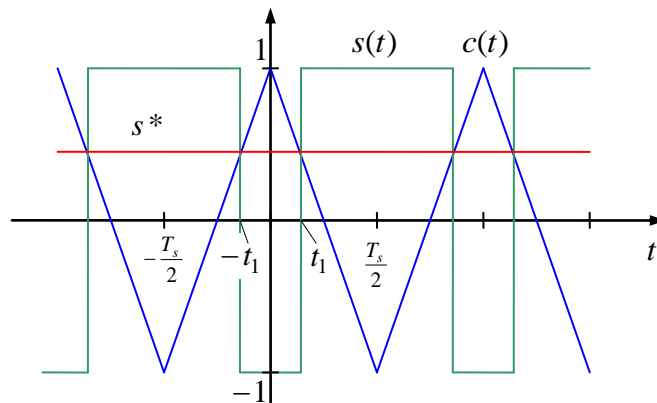
**Fig. 4-31:** Ersatzschaltbild für Mittelwertmodellierung in orthogonalen Koordinaten

## 4.8 Oberschwingungen

### 4.8.1 Oberschwingungen bei konstantem Sollwert

Harmonische der Schaltfunktion  $s(t)$  bei konstantem Sollwert: Aufgrund des Funktionsprinzips der Pulsweitenmodulation ist implizit sichergestellt, dass der Sollwert gleich dem Mittelwert der generierten Schaltfunktion ist:

$$\bar{s} = s^*$$



**Fig. 4-32:** Pulsweitenmodulation mit zeitkontinuierlichem Sollwert

Daneben verursacht die schaltende Arbeitsweise aber Harmonische. Es treten die Pulsfrequenz  $f_s$  bzw.  $\omega_s = 2\pi f_s$  und deren Vielfache auf. Die komplexen Fourierkoeffizienten der Harmonischen  $k\omega_s$  sind für  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 S(k\omega_s) &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} e^{-jk\omega_s t} s(t) dt \\
 &= \frac{1}{T_s} \left( \int_{-T_s/2}^{-t_1} e^{-jk\omega_s t} dt - \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jk\omega_s t} dt + \int_{t_1}^{T_s/2} e^{-jk\omega_s t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{T_s} \left( \int_{-T_s/2}^{T_s/2} e^{-jk\omega_s t} dt - 2 \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jk\omega_s t} dt \right) \tag{4.41} \\
 &= -\frac{2}{T_s} \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{2}{T_s jk\omega_s} (e^{-jk\omega_s t_1} - e^{+jk\omega_s t_1}) \\
 &= -\frac{2}{\pi k} \sin k\omega_s t_1 = -\frac{2}{\pi k} \sin 2\pi k f_s t_1
 \end{aligned}$$

Mit

$$t_1 = \frac{T_s}{4}(1 - s^*) \quad (4.42)$$

folgt weiter

$$S(k\omega_s) = -\frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1 - s^*)\right) \quad (4.43)$$

Der Fourierkoeffizient für die Frequenz Null ist der schon bekannte Mittelwert:

$$S(0) = \bar{s} = s^*$$

Die Zeitfunktion ergibt sich über die Fourier-Reihe

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\omega_s) e^{jk\omega_s t} = -\frac{2}{\pi k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1 - s^*)\right) e^{jk\omega_s t} \quad (4.44)$$

Da

$$S(k\omega_s) = S(-k\omega_s) \quad (4.45)$$

kann man auch schreiben

$$s(t) = S(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} S(k\omega_s) \cos k\omega_s t = s^* - \frac{4}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1 - s^*)\right) \cos k\omega_s t \quad (4.46)$$

Weitere mögliche Darstellung:

$$\begin{aligned} s(t) &= s^* - \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k(1 - s^*)) \cos(2k\omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\pi \frac{2k+1}{2}(1 - s^*)\right) \cos((2k+1)k\omega_s t) \\ &= s^* + \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\pi k s^*) \cos(2k\omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)s^*\right) \cos((2k+1)k\omega_s t) \end{aligned}$$

Näherung für kleine  $s^*$

$$s(t) \approx s^* + 2s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(2k\omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)k\omega_s t) \quad (4.47)$$

Das heißt, die ungradzahligen Vielfachen der Schaltfrequenz hängen in 1. Näherung nicht von dem Sollwert  $s^*$  ab; sie sind näherungsweise konstant, während die gradzahligen Vielfachen proportional mit dem Sollwert wachsen.

Die Harmonischen der Spannung ergeben sich aus denen der Schaltfunktion über

$$U(k\omega_s) = \frac{U_{dc}}{2} S(k\omega_s) \quad (4.48)$$

wobei aber die Eingangsgleichspannung als konstant angenommen werden muss. Besitzt die  $u_{dc}(t)$  jedoch selbst harmonische Anteile, ergibt sich die Ausgangsspannung über die Faltungsoption

$$U(k\omega_s) = \frac{1}{2} (U_{dc} * S)(k\omega_s) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U(k\omega_s - l\omega_s) S(l\omega_s) \quad (4.49)$$

Oftmals interessieren nicht unmittelbar die Harmonischen der Spannung, sondern die des Stroms. An einer induktiven Last  $L$  bestimmen sich diese (bei konstanter Eingangsgleichspannung) nach

$$I(k\omega_s) = \frac{U(k\omega_s)}{jk\omega_s L} = \frac{U_{dc}}{2L} \frac{j}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-s^*)\right) \quad (4.50)$$

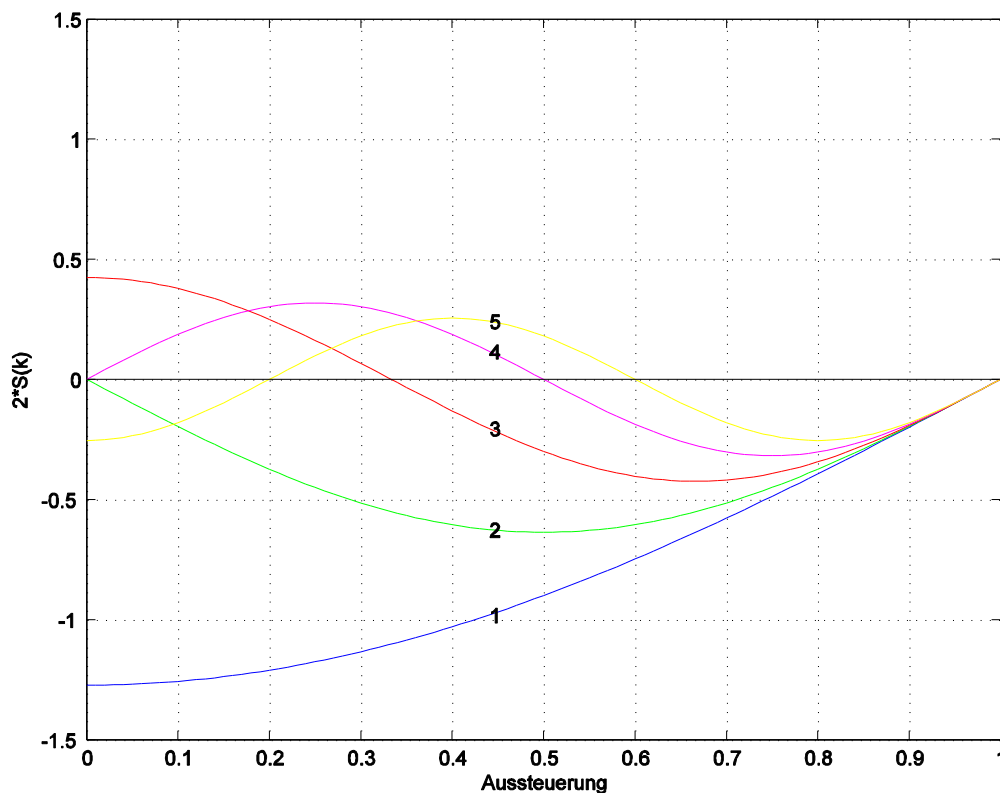


Fig. 4-33: Harmonische bei der Dreiecksmodulation

Die Harmonischen des Eingangsgleichstroms

$$i_{dc}(t) = s(t)i(t)$$

werden exakt über die Faltung bestimmt:

$$\begin{aligned}
 I_{dc}(k\omega_s) &= (I * S)(k\omega_s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S(k\omega_s - l\omega_s) I(l\omega_s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S(k\omega_s - l\omega_s) \frac{U(l\omega_s)}{jl\omega_s L} \\
 &= \frac{U_{dc}}{2jL} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l\omega_s} S(k\omega_s - l\omega_s) S(l\omega_s)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Als Abschätzung mag es ausreichen, den Ausgangsstrom

$$i(t) \approx I_0 \tag{4.52}$$

als näherungsweise konstant anzunehmen. Dann ergibt sich als Spektrum des Eingangsstroms ebenso wie die Ausgangsspannung unmittelbar aus dem Spektrum der Schaltfunktion

$$I_{dc}(k\omega_s) = I_0 S(k\omega_s) \tag{4.53}$$

#### 4.8.2 Oberschwingungen bei sinusförmigem Sollwert

Annahme eines stationären Zustands, Modulation mit Amplitude  $A$  und Grundfrequenz  $f_1$ :

$$s^*(t) = A \cos \omega_1 t = A \cos 2\pi f_1 t = \frac{A}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \tag{4.54}$$

Ist die Zahl der Pulse je Grundschwingungsperiode

$$n_p = \frac{\omega_s}{\omega_1} = \frac{f_s}{f_1} = \frac{T_1}{T_s} \tag{4.55}$$

ganzzahlig, spricht man von *synchronisierter Pulsung*. Die Pulsfrequenz ist in diesem Fall ein Vielfaches der Grundfrequenz. Im Spektrum treten demnach nur Vielfache dieser Grundfrequenz auf.

Es sei jedoch zunächst angenommen, dass die Frequenzen in keinem rationalen Verhältnis stehen. Dann ist die Pulsfolge nicht periodisch in einer Periode der Grundschwingung. Die Fourierkoeffizienten werden über eine genügend lange Mittelungsdauer bestimmt:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} s(t) dt \tag{4.56}$$

Fourierkoeffizienten der Vielfachen der Grundschwingung:

$$\begin{aligned}
 S(k\omega_1) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jk\omega_1 t} s(t) dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_1 t} s(t + mT_1) dt \\
 &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_1 t} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} s(t + mT_1) dt
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Die Mittelung der Schaltfunktion  $s(t)$  über viele Perioden ergibt somit genau den Sollwert der Pulsweitenmodulation:

$$s^*(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} s(t + mT_1) \tag{4.58}$$

Es folgt also

$$S(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_1 t} s^*(t) dt = S^*(k\omega_1) \tag{4.59}$$

Die Fourierkoeffizienten für die Vielfachen der Grundfrequenz sind also unmittelbar die Fourierkoeffizienten des Sollwerts der Pulsweitenmodulation. Die Pulsweitenmodulation wirkt sich also hierauf gar nicht aus! Ist der Sollwert wie oben angenommen ein rein sinusförmiges Signal, tritt genau dieses in der Schaltfunktion auf; der Sollwert wird nach Amplitude und Phase exakt abgebildet:

$$S(\omega_1) = S(-\omega_1) = \frac{A}{2} \tag{4.60}$$

Dann sind die Koeffizienten für Vielfache der Grundschwingung Null:

$$S(k\omega_1) = 0 \text{ für } |k| \neq 1$$

Insbesondere ist keine Zeitverzögerung, wie sie manchmal fälschlicherweise der Pulsweitenmodulation zugeschrieben wird, erkennbar; diese müsste sich in einer Phasenverschiebung bemerkbar machen. Eine zeitliche Verzögerung entsteht allein durch die Anwendung der zeitdiskrete Sollwertvorgabe, s. Abschnitt 4.4, nicht jedoch durch die Pulsweitenmodulation selbst.

Bei der praktischen Überprüfung dieser Zusammenhänge darf die als im Grenzfall unendlich vorausgesetzte Mittelungsdauer nicht übersehen werden. Bei einer Beschränkung der Messdauer auf eine oder wenige Grundschwingungsperioden werden Vielfache der Grundschwingung zu messen sein.

Zusätzlich zu den Vielfachen der Grundfrequenz treten Intermodulationsprodukte zwischen Schalt- und Grundfrequenz auf. Als Ausgangspunkt diene die Fourierreihe der Schaltfunktion  $s(t)$  für konstantes  $s^*$ :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s^* + \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\pi k s^*) \cos(2k \omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) s^*\right) \cos((2k+1)k \omega_s t) \\
 &\approx s^* + 2s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(2k \omega_s t) - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)k \omega_s t)
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Mit

$$s^*(t) = A \cos \omega_1 t \tag{4.62}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A \cos \omega_1 t + \frac{2}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\pi k A \cos \omega_1 t) \cos(2k \omega_s t) \\
 &\quad - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) A \cos \omega_1 t\right) \cos((2k+1)k \omega_s t) \\
 &\approx A \cos \omega_1 t \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(2k \omega_s t) \right] - \frac{4}{\pi(2k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos((2k+1)k \omega_s t)
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

In erster Näherung treten also als Intermodulationsprodukte weiterhin die ungeradzahligen Vielfachen der Schaltfrequenz  $\omega_s$  bzw.  $f_s$  auf, die Geradzahligen werden jedoch um die Grundfrequenz verschoben. Es treten dann jeweils Seitenbänder um diese Frequenzen herum auf. Berücksichtigt man höhere Ordnung in der obigen Näherung, treten weitere Intermodulationsprodukte auf.



## 5 Regelung des Permanentmagnet-Synchronmotors in mitdrehenden Koordinaten

Bislang wurde das stationäre Verhalten des Motors untersucht. Es wurde aber offen gelassen, wie man dafür sorgt, dass sich ein gewünschter Betriebszustand einstellt. Dies ist Aufgabe der Regelung. Die Regelungsaufgabe kann eine Lage-, Geschwindigkeits-, oder Drehzahlregelung sein. Da sich Lage- und Geschwindigkeitsregelung weitgehend unabhängig vom konkreten Motor in kaskadierter Struktur auf einer Drehmomentregelung aufbauend entwerfen lassen, soll letztere im Blickpunkt stehen.

Das Drehmoment ist der drehmomentbildende Stromkomponente proportional. Ein Drehmoment-Sollwert  $T^*$  kann daher über

$$i_{sq}^* = \frac{2}{3p\psi_p} T^* \quad (5.1)$$

in einen Stromsollwert umgerechnet werden. Die Aufgabe der Drehmoment-Regelung wird daher in die Aufgabe der Regelung des Stroms überführt.

### 5.1 Stromregelung

Aufgabe der Stromregelung ist nun, die Komponenten der Motorspannung  $u_{sd}, u_{sq}$  stets so regulieren, dass sich die gewünschten Stromkomponenten  $i_{sd}, i_{sq}$  einstellen. Der Sollwert  $i_{sq}^*$  resultiert aus dem Drehmoment. Der Sollwert der  $d$ -Komponente wird ggf. nach den Erfordernissen der Flusschwächung eingestellt (vgl. Abschnitt 2.10). Zunächst soll der Spannungsstellbereich vorausgesetzt werden, so dass von

$$i_{sd}^* = 0 \quad (5.2)$$

ausgegangen werden kann. Der Stromrichter bedient sich für seine Aufgabe des Umrichters und seiner Pulsweitenmodulation als Spannungsstellglied. Die Reglerstellgrößen sind also Spannungssollwerte  $u_{sd}^*, u_{sq}^*$  für die Pulsweitenmodulation. Wir nehmen im Folgenden vereinfachend an, dass diese Sollwerte durch PWM und Umrichter fehlerfrei in Istwerte (im Sinne der dynamischen Mittelwertmodellierung) umgesetzt werden,

$$u_{sd} = u_{sd}^*, \quad u_{sq} = u_{sq}^* \quad (5.3)$$

Zunächst muss nun die Regelstrecke modelliert werden. Dazu wird zweckmäßigerweise die Darstellung mit Stromdifferentialgleichung im mitdrehenden Koordinatensystem verwendet (s. Abschnitt 2.2):

$$\begin{aligned} L_s \dot{i}_{sd} &= u_{sd} - R_s i_{sd} + \omega L_s i_{sq} \\ L_s \dot{i}_{sq} &= u_{sq} - R_s i_{sq} - \omega L_s i_{sd} - \omega \psi_p \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bezüglich der Regelungsaufgabe liegt also ein *verkoppeltes* System mit zwei Stellgrößen  $u_{sd}, u_{sq}$  und zwei Regelgrößen  $i_{sd}, i_{sq}$  vor. Die Verkopplung kann aber durch eine einfache Rückführung bzw. Vorsteuerung der Spannungen gemäß

$$\begin{aligned} u_{sd}^* &= u_{sd}^0 + \Delta u_{sd}^* & \text{mit} & & u_{sd}^0 &= -\omega L_s i_{sq} \\ u_{sq}^* &= u_{sq}^0 + \Delta u_{sq}^* & & & u_{sq}^0 &= \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p \end{aligned} \quad (5.5)$$

kompensiert werden, wodurch die zwei entkoppelten Eingrößen-Regelstrecken

$$\begin{aligned} L_s \dot{i}_{sd} &= -R_s i_{sd} + \Delta u_{sd}^* \\ L_s \dot{i}_{sq} &= -R_s i_{sq} + \Delta u_{sq}^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

entstehen. Es handelt sich also um zwei  $P$ - $T_1$ -Glieder mit der Übertragungsfunktion

$$G_i(s) = \frac{1}{R_s} \frac{1}{1 + s\tau_s} \quad (5.7)$$

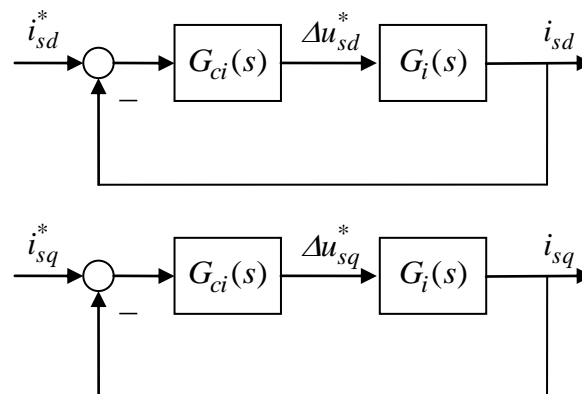
Hierbei ist

$$\tau_s = \frac{L_s}{R_s} \quad (5.8)$$

die *Ständerzeitkonstante*. Die nun verbleibende Regelungsaufgabe kann recht einfach beispielsweise durch Ansatz jeweils eines  $PI$ -Reglers,

$$G_{ci}(s) = K_{Pi} \frac{1 + sT_n}{sT_n} \quad (5.9)$$

bewältigt werden.



**Fig. 5-1:** Vereinfachtes Ersatzmodell für den Entwurf der Stromregelkreise

Diese vereinfachte Modellierung dient der *Dimensionierung* der Reglerparameter, also der Reglerverstärkung  $K_{Pi}$  und der Nachstellzeit  $T_n$ . Bei der Realisierung der Regelung ist natürlich zu berücksichtigen, dass u. a. auch die Transformationen der  $d/q$ -Komponenten in das ständerfeste System und zurück ausgeführt werden müssen.

## 5.2 Zeitdiskrete Reglerrealisierung

Häufig abstrahiert man beim Regelungsentwurf wie bislang auch hier von der zeitdiskreten Realisierung der Regelung mittels eines Prozessors und wendet zeitkontinuierliche Entwurfsmethoden an. Erst nach der Reglerdimensionierung werden beispielsweise die Integratoren in den Reglern durch Summierer angenähert. Wir sprechen dann von einer *quasi-kontinuierlichen* Betrachtungsweise. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, wenn die typischen Zeitkonstanten des Systems im Bereich einer gewissen Zahl von Abtastschritten liegen. Die Grenzen dieser Vorgehensweise werden aber spätestens dann erreicht, wenn Regelvorgänge innerhalb ganz weniger Abtastschritte ausgeführt werden sollen (z. B. Deadbeat-Regelung). Dann muss der Regelungsentwurf mittels zeitdiskreter Verfahren durchgeführt werden, worauf hier aber nicht eingegangen wird.

Auch beim quasikontinuierlichen Entwurf sollten aber zumindest die Auswirkungen der zeitdiskreten Realisierung durch eine summarische Totzeit von eineinhalb Abtastschritten berücksichtigt werden (s. Abschnitte 4.4 und 4.5). Obwohl diese Totzeit aus der Reglerrealisierung herrührt, kann diese gedanklich der Regelstrecke zugeschlagen werden, da diese keinen Freiheitsgrad für die Reglerauslegung darstellt:

$$G_{ci}(s) = K_{Pi} \frac{1 + sT_n}{sT_n} e^{-1,5T_a s} \quad (5.10)$$

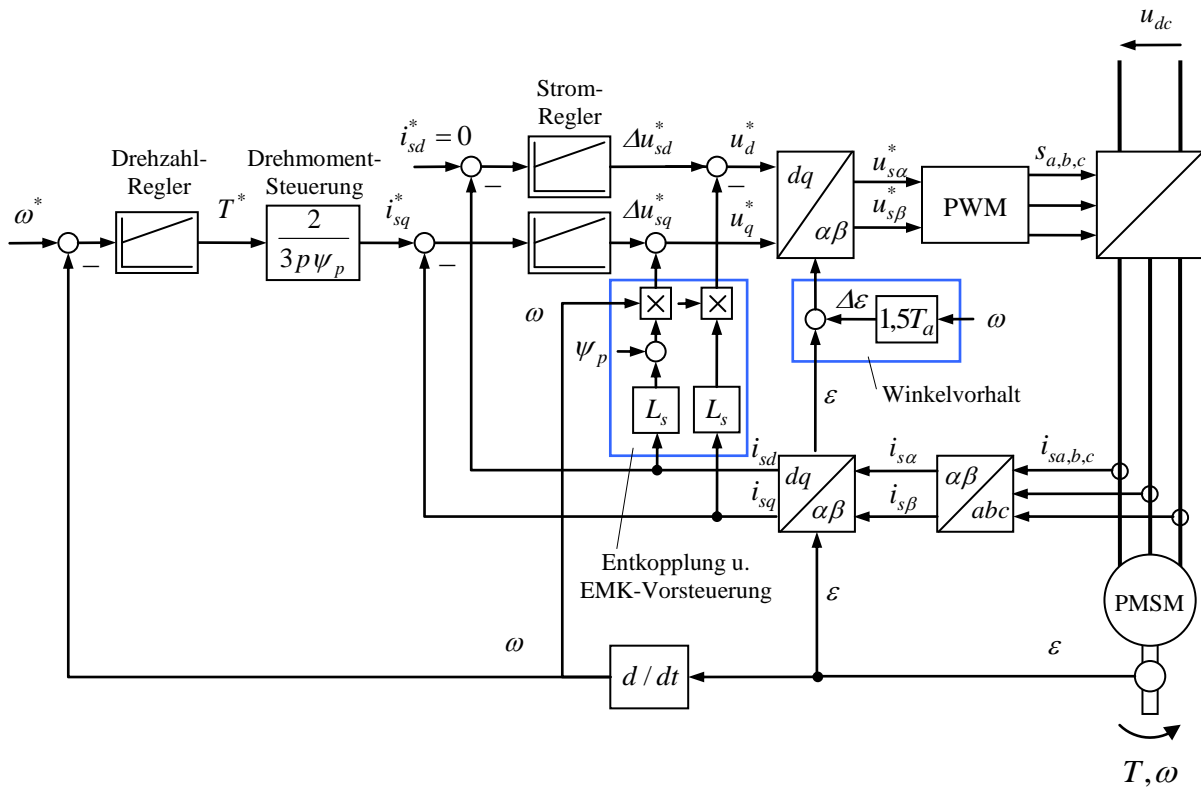
Diese Totzeit macht sich aber nicht nur innerhalb jedes einzelnen Regelkreises für die  $d$ - und die  $q$ -Komponente bemerkbar, sondern auch bei der Realisierung der Rotororientierung an sich. Wird die Transformation der Spannungssollwerte aus dem  $d/q$ -System in das ständerfeste  $\alpha/\beta$ -System mit dem momentanen verfügbaren Drehwinkel  $\varepsilon$  vorgenommen, hat sich der Rotor nach der Totzeit bereits um einen Winkel von  $1,5T_a\omega$  weitergedreht. Es würde dann abhängig von der Drehgeschwindigkeit  $\omega$  eine falsch orientierte Spannung auf den Motor geschaltet. Bei der Rücktransformation der Spannungssollwerte in das ständerfeste System sollte daher ein Winkelvorhalt von

$$\Delta\varepsilon = 1,5T_a\omega \quad (5.11)$$

berücksichtigt werden, um eine korrekte Spannungsorientierung zu gewährleisten. Ggf. kann auf diesen Winkelvorhalt verzichtet werden, wenn sich aufgrund des zu beherrschenden Drehzahlbereichs nur kleine Winkelkorrekturen von wenigen Grad ergeben. Die integralen Anteile der Stromregler werden dann die Fehler kompensieren. Bei hohen Drehzahlen kann natürlich abhängig von der Abtastfrequenz dieser Vorhalt aber bis zu zweistelligen Gradzahlen anwachsen. Dann ist anzuraten, diesen Vorhalt tatsächlich vorzusehen.

### 5.3 Gesamtstruktur der Regelung

Das folgende Bild fasst die bisherigen Überlegungen in einem Gesamt-Strukturbild zusammen, wobei auch ein Drehzahlregler ergänzt wurde.



**Fig. 5-2:** Grundstruktur der Regelung in mitdrehenden Koordinaten für den Spannungsstellbereich (ohne Flussschwächbetrieb)

## 6 Direkte Drehmoment-Regelung (DTC)

### 6.1 Regelungskonzept

Die Direkte Drehmoment-Regelung oder *Direct Torque Control (DTC)* ist ein alternatives Konzept zur Regelung in mitdrehenden Koordinaten mit unterlagerter Stromregelung und PWM.

Ausgangspunkt ist wiederum die Gleichung für das Drehmoment:

$$T = \frac{3}{2} p (\psi_{p\alpha} i_{s\beta} - \psi_{p\beta} i_{s\alpha}) = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s \quad (6.1)$$

Mit

$$\boldsymbol{\psi}_s = L_s \mathbf{i}_s + \boldsymbol{\psi}_p \quad (6.2)$$

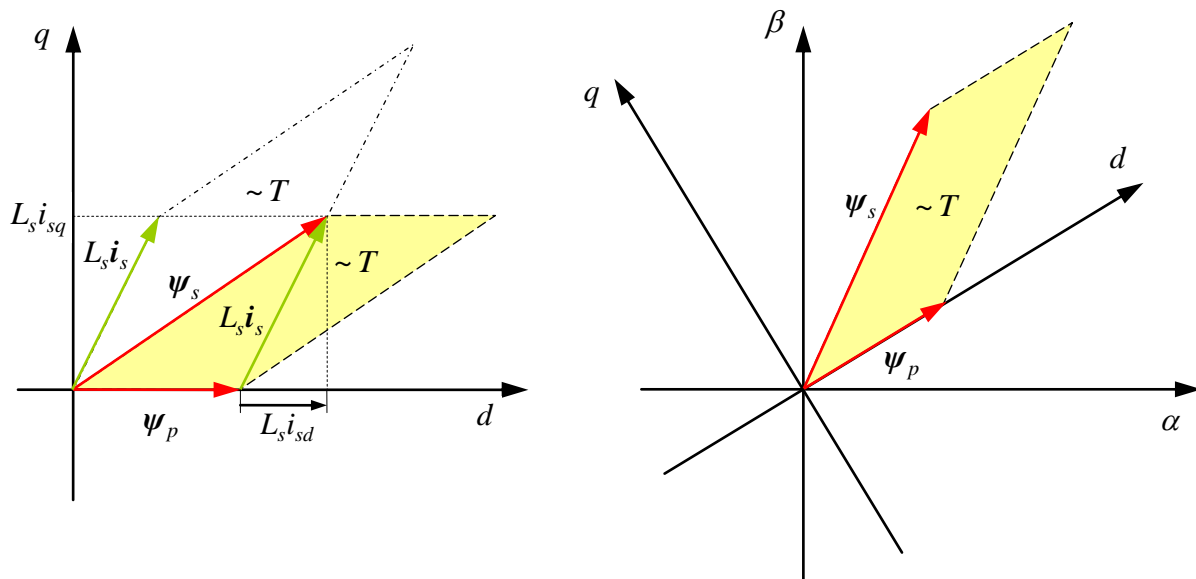
erhält man weitere äquivalente Darstellungen für das Drehmoment:

$$T = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s = \frac{3}{2} p (\boldsymbol{\psi}_s - L_s \mathbf{i}_s) \times \mathbf{i}_s = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_s \times \mathbf{i}_s \quad (6.3)$$

oder

$$T = \frac{3}{2} p \boldsymbol{\psi}_p \times \mathbf{i}_s = \frac{3p}{2L_s} \boldsymbol{\psi}_p \times (\boldsymbol{\psi}_s - \boldsymbol{\psi}_p) = \frac{3p}{2L_s} \boldsymbol{\psi}_p \times \boldsymbol{\psi}_s \quad (6.4)$$

Die letzte Darstellung ist Ausgangspunkt für das DTC-Verfahren.



**Fig. 6-1:** Zur geometrischen Interpretation des Drehmoments als äußeres Produkt zwischen Fluss und Strom oder zwischen den Flussvektoren

Es gilt

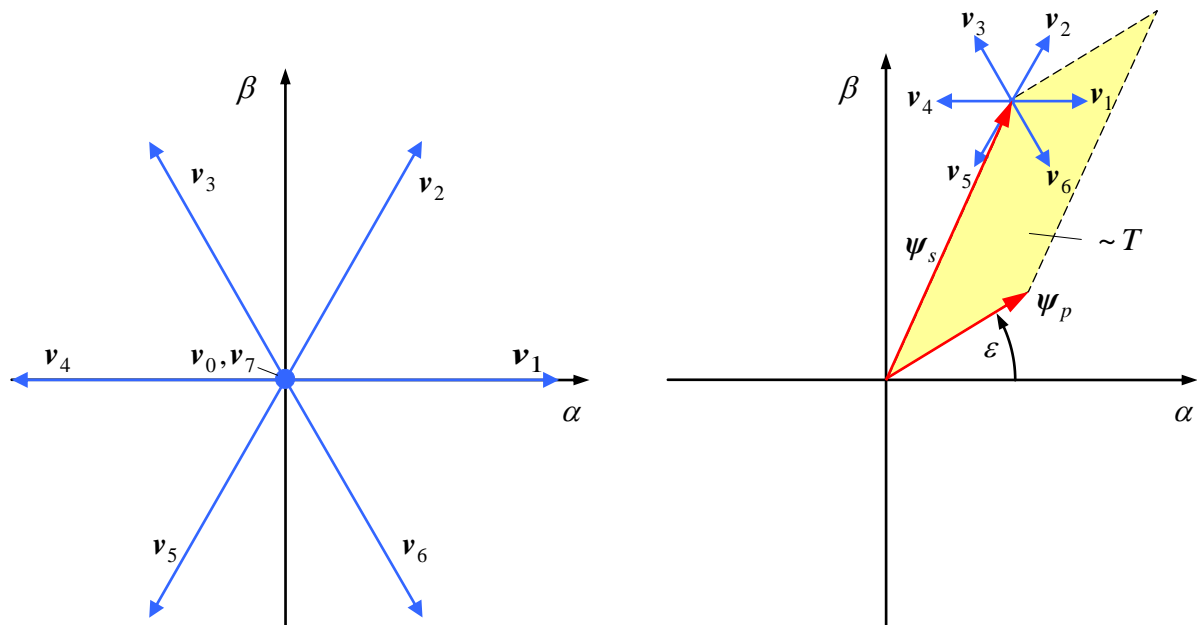
$$\dot{\psi}_s = u_s - R_s i_s \approx u_s \quad (6.5)$$

Der gewählte Spannungsvektor bestimmt also die Richtung der Änderung des Flusses. Als mögliche Spannungsvektoren werden nur die elementaren Spannungen  $v_k$  betrachtet. Im unten dargestellten Beispiel erhöhen die Vektoren  $v_3, v_4$  das Drehmoment, die Vektoren  $v_1, v_6$  verringern das Drehmoment, da die das Drehmoment bestimmende Parallelogrammfläche in einen Fall größer, im anderen Fall verringert wird.

Wird der Nullspannungsvektor  $v_0$  oder  $v_7$  gewählt, verharrt der Ständerfluss  $\psi_s$  näherungsweise in seiner Position. Wie sich in diesem Fall das Drehmoment verändert, hängt dann davon ab, wie sich der Vektor des Permanentflusses  $\psi_p$  aufgrund der mechanischen Rotordrehung bewegt. Für das im Bild gezeigte Beispiel würde sich das Drehmoment bei fest stehendem Ständerflusszeiger  $\psi_s$  bei einer positiven Drehung  $\dot{\varepsilon} = \omega > 0$  verringern, bei negativer Drehrichtung vergrößern. Neben dem Drehmoment wird auch der Flussbetrag

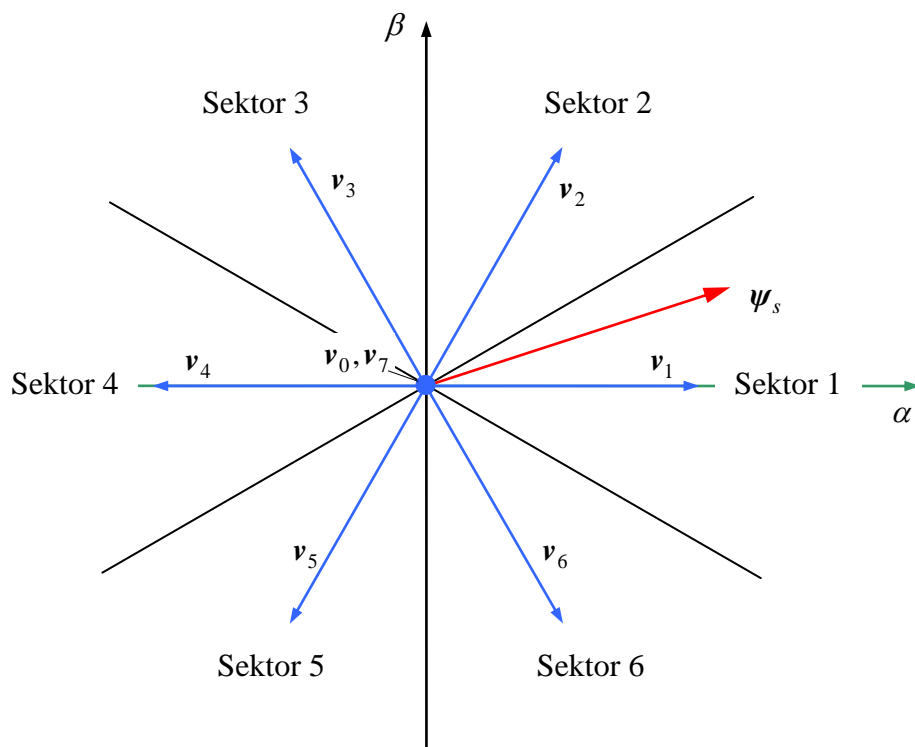
$$\psi_s = |\psi_s|$$

je nach Wahl des Spannungsvektors vergrößert oder verkleinert.



**Fig. 6-2:** Zum Regelungskonzept des DTC-Verfahrens

Abhängig vom Sektor (s. Bild, die hier verwendete Sektordefinition unterscheidet sich von derjenigen bei der Vektormodulation), in welchem sich der aktuelle Ständerflussvektor befindet, sind die Auswirkungen der verschiedenen Spannungsvektoren auf Drehmoment und Flussbetrag in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

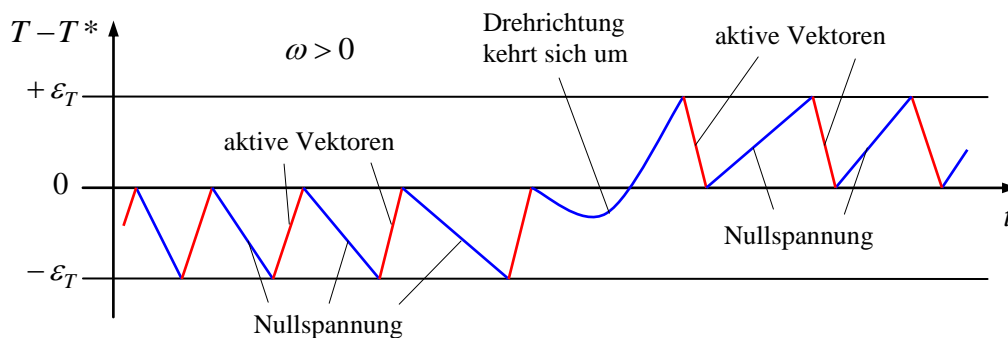


**Fig. 6-3:** Definition der Sektoren für das DTC-Verfahren

Sektor	$\dot{T} > 0$ $\dot{\psi}_s > 0$	$\dot{T} > 0$ $\dot{\psi}_s < 0$	$\dot{T} < 0$ $\dot{\psi}_s > 0$	$\dot{T} < 0$ $\dot{\psi}_s < 0$	$\dot{T} < 0$ wenn $\omega > 0$ $\dot{T} > 0$ wenn $\omega < 0$ $\dot{\psi}_s \approx 0$
1	$v_2$	$v_3$	$v_6$	$v_5$	$v_0, v_7$
2	$v_3$	$v_4$	$v_1$	$v_6$	$v_0, v_7$
3	$v_4$	$v_5$	$v_2$	$v_1$	$v_0, v_7$
4	$v_5$	$v_6$	$v_3$	$v_2$	$v_0, v_7$
5	$v_6$	$v_1$	$v_4$	$v_3$	$v_0, v_7$
6	$v_1$	$v_2$	$v_5$	$v_4$	$v_0, v_7$

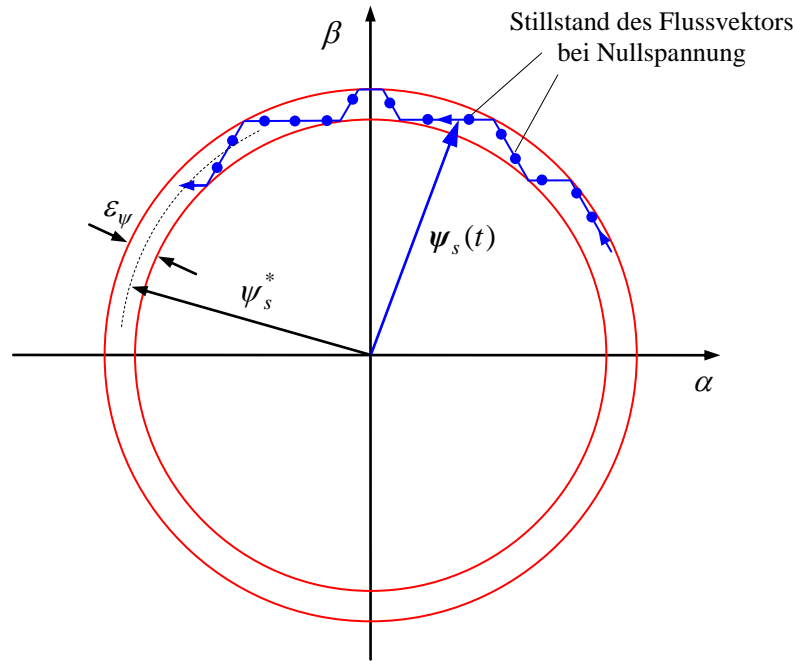
Drehmoment und Flussbetrag werden nun durch Hysterese-Regelungen in entsprechenden Toleranzbändern um die Sollwerte gezwungen. Die Schaltstrategie für das Drehmoment ist wie folgt: Unter der Annahme positiver Drehrichtung wird bei zu kleinem Drehmoment ein aktiver Spannungsvektor geschaltet (s. Tabelle), um das Drehmoment zu erhöhen. Wird die obere Schwelle des Toleranzbandes erreicht, wird der Nullspannungsvektor geschaltet (letzte Spalte der obigen Tabelle), dadurch sinkt das Drehmoment bei positiver Drehrichtung. Der Flussvektor verharrt dann in dem erreichten Punkt. Auf den Flussbetrag kann in diesem Zustand dann kein Einfluss mehr genommen werden, was akzeptabel ist, da dieser bei der nächsten Wahl des aktiven Spannungsvektors berücksichtigt werden kann.

Diese Schaltstrategie erfordert die Kenntnis der Drehrichtung, da sich die Verhältnisse bezüglich der Veränderung des Drehmoments im Nullspannungszustand mit der Drehrichtung gerade umkehren. Andererseits kann vom Verhalten des Drehmoments im Zustand der Nullspannung auf die Drehrichtung geschlossen werden: Nimmt das Drehmoment während des Zustands der Nullspannung ab, muss die Drehrichtung positiv sein; andernfalls dreht sich der Motor im negativen Sinne. Dies kann durch eine Modifikation der Schaltstrategie, die dann mit drei Schwellen wie im nachfolgenden Bild skizziert arbeitet, erreicht werden. Eine explizite Kenntnis der Drehrichtung ist dann nicht mehr erforderlich.



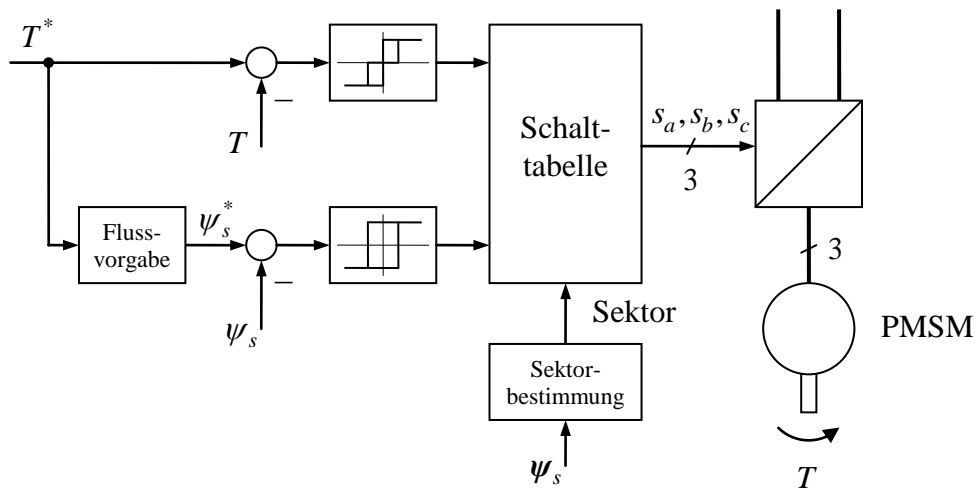
**Fig. 6-4:** Schaltstrategie für das Drehmoment





**Fig. 6-5:** Typische Flusstrajektorie beim DTC-Verfahren

Die resultierende Regelungsstruktur zeigt das folgende Bild. In dieser Struktur tritt keine Pulsweitenmodulation auf. Die Schaltstrategie erzeugt direkt die Stellbefehle für den Umrichter.



**Fig. 6-6:** Struktur der direkten Drehmoment-Regelung (DTC)

Zur verlustoptimalen Regelung sollte der Flusssollwert in Abhängigkeit des Drehmoments angepasst werden. Gehen wir von  $i_{sd} = 0$  aus, so folgt für den Fluss

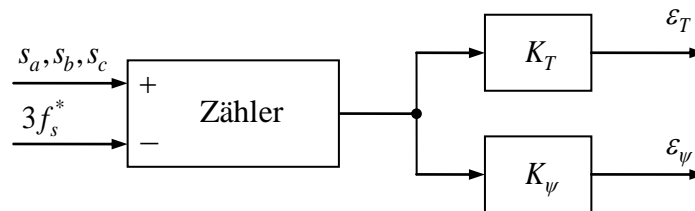
$$\psi_s^2 = \psi_p^2 + L_s^2 i_{sq}^2 = \psi_p^2 + \left( \frac{2L_s T}{3p\psi_p} \right)^2$$

Dementsprechend sollte der Sollwert über

$$\psi_s^* = \sqrt{\psi_p^2 + \left(\frac{2L_s T^*}{3p\psi_p}\right)^2} \quad (6.6)$$

in Abhängigkeit des Drehmomentsollwerts  $T^*$  verändert werden. Wird die Spannungsgrenze erreicht, muss der Fluss entsprechend abgesenkt werden (Flussschwächung).

Die resultierende Schaltfrequenz ist bei dem DTC-Verfahren im Gegensatz zur Pulsweitenmodulation nicht exakt definiert. Um die Schaltverluste zu begrenzen, kann es sinnvoll sein, die Schaltfrequenz zu überwachen und entsprechend die Toleranzbandbreiten der Hysterese-regler zu verändern. Dies kann mit einem einfachen Zähler bewerkstelligt werden. Im regelungstechnischen Sinne stellt der Zähler einen  $I$ -Regler dar.



Regelung der Schaltfrequenz

## 6.2 Fluss- und Drehmomentbeobachter

Die in Abschnitt 6.1 entwickelte Regelungsstruktur ist noch nicht komplett, da bislang von der Kenntnis des Ständerflusses  $\psi_s$  und des Drehmoments  $T$  ausgegangen wurde. Diese Größen sind zwar prinzipiell messbar, doch wird man aus Aufwandgründen in aller Regel in realen Anwendungen hierfür keine Sensoren einsetzen. Stattdessen müssen sie aus anderen verfügbaren Größen bestimmt werden. Eine solche Anordnung wird in der Regelungstechnik als *Beobachter* bezeichnet.

Messbare Größen sind die Ständerströme  $i_s$  und die Ständerspannungen  $u_s$ . Zwar wird aus Aufwandgründen auch auf die Messung der Ständerspannung meist verzichtet, jedoch kann man die Spannung aus der Kenntnis des Umrichter-Schaltzustandes  $s_a, s_b, s_c$  und der Zwischenkreisspannung  $u_{dc}$  rekonstruieren. In diesem Sinne soll die Ständerspannung daher als verfügbare Größe angesehen werden.

Um den Unterschied zwischen den tatsächlichen Istgrößen im technischen System und den beobachteten oder angenommenen Größen deutlich zu machen, wird im Folgenden für den Schätz- oder Beobachterwert einer Größe  $x$  die Bezeichnung  $\hat{x}$  verwendet. Da auch Messwerte Fehler aufweisen können, werde diese Bezeichnung auch für Messgrößen angewandt; ebenso für angenommene Maschinenparameter.

Um nun den für das DTC-Verfahren notwendigen Ständerflussvektor  $\boldsymbol{\psi}_s$  zu bestimmen, kommt die Auswertung der Maschinengleichungen in Betracht<sup>5</sup>:

### Strommodell

Unter dem *Strommodell* versteht man die Bestimmung des Ständerflusses über die Gleichung

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_s = \hat{L}_s \hat{\mathbf{i}}_s + \hat{\boldsymbol{\psi}}_p \quad (6.7)$$

bzw. in statorfesten Komponenten

$$\hat{\psi}_{s\alpha} = \hat{L}_s \hat{i}_{s\alpha} + \hat{\psi}_{p\alpha} = \hat{L}_s \hat{i}_{s\alpha} + \hat{\psi}_p \cos \varepsilon \quad (6.8)$$

$$\hat{\psi}_{s\beta} = \hat{L}_s \hat{i}_{s\beta} + \hat{\psi}_{p\beta} = \hat{L}_s \hat{i}_{s\beta} + \hat{\psi}_p \sin \varepsilon \quad (6.9)$$

Wie man sieht, ist neben dem Strom auch die Messung des Drehwinkels  $\varepsilon$  notwendig. Außerdem müssen der Permanentflusses  $\psi_p$  und die Ständerinduktivität  $L_s$  als Maschinenparameter bekannt sein.

Mit dem auf diese Weise bestimmten Ständerfluss kann dann auch ein Drehmoment-schätzwert über die Drehmomentgleichung

$$\hat{T} = \frac{3p}{2\hat{L}_s} \hat{\boldsymbol{\psi}}_p \times \hat{\boldsymbol{\psi}}_s = \frac{3p\hat{\psi}_p}{2\hat{L}_s} (\hat{\psi}_{s\beta} \cos \varepsilon - \hat{\psi}_{s\alpha} \sin \varepsilon) \quad (6.10)$$

berechnet werden. Diese Gleichungen müssen dann als Beobachter implementiert werden, um die Regelungsstruktur aus Kapitel 6.1 zu ergänzen.

### Spannungsmodell

Unter dem *Spannungsmodell* versteht man die alternative Bestimmung des Ständerflusses über die Ständerspannungsgleichung

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\psi}}}_s = \hat{\mathbf{u}}_s - \hat{R}_s \hat{\mathbf{i}}_s \quad (6.11)$$

Die Spannung muss also zum Fluss integriert werden:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_s(t) = \int_{t_0}^t (\hat{\mathbf{u}}_s(\tau) - \hat{R}_s \hat{\mathbf{i}}_s(\tau)) d\tau + \hat{\boldsymbol{\psi}}_{s0} \quad (6.12)$$

<sup>5</sup> Aus der Regelungstechnik sind neben der direkten Nachbildung der Systemgleichungen auch die Konzepte des Luenberger-Beobachters und des Kalman-Filters bekannt. Auch diese lassen sich auf die hiesige Problemstellung anwenden, was aber im Rahmen dieses Skriptes nicht weiter ausgeführt werden soll.

Die Vorteile sind offensichtlich: Lediglich der Ständerwiderstand wird als Maschinenparameter benötigt. Der Drehwinkel ist als Messgröße gar nicht notwendig. Auch in der sonstigen DTC-Regelungsstruktur ist kein Drehwinkel notwendig, da keine Transformationen in ein mitdrehendes Koordinatensystem vorgenommen werden. Man kann demnach auf einen Drehgeber komplett verzichten. Man spricht dann von einer drehgeberlosen Regelung. Dies ist nicht nur aus Kostengründen, sondern auch wegen höherer Robustheit (Geberausfälle, Drahtbruch) und konstruktiver Freiheiten willkommen.

Diesem Vorteil stehen aber einige zu bewältigende Nachteile gegenüber: Einerseits ist der Flussanfangswert  $\hat{\psi}_{s0}$  in aller Regel nicht bekannt. Andererseits handelt es sich bei dem Beobachter im Wesentlichen um einen einfachen Integrator, der in der Regelungstechnik als einfach stabiles System charakterisiert wird. Konkret bedeutet das, dass ein eventueller Offsetfehler in der Spannungsermittlung,

$$\hat{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}_s + \Delta\mathbf{u}_s \quad (6.13)$$

sei er noch so klein, über genügend lange Zeit zu einem beliebig großen Flussfehler

$$\Delta\psi_s(t) = \Delta\mathbf{u}_s(t - t_0) \quad (6.14)$$

aufintegriert wird. In dieser Form ist diese Strategie also praktisch nicht brauchbar. Aus diesem Grund wird die ursprüngliche Differenzialgleichung um einen stabilisierenden Rückführterm wie folgt modifiziert:

$$\dot{\hat{\psi}}_s = \hat{\mathbf{u}}_s - \hat{R}_s \hat{\mathbf{i}}_s - \frac{1}{\tau_B} \hat{\psi}_s \quad (6.15)$$

Das System mit der Eingangsgröße  $\hat{\mathbf{e}}_s = \hat{\mathbf{u}}_s - \hat{R}_s \hat{\mathbf{i}}_s$  und der Ausgangsgröße  $\hat{\psi}_s$  ist nun stabil, was man am besten im Laplace-Bereich übersieht:

$$\begin{aligned} s\hat{\psi}_s(s) &= \hat{\mathbf{u}}_s(s) - \hat{R}_s \hat{\mathbf{i}}_s(s) - \frac{1}{\tau_B} \hat{\psi}_s(s) \\ \hat{\psi}_s(s) &= \frac{1}{s + 1/\tau_B} [\hat{\mathbf{u}}_s(s) - \hat{R}_s \hat{\mathbf{i}}_s(s)] = \frac{1}{s + 1/\tau_B} \hat{\mathbf{e}}_s \end{aligned} \quad (6.16)$$

Der Pol des Beobachters liegt nun bei  $s = -1/\tau_B$ ; das System somit exponentiell stabil. Ein Spannungs-Offsetfehler führt dann nur noch zu einem beschränkten stationären Flussfehler von

$$\Delta\psi_s = \tau_B \Delta\mathbf{u}_s \quad (6.17)$$

Betrachtet man diese Gleichung, scheint es sinnvoll, die Zeitkonstante  $\tau_B$  möglichst klein zu wählen, um einen möglichst kleinen Flussfehler als Folge eines Spannungsoffsetfehlers zu erreichen. Auch die Antwort auf den in den meisten Fällen nicht korrekten Beobachteranfangswert  $\hat{\psi}_{s0}$  klingt mit der Zeitkonstante  $\tau_B$  ab.

Man darf aber nicht übersehen, dass die zusätzlich eingeführte Rückkopplung das ursprüngliche Systemverhalten verfälscht. Nähme nun man die Messungen als fehlerfrei an, also  $\hat{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}_s, \hat{\mathbf{i}}_s = \mathbf{i}_s$  ergäbe sich ein Fehler von

$$\hat{\psi}_s(s) - \psi_s(s) = \left[ \frac{1}{s + 1/\tau_B} - \frac{1}{s} \right] [\mathbf{u}_s(s) - R_s \mathbf{i}_s(s)] = \left[ \frac{1}{s + 1/\tau_B} - \frac{1}{s} \right] \mathbf{e}_s \quad (6.18)$$

Im Frequenzbereich  $\omega > 1/\tau_B$  kann der Fehler vernachlässigt werden, denn es gilt

$$\frac{1}{j\omega + 1/\tau_B} \approx \frac{1}{j\omega} .$$

Hingegen wird für abnehmende Frequenzen unter  $\omega < 1/\tau_B$  der Fehler immer größer und somit die Schätzung unbrauchbar. Nach dieser Betrachtung sollte  $\tau_B$  also möglichst groß gewählt werden, um einen möglichst großen brauchbaren Frequenzbereich zu erhalten. Das spiegelt unmittelbar den möglichen Drehzahlbereich wider, in dem ein solcher Beobachter zuverlässig arbeitet: Für den Stillstand und Frequenzen  $\omega_{rs} < 1/\tau_B$  funktioniert der Beobachter nicht, erst ab der Mindestdrehzahl  $\omega_{rs} > 1/\tau_B$  kann mit diesem Beobachter gearbeitet werden

Beide Entwurfsziele stehen daher in einem Zielkonflikt. Tatsächlich wird bei der praktischen Umsetzung sehr viel Aufwand getrieben, um einen möglichst kleinen Spannungsfehler zu erreichen und somit einen möglichst großen Wert von  $\tau_B$  zu erlauben. Dazu reicht es in der Regel nicht aus, den Umrichter lediglich durch sein ideales Schaltverhalten zu modellieren, sondern sowohl das transiente Schaltverhalten als auch die Durchlass-Spannungsabfälle müssen berücksichtigt werden.

In der Literatur wird im Kontext der DTC üblicherweise das Spannungsmodell als Beobachter verwendet und sogar als inhärenter Bestandteil der DTC dargestellt. Dazu besteht aber kein Anlass. Das DTC-Prinzip lässt sich sehr wohl auch mit dem Strommodell als Beobachter kombinieren. Dieses hat gegenüber dem Spannungsmodell zwar den Nachteil, dass die Position als Messgröße benötigt wird, es kann aber im gesamten Frequenzbereich - auch im Stillstand - eingesetzt werden.

## 7 Schutzmaßnahmen

Der Betrieb eines elektrischen Antriebs erfordert in aller Regel Maßnahmen zur Betriebsüberwachung, um unzulässige Betriebszustände zu erkennen und das System in Folge geordnet abzuschalten. Größen, die überwacht werden, sind beispielsweise:

- Motor- bzw. Umrichter Ausgangsströme
- Versorgungsspannung (Eingangs-Gleichspannung)
- Motortemperatur
- Umrichtertemperatur
- Drehzahl

Die Schutzmaßnahmen haben das Ziel, das System vor Schäden zu schützen bzw. im Fall eines bereits eingetretenen Schadens einer Komponente (z. B. eines ausgefallenen Kondensators oder Transistors) die Schadensausbreitung auf andere Komponenten zu minimieren bzw. die Gefährdung von Personen zu vermeiden. Als Regel kann gelten, dass diese Schutzmaßnahmen umso aufwändiger werden, je größer ein Antrieb ist. Bei großen Anlagen ist unbedingt bereits beim Entwurf zu berücksichtigen, wie sie geschützt werden können (z. B. Löschung eines Lichtbogens). Bei Kleinstantrieben ist womöglich bereits der ohmsche Widerstand des Motors hinreichend strombegrenzend, so dass auf weitere Maßnahmen verzichtet werden kann.

Schutzmaßnahmen sollten auf einer von der Regelung unabhängigen Steuerungsebene realisiert werden, da der Regelungsprozessor für zeitkritische Vorgänge häufig zu langsam ist bzw. selbst Ursache einer Störung sein könnte. Im Idealfall sind diese Schutzmaßnahmen so konzipiert, dass sie völlig unabhängig von einer funktionierenden Regelung das System eigenständig sicher stillsetzen können (*fail save*).

Insbesondere die Überwachung der Umrichter Ausgangs- bzw. Motorströme stellt die höchsten zeitkritischen Anforderungen. Da die thermischen Zeitkonstanten der Sperrschichten der Leistungshalbleiter äußerst kurz sind, kann eine Überschreitung der zulässigen Grenzwerte um einige Millisekunden bereits zur Zerstörung führen. Außerdem kann der Umrichterstrom durch Aufschalten unerwünschter Spannungen oder im Fall eines Kurzschlusses (aufgrund von Fehlern der Regelung oder durch Schäden anderer Komponenten) derart schnell ansteigen, dass bereits nach wenigen Mikrosekunden Ströme erreicht werden, die nicht mehr abgeschaltet werden können. Da andererseits Leistungsgrenzdaten aus ökonomischen Gründen möglichst weit ausgenutzt werden sollen, ist der Abstand zwischen betriebsmäßig zulässigem Maximalstrom und nicht mehr sicherem Überstrom häufig sehr gering. Daher muss eine Schutzabschaltung in diesem Bereich sehr schnell reagieren. Im Übrigen treten Überströme gelegentlich auch als zufällige Fluktuationen der nie ganz zu vermeidenden Unruhe in den Regelkreisen auf.

Im Folgenden sollen die bei Überstrom in Betracht kommenden Maßnahmen diskutiert werden.

## 7.1 Pulssperre oder Motorkurzschluss

Die übliche Schutzmaßnahme bei Überstrom ist die Sperre aller Transistoren der Brücke (*Pulssperre*). Aufgrund des induktiven Verhaltens der Last fließt der Motorstrom zunächst über die Dioden der Brücke weiter. Ist aber die Eingangsgleichspannung größer als die induzierten Motorspannung, wirkt diese Spannungsdifferenz dem Stromfluss entgegen und der Motorstrom wird in kurzer Zeit (meist in wenigen Millisekunden) erlöschen. Dies ist die übliche Schutzmaßnahme beispielsweise bei Asynchronmotoren, vgl. Abschnitt 4.6.

Wird ein Permanentmagnet-Synchronmotor in einem Drehzahlbereich betrieben, so dass die Hauptspannung kleiner als die Eingangsgleichspannung bleibt,  $\omega\psi_p < u_{dc}/\sqrt{3}$  wird der Strom ebenfalls erlöschen. Wird der Motor dagegen im Flussschwäcbereich mit  $\omega\psi_p > u_{dc}/\sqrt{3}$  betrieben, wird die induzierte Spannung über die Dioden der Brücke Strom zur Gleichspannungsseite zurückspeisen. Die gesamte Motorspannung (bestehend aus Hauptspannung und Ankerrückwirkungen) wird weiterhin durch den Zwischenkreiskondensator bestimmt, der sich aber, falls auf der Gleichspannungsseite die Leistung nicht anderweitig abgeführt werden kann (also in die Energieversorgung zurückgespeist oder in einem Bremssteller dissipiert wird), mehr oder minder schnell auflädt. In Fällen, bei denen durch die dabei entstehende Bremswirkung der Antrieb abgebremst und in Folge die induzierte Spannung unter den kritischen Wert fällt, kann dieser begrenzte Spannungsanstieg eventuell toleriert werden. Eine Abschätzung ist über die zu beherrschende kinetische Energie im Vergleich zum Speichervermögen des Kondensators schnell zu bewerkstelligen.

Bei Antrieben, bei denen die Last auch nach dem Störfall den Antrieb weiter dreht und dieser nicht stillgesetzt werden kann oder soll, ist dieses Maßnahme nicht akzeptabel. Denkbar wäre, den Motor durch einen Schalter vom Umrichter zu trennen, doch ist dies mit verhältnismäßig hohen Kosten verbunden.

Eine Alternative ist, den Motor gezielt *kurzzuschließen*, indem jeweils alle drei unteren oder alle drei oberen Transistoren der Brücke angesteuert werden. Der Kurzschluss als Schutzmaßnahme fordert seitens des Umrichters volle Funktionsfähigkeit. Wenn diese nicht gewährleistet ist, ergeben sich Probleme: Falls die Störung durch einen Ausfall eines Umrichterventils zu Stande kam, kann durch einen gezielten geschalteten Motorkurzschluss unter Umständen auch ein Brückenkurzschluss zu Stande kommen, der den Umrichter nachhaltig zerstören könnte. Ein Motorkurzschluss kommt auch dann nicht in Betracht, wenn die Energieversorgung der Umrichtersteuerung und damit seine Betriebsfähigkeit nicht sichergestellt werden kann.

Im Folgenden soll daher das Verhalten von Permanentmagnet-Synchronmotoren beim Kurzschluss untersucht werden.

## 7.2 Stationäre Kurzschlussströme

Wird der Motor symmetrisch kurzgeschlossen (also mit allen drei Klemmen gleichzeitig), ergeben sich nach Abklingen von Ausgleichsvorgängen durch Nullsetzen der stationären Spannungsgleichungen

$$0 = R_s i_{sd} - \omega L_s i_{sq}$$

$$0 = R_s i_{sq} + \omega L_s i_{sd} + \omega \psi_p$$

die stationären Kurzschlussströme in Abhängigkeit von der Drehfrequenz

$$i_{sdk} = -\frac{\omega^2 L_s \psi_p}{\omega^2 L_s^2 + R_s^2} = -i_0 \frac{\omega^2 \tau_s^2}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \quad (7.1)$$

$$i_{sqk} = -\frac{\omega R_s \psi_p}{\omega^2 L_s^2 + R_s^2} = -i_0 \frac{\omega \tau_s}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \quad (7.2)$$

$$i_{sk} = \sqrt{i_{dk}^2 + i_{qk}^2} = i_0 \frac{\omega \tau_s}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_s^2}} \quad (7.3)$$

mit

$$i_0 = \frac{\psi_p}{L_s}, \quad \tau_s = \frac{L_s}{R_s} \quad (7.4)$$

und daraus das stationäre Kurzschlussdrehmoment

$$T_k = -\frac{3p\psi_p i_0}{2} \frac{1}{\omega \tau_s + \frac{1}{\omega \tau_s}} = -\frac{3p\psi_p i_0}{2} \frac{\omega \tau_s}{1 + \omega^2 \tau_s^2} \quad (7.5)$$

Bei hinreichend großer Drehfrequenz  $\omega \tau_s \gg 1$  kann der stationäre Kurzschlussstrom durch den drehzahlunabhängigen Wert  $i_0$  abgeschätzt werden.



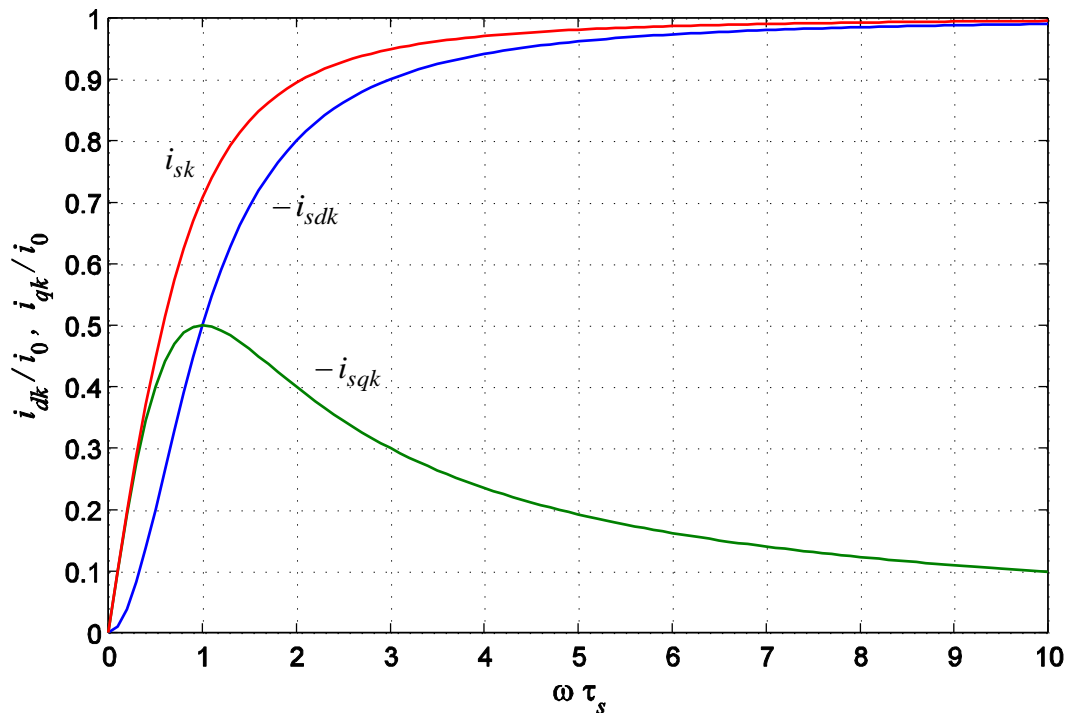


Fig. 7-1: Stationäre Kurzschlussströme über der Drehzahl

Der Motorkurzschluss kommt also nur in Betracht, wenn der Umrichter den stationären Kurzschlussstrom führen kann, also

$$i_{sk}(\omega) < i_{\max}$$

Wird der Antrieb bei großer Drehzahl betrieben,  $\omega\tau_s \gg 1$ , muss im Grenzfall

$$i_0 < i_{\max} \quad \text{bzw.} \quad k < 1$$

gelten. Nur für derartige Motoren kommt der Motorkurzschluss als Schutzmaßnahme in Betracht. Andererseits sind Motoren mit  $k > 1$  ohnehin nicht oder nur sehr beschränkt flussschwächbar, so dass dort gut die Pulssperre als Schutzmaßnahme verwendet werden kann.

### 7.3 Transiente Kurzschlussströme

Neben den stationären Kurzschlussströmen ist das transiente Verhalten zu untersuchen. Die Spitzen der transienten Kurzschlussströme können die stationären Werte deutlich überschreiten. Ausgangspunkt seien die Stromdifferentialgleichungen für den kurzgeschlossenen Motor

$$L_s \dot{i}_{sd} = -R_s i_{sd} + \omega L_s i_{sq} \quad (7.6)$$

$$L_s \dot{i}_{sq} = -R_s i_{sq} - \omega L_s i_{sd} - \omega \psi_p \quad (7.7)$$

Eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist bereits bekannt; dies sind die stationären Kurzschlussströme des vorangegangenen Abschnitts. Es reicht also aus, nur die homogenen Differentialgleichungen

$$L_s \dot{i}_{dh} = -R_s i_{dh} + \omega L_s i_{qh} \quad (7.8)$$

$$L_s \dot{i}_{qh} = -R_s i_{qh} - \omega L_s i_{dh} \quad (7.9)$$

bzw.

$$\dot{i}_{dh} = -\frac{1}{\tau_s} i_{dh} + \omega i_{qh} \quad (7.10)$$

$$\dot{i}_{qh} = -\frac{1}{\tau_s} i_{qh} - \omega i_{dh} \quad (7.11)$$

zu betrachten. Die homogene Lösung führt zu einem mit der Kreisfrequenz  $\omega$  oszillierenden und mit der Zeitkonstante  $\tau_s$  abklingenden Vorgang:

$$i_{dh}(t) = e^{-t/\tau_s} (i_{dh0} \cos \omega t + i_{qh0} \sin \omega t) \quad (7.12)$$

$$i_{qh}(t) = e^{-t/\tau_s} (i_{qh0} \cos \omega t - i_{dh0} \sin \omega t) \quad (7.13)$$

In der  $d/q$ -Ebene ist die Lösungstrajektorie eine Spirale um den Ursprung. Superponiert man die stationäre Lösung, wird der Mittelpunkt der Spirale zum Punkt  $(i_{sdk}, i_{sqk})$  verschoben. Die Anfangswerte dieser homogenen Lösung ergeben sich aus den Stromkomponenten zum Beginn des Kurzschlusses und den stationären Kurzschlussströme nach

$$i_{dh0} = i_{sd0} - i_{dk} \quad (7.14)$$

$$i_{qh0} = i_{sq0} - i_{qk} \quad (7.15)$$

Für eine Abschätzung des größtmöglichen Spitzenwerts sei eine hohe Drehzahl angenommen, so dass sich die Dämpfung während einer Periode noch nicht viel auswirkt. Tritt dann ein Kurzschluss aus einem Zustand maximalen Stroms,

$$i_{sd0} = 0, \quad |i_{sq0}| = i_{\max},$$

also

$$i_{qh0} = i_{sq0} - i_{qk} \approx \pm i_{\max} \quad (7.16)$$

$$i_{dh0} = i_{sd0} - i_{dk} \approx -i_0 \quad (7.17)$$

auf, ergibt sich eine Zeigerlänge des homogenen Anteils von etwa  $\sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2}$ . Zeigt dieser Zeiger nach gewisser Zeit in die negative  $d$ -Richtung, ergibt sich auf diese Weise eine Abschätzung der transienten Stromspitze von

$$\hat{i}_s < i_0 + \sqrt{i_{\max}^2 + i_0^2} = i_{\max} \left( k + \sqrt{1 + k^2} \right) \quad (7.18)$$

Noch größere Stromspitzen würden sich bei Anfangswerten  $i_{sd0} > 0$  ergeben. Da diese aber kein sinnvoller Betriebspunkt ist, bleibt es außer Acht.

Die obige Spitzenstromabschätzung wird asymptotisch für sehr große Drehzahlen erreicht und führt ggf. zu sehr großen Spitzenströmen. Abhängig vom tatsächlich genutzten Drehzahlbereich und der Ständerzeitkonstante kann der Wert geringer ausfallen.

Ob der Umrichter diese transiente Überschreitung der eigentlichen Stromgrenze überlebt, kann nicht generell beantwortet, sondern muss im Einzelfall untersucht werden. Einerseits wird diese Überschreitung in den meisten Fällen nach wenigen Millisekunden abklingen. Andererseits werden die Transistoren nach dem Einschalten des Kurzschlusses nicht mehr gepulst, wodurch keine Schaltverluste mehr anfallen und ggf. kurzfristig höhere Durchlassverluste in Kauf genommen werden können.

Eine weitere Alternative wäre, abhängig von der aktuellen Drehfrequenz entweder die Umrichtersperre oder den Motorkurzschluss als Schutzmaßnahme vorzusehen. Im Flussschwäcbereich träten dann geringe transiente Stromspitzen auf, da sie von günstigeren Anfangswerten in der linken Hälfte des Strombegrenzungskreises ausgehen. Für diese gestufte Maßnahme ist allerdings die Verfügbarkeit des Drehzahlmesswerts zwingend erforderlich. Möchte man sich auch gegenüber Sensorstörungen absichern, wird dieses Vorgehen zweifelhaft.

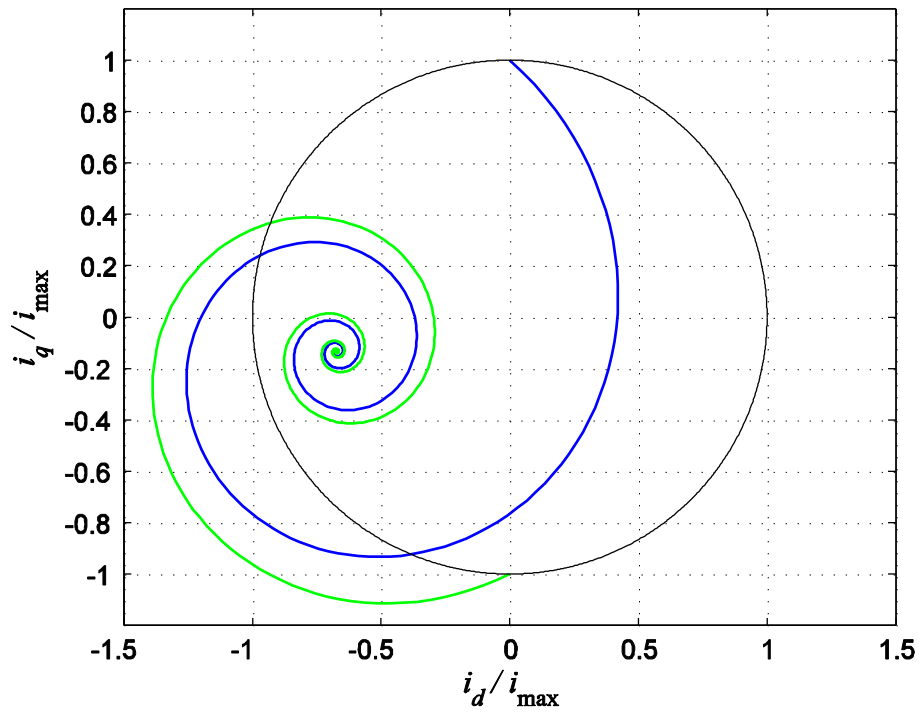


Fig. 7-2: Beispielhafte Trajektorien des Kurzschlussstroms für  $\omega\tau_s = 5$ ,  $k = 0,7$  und zwei verschiedene Anfangswerte

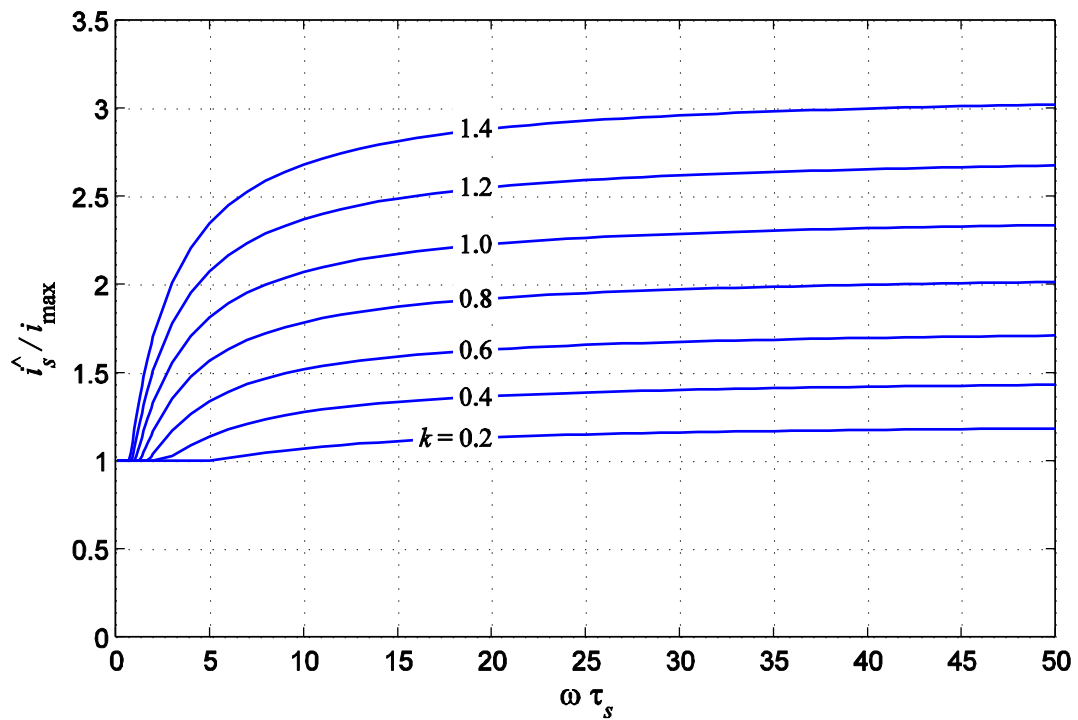
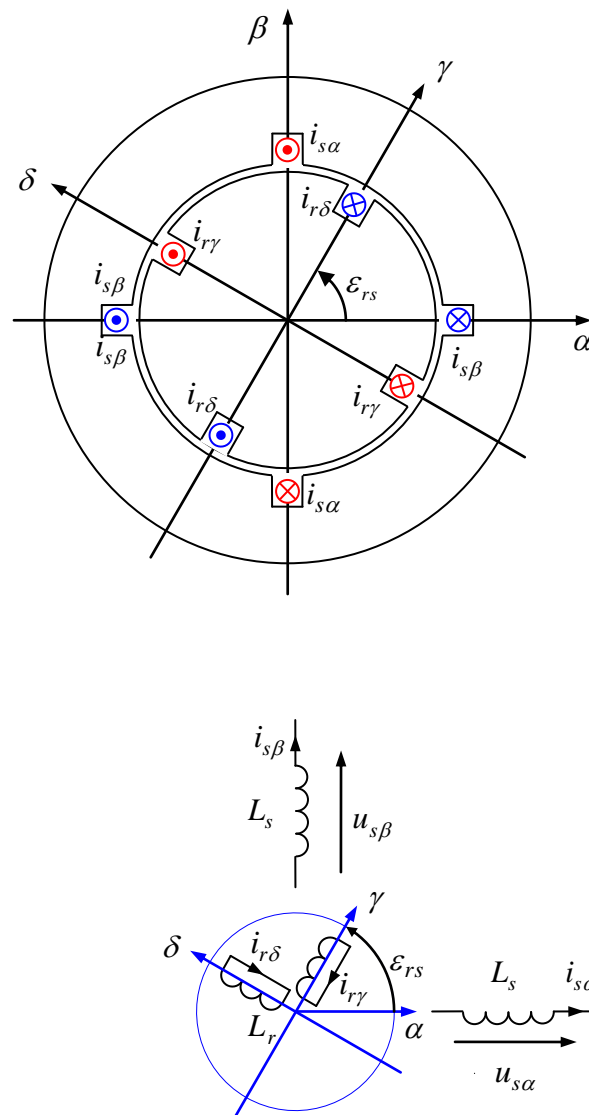


Fig. 7-3: Maximale transiente Kurzschlussstromspitze in Abhängigkeit von  $k$  und  $\omega\tau_s$

## 8 Modellierung von Asynchronmotoren

### 8.1 Modellierung mit orthogonalen Wicklungen

Modellierung des Ständers und des Läufers mit orthogonalen Wicklungen:



**Fig. 8-1:** Vereinfachtes Modell des Kurzschlussläufer-Asynchronmotors

$\alpha/\beta$ : Ständerfeste Koordinaten

$\gamma/\delta$ : Läuferfeste Koordinaten (für das Rotorkoordinatensystem werden nicht die Bezeichnungen  $d$  und  $q$  verwendet, da diese Bezeichnungen später für ein weiteres Koordinatensystem benötigt werden)

Induktionsgesetze für Ständer und Läufer mit Berücksichtigung der ohmschen Widerstände:

$$\dot{\psi}_s^s = \mathbf{u}_s^s - R_s \mathbf{i}_s^s \quad (8.1)$$

$$\dot{\psi}_r^r = \mathbf{u}_r^r - R_r \mathbf{i}_r^r = -R_r \mathbf{i}_r^r \quad (8.2)$$

Der hochgestellte Index soll deutlich machen, in welchem Koordinatensystem der Vektor dargestellt wird, also für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{x}$  beispielsweise

$$\mathbf{x}^s = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^r = \begin{bmatrix} x_\gamma \\ x_\delta \end{bmatrix}$$

Wie gewohnt, können die unterschiedlichen Darstellungen durch die Drehtransformation

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

ineinander überführt werden:

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{Q}(\varepsilon_{rs}) \mathbf{x}^r \quad (8.3)$$

Zum Beispiel kann der Ständerfluss im Rotorkoordinatensystem dargestellt werden:  $\psi_s^r$ .

Bislang wurden zweidimensionale Vektoren mit reellen Komponenten zur Modellierung der Vorgänge verwendet. Bei Asynchronmotoren hat jedoch die komplexe Schreibweise Vorteile. Die beiden Koordinaten eines Vektors werden dann zu einem komplexen Zeiger

$$\underline{x}^s(t) = x_\alpha(t) + jx_\beta(t) \quad (8.4)$$

zusammengefügt. Die Drehtransformation wird dann sehr einfach durch Multiplikation mit der Exponentialfunktion durchgeführt:

$$\underline{x}^r(t) = e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \underline{x}^s(t), \quad \underline{x}^s(t) = e^{j\varepsilon_{rs}(t)} \underline{x}^r(t) \quad (8.5)$$

Für die Transformation der Zeitableitungen folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^r(t) &= -j\omega_{rs} e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \underline{x}^s(t) + e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \dot{\underline{x}}^s(t) \\ &= -j\omega_{rs} \underline{x}^r(t) + e^{-j\varepsilon_{rs}(t)} \dot{\underline{x}}^s(t) \end{aligned} \quad (8.6)$$

bzw.

$$\dot{\underline{x}}^s(t) = j\omega_{rs} \underline{x}^s(t) + e^{j\varepsilon_{rs}(t)} \dot{\underline{x}}^r(t) \quad (8.7)$$

Die wichtigsten Gleichungen sind im Abschnitt 9 noch einmal zusammengefasst.

In komplexer Schreibweise lauten dann die Spannungsgleichungen völlig analog zur vektoriellen Form

$$\underline{\dot{\psi}}_s^s = \underline{u}_s^s - R_s \underline{i}_s^s \quad (8.8)$$

$$\underline{\dot{\psi}}_r^r = \underline{u}_r^r - R_r \underline{i}_r^r = -R_r \underline{i}_r^r \quad (8.9)$$

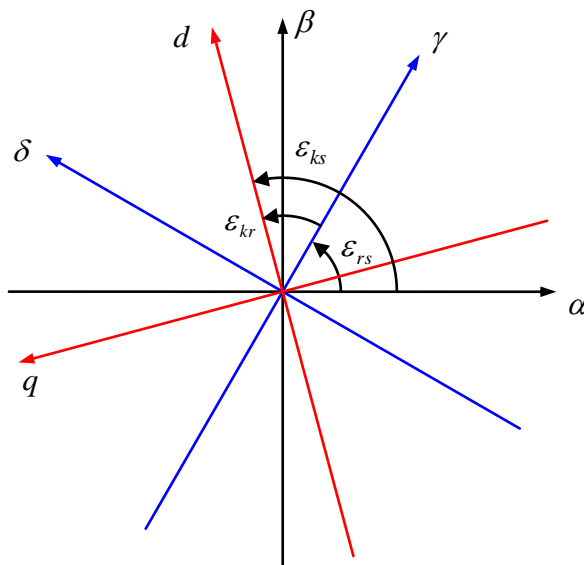
Wird die Differenzialgleichung für den Rotorfluss in das Ständersystem transformiert, folgt

$$\underline{\dot{\psi}}_r^s = j\omega_{rs} \underline{\psi}_r^s - R_r \underline{i}_r^s \quad (8.10)$$

Ebenso kann die Differenzialgleichung für den Statorfluss in das Rotorsystem transformiert werden:

$$\underline{\dot{\psi}}_s^r = -j\omega_{rs} \underline{\psi}_s^r + \underline{u}_s^r - R_s \underline{i}_s^r \quad (8.11)$$

Statt die Gleichungen im Ständer- oder Rotorkoordinatensystem aufzuschreiben, kann es sinnvoll sein, ein beliebiges anderes Koordinatensystem  $K$ , welches gegenüber dem Ständer mit dem Winkel  $\varepsilon_{ks}$  bzw. gegenüber dem Rotor mit dem Winkel  $\varepsilon_{kr} = \varepsilon_{ks} - \varepsilon_{rs}$  verdreht ist, zu verwenden. Die Achsen des Koordinatensystems  $K$  seien mit  $d$  und  $q$  bezeichnet. Die Bedeutung dieser Bezeichnungen sei jedoch an dieser Stelle dahingestellt.



**Fig. 8-2:** Die beiden Flussdifferenzialgleichungen lauten dann in diesem Koordinatensystem

$$\underline{\dot{\psi}}_s^k = j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \quad (8.12)$$

$$\underline{\dot{\psi}}_r^k = j\omega_{rk} \underline{\psi}_r^k - R_r \underline{i}_r^k \quad (8.13)$$

Neben den Differenzialgleichungen werden die Beziehungen zwischen den Strömen und den Flüssen benötigt. Der Asynchronmotor kann im Prinzip als Transformator betrachtet werden. Aufgrund der Symmetrie kann angenommen werden, dass sich die orthogonalen Komponenten gegenseitig nicht beeinflussen und dass die Induktivitäten unabhängig von der Ortsrichtung sind. Das führt zu

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_m \underline{i}_r \quad (8.14)$$

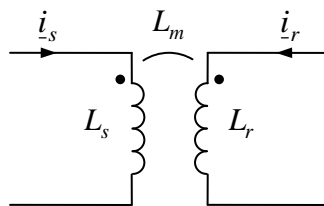
$$\underline{\psi}_r = L_m \underline{i}_s + L_r \underline{i}_r \quad (8.15)$$

$L_s$ : Stator-Selbstinduktivität

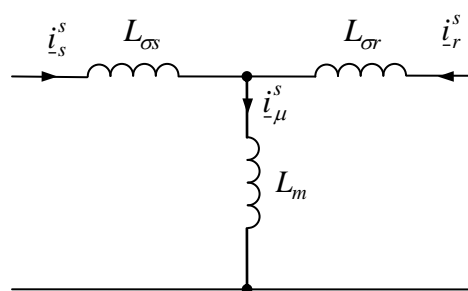
$L_r$ : Rotor-Selbstinduktivität

$L_m$ : Hauptinduktivität (*mutual inductance*), aus prinzipiellen Gründen ist die Hauptinduktivität in beiden Gleichungen identisch

Die oberen Indizes sind in den obigen Beziehungen fortgelassen, da die Gleichungen in jedem Bezugssystem gelten. Allerdings müssen alle komplexen Zeiger einer Gleichung im selben Bezugssystem dargestellt werden.



**Fig. 8-3:** Kopplung zwischen Stator- und Rotorwicklungen



**Fig. 8-4:** T-Ersatzschaltbild der transformatorischen Kopplung

Einführung der *Streuinduktivitäten*

$$L_{\sigma s} = L_s - L_m \quad (8.16)$$

$$L_{\sigma r} = L_r - L_m \quad (8.17)$$



und der *Streuzyffer*

$$\sigma = \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_s L_r} = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} = \frac{L_m(L_{\sigma s} + L_{\sigma r}) + L_{\sigma s} L_{\sigma r}}{L_s L_r} \quad (8.18)$$

Damit:

$$\underline{\psi}_s = L_{\sigma s} \underline{i}_s + L_m(\underline{i}_s + \underline{i}_r) \quad (8.19)$$

$$\underline{\psi}_r = L_{\sigma r} \underline{i}_r + L_m(\underline{i}_s + \underline{i}_r) \quad (8.20)$$

Die Anteile

$$\underline{\psi}_{\sigma s} = L_{\sigma s} \underline{i}_s, \quad \underline{\psi}_{\sigma r} = L_{\sigma r} \underline{i}_r \quad (8.21)$$

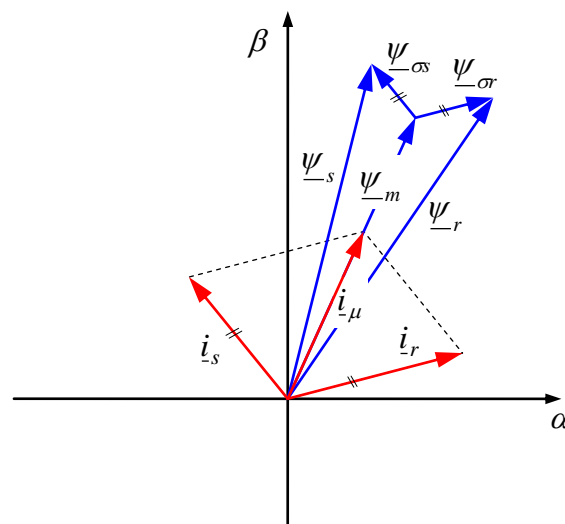
heißen *Streuflüsse*,

$$\underline{\psi}_m = L_m(\underline{i}_s + \underline{i}_r) \quad (8.22)$$

ist der *Hauptfluss*. Die Summe aus Ständer- und Läuferstrom

$$\underline{i}_\mu = \underline{i}_s + \underline{i}_r \quad (8.23)$$

wird auch als *Magnetisierungsstrom* bezeichnet, da dieser Strom für die Magnetisierung der Hauptinduktivität maßgeblich ist.



**Fig. 8-5:** Zeigerdiagramme der Ströme und Flüsse

Die Auflösung der Flüsse nach den Strömen führt zu

$$\underline{i}_s = \frac{L_r \underline{\psi}_s - L_m \underline{\psi}_r}{L_s L_r - L_m^2} \quad (8.24)$$

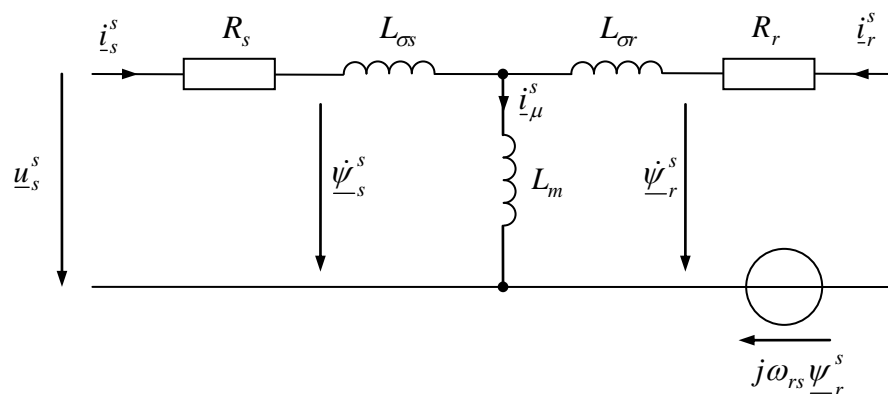
$$\underline{i}_r = \frac{L_s \underline{\psi}_r - L_m \underline{\psi}_s}{L_s L_r - L_m^2} \quad (8.25)$$

oder unter Verwendung der Streuziffer  $\sigma$  zu

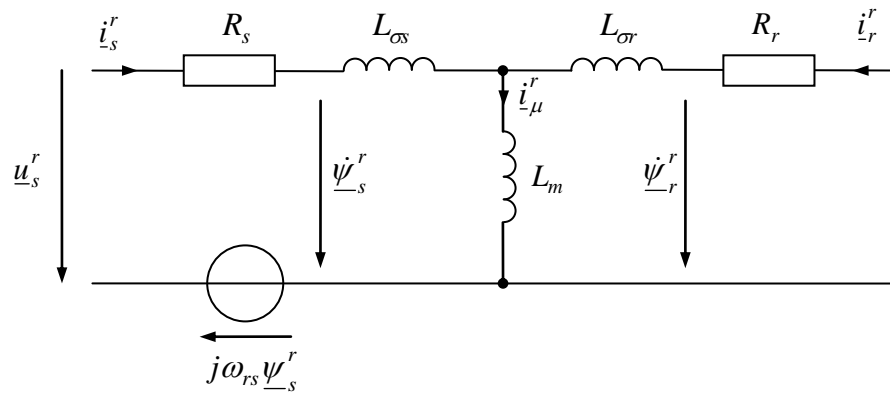
$$\underline{i}_s = \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{\psi}_s - \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \right] \quad (8.26)$$

$$\underline{i}_r = \frac{1}{\sigma L_r} \left[ \underline{\psi}_r - \frac{L_m}{L_s} \underline{\psi}_s \right] \quad (8.27)$$

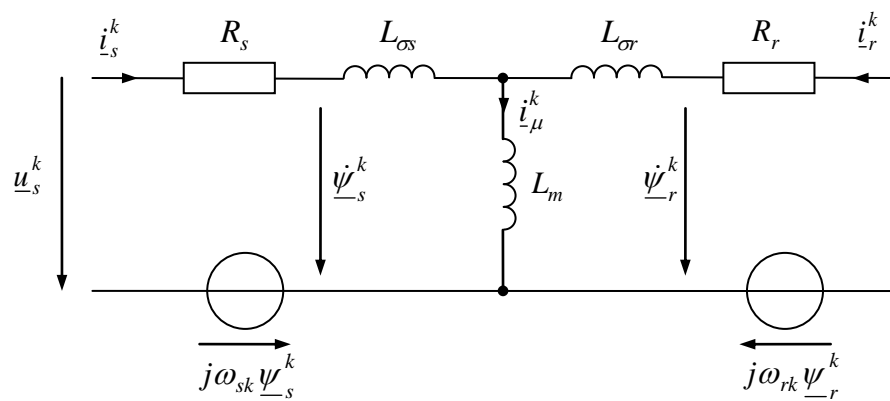
Die erarbeiteten Zusammenhänge führen nun zu den folgenden Ersatzschaltbildern. Zu beachten ist, dass aufgrund der komplexen Schreibweise ein Ersatzschaltbild für jeweils zwei Raumachsen gleichzeitig gilt. Diese Ersatzschaltbilder beschreiben das Verhalten völlig allgemein, insbesondere nicht nur das stationäre, sondern auch das dynamische Verhalten. Aufgrund der Anordnung der Haupt- und der Streuinduktivitäten bezeichnet man diese Gruppe von Schaltbildern als T-Ersatzschaltbild.



**Fig. 8-6:** Ersatzschaltbild des Asynchronmotors im Ständerkoordinatensystem



**Fig. 8-7:** Ersatzschaltbild des Asynchronmotors im Rotorkoordinatensystem



**Fig. 8-8:** Ersatzschaltbild des Asynchronmotors in einem beliebigen Koordinatensystem  $K$

## 8.2 Drehmomentbildung

Das Drehmoment des Asynchronmotors kann wieder aus der Leistungsbilanz identifiziert werden. Ausgangspunkt sind beispielsweise die Spannungsgleichungen in Rotorkoordinaten (doch ließe sich dies auch in jedem anderen Bezugssystem durchführen):

$$\underline{u}_s^r = \dot{\underline{\psi}}_s^r + j\omega_{rs}\underline{\psi}_s^r + R_r \underline{i}_s^r$$

$$0 = \underline{u}_r^r = \dot{\underline{\psi}}_r^r + R_r \underline{i}_r^r$$

Um die Leistungen zu bilden, werden die Gleichungen jeweils mit den konjugiert komplexen Strömen multipliziert (vgl. Abschnitt 8.6).

$$\underline{u}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r = \dot{\underline{\psi}}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r + j\omega_{rs}\underline{\psi}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r + R_s \underline{i}_s^r \bar{\underline{i}}_s^r$$

$$0 = \dot{\underline{\psi}}_r^r \bar{\underline{i}}_r^r + R_r \underline{i}_r^r \bar{\underline{i}}_r^r$$

Sämtliche in diesen Gleichungen auftretenden Terme sind invariant gegenüber der Wahl des Bezugssystems, weshalb die besondere Kennzeichnung des Bezugssystems entfallen kann:

$$\underline{u}_s \bar{\underline{i}}_s = \dot{\underline{\psi}}_s \bar{\underline{i}}_s + j\omega_{rs}\underline{\psi}_r \bar{\underline{i}}_r + R_s \underline{i}_s \bar{\underline{i}}_s$$

$$0 = \dot{\underline{\psi}}_r \bar{\underline{i}}_r + R_r \underline{i}_r \bar{\underline{i}}_r$$

Die Summation der Realteile der Gleichungen und die Identifikation der einzelnen Terme führt zu

$$P_{el} = \dot{W}_{magn} + P_d + P_{mech} \quad (8.28)$$

Mit der zugeführten elektrischen Leistung

$$P_{el} = \frac{3}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}_s \bar{\underline{i}}_s) \quad (8.29)$$

der dissipierten Leistung (Verlustleistung)

$$P_d = \frac{3}{2} \operatorname{Re}(R_s \underline{i}_s \bar{\underline{i}}_s + R_r \underline{i}_r \bar{\underline{i}}_r) = \frac{3}{2} \left( R_s |\underline{i}_s|^2 + R_r |\underline{i}_r|^2 \right) \quad (8.30)$$

der Änderung der magnetischen Energie

$$\dot{W}_{magn} = \frac{3}{2} \operatorname{Re}(\dot{\underline{\psi}}_s \bar{\underline{i}}_s + \dot{\underline{\psi}}_r \bar{\underline{i}}_r) \quad (8.31)$$

Die Integration liefert im Übrigen den Energieinhalt

$$W_{magn} = \frac{3}{4} \left( L_m |\underline{i}_s + \underline{i}_r|^2 + L_{\sigma s} |\underline{i}_s|^2 + L_{\sigma r} |\underline{i}_r|^2 \right) \quad (8.32)$$

Folglich muss die mechanische Leistung

$$P_{mech} = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left( j \omega_{rs} \underline{\psi}_s \bar{\underline{i}}_s \right) = \frac{3}{2} \omega_{rs} \operatorname{Im} \left( -\underline{\psi}_s \bar{\underline{i}}_s \right) = \frac{3}{2} \omega_{rs} \operatorname{Im} \left( \underline{\psi}_s \underline{i}_s \right) \quad (8.33)$$

sein, für welche andererseits gilt

$$P_{mech} = T \omega_{mech} = T \frac{\omega_{rs}}{p} \quad (8.34)$$

so dass für das Drehmoment

$$T = \frac{3}{2} p \operatorname{Im} \left( \underline{\psi}_s \underline{i}_s \right) \quad (8.35)$$

folgt. Dies ist die gleiche Drehmomentbeziehung wie beim Synchronmotor. In stator- bzw. rotorfesten Komponenten bzw. in den Komponenten des noch nicht festgelegten Systems  $K$  ausgeschrieben lautet dies:

$$T = \frac{3}{2} p (\psi_{s\alpha} i_{s\beta} - \psi_{s\beta} i_{s\alpha}) = \frac{3}{2} p (\psi_{s\delta} i_{s\gamma} - \psi_{s\gamma} i_{s\delta}) = \frac{3}{2} p (\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}) \quad (8.36)$$

Dies ist dem Drehmoment beim Synchronmotor genau gleich. Statt erneut die Leistungsbilanz auszuwerten, hätte man die Drehmomentbeziehung des Synchronmotors auch unmittelbar für den Asynchronmotor verwenden dürfen, denn in dieser Beziehung treten nur Statorgrößen auf und für das Drehmoment ist es unerheblich, auf welche Weise die kraftbildenden magnetischen Felder im Stator zu Stande kommen.

Das Einsetzen von

$$\underline{\psi}_s = \sigma L_s \underline{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.37)$$

führt zu einer weiteren Form der Drehmomentgleichung:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \operatorname{Im} \left( \underline{\psi}_r \underline{i}_s \right) \quad (8.38)$$

oder komponentenweise im allgemeinen Koordinatensystem  $K$ :

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} (\psi_{rd} i_{sq} - \psi_{rq} i_{sd}) \quad (8.39)$$

### 8.3 Flussorientierte Koordinatensysteme

Die obigen Darstellungen des Drehmoments mit Stator- oder Rotorfluss

$$T = \frac{3}{2} p (\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}) = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} (\psi_{rd} i_{sq} - \psi_{rq} i_{sd}) \quad (8.40)$$

geben den Anstoß, ähnlich wie beim Synchronmotor ein flussorientiertes Koordinatensystem zu definieren. Und zwar wird jetzt die Ausrichtung des bislang freien Koordinatensystem  $K$  mit den Achsen so festgelegt, dass die  $d$ -Achse in Richtung des Flusses zeigt. Dann ist per se die  $q$ -Komponente des Flusses gleich null. Da nun das Drehmomente sowohl mit dem Stator- als auch mit dem Rotorfluss ausgedrückt werden kann, führt das – je nachdem, ob die  $d/q$ -Achsen nach dem Stator- oder dem Rotorfluss ausgerichtet werden, so zwei verschiedenen Alternativen:

#### Statorfluss-Orientierung

Wird als  $d$ -Richtung die Richtung des Statorflusses gewählt (s. Fig. 8-9 links), spricht man von *Statorfluss-Orientierung*. In diesem Fall ist

$$\psi_{sd} = \left| \underline{\psi}_s \right| = \psi_s \quad \text{und} \quad \psi_{sq} = 0 \quad (8.41)$$

und man erhält für das Drehmoment

$$T = \frac{3}{2} p \psi_{sd} i_{sq} \quad (8.42)$$

#### Rotorfluss-Orientierung

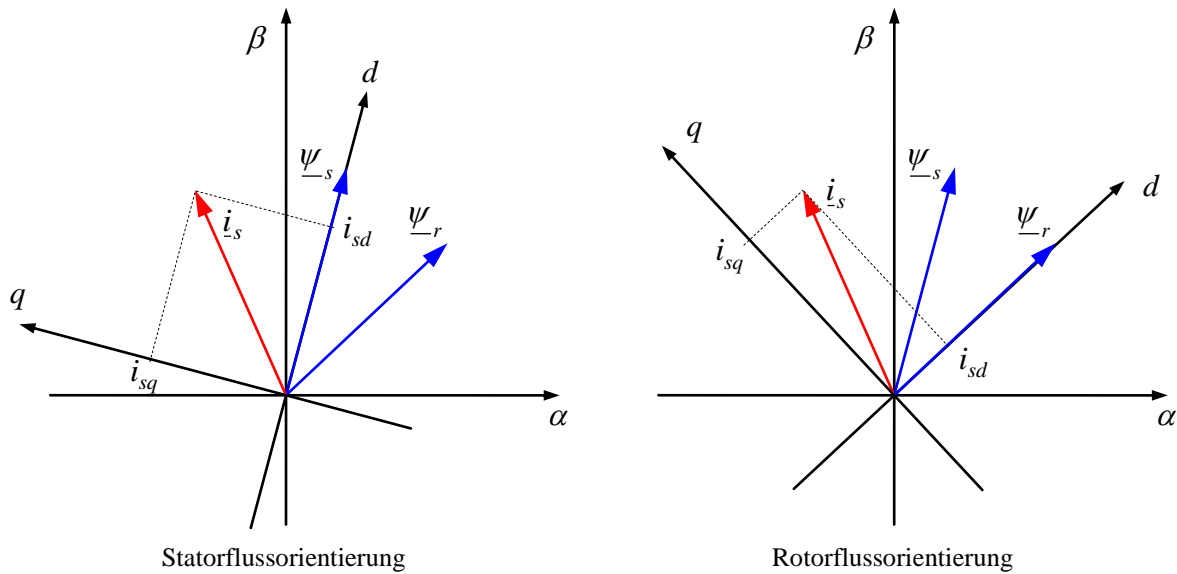
Bei der *Rotorfluss-Orientierung* (s. Fig. 8-9 rechts) wird die  $d$ -Achse in Richtung des Rotorflusses gewählt, also

$$\psi_{rd} = \left| \underline{\psi}_r \right| = \psi_r \quad \text{und} \quad \psi_{rq} = 0 \quad (8.43)$$

Hiermit lautet das Drehmoment

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_{rd} i_{sq} \quad (8.44)$$

Die Stromkomponente  $i_{sq}$  lässt sich nun wie beim permanent erregten Synchronmotor als drehmomentbildende Stromkomponente interpretieren. Die Bedeutung der Komponente  $i_{sd}$  wird später erarbeitet. Man beachte aber, dass es sich bei den  $d/q$ -Komponenten in den beiden alternativen Drehmomentdarstellungen (8.42) und (8.44) um unterschiedliche Koordinatenachsen handelt (vgl. Fig. 8-9). Im Folgenden wird nur die Rotorflussorientierung betrachtet. Auf die Statorflussorientierung wird hier nicht weiter eingegangen.



**Fig. 8-9:** Flussorientierte Koordinatensysteme

#### 8.4 Dynamische Modellierung in rotorflussorientierten Koordinaten

Die dynamischen Gleichungen in einem beliebigen Koordinatensystem wurden bereits entwickelt. Sie lauteten:

$$\underline{\dot{\psi}}_s^k = j\omega_{sk}\underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \underline{i}_s^k \quad (8.45)$$

$$\underline{\dot{\psi}}_r^k = j\omega_{rk}\underline{\psi}_r^k - R_r \underline{i}_r^k \quad (8.46)$$

Jetzt wird das Koordinatensystem  $K$  im Sinne der Rotorflussorientierung (8.43) festgelegt. Der komplexe Rotorflusszeiger besitzt in seinem eigenen rotorflussorientierten Koordinatensystem also nur einen Realteil:

$$\underline{\psi}_r^K = \underline{\psi}_r^{\psi_r} = \psi_{rd} + j\psi_{rq} = \psi_r \quad (8.47)$$

Neben dem Übergang auf das Rotorflusssystem soll aber auch auf neue Zustandsgrößen übergegangen werden. Bislang wurden die Differentialgleichungen mit Stator- und Rotorfluss als Zustandsgrößen angeschrieben. Im Hinblick auf die Drehmomentdarstellung soll nun aber auf Statorstrom und Rotorfluss als beschreibende Zustandsgrößen übergegangen werden. Dazu werden der Rotorstrom und der Statorfluss unter Zuhilfenahme der Gleichungen

$$\underline{i}_r = \frac{1}{L_r} \underline{\psi}_r - \frac{L_m}{L_r} \underline{i}_s \quad (8.48)$$

$$\underline{\psi}_s = \sigma L_s \underline{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.49)$$

welche aus den Induktivitätsbeziehungen herrühren, eliminiert.

### Rotorkreis

Das Einsetzen des Läuferstroms in die Läuferflussdifferentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_r^k &= j\omega_{rk}\underline{\psi}_r^k - \frac{R_r}{L_r}\underline{\psi}_r^k + \frac{R_r L_m}{L_r}\dot{i}_s^k \\ &= \left( j\omega_{rk} - \frac{R_r}{L_r} \right) \underline{\psi}_r^k + \frac{R_r L_m}{L_r} \dot{i}_s^k\end{aligned}\quad (8.50)$$

Der hierbei auftretende Term

$$\tau_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (8.51)$$

ist die *Rotorzeitkonstante*. Die Differentialgleichung erhält damit die Gestalt

$$\dot{\underline{\psi}}_r^k = \left( j\omega_{rk} - \frac{1}{\tau_r} \right) \underline{\psi}_r^k + \frac{L_m}{\tau_r} \dot{i}_s^k \quad (8.52)$$

Diese Gleichung wird nun in nach Real- und Imaginärteil, also nach  $d$ - und  $q$ -Komponenten darstellt, wobei beachtet wird, dass der Rotorfluss voraussetzungsgemäß keine  $q$ -Komponente besitzt:

$$\dot{\psi}_{rd} = \dot{\psi}_r = -\frac{R_r}{L_r}\psi_r + \frac{R_r L_m}{L_r}i_{sd} \quad (8.53)$$

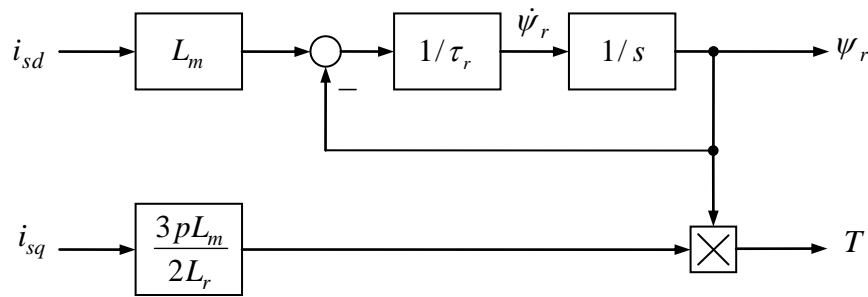
$$\dot{\psi}_{rq} = 0 = \omega_{r\psi_r}\psi_r + \frac{R_r L_m}{L_r}i_{sq} \quad (8.54)$$

Aus der letzten Gleichung lässt sich die bislang noch unbekannte Frequenz  $\omega_{r\psi_r}$  bestimmen. Dies ist die Frequenz, mit der sich das  $d/q$ -Koordinatensystem und demnach der Flusszeiger gegenüber dem Rotor bewegt. Sie wird auch als *Läuferfrequenz* oder *Schlupffrequenz* bezeichnet.

$$-\omega_{r\psi_r} = \omega_{\psi_r r} = \frac{R_r L_m}{L_r} \frac{i_{sq}}{\psi_r} \quad (8.55)$$

Die für das Drehmoment verantwortliche Komponente  $i_{sq}$  bestimmt also zusammen mit dem Rotorfluss  $\psi_r$  die Schlupffrequenz, während die Stromkomponente  $i_{sd}$  für den Aufbau des Rotorflusses verantwortlich ist. Sie werden als *drehmomentbildende* bzw. *flussbildende* oder *magnetisierende* Stromkomponente bezeichnet.





**Fig. 8-10:** Wirkungsplan der Fluss- und Drehmomentbildung (Rotorkreis)

### Ständerkreis

Das Einsetzen des Ständerflusses

$$\underline{\psi}_s = \sigma L_s \underline{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.56)$$

in die rechte und linke Seite der Ständerflussdifferenzialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \sigma L_s \dot{i}_s^k + \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k &= j\omega_{sk} \left( \sigma L_s \dot{i}_s^k + \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k \right) + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\ \sigma L_s \dot{i}_s^k + \frac{L_m}{L_r} \left( j\omega_{rk} \psi_r^k - \frac{R_r}{L_r} \psi_r^k + \frac{R_r L_m}{L_r} \dot{i}_s^k \right) &= j\omega_{sk} \sigma L_s \dot{i}_s^k + j\omega_{sk} \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r^k + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\ \sigma L_s \dot{i}_s^k &= \underline{u}_s^k + j\omega_{sk} \sigma L_s \dot{i}_s^k - \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) \dot{i}_s^k - j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} \psi_r^k + \frac{L_m R_r}{L_r^2} \psi_r^k \\ \sigma L_s \dot{i}_s^k &= \underline{u}_s^k - j\omega_{ks} \sigma L_s \dot{i}_s^k - \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) \dot{i}_s^k + \left( -j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} + \frac{L_m R_r}{L_r^2} \right) \psi_r^k \end{aligned} \quad (8.57)$$

wobei

$$\omega_{rs} = \omega_{rk} - \omega_{sk}$$

verwendet wurde. Wird explizit nach der Zeitableitung des Stroms aufgelöst, erhalten wir die Stromdifferenzialgleichung

$$\dot{i}_s^k = -j\omega_{ks} \dot{i}_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{u}_s^k - \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) \dot{i}_s^k + \left( -j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} + \frac{L_m R_r}{L_r^2} \right) \psi_r^k \right] \quad (8.58)$$

Die einzelnen Terme lassen sich folgendermaßen interpretieren: Der erste Term der rechten Seite rührt von der scheinbaren Änderung des Stroms aufgrund der Rotation des

Bezugssystems her. Durch die Multiplikation mit der imaginären Einheit werden die beiden Stromkomponenten also genau kreuzweise verkoppelt. Der erste Term in der Klammer ist die treibende äußere Spannung an einer Ersatz-Induktivität  $\sigma L_s$ , daneben wirkt ein ohmscher Spannungsabfall, in den auch der Rotorwiderstand eingeht. Außerdem gibt es Rückwirkungen des Rotorflusses, sowohl direkter, als auch rotatorischer Art.

Auch lässt sich eine typische Zeitkonstante, die Streuzeitkonstante

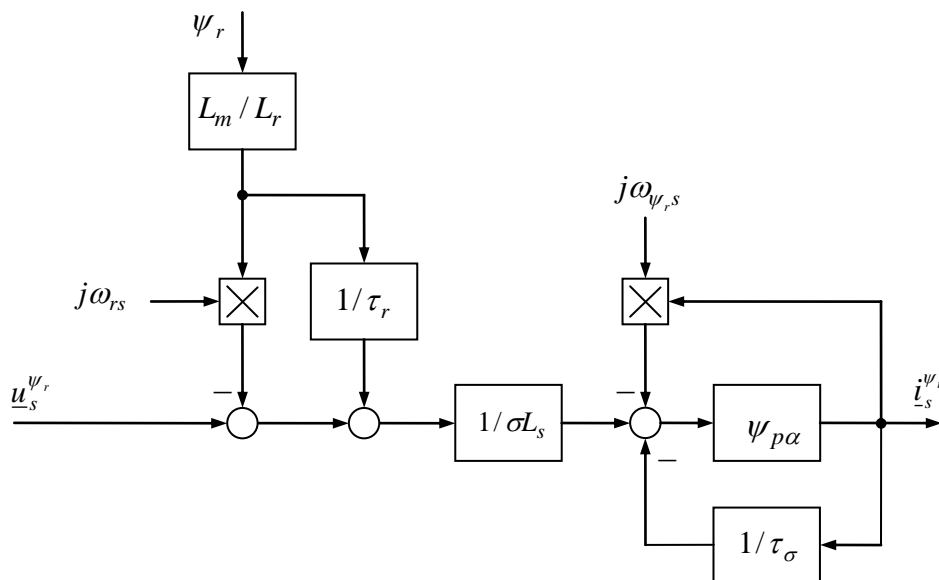
$$\tau_\sigma = \frac{\sigma L_s}{R_s + R_r} \frac{L_m^2}{L_r^2} \quad (8.59)$$

identifizieren. Damit:

$$\dot{\underline{i}}_s^k = -\left(j\omega_{ks} + \frac{1}{\tau_\sigma}\right) \underline{i}_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{u}_s^k + \left(-j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} + \frac{L_m R_r}{L_r^2}\right) \underline{\psi}_{-r}^k \right] \quad (8.60)$$

Die hier auftretende Kreisfrequenz  $\omega_{ks}$  ist

$$\omega_{ks} = \omega_{\psi_{r,s}} = \omega_{rs} + \omega_{\psi_{r,r}} \quad (8.61)$$



**Fig. 8-11:** Wirkungsplan des Ständerkreises in Rotorflussorientierung

### Regelungsidee für die Stromregelung

Der obige Wirkplan des Ständerkreises dient als Basis für den Entwurf einer unterlagerten Stromregelung: Die Rückwirkung aus dem Rotorkreis auf die Dynamik des Ständerstrom wird als Störgröße betrachtet und im Regler durch eine Störgrößenkompensation („EMK-Vorsteuerung“) kompensiert. Ebenso lässt sich die über die Kreisfrequenz  $\omega_{\psi_{r,s}}$  vermittelte Verkopplung der beiden Stromkomponenten im Regler durch eine entgegengesetzte Entkopplung kompensieren. Beide Terme werden im Entkopplungs- oder Vorsteueranteil  $\underline{u}_s^{k0}$  zusammengefasst. Die Gesamtspannung wird wie folgt dargestellt:

$$\underline{u}_s^k = \underline{\Delta u}_s^k + \underline{u}_s^{k0} = \underline{\Delta u}_s^k + j\omega_{ks} \sigma L_s \dot{i}_s^k + \left( j\omega_{rs} \frac{L_m}{L_r} - \frac{L_m R_r}{L_r^2} \right) \underline{\psi}_r^k \quad (8.62)$$

Setzt man diese Spannung in die obige Stromdifferentialgleichung ein, erhält man einen einfachen entkoppelten Ersatz-Ständerkreis:

$$\dot{i}_s^k = -\frac{1}{\tau_\sigma} i_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \Delta u_s^k \quad (8.63)$$

Komponentenweise:

$$\begin{aligned} \dot{i}_{sd} &= -\frac{1}{\tau_\sigma} i_{sd} + \frac{1}{\sigma L_s} \Delta u_{sd} \\ \dot{i}_{sq} &= -\frac{1}{\tau_\sigma} i_{sq} + \frac{1}{\sigma L_s} \Delta u_{sq} \end{aligned} \quad (8.64)$$

Das ist die gleiche Struktur wie schon beim permanent erregten Synchronmotor. Der weitere Regelungsentwurf wird entsprechend durchgeführt.

## 8.5 Transformation der Streuinduktivitäten

Ausgangspunkt:

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_s^k &= L_s \dot{i}_s^k + L_m \dot{i}_r^k \\ \underline{\psi}_r^k &= L_m \dot{i}_s^k + L_r \dot{i}_r^k\end{aligned}\quad (8.65)$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_s^k &= j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\ \dot{\underline{\psi}}_r^k &= j\omega_{rk} \underline{\psi}_r^k - R_r \dot{i}_r^k\end{aligned}$$

Die Ständergrößen, also Strom und Spannung aber auch der Ständerfluss sollen, da diese Größen sich an den Klemmen des Motors äußern, nicht verändert werden. Die Rotorgrößen werden mit einem konstanten Faktor  $c$  ausgehend von obigen Gleichungen skaliert:

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_s^k &= L_s \dot{i}_s^k + cL_m \frac{\dot{i}_r^k}{c} \\ c\underline{\psi}_r^k &= cL_m \dot{i}_s^k + c^2 L_r \frac{\dot{i}_r^k}{c}\end{aligned}\quad (8.66)$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_s^k &= j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\ c\dot{\underline{\psi}}_r^k &= j\omega_{rk} c\underline{\psi}_r^k - c^2 R_r \frac{\dot{i}_r^k}{c}\end{aligned}$$

und wieder in der alten Form

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_s^k &= L_s \dot{i}_s^k + L'_m \dot{i}'^k_r \\ \underline{\psi}'^k_r &= L'_m \dot{i}_s^k + L'_r \dot{i}'^k_r\end{aligned}\quad (8.67)$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\psi}}_s^k &= j\omega_{sk} \underline{\psi}_s^k + \underline{u}_s^k - R_s \dot{i}_s^k \\ \dot{\underline{\psi}}'^k_r &= j\omega_{rk} \underline{\psi}'^k_r - R'_r \dot{i}'^k_r\end{aligned}$$

Nun aber mit den transformierten Größen

$$\begin{aligned}\underline{\psi}'^k_r &= c\underline{\psi}_r^k \\ \dot{i}'^k_r &= \frac{\dot{i}_r^k}{c} \\ R'_r &= c^2 R_r \\ L'_m &= cL_m\end{aligned}\quad (8.68)$$

$$L'_r = c^2 L_r$$

geschrieben. Die Ständerinduktivität  $L_s$  wird durch die Transformation zwar nicht verändert. Es ändert sich aber ihre Aufteilung in Haupt- und Streuinduktivität:

$$L'_{\sigma s} = L_s - L'_m \quad (8.69)$$

Die transformierte Streuinduktivität des Rotors ist

$$L'_{\sigma r} = L'_r - L'_m \quad (8.70)$$

Durch die Wahl des Skalierungsfaktors kann die Streuung des resultierenden Ersatzschaltbildes zwischen Ständer- und Läuferkreis verschoben werden:

### 8.5.1 Modell mit ständerseitig konzentrierter Streuung

Soll die Streuinduktivität des Rotorkreises verschwinden, also

$$L'_{\sigma r} = L'_r - L'_m = 0$$

$$L'_r = L'_m$$

(8.71)

$$c^2 L_r = c L_m$$

Damit folgt für den Faktor

$$c = \frac{L_m}{L_r} \quad (8.72)$$

Die transformierten Größen lauten

$$\underline{\psi}'_r = \frac{L_m}{L_r} \underline{\psi}_r \quad (8.73)$$

$$\underline{i}'_r = \frac{L_r}{L_m} \underline{i}_r \quad (8.74)$$

$$R'_r = \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r \quad (8.75)$$

$$L'_m = L'_r = \frac{L_m^2}{L_r} = L_s \frac{L_m^2}{L_s L_r} = (1 - \sigma) L_s \quad (8.76)$$

$$L'_{\sigma s} = L_s - L'_m = L_s - \frac{L_m^2}{L_r} = L_s \left( 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} \right) = \sigma L_s \quad (8.77)$$

Die Drehmomentgleichung vereinfacht sich zu

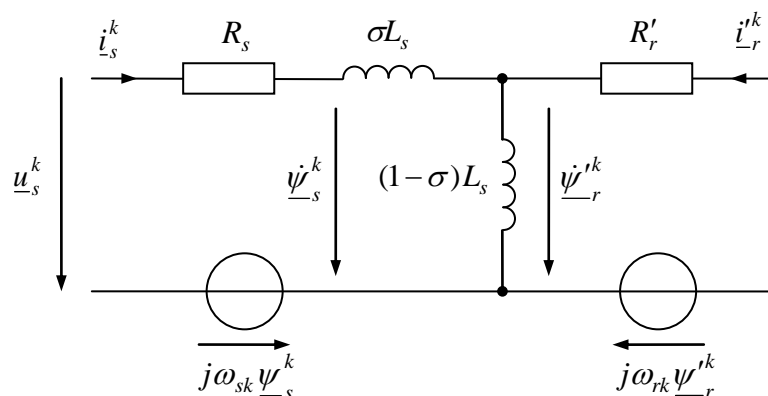
$$T = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\underline{\psi}'_r i'_s) \quad (8.78)$$

bzw.

$$T = \frac{3}{2} p \psi'_r i_{sq} \quad (8.79)$$

im rotorflussorientierten Koordinatensystem. Auch die Ständerstromdifferentialgleichung vereinfacht sich durch diese Transformation zu

$$\dot{i}_s^k = j\omega_{sk} i_s^k + \frac{1}{\sigma L_s} \left[ \underline{u}_s^k - (R_s + R'_r) i_s^k + \left( j\omega_{rs} + \frac{R'_r}{L'_m} \right) \underline{\psi}'_r{}^k \right] \quad (8.80)$$



**Fig. 8-12:** Ersatzschaltbild des Asynchronmotors mit ständerseitig konzentrierter Streuung

Da sich viele Beziehungen durch die Transformation der Streuinduktivität in den Ständerkreis vereinfachen, wird bei der rotorflussorientierten Regelung gern von vornherein von diesem Struktur ausgegangen.

### 8.5.2 Modell mit rotorseitig konzentrierter Streuung

Aus der Forderung

$$L'_{\sigma s} = L_s - L'_m = 0 \quad (8.81)$$

ergibt sich der Skalierungsfaktor zu

$$c = \frac{L_s}{L_m} \quad (8.82)$$

Es folgt für die transformierten Größen

$$\underline{\psi}'_r = \frac{L_s}{L_m} \underline{\psi}_r \quad (8.83)$$

$$\underline{i}'_r = \frac{L_m}{L_s} \underline{i}_r \quad (8.84)$$

$$R'_r = \frac{L_s^2}{L_m^2} R_r \quad (8.85)$$

$$L'_m = L_s \quad (8.86)$$

$$L'_r = \frac{L_s^2}{L_m^2} L_r = L_s \frac{L_s L_r}{L_m^2} = \frac{1}{1-\sigma} L_s \quad (8.87)$$

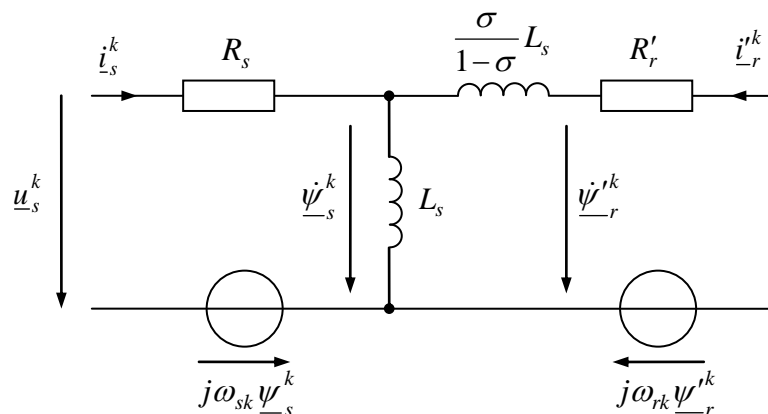
$$L'_{\sigma r} = L'_r - L_s = \frac{\sigma}{1-\sigma} L_s \quad (8.88)$$

Die Drehmomentbeziehung lautet

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r L_s} \text{Im}(\underline{\psi}'_r \underline{i}_s) = \frac{3}{2} p (1-\sigma) \text{Im}(\underline{\psi}'_r \underline{i}_s) \quad (8.89)$$

bzw.

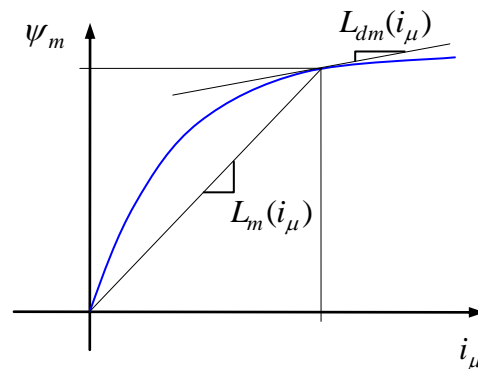
$$T = \frac{3}{2} p (1-\sigma) \psi'_r i_{sq} \quad (8.90)$$



**Fig. 8-13:** Ersatzschaltbild des Asynchronmotors mit rotorseitig konzentrierter Streuung

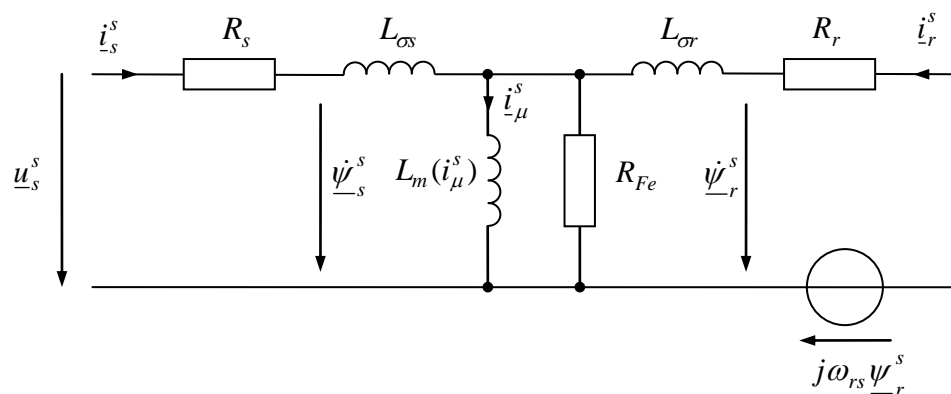
## 8.6 Berücksichtigung des realen Magnetisierungsverhaltens

Bislang wurden die Induktivitäten im Modell des Asynchronmotors als ideal konstant angesehen. Tatsächlich wird das Eisen im Motor im Betrieb nicht unerheblich gesättigt. Dies ist das Resultat einer wirtschaftlich-technisch optimalen Auslegung, das man die Eisensättigung natürlich durch Einsatz von mehr Material verringern könnte, was den Motor aber schwer und teuer machen würde. Oft reicht es aus, nur die Sättigung der Hauptinduktivität zu berücksichtigen und die Streuinduktivitäten weiterhin als konstant anzunehmen. Dann ist die Hauptinduktivität bzw. der Hauptfluss vom Magnetisierungsstrom  $i_\mu$  abhängig.



**Fig. 8-14:** Sättigung der Hauptinduktivität

Die Ummagnetisierung des Materials ist aufgrund des hysteretischen Verhaltens mit zusätzlichen Verlusten verbunden. Näherungsweise kann man annehmen, dass diese Verluste in etwa quadratisch mit dem Flussbetrag ansteigen. Mit der Frequenz steigen sie zunächst etwas linear an. Diese Gesetzmäßigkeit zusätzlicher Ummagnetisierungsverluste lässt sich im Ersatzschaltbild durch einen weiteren zur Hauptinduktivität parallel angeordneten Ersatzwiderstand  $R_{Fe}$  berücksichtigen.



**Fig. 8-15:** Ersatzschaltbild mit Berücksichtigung der Sättigung der Hauptinduktivität und der Eisenverluste



## 8.7 Stationäres Betriebsverhalten

### 8.7.1 Spannungsgleichungen und Zeigerdiagramm

Im stationären Zustand sind alle Größen im flussorientierten Bezugssystem eingeschwungen. Insbesondere haben dann auch alle Zeiger von Strömen, Spannungen und Flüssen die gleiche Winkelgeschwindigkeit. Die Kreisfrequenz des Rotorflusssystems ist dann genau die elektrische Frequenz von Strom und Spannung an den Ständerklemmen, so dass im stationären Zustand die einfachere Bezeichnung *Ständerfrequenz*

$$\omega_s = \omega_{\psi_{r,s}} = \omega_{u_{s,s}} = \omega_{i_{s,s}} \quad (8.91)$$

verwendet werden kann. Die Frequenz zwischen den elektrischen Zeigern und dem Rotor wird als Rotorfrequenz bzw. Schlupffrequenz bezeichnet:

$$\omega_r = \omega_{\psi_{r,r}} = \omega_{u_{s,r}} = \omega_{i_{s,r}} \quad (8.92)$$

Die (auf das elektrische System bezogene) Drehfrequenz ist damit

$$\omega_{rs} = \omega_s - \omega_r \quad (8.93)$$

Die dimensionslose Größe

$$s = \frac{\omega_r}{\omega_s} \quad (8.94)$$

heißt *Schlupf*.

Im stationären Zustand stellt sich der stationäre Rotorfluss

$$\psi_r = L_m i_{sd} \quad (8.95)$$

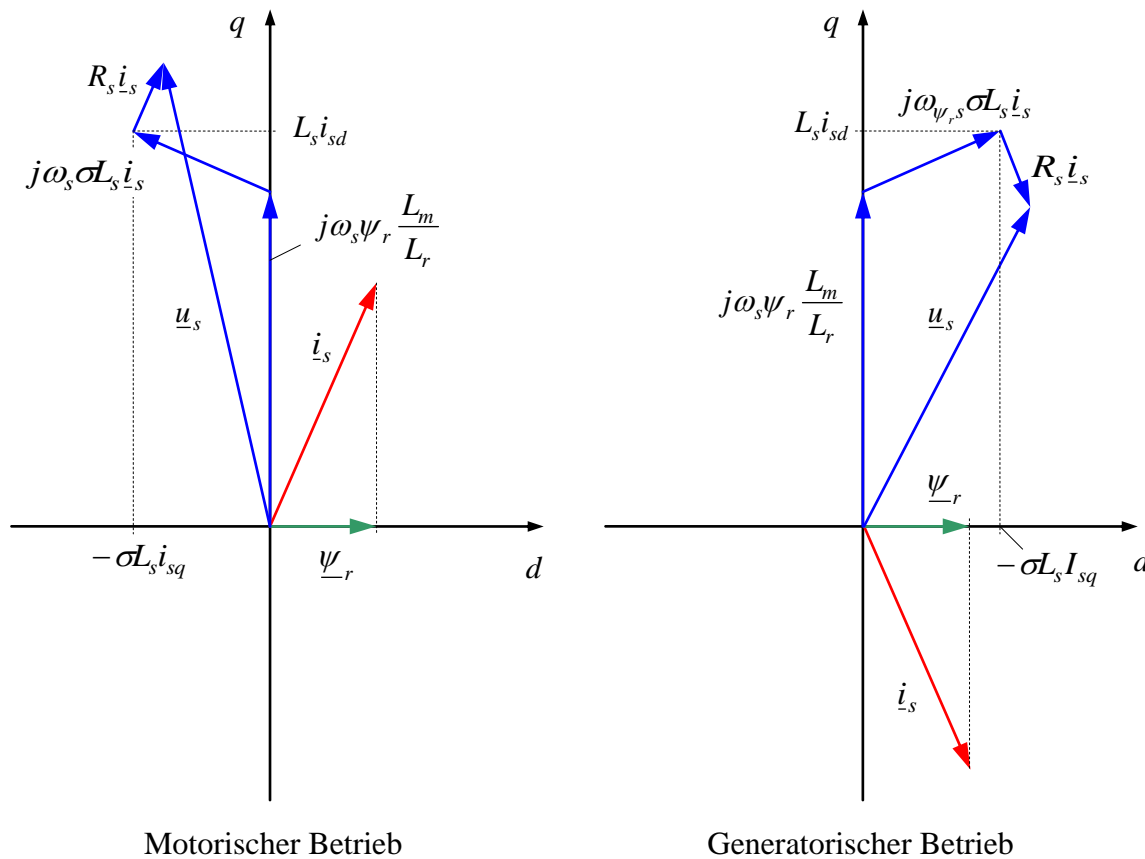
ein. Die stationäre Ständerspannung lautet

$$\underline{u}_s^{\psi_r} = R_s i_s^{\psi_r} + j\omega_s \left( \sigma L_s i_s^{\psi_r} + \frac{L_m}{L_r} \psi_r \right) \quad (8.96)$$

bzw. in einzelnen Komponenten

$$u_{sd} = R_s i_{sd} - \omega_s \sigma L_s i_{sq} \quad (8.97)$$

$$\begin{aligned}
 u_{sq} &= R_s i_{sq} + \omega_s \left( \sigma L_s i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \psi_r \right) \\
 &= R_s i_{sq} + \omega_s \left( \sigma L_s + \frac{L_m^2}{L_r} \right) i_{sd} \\
 &= R_s i_{sq} + \omega_s L_s i_{sd}
 \end{aligned}$$



**Fig. 8-16:** Zeigerdiagramme für den stationären Zustand  
(bei passender Skalierung von Strom- und Flusszeiger lässt sich der Rotorfluss als Projektion des Ständerstromzeigers auf die  $d$ -Achse darstellen)

Im stationären Zustand kann man die Beziehung für das Drehmoment direkt als Produkt der Stromkomponenten ausdrücken:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} \quad (8.98)$$

Das Drehmoment ist also direkt der durch den Stromzeiger aufgespannten Rechteckfläche in  $d/q$ -Koordinaten proportional, sofern die restlichen Parameter als konstant angenommen werden.

### 8.7.2 Stationäres Ersatzschaltbild

Ausgangspunkt: Ständer- und Rotorspannungsgleichungen

$$\underline{u}_s^{\psi_r} = R_s \underline{i}_s^{\psi_r} + j\omega_s \underline{\psi}_s^{\psi_r} = R_s \underline{i}_s^{\psi_r} + j\omega_s L_m (\underline{i}_s^{\psi_r} + \underline{i}_r^{\psi_r}) + j\omega_s L_{\sigma s} \underline{i}_s^{\psi_r}$$

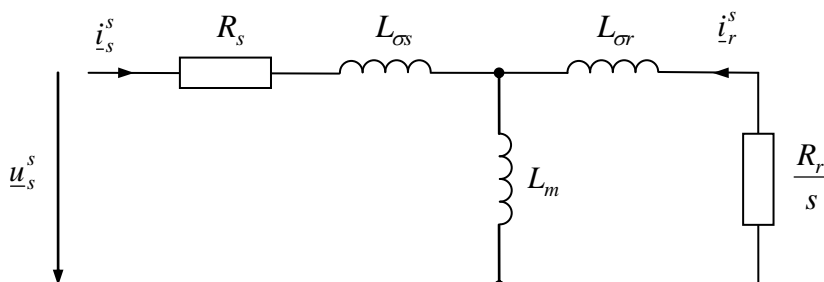
$$0 = \underline{u}_r^{\psi_r} = R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_r \underline{\psi}_r^{\psi_r} = R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_r L_m (\underline{i}_s^{\psi_r} + \underline{i}_r^{\psi_r}) + j\omega_r L_{\sigma r} \underline{i}_r^{\psi_r}$$

Die Division der Läufer Spannungsgleichung durch den Schlupf  $s$  liefert

$$0 = \frac{1}{s} R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_s \underline{\psi}_r^{\psi_r}$$

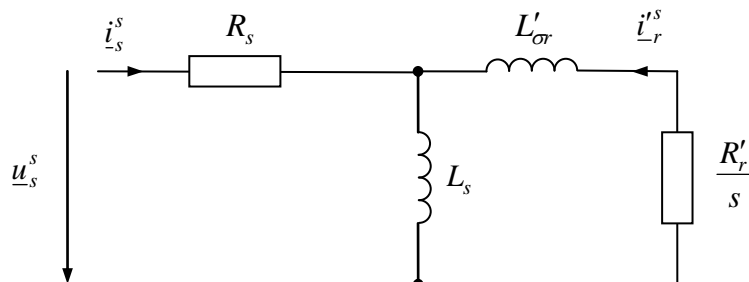
$$= \frac{1}{s} R_r \underline{i}_r^{\psi_r} + j\omega_s L_m (\underline{i}_s^{\psi_r} + \underline{i}_r^{\psi_r}) + j\omega_s L_{\sigma r} \underline{i}_r^{\psi_r}$$

Diese Gleichungen können nun im Sinne der normalen komplexen Zeiger für Wechselspannungssysteme interpretiert werden. Die Terme  $j\omega_s L_m$ ,  $j\omega_s L_{\sigma s}$ ,  $j\omega_s L_{\sigma r}$  werden als komplexe Wechselspannungs-Impedanzen der Induktivitäten bei einer Speisung mit der Frequenz  $\omega_s$  aufgefasst. Das führt zu dem folgenden Ersatzschaltbild, welches im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Ersatzschaltbildern nur für den stationären Zustand gültig ist.



**Fig. 8-17:** Stationäres Ersatzschaltbild des Asynchronmotors

In diesem Ersatzschaltbild kann die Ständerstreuinduktivität in den Rotorkreis transformiert werden (Abschnitt 8.5.2):



**Fig. 8-18:** Ersatzschaltbild des Asynchronmotors für den stationären Zustand mit rotorseitig konzentrierter Streuung

### 8.7.3 Drehmoment bei Speisung mit konstanter Spannung und konstanter Frequenz

Im unregelten Betrieb kann der Asynchronmotor an ein Drehspannungssystem mit konstanter Amplitude und Frequenz angeschlossen werden. Zur Bestimmung des Drehmoments wird von der Gleichung

$$T = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\underline{\psi}_s^s i_s) = -\frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\underline{\psi}_s^s i_r) \quad (8.99)$$

ausgegangen, wobei vom obigen stationären Ersatzschaltbild mit rotorseitig konzentrierter Streuung Gebrauch gemacht wird. Der Rotorstrom wird unter Vernachlässigung des Ständerwiderstands  $R_s$  über die Rotormasche zu

$$\underline{i}_r^s = -\frac{1}{\frac{R_r'}{s} + j\omega_s L_{\sigma r}'} \underline{u}_s^s \quad (8.100)$$

bestimmt. Der Ständerfluss ist dann

$$\underline{\psi}_s^s = \frac{1}{j\omega_s} \underline{u}_s^s \quad (8.101)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
T &= -\frac{3}{2} p \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{-j\omega_s} \frac{\underline{u}_s}{s} \frac{-1}{\frac{R'_r}{s} + j\omega_s L'_{\sigma r}} \underline{u}_s \right] \\
&= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\frac{R'_r}{s} + j\omega_s L'_{\sigma r}} \right] \\
&= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{s}{R'_r + j\omega_s s L'_{\sigma r}} \right] \\
&= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega_s s}{R'_r + j\omega_s s L'_{\sigma r}} \right] \\
&= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega_s s (R'_r - j\omega_s s L'_{\sigma r})}{R_r'^2 + (\omega_s s L'_{\sigma r})^2} \right] \\
&= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_s s R'_r}{R_r'^2 + (\omega_s s L'_{\sigma r})^2} \\
&= \frac{3}{2} p \frac{u_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_r R'_r}{R_r'^2 + (\omega_r L'_{\sigma r})^2}
\end{aligned} \tag{8.102}$$

Benutzt man statt des Zeigerbetrags der Ständerspannung den Effektivwert

$$U_s = \frac{u_s}{\sqrt{2}} \tag{8.103}$$

erhält die Gleichung die Form

$$T = 3p \frac{U_s^2}{\omega_s^2} \frac{\omega_r R'_r}{R_r'^2 + (\omega_r L'_{\sigma r})^2} \tag{8.104}$$

welche als Klosssche Formel bezeichnet wird. Bei konstanter Ständerfrequenz wird das maximale Drehmoment bei der Rotorfrequenz

$$\omega_{rk} = \frac{R'_r}{L'_{\sigma r}} \tag{8.105}$$

erreicht, die als *Kippfrequenz* bezeichnet wird, wie man durch Kurvendiskussion schnell zeigen kann. Das Drehmoment an dieser Stelle wird als *Kipp-Drehmoment* bezeichnet. Es beträgt

$$T_k = \frac{3p}{2} \frac{U_s^2}{L'_{\sigma r} \omega_s^2} \tag{8.106}$$

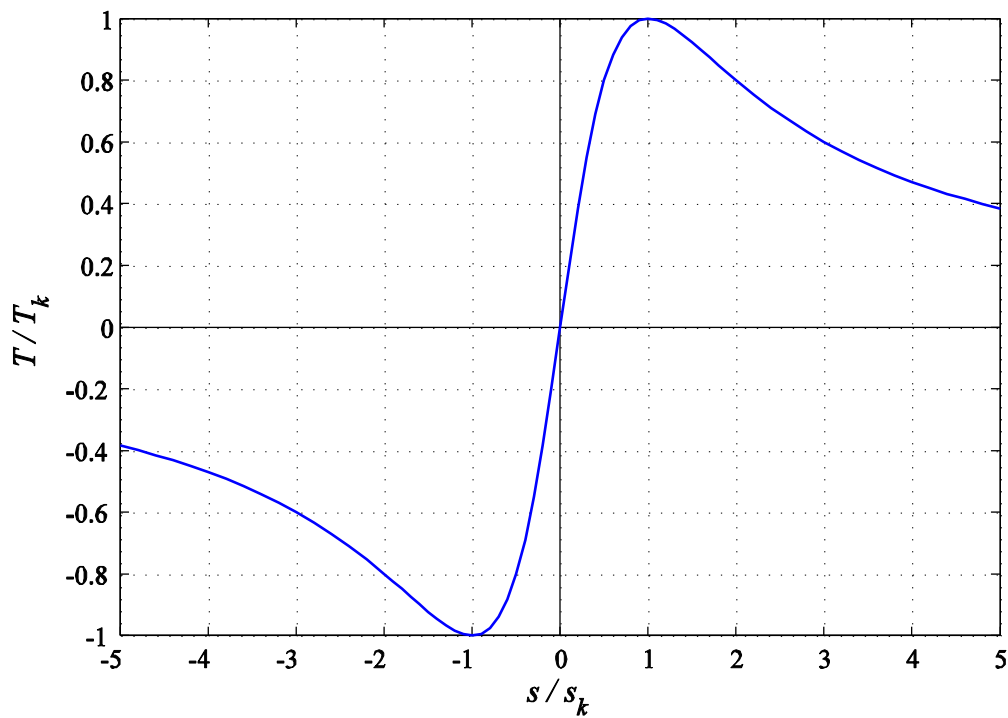
Mit Hilfe der Größen des Kippunktes lässt sich die Drehmomentbeziehung in der übersichtlichen Form

$$\frac{T}{T_k} = \frac{2}{\frac{\omega_r}{\omega_{rk}} + \frac{\omega_{rk}}{\omega_r}} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (8.107)$$

ausdrücken. Für kleinen Schlupf  $|s| \ll s_k$  kann das Drehmomentverhalten durch

$$\frac{T}{T_k} \approx 2 \frac{s}{s_k} \quad (8.108)$$

linear approximiert werden.



**Fig. 8-19:** Drehmoment in Abhängigkeit des Schlupfes

### 8.7.4 Verlustminimaler Betrieb

Im stationären Zustand lässt sich das Drehmoment durch das Produkt der beiden Stromkomponenten ausdrücken:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} \quad (8.109)$$

Ein gewünschtes Drehmoment lässt sich also durch verschiedene Kombination von  $i_{sd}, i_{sq}$  erreichen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche dieser möglichen Arbeitspunkte die kleinsten ohmschen Verluste verursacht. Die ohmschen Stator- und Rotorverluste lauten

$$P_d = \frac{3}{2} R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + \frac{3}{2} R_r (i_{rd}^2 + i_{rq}^2) \quad (8.110)$$

Die Rotorströme können mit Hilfe der Beziehung

$$\underline{\psi}_r = L_m \underline{i}_s + L_r \underline{i}_r \quad (8.111)$$

durch Rotorfluss und Ständerströme ausgedrückt werden. Komponentenweise ergibt dies

$$i_{rd} = \frac{1}{L_r} \psi_{rd} - \frac{L_m}{L_r} i_{sd} = \frac{1}{L_r} \psi_r - \frac{L_m}{L_r} i_{sd} \quad (8.112)$$

$$i_{rq} = \frac{1}{L_r} \psi_{rq} - \frac{L_m}{L_r} i_{sq} = -\frac{L_m}{L_r} i_{sq} \quad (8.113)$$

Im stationären Zustand, auf den die weitere Betrachtung beschränkt werden möge, gilt außerdem

$$\psi_r = L_m i_{sd} \quad (8.114)$$

so dass also die  $d$ -Komponente des Rotorstrom im stationären Zustand stets Null ist:

$$i_{rd} = 0 .$$

Die ohmschen Verluste können dann allein durch die Statorströme ausgedrückt werden:

$$P_d = \frac{3}{2} R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + \frac{3}{2} R_r i_{rq}^2 = \frac{3}{2} \left[ R_s i_{sd}^2 + \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{sq}^2 \right] \quad (8.115)$$

Diese Verluste sind nun für ein gegebenes Drehmoment  $T$  zu minimieren. Mathematisch handelt es sich um eine Extremwertaufgabe mit zwei Variablen  $i_{sd}, i_{sq}$  und einer Nebenbedingung, was durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion

$$L(i_{sd}, i_{sq}, \lambda) = T(i_{sd}, i_{sq}) - \lambda P_d(i_{sd}, i_{sq}) \quad (8.116)$$

gelöst wird:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial i_{sd}} &= \frac{\partial T}{\partial i_{sd}} - \lambda \frac{\partial P_d}{\partial i_{sd}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial i_{sq}} &= \frac{\partial T}{\partial i_{sq}} - \lambda \frac{\partial P_d}{\partial i_{sq}} = 0\end{aligned}$$

Das ergibt also

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sq} &= \frac{3}{2} 2\lambda R_s i_{sd} \\ \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} &= \frac{3}{2} 2\lambda \left( R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r} \right) i_{sq}\end{aligned}\tag{8.117}$$

Die Division beider Gleichungen eliminiert den Lagrangeschen Multiplikator  $\lambda$  und führt zu

$$\begin{aligned}\frac{i_{sq}}{i_{sd}} &= \frac{R_s}{R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r}} \frac{i_{sd}}{i_{sq}}, \\ \frac{i_{sq}}{i_{sd}} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r}}}\end{aligned}\tag{8.118}$$

Die verlustminimalen Betriebspunkte liegen also in der  $i_{sd}/i_{sq}$ -Ebene auf Ursprungsgeraden mit der oben bestimmten Steigung. Motorischer und generatorischer Betrieb unterscheiden sich durch die Vorzeichen. Nun sollen noch die Stromkomponenten in Abhängigkeit des vorgegebenen Drehmoments bestimmt werden. Mittels der letzten Formel kann  $i_{sq}$  in der Drehmomentformel eliminiert werden:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} = \pm \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_r}{R_s} \frac{L_m^2}{L_r}}} i_{sd}^2\tag{8.119}$$

Die Auflösung nach  $i_{sd}$  ergibt



$$i_{sd} = \sqrt{|T| \frac{2L_r}{3pL_m^2} \sqrt{1 + \frac{R_r L_m^2}{R_s L_r^2}}} \quad (8.120)$$

und dann

$$i_{sq} = \operatorname{sgn}(T) \sqrt{\frac{\frac{2L_r}{3pL_m^2}}{\sqrt{1 + \frac{R_r L_m^2}{R_s L_r^2}}}} \quad (8.121)$$

Der optimale Rotorfluss ist demnach

$$\psi_r = L_m i_{sd} = \sqrt{|T| \frac{2L_r}{3p} \sqrt{1 + \frac{R_r L_m^2}{R_s L_r^2}}} \quad (8.122)$$

Die Rechnung wurde wieder unter der Annahme konstanter Induktivitäten ausgeführt, was für kleine Magnetisierungen eine brauchbare Näherung ist. In der Nähe des Bemessungspunktes wird die Sättigung aber stärker, so dass das hier gefundene Ergebnis ähnlich wie in Abschnitt 8.7.5 modifiziert werden muss.

Im Rahmen der rotorflussorientierten Regelung würde man nur den oben bestimmten Rotorfluss als Sollwert der Flussregelung vorgeben. Der Flussregler würde dann für die Einstellung des notwendigen magnetisierenden Stroms  $i_{sd}$  sorgen und die Drehmomentsteuerung das passende  $i_{sq}$  einstellen. Die obigen Formeln für  $i_{sd}$  und  $i_{sq}$  müssen also in der Regelung nicht implementiert werden, sondern nur diejenige für  $\psi_r$  in Abhängigkeit des Soll-Drehmoments.

Führt man den Rotorfluss entsprechend der Strategie dieser Verlustminimierung, muss eine verringerte Drehmomentdynamik in Kauf genommen werden. Da der Fluss sich nur über die recht große Rotorzeitkonstante verändert, können dynamische Drehmomentanforderungen nicht so schnell umgesetzt werden. Wird ein hochdynamisches Drehmomentverhalten gefordert, sollte auch im Leerlauf und bei Schwachlast ständig ein genügend großer Fluss im Motor vorgehalten werden.

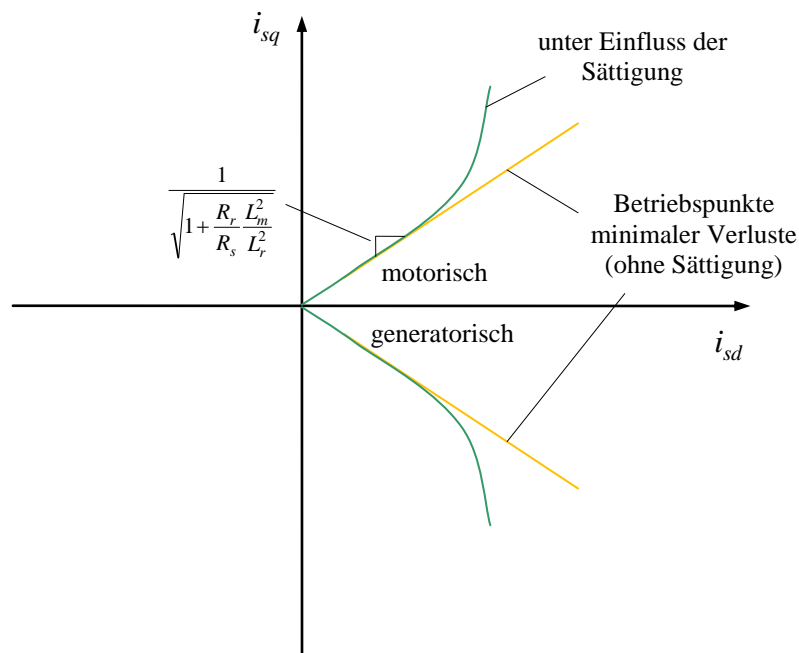


Fig. 8-20: Betriebspunkte minimaler Verluste

### 8.7.5 Betrieb an der Stromgrenze

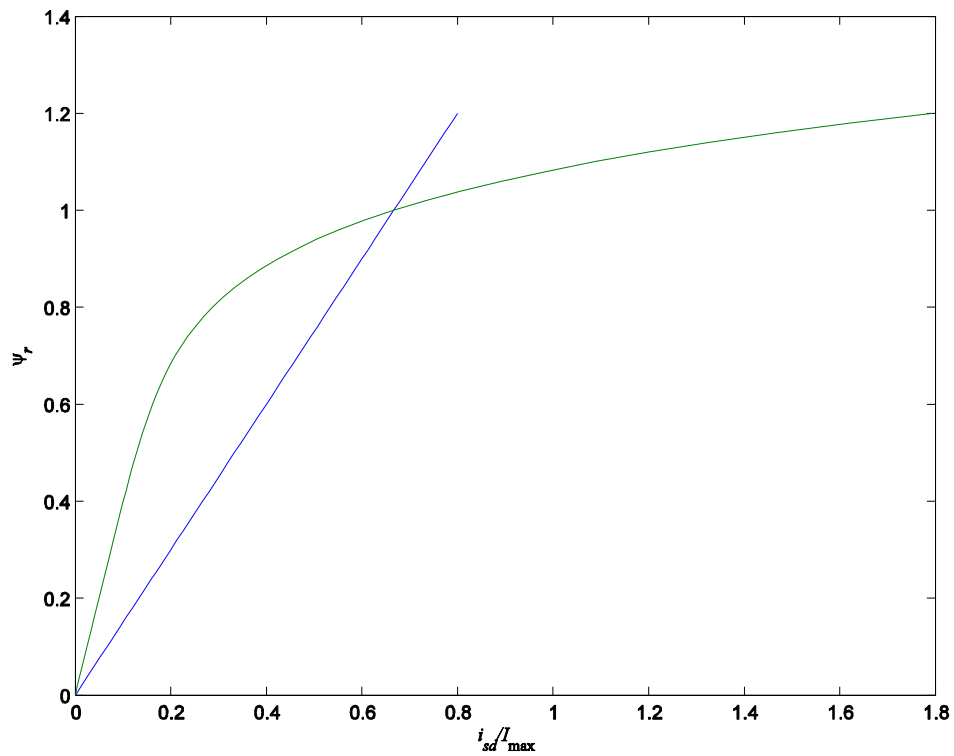
Kurven konstanten Drehmoments in der Stromebene sind also Hyperbeln. Allerdings sind die Induktivitäten aufgrund der Sättigung des magnetischen Materials vom Strom abhängig. Bei konstant angenommenen Induktivitäten würde das maximale Drehmoment bei einem maximal möglichen Strom

$$i_{\max} > i_s = |\dot{i}_s| = \sqrt{i_{sd}^2 + i_{sq}^2}$$

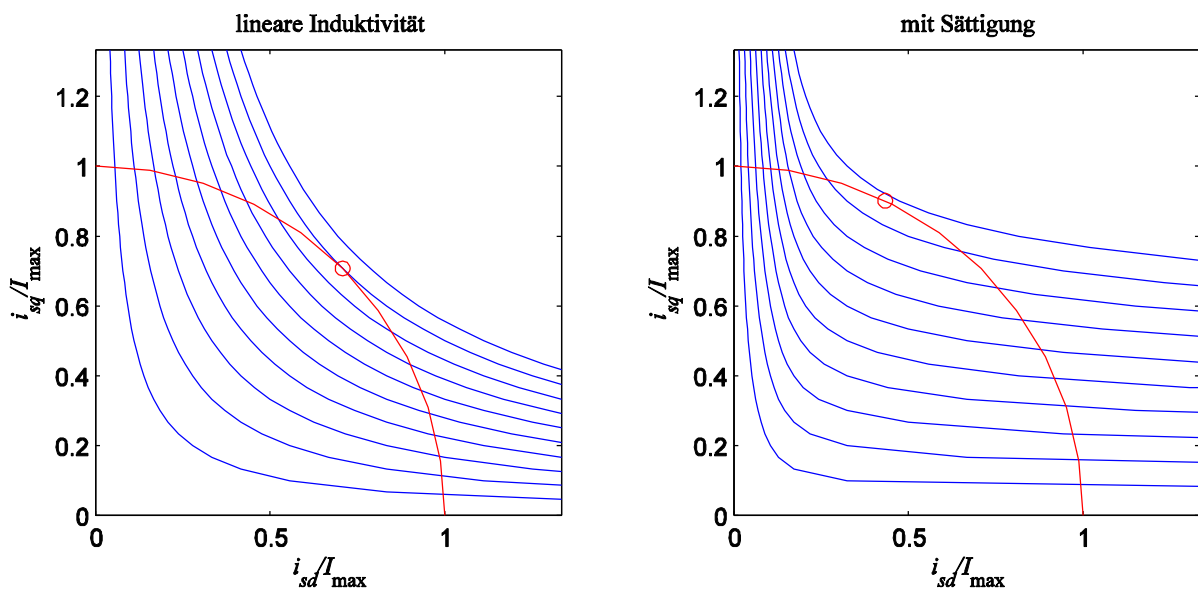
im Punkt

$$i_{sd} = i_{sq} = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$$

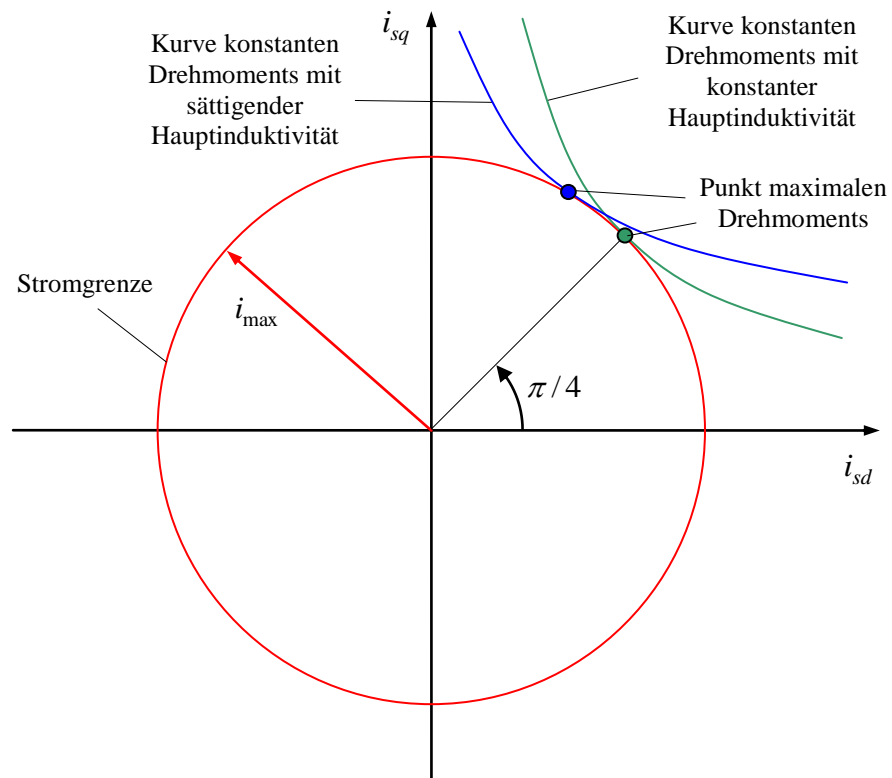
angenommen. Da die realen Kurven konstanten Drehmoments aufgrund der Eisensättigung merklich von der Hyperbelform abweichen, wird das maximale Drehmoment in der Regel in einem Punkt erreicht, bei dem drehmomentbildende  $i_{sq}$  Strom deutlich größer als der magnetisierende Strom  $i_{sd}$  ist.



**Fig. 8-21:** Stationäre Kennlinie des Rotorflusses über der magnetisierenden Stromkomponente für lineare und sättigende Induktivität



**Fig. 8-22:** Kurven konstanten Drehmoments für lineare und sättigende Induktivität und Punkt maximalen Drehmoments bei gegebenem Maximalstrom



**Fig. 8-23:** Vergleich der Betriebspunkte maximalen Drehmoments für lineare und sättigende Induktivität

### 8.7.6 Betrieb an der Spannungsgrenze, Flussschwächung

Bei konstantem Läuferfluss steigt mit steigender Drehzahl die Motorspannung etwa proportional an. Vernachlässigt man die ohmschen Spannungsabfälle, gilt für den Spannungsbetrag im stationären Zustand

$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 = \omega_s^2 [(\psi_r + \sigma L_s i_{sd})^2 + (\sigma L_s i_{sq})^2] = \omega_s^2 [(L_s i_{sd})^2 + (\sigma L_s i_{sq})^2]$$

Der speisende Umrichter kann nur eine maximale Spannung bereitstellen, welche durch die Fläche des Hexagons beschränkt ist (s. Abschnitt 3). Für eine einfache Betrachtung nehmen wir eine kreisförmige Beschränkung mit

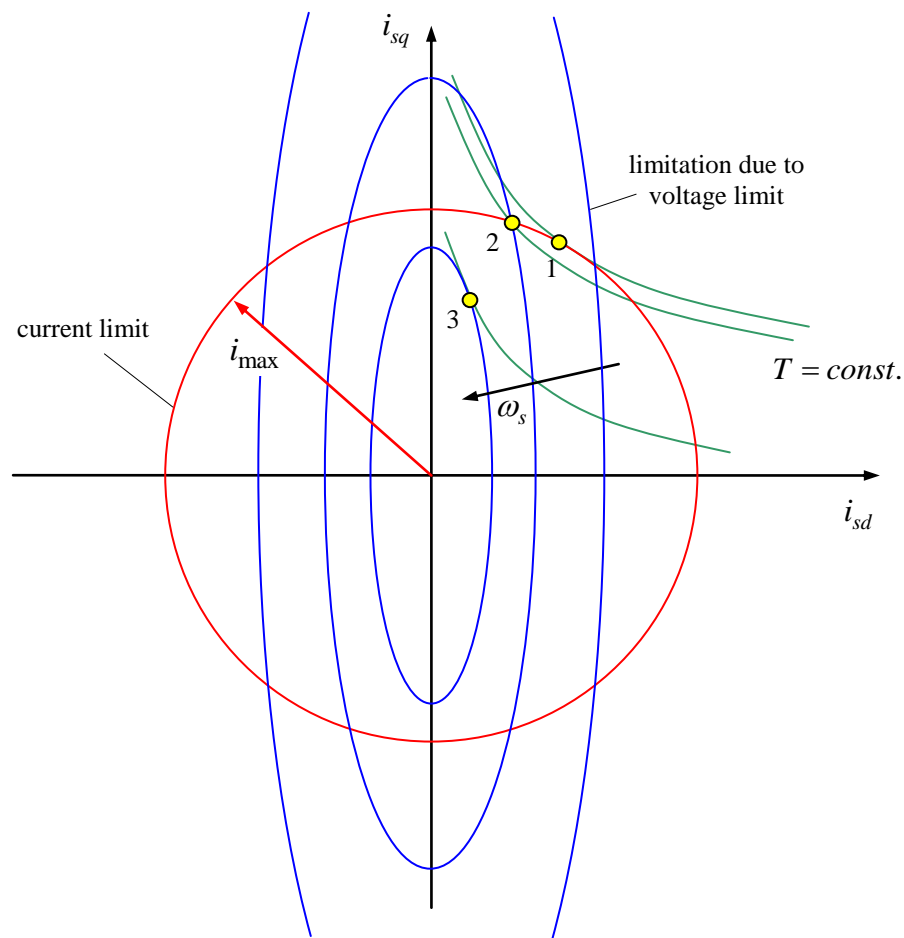
$$u_s^2 = u_{sd}^2 + u_{sq}^2 \leq u_{\max}^2$$

an. Bei kleinen Drehzahlen bzw. Frequenzen ist die Umrichterspannung in der Regel ausreichend und die Spannungsgrenze wird nicht erreicht. Wächst die dann Drehzahl an, wird irgendwann die Spannungsgrenze erreicht. Dieser Punkt wird als Bemessungs- oder Typenpunkt des Antriebs bezeichnet. Größere Drehzahlen können erreicht werden, indem der Läuferfluss reduziert (geschwächt) wird. Dadurch sinkt allerdings das verfügbare Drehmoment

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} = \frac{3}{2} p \frac{L_m^2}{L_r} i_{sd} i_{sq} ,$$

es sei denn, der reduzierte Fluss  $\psi_r$  kann durch einen vergrößerten Strom  $i_{sq}$  ausgeglichen werden, was aber in der Regel nicht oder nur begrenzt möglich ist, da der Strom seinerseits durch die Stromgrenze  $i_{\max}$  begrenzt ist. Man kann die Beschränkung der Spannung auch in der Ebene der Ströme darstellen. Dadurch ergeben sich beschränkende Ellipsen, die mit wachsender Ständerfrequenz immer kleiner werden. Die Hauptachsen dieser Ellipse liegen in der  $i_d$ - und  $i_q$ -Richtung und haben die Längen

$$\frac{u_{\max}}{\omega_s L_s} \quad \text{und} \quad \frac{u_{\max}}{\omega_s \sigma L_s}$$



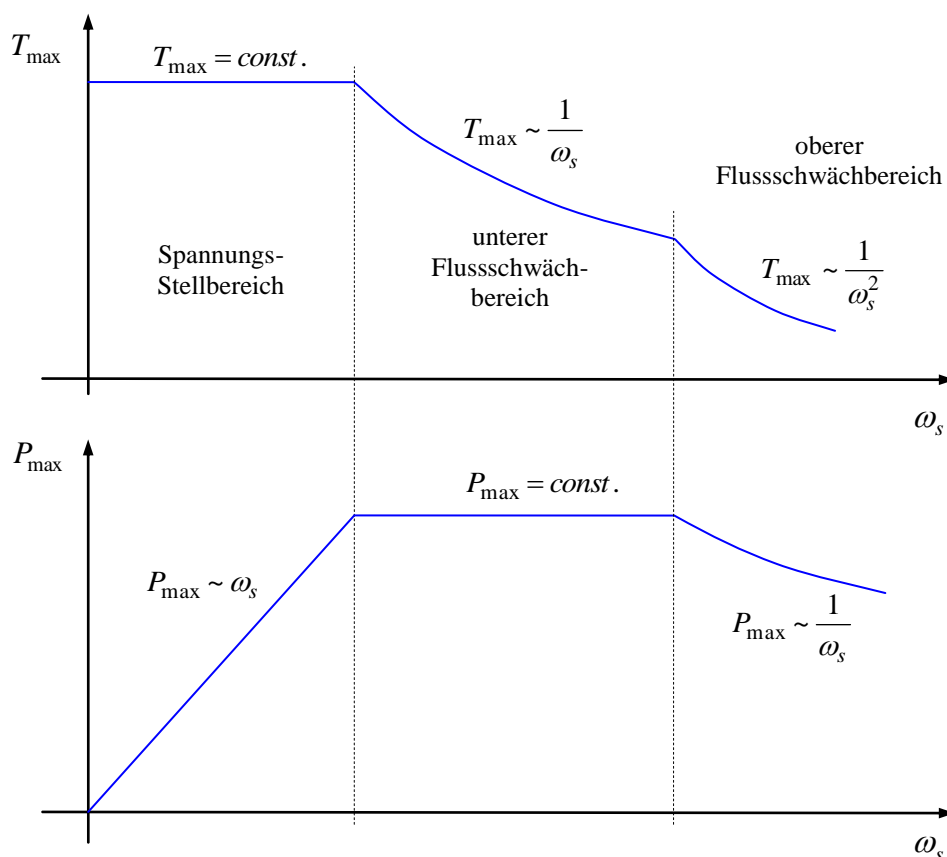
**Fig. 8-24:** Betrieb an Spannungs- und Stromgrenze

Mit dem Diagramm können drei qualitativ verschiedene Fälle verdeutlicht werden:

1. Die Drehzahl bzw. die Ständerfrequenz ist klein bzw. die verfügbare Spannung genügend groß, so dass die Spannungsgrenze für alle möglichen Stromzeiger innerhalb der Strombegrenzung keine zusätzliche Einschränkung darstellt. Das größte Drehmoment wird im Berührungspunkt der Drehmoment-Isolinien mit dem Strombegrenzungskreis erreicht (Punkt 1). Das erreichbare maximale Drehmoment ist in diesem Bereich unabhängig von der Frequenz. Setzt man überschlägig Ständerfrequenz und Drehfrequenz gleich, so ergibt sich in diesem Bereich eine mit der Frequenz proportional wachsende Leistung. Dieser Bereich wird als *Spannungsstellbereich* oder in Anlehnung an die Begriffe des Gleichstrommotors als *Ankerstellbereich* bezeichnet.
2. Bei größerer Drehzahl bzw. Frequenz kommt die Spannungsgrenze zum Tragen. Es sind nur noch diejenigen Stromzeiger möglich, die sowohl innerhalb des Strombegrenzungskreises als auch innerhalb der begrenzenden Spannungsellipse liegen. Das maximale Drehmoment wird im Schnittpunkt beider Begrenzungskurven erreicht. Das maximale verfügbare Drehmoment reduziert sich mit wachsender Frequenz überschlägig mit  $1/\omega_s$ . Da in diesem Bereich die flussbildende

Stromkomponente  $i_{sd}$  bzw. der Rotorfluss  $\psi_r$  drehzahlabhängig verringert werden muss, heißt dieser Bereich *Flussschwächbereich*, genauer *unterer Flussschwächbereich*. Die maximal mögliche Leistung ist im unteren Flussschwächbereich näherungsweise konstant.

- Bei weiter wachsender Frequenz werden die aus der Spannungsbegrenzung herrührenden Ellipsen so klein, dass nun die Strombegrenzung keine Rolle mehr spielt. Das maximale Drehmoment wird im Berührungspunkt der Spannungsellipsen mit den Drehmoment-Isolinien erreicht. Dieser Bereich heißt *oberer Flussschwächbereich*. Das erreichbare Drehmoment reduziert sich hier mit  $1/\omega_s^2$ , die maximale Leistung mit  $1/\omega_s$ .



**Fig. 8-25:** Ungefäher Verlauf des maximalen Drehmoment und der maximalen Leistung beim Betrieb an Strom- und Spannungsgrenzen

Der im Betrieb ausgenutzte Flussschwächbereich wird gern als Verhältnis der maximalen Drehzahl zur Bemessungsdrehzahl angegeben. Man spricht dann z.B. von einem Flussschwächbereich von 1:3.

Je nach Anwendungsbereich werden Spannungsstellbereich und Flussschwächbereich unterschiedlich ausgelegt: Wächst das Last-Drehmoment mit der Drehzahl, wie es beispielsweise für Pumpen und Lüfter charakteristisch ist, ist ein Betrieb im Flussschwächbereich nicht sinnvoll, da sich in diesem Bereich das Drehmoment des Antriebs reduzieren würde. Derartige Antriebe arbeiten weitgehend vollständig nur im Spannungsstellbereich.

Bei vielen Antrieben gilt es, die installierte Leistung des Antriebs über einen größeren Drehzahlbereich gleichmäßig zu nutzen. Dies ist typischerweise bei Traktionsantrieben (Bahnen, Straßenfahrzeuge) der Fall. Derartige Antriebe werden für einen großen unteren Flussschwäcbereich von beispielsweise 1:3 bis 1:5 ausgelegt.

Der obere Flussschwäcbereich wird bei typischen Anwendungen nicht oder allenfalls marginal genutzt. Der Grund liegt in der mit der Drehzahl abfallenden Leistung, für die es kaum eine passende Antriebsaufgabe mit passender Lastcharakteristik gibt.





## 9 Gegenüberstellung der Darstellungen mit zweidimensionalen Vektoren und mit komplexen Zeigern

	vektorielle Schreibweise	komplexe Schreibweise
	$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\underline{x} = x_1 + jx_2$
Transformation zwischen zwei Bezugssystemen $A$ und $B$	$\mathbf{x}^B = \mathbf{Q}(-\varphi_{BA})\mathbf{x}^A$ mit $\mathbf{Q}(\varphi_{BA}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{BA} & -\sin \varphi_{BA} \\ \sin \varphi_{BA} & \cos \varphi_{BA} \end{bmatrix}$	$\underline{x}^B = e^{-j\varphi_{BA}} \underline{x}^A$
Transformation der Zeitableitung	$\dot{\mathbf{x}}^B = -\dot{\varphi}_{BA}\mathbf{J}\mathbf{x}^B + \mathbf{Q}(\varphi_{BA})\dot{\mathbf{x}}^A$	$\underline{\dot{x}}^B = -j\dot{\varphi}_{BA}\underline{x}^B + e^{-j\varphi_{BA}}\underline{\dot{x}}^A$
Drehung um $90^\circ$	$\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{J}$ mit $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$j \underline{x}$
Drehstreckung	$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$	$(a_1 + ja_2) \underline{x}$
Allgemeine Abbildung	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$	keine direkte Korrespondenz
Betrag	$ \mathbf{x}  = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$	$ \underline{x}  = \sqrt{\underline{x} \underline{x}}$
inneres Produkt	$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$	$\operatorname{Re} \bar{\underline{x}} \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$
äußeres Produkt	$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$	$\operatorname{Im} \bar{\underline{x}} \underline{y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

## 10 Fourier- und Laplace-Transformation von zweidimensionalen Zeitfunktionen

Eine vektorwertige Zeitfunktion

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_\alpha(t) \\ x_\beta(t) \end{bmatrix},$$

deren Komponenten  $x_\alpha(t)$ ,  $x_\beta(t)$  reellwertige Funktionen sind, kann komponentenweise in den Fourier- oder Laplace-Bereich transformiert werden:

$$\underline{\mathbf{X}}(s) = \begin{bmatrix} \underline{X}_\alpha(s) \\ \underline{X}_\beta(s) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{X}}(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{X}_\alpha(\omega) \\ \underline{X}_\beta(\omega) \end{bmatrix}$$

mit der Laplace- bzw. der Fouriertransformation

$$\underline{X}_{\alpha,\beta}(s) = \int_0^{\infty} x_{\alpha,\beta}(t) e^{-st} dt \quad \text{bzw.} \quad \underline{X}_{\alpha,\beta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\alpha,\beta}(t) e^{-j\omega t} dt$$

und den zugehörigen Rücktransformationen

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \underline{X}_{\alpha,\beta}(s) e^{st} ds \quad \text{bzw.} \quad x_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}_{\alpha,\beta}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Statt einer komponentenweisen Transformation kann man die beiden reellwertigen Zeitfunktionen  $x_\alpha(t)$ ,  $x_\beta(t)$  zu einer *komplexwertigen Zeitfunktion*

$$\underline{x}(t) = x_\alpha(t) + jx_\beta(t)$$

zusammenfassen und diese komplexwertige Funktion der Laplace- oder der Fouriertransformation unterwerfen:

$$\underline{\mathbf{X}}(s) = \int_0^{\infty} \underline{x}(t) e^{-st} dt \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{X}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}(t) e^{-j\omega t} d\omega$$

Offensichtlich gilt

$$\underline{\mathbf{X}}(s) = \underline{X}_\alpha(s) + j\underline{X}_\beta(s)$$

Diese Bildfunktion  $\underline{\mathbf{X}}(s)$  ist ebenfalls komplexwertig (wie die der reellwertigen Zeitfunktionen), aber sie ist nicht zu sich selbst konjugiert komplex, wie man es bei Bildfunktionen reellwertiger Zeitfunktionen gewohnt ist. Im Allgemeinen gilt also *nicht*

$$\underline{\bar{X}}(s) = \underline{X}(\bar{s}) \quad \text{bzw.} \quad \underline{\bar{X}}(\omega) = \underline{X}(-\omega)$$

Insbesondere reicht es bei der Fourier-Transformierten nicht wie sonst üblich aus, sich nur die positiven Frequenzen anzusehen, sondern es muss das Frequenzspektrum über allen positiven und negativen Frequenzen betrachtet werden.

Die Rücktransformationen sind über

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \underline{X}(s) e^{st} ds \quad \text{bzw.} \quad \underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

eindeutig definiert und über

$$x_\alpha(t) = \operatorname{Re} \underline{x}(t)$$

$$x_\beta(t) = \operatorname{Im} \underline{x}(t)$$

können die ursprünglichen Komponenten wieder gewonnen werden.

Es gelten die üblichen Rechenregeln der Laplace- und Fourier-Transformation in gleicher Form auch für die Transformation komplexwertiger Zeitfunktionen. Die *Modulationsregel* soll jedoch genauer betrachtet werden:

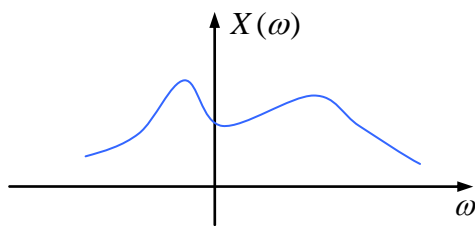
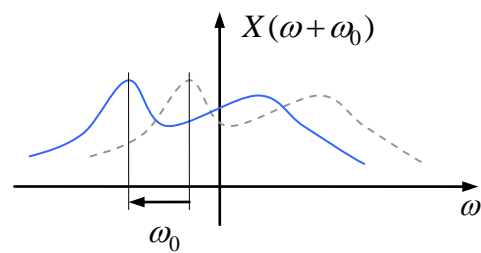
Es gilt

$$\underline{x}(t)e^{-j\omega_0 t} \mapsto \underline{X}(s + j\omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \underline{x}(t)e^{-j\omega_0 t} \mapsto \underline{X}(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}(t)e^{-j\omega_0 t} &= x_\alpha(t) \cos \omega_0 t + x_\beta(t) \sin \omega_0 t + j(-x_\alpha(t) \sin \omega_0 t + x_\beta(t) \cos \omega_0 t) \\ &= x_d(t) + jx_q(t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \underline{Q}(-\omega_0 t) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}, \quad \underline{Q}(-\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

Spektrum in statorfesten  $\alpha/\beta$ -KoordinatenSpektrum in mitdrehenden  $d/q$ -Koordinaten

Das Spektrum wird bei einer Transformation in ein mit  $\omega_0$  rotierendes Bezugssystem folglich genau um  $\omega_0$  verschoben. Insbesondere erscheint ein Frequenzanteil an der Stelle  $\omega = \omega_0$  im Spektrum der ständerfesten Größen im Spektrum im mitdrehenden Bezugssystem nun an der Stelle  $\omega = 0$ , also als Gleichgröße.

Insofern lassen sich die Frequenzen im Spektrum nicht nur als *Schwingungen* mit positiven oder negativen Frequenzen deuten, sondern ein Anteil mit einer positiven Frequenz entspricht einem im mathematisch positiven Sinne *rotierenden Vektor* oder *Zeiger*, eine negative Frequenz einem im Gegensinn rotierenden Vektor.

Bezieht man sich auf eine Frequenz  $\omega_0$ , so nennt man den Frequenzanteil an der Stelle  $\omega = +\omega_0$  den *mitdrehenden* (engl. *positive sequence*), denjenigen bei  $\omega = -\omega_0$  den *gegendrehenden* Anteil (*negative sequence*).

## 11 Deutsch-englisches Glossar

Abtastung	sampling
Admittanz	admittance
Anker	armature
Ankerrückwirkung	armature reaction
Anlaufdrehmoment	stall torque
Anschluss	terminal
Antrieb	drive
Arbeit	work
Asynchronmotor	induction motor, asynchronous motor
Bandbreite	bandwidth
Blindleistung	reactive power
Bodediagramm	Bode plot
Drehmoment	torque
Drehstrommotor	three-phase motor
Drehung	rotation
Drehzahl	rotational speed, speed
Dreieckschaltung	delta connection
Drossel	inductor
Durchflutung	magnetomotive force (MMF)
Effektivwert	root mean square (RMS) value
elektrische Feldstärke	electric field strength
elektromotorische Kraft	electromotive force (EMF)
Elektrotechnik	electrical engineering
Energie	energy
Entkopplung	decoupling controller
Erregung	excitation
Feld	field
Flussschwächung	flux weakening
Formfaktor	waveform factor
fremderregt	separately excited
Frequenz	frequency
Getriebe	gear
Gleichrichter	rectifier
Gleichspannung	direct voltage, DC voltage
Gleichstrom	direct current, DC
Gleichstrommotor	DC motor
Hauptinduktivität	mutual inductance
Hochsetzsteller	boost converter
Impedanz	impedance
Induktivität	inductance
induzierte Spannung	induced voltage
Istwert	actual value
Käfigläufer	squirrel cage rotor
Kapazität	capacity

Knoten	node
Kondensator	capacitor, condensor
Kapazität	capacity
Kraft	force
Kurzschluss	short circuit
Kurzschlussstrom	short-circuit current
Ladung	charge
Last	load
Leerlaufspannung	open-circuit voltage, off-load voltage
Leistung	power
Leistungsfaktor	power factor
Leitwert	conductance, conductivity
Losbrechdrehmoment	stall torque
Magnet	magnet
magnetische Feldstärke	magnetic force
magnetische Flussdichte	magnetic flux density
magnetische Spannung, Durchflutung	magnetomotive force (MMF)
magnetischer Fluss	magnetic flux
Magnetisierungsstrom	magnetizing current
Masche	mesh
Mittelwert	mean, average value
Mittelwertmodellierung	state-space averaging
Nennwert	rated value, rating
Netzwerk	network
Ortskurve	frequency response locus
Parallelschaltung	parallel connection
Permanentmagnet-Synchronmotor	permanent magnet synchronous motor
Polpaar	pole pair
Polteilung	pole pitch
Pulsweitenmodulation	pulse width modulation (PWM)
Quelle	source
Regelfehler	control error
Regelkreis	closed-loop control
Regler	controller
Reihenschaltung	series connection
Resonanzfrequenz	resonant frequency
Rotor, Läufer	rotor
Schalter	switch
Schaltkreis	circuit
Scheinleistung	apparent power
Scheitelfaktor	crest factor
Schlupf	slip
Sehnung	fractional pitch winding
Sollwert	set point, reference value
Spannung	voltage
Spannungsquelle	voltage source
Spule	coil
Stator, Ständer	stator

---

Stellbefehl	firing command
Stellgröße	actuating variable
Sternschaltung	star connection
Streuinduktivität	leakage inductance
Strom	current
Stromquelle	current source
Stromschwankung	current ripple
Tiefsetzsteller	buck converter
Totzeit	dead time
Transformator	transformer
Übertragungsfunktion	transfer function
Vektormodulation	vector modulatoin
Verlustleistung	losses
Vorsteuerung	feedforward control
Wechselrichter	inverter
Wechselspannung	alternating voltage, AC voltage
Wechselsperzeit	interlocking time
Wechselstrom	alternating current, AC
Welle	shaft
Wicklung	winding
Wicklungsfaktor	winding factor
Widerstand	resistance, resistor
Windung	turn
Winkelgeschwindigkeit	angular velocity
Wirkleistung	active power
Wirkungsgrad	efficiency
Zeitkonstante	time constant



## 12 Literatur

Dierk Schröder  
Elektrische Antriebe – Grundlagen  
Springer Verlag, 3. Aufl., 2007

*Ein sehr umfangreiches reichhaltiges Buch (mehr als 700 Seiten), welches verschiedenste Systeme elektrischer Antriebe anspricht. Sehr gute Darstellung, sehr zu empfehlen.*

John Chiasson  
*Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*  
Wiley, 2005

*Ein sehr umfangreiches, reichhaltiges Buch, welches, wie der Titel verspricht, sich ausgiebig mit der Modellierung und der Regelung elektrischer Maschinen auseinandersetzt*

Werner Leonhard  
*Control of Electrical Drives*  
Springer, 3rd edition, 2001

*Hier werden die Grundprinzipien der flussorientierten Regelung für Antriebe mit Synchron- und Asynchronmotoren dargestellt*

Duane Hanselman  
*Brushless Permanent Magnet Motor Design*  
The Writers' Collective, 2nd edition, 2003

*Ein interessantes Buch, welches sich ausgiebig mit Wicklungsschemata und den daraus resultierenden Motoreigenschaften beschäftigt, was in anderen Büchern kaum zu finden ist.*

Rudolf Richter  
Elektrische Maschinen I  
Birkhäuser Verlag, 3. Auflage, 1967

*Ein klassisches Buch über elektromaschinenbauliche Aspekte und das Betriebsverhalten, welches zahlreiche Details liefert, die in modernen Darstellungen kaum noch zu finden sind.*

Gerhard Müller, Bernd Ponick  
Grundlagen elektrischer Maschinen  
Wiley-VHC, 9. Auflage, 2006

Gerhard Müller, Bernd Ponick  
Theorie elektrischer Maschinen  
Wiley-VHC, 4. Auflage

W. Nürnberg,  
Die Asynchronmaschine  
2. Auflage, Springer, 1962