

# **Berechnung optimaler Stromprofile für einen 6-phasigen geschalteten Reluktanzantrieb**

***Dipl.-Math. Kathrin Flaßkamp, Jun.-Prof. Dr. Sina Ober-Blöbaum,  
Dipl.-Math. Maik Ringkamp***

*Universität Paderborn*

*Simulation und Optimalsteuerung dynamischer Systeme*

*Warburger Straße 100, 33098 Paderborn*

*Tel. 05251/60 2642, Fax. 05251/60 4216*

*E-Mail: [kathrin.flasskamp@math.uni-paderborn.de](mailto:kathrin.flasskamp@math.uni-paderborn.de)*

***Dipl.-Ing. Tobias Schneider, Dipl.-Ing. Christoph Schulte,  
Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker***

*Universität Paderborn*

*Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik*

*Warburger Straße 100, 33098 Paderborn*

*Tel. 05251/60 3653, Fax. 05251/60 3443*

*E-Mail: [schneider@lea.uni-paderborn.de](mailto:schneider@lea.uni-paderborn.de)*

## **Zusammenfassung**

In diesem Beitrag wird die Modellierung und Optimalsteuerung eines geschalteten Reluktanzantriebs vorgestellt. Die Modellierung wird anhand der Methode von Lagrange durchgeführt, die den Vorteil einer einheitlichen Behandlung des mechanischen und des elektromagnetischen Teilsystems aufweist. Das Optimalsteuerungsproblem basiert auf dem Ziel, verlustoptimale Stromprofile zu bestimmen, die bei vorgegebenem Drehmoment den Bewegungsgleichungen sowie weiteren Nebenbedingungen genügen. Die berechneten Stromtrajektorien werden in ein Regelungskonzept integriert, welches abschließend am realen Antrieb verifiziert wird.

## **Schlüsselwörter**

Geschalteter Reluktanzmotor, Optimalsteuerung, Lagrange-Methode, Traktionsantrieb

## 1 Einführung

Umweltfreundlichen Antriebskonzepten kommt aufgrund stetig steigender Kraftstoffkosten und Umweltrichtlinien eine immer größere Bedeutung zu. Dabei wird u.a. der urbane Einsatz von Elektrofahrzeugen gefördert. Als Alternative zum straßengebundenen Individualverkehr wurden im Rahmen des Forschungsprojekts „Neue Bahntechnik Paderborn (NBP<sup>1</sup>)“ Linearmotor betriebene, autonome Bahnfahrzeuge entwickelt. In diesem Kontext bietet sich der *geschaltete Reluktanzmotor* als ein potentiell elektrisches Antriebskonzept sowohl für den Straßenverkehr [IMD02], als auch für den Schienenverkehr an [KKP+08a] [KKP+08b]. Es wurden dafür zwei Prototypen in linearer und rotatorischer Bauform gefertigt, um die Performanz und den Wirkungsgrad dieses Motortyps zu validieren.

In diesem Beitrag wird die Berechnung verlustoptimaler Stromprofile bei vorgegebenem Drehmoment für den 6-phasigen rotatorischen geschalteten Reluktanzantrieb vorgestellt. Mit Hilfe der *Methode nach Lagrange* kann der Reluktanzantrieb als verlustbehaftetes Lagrange-System modelliert werden [DK05] [MW07]. In dieser Arbeit werden jedoch darüber hinaus die resultierenden Euler-Lagrange-Gleichungen weitergehend zur Formulierung und numerischen Lösung eines *Optimalsteuerungsproblems* genutzt. Hierzu wird auf die neuartige Lösungsmethode DMOG (Discrete Mechanics and Optimal Control, [OJM10]) zurückgegriffen, die in den letzten Jahren für mechanische Systeme entwickelt und bereits in verschiedenen Anwendungen erfolgreich eingesetzt wurde. Die Analogie in der Modellierung mechanischer und elektrodynamischer Systeme (siehe Abschnitt 3.1 sowie [DK05]) ermöglicht es, diese Methode für mechatronische Systeme wie z. B. den Reluktanzantrieb zu adaptieren. Damit stellt das hier vorgestellte Verfahren einen innovativen Ansatz zur Modellierung und Optimalsteuerung domänenübergreifender technischer Systeme dar.

Der Beitrag ist in sechs Abschnitte gegliedert: In Abschnitt 2 wird das Wirkprinzip von Reluktanzmotoren und speziell der in dieser Arbeit verwendete Prototyp vorgestellt. Anschließend werden hierfür in Abschnitt 3 die Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet und diskretisiert. In Abschnitt 4 wird das Optimalsteuerungsproblem formuliert und der numerische Lösungsansatz vorgestellt. Die approximativen Lösungen werden in Abschnitt 5 durch Messergebnisse am realen Antrieb validiert. Abschließend wird ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten gegeben.

## 2 Reluktanzantriebe

Der betrachtete geschaltete Reluktanzmotor besteht aus 12 Statorpolen und 10 Rotorpolen (12/10 GRM). Dabei sind nur die Pole des Stators mit konzentrierten

---

<sup>1</sup><http://www.railcab.de/>

Wicklungen versehen, wobei die gegenüberliegenden Wicklungen jeweils parallel geschaltet sind. Daraus ergeben sich 6 unabhängige Phasen, die nacheinander bestromt werden. Die ausgeprägten Pole implizieren einen winkelabhängigen magnetischen Widerstand (Reluktanz) bzw. eine winkelabhängige Induktivität, wodurch sich das Wirkprinzip dieses Motortyps begründet [Kri01].

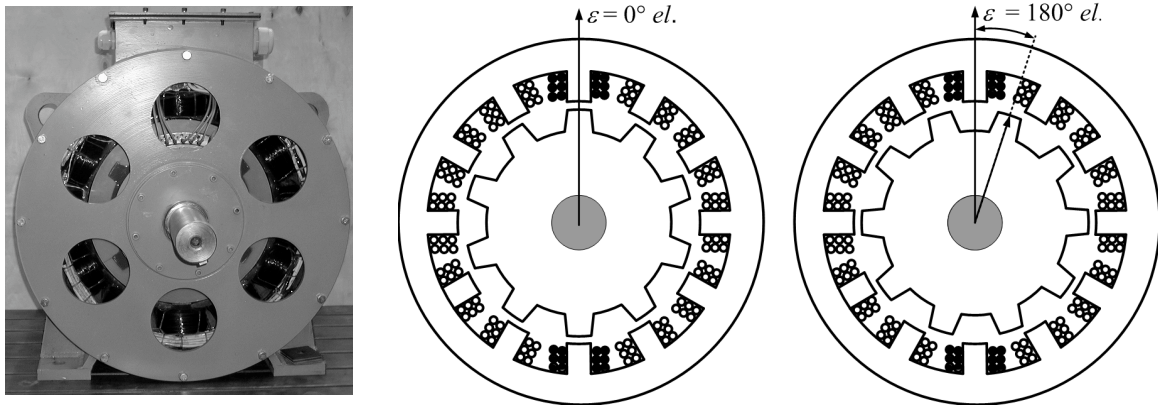


Bild 1: *Realer Antrieb (links) und Prinzipskizzen des 12/10 GRM in einer ausgerichteten Position (Mitte) und in einer unausgerichteten Position (rechts), bezogen auf die schwarz markierte Phase*

In der unausgerichteten Position der in Bild 1 (rechts) schwarz markierten Phase ( $\varepsilon = 180^\circ \text{ el.}$ ) wird ein Strom in die Wicklungen eingeprägt. In dieser Position ist der magnetische Widerstand für diese Phase durch den großen Luftspalt maximal. Das Motorprinzip beruht auf der Minimierung des magnetischen Widerstands, sodass eine Drehbewegung des Rotors in die ausgerichtete Position bewirkt wird (Bild 1, Mitte), in der die Reluktanz durch den kleinen Luftspalt minimal ist. Die Induktivität verhält sich reziprok zum magnetischen Widerstand, sodass sie in der ausgerichteten Position ( $\varepsilon = 0^\circ \text{ el.}$ ) maximal wird. Aus elektrischer Sicht wiederholt sich dieser Vorgang mit jedem Rotorpol (10 Mal pro mechanischer Umdrehung).

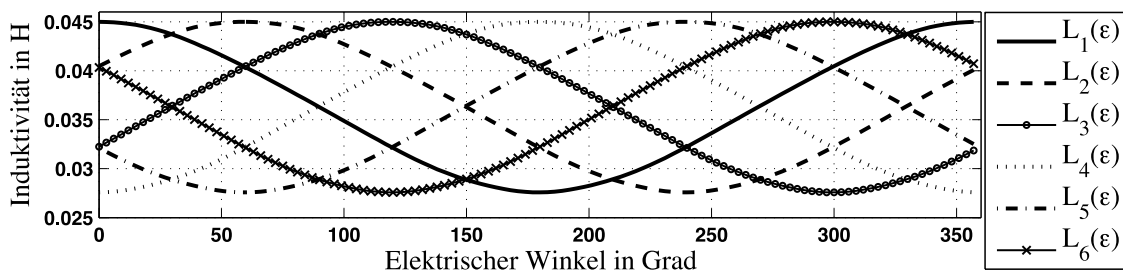


Bild 2: *Verlauf der Induktivitäten der sechs Phasen über dem Winkel*

Demnach entspricht eine elektrische Periode ( $360^\circ$  elektrisch) einer mechanischen Winkeldrehung von  $36^\circ$ . Die Induktivitätsverläufe der sechs Statorphasen sind elektrisch um  $60^\circ$  zu einander versetzt (Bild 2).

### 3 Lagrange-Methode

Es soll nun das dynamische Verhalten des Reluktanzantriebs modelliert werden. Die Modellierung mittels der Formulierung nach Lagrange erweist sich dabei als vorteilhaft, da hierbei sowohl mechanische als auch elektrische Komponenten einheitlich über ihr Energieverhalten beschrieben werden können [DK05]. Die Methode geht auf ein Variationsprinzip, das sogenannte Lagrange-d'Alembert-Prinzip zurück. In seiner diskreten Version kann dieses genutzt werden, um die diskreten Bewegungsgleichungen herzuleiten [MW01], die für die numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems benötigt werden [OJM10].

#### 3.1 Euler-Lagrange-Differentialgleichungen

Das Hamilton-Prinzip der Lagrange-Mechanik besagt, dass die Naturgesetze auf ein System so agieren, dass ein bestimmtes Funktional, das sogenannte Wirkungsintegral extremiert wird. Im Lagrange-d'Alembert-Prinzip wird erweiternd der Einfluss von äußeren Kräften auf das System berücksichtigt. Die stationären Lösungen dieses Variationsproblems entsprechen den Lösungen der Euler-Lagrange-Differentialgleichungen  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \dot{x}) - f(x, \dot{x}, u) = 0$  mit den generalisierten Koordinaten  $x$  und Geschwindigkeiten  $\dot{x}$ , der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(x, \dot{x})$  und einem allgemeinen Kraft-Term  $f(x, \dot{x}, u)$ , in dem sowohl dissipative Einflüsse als auch äußere Steuerungskräfte berücksichtigt werden (siehe z. B. [OJM10]).

Die Lagrange-Funktion des Reluktanzmotors ist durch die magnetische Energie<sup>2</sup> der Spulen und die kinetische Energie des Motors gegeben:  $\mathcal{L}(q, i, \epsilon, \omega) = \frac{1}{2} \cdot (\sum_{k=1}^6 L_k(\epsilon(t)) \cdot i_k^2(t) + \theta \cdot \omega^2(t))$ . Es bezeichnen  $q(t) = (q_1, \dots, q_6)$  die Ladungen der Spulen und  $i(t) = (i_1, \dots, i_6)$  die Ströme als zeitliche Ableitung der Ladungen.  $\epsilon(t)$  ist der mechanische Winkel,  $\omega(t) = \dot{\epsilon}(t)$  die Rotationsgeschwindigkeit und  $\theta$  das Massenträgheitsmoment des Motors. Die generalisierten Koordinaten sind somit  $x = (q, \epsilon)$  mit den Geschwindigkeiten  $\dot{x} = (i, \omega)$ .  $L_{1, \dots, 6}(\epsilon(t))$  bezeichnet die von  $\epsilon$  abhängigen Induktivitäten (vgl. Bild 2). Desweiteren sind für jede Spule die Verlustleistung durch den ohmschen Widerstand  $R$  als dissipativer Term und die Speisespannung  $u_k(t)$  als Steuerungsgröße zu berücksichtigen:  $f_k(q_k, i_k, u_k) = -R \cdot i_k(t) + u_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, 6$ . Auf das mechanische Teilsystem wirkt ein Lastdrehmoment  $M_L(t)$ . Es sei bemerkt, dass die Lagrange-Funktion und die verallgemeinerte Kraft nicht explizit von den Ladungen  $q(t)$  abhängig sind. Diese werden jedoch aufgeführt zum einen, um die Analogie zu mechanischen Lagrange-Systemen deutlich zu machen und zum anderen, weil sie später für die Diskretisierung maßgeblich sind. Es wird idealisiert angenommen, dass es keine

<sup>2</sup> In der Lagrange-Funktion ist die magnetische Ergänzungsenergie einzusetzen. Da der Motor durch den großen Luftspalt ausschließlich im linearen Bereich betrieben wird (vgl. [SSM+10]), entspricht die innere gespeicherte magnetische Energie in einer guten Näherung der Ergänzungsenergie.



Kopplungen zwischen den Spulen gibt. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten nun unter Berücksichtigung der winkelabhängigen Induktivitäten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_k} (q, i, \epsilon, \omega) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} (q, i, \epsilon, \omega) - f_k(q_k, i_k, u_k) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} i_k(t) = \frac{1}{L_k(\epsilon(t))} \cdot \left( -\frac{\partial L_k(\epsilon(t))}{\partial \epsilon} \cdot \dot{\epsilon}(t) \cdot i_k(t) - R \cdot i_k(t) + u_k(t) \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\epsilon}} (q, i, \epsilon, \omega) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} (q, i, \epsilon, \omega) = -M_L(t)$$

$$\Leftrightarrow \theta \cdot \ddot{\epsilon} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial L_k(\epsilon(t))}{\partial \epsilon} \cdot i_k^2(t) - M_L(t). \quad (3.2)$$

Gleichung (3.1) beschreibt sechs entkoppelte Differentialgleichungen für die Ströme  $i_1, \dots, i_6$ , Gleichung (3.2) die Drehimpulsbilanz mit der Drehimpulsänderung  $\theta \cdot \ddot{\epsilon}$ , dem Luftspaltdrehmoment  $M_\delta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial L_k(\epsilon(t))}{\partial \epsilon} \cdot i_k^2(t)$  und dem Lastdrehmoment  $M_L$ . Bild 3 zeigt die vermessene Induktivitätsänderung über den Winkel,  $\frac{\partial L_k(\epsilon(t))}{\partial \epsilon}$ , die zur Berechnung des Luftspaltdrehmoments benötigt wird. Diese beeinflusst dabei sowohl den Betrag als auch das Vorzeichen der Summanden von  $M_\delta$ . Die Generierung eines positiven Drehmoments setzt demnach die Bestromung einer Phase in einem Winkelbereich voraus, in der die Induktivität zunimmt. Da dies in einem elektrischen Winkelbereich von  $180^\circ$  der Fall ist, können positionsabhängig bis zu drei Phasen zu einem positiven Luftspaltdrehmoment beitragen.

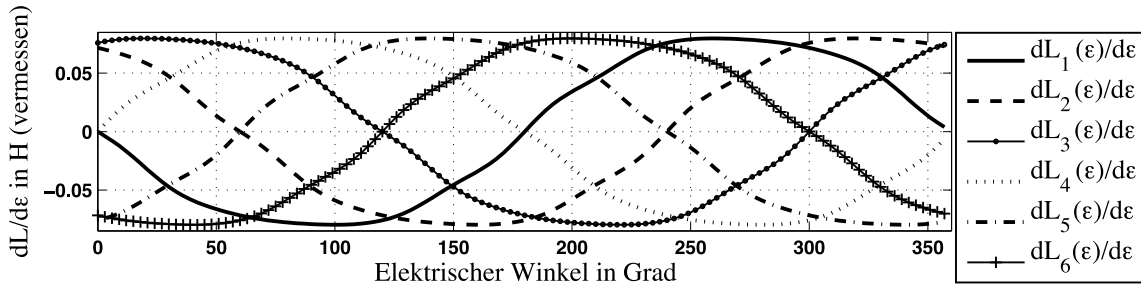


Bild 3: Verlauf der Induktivitätsänderung über dem Winkel für alle sechs Phasen

Die betrachteten Optimalsteuerungsszenarien in diesem Beitrag (vgl. Abschnitt 5) werden sich auf quasistationäre Zustände, d.h. auf konstante Rotationsgeschwindigkeiten ( $\dot{\epsilon} = \omega = \text{const.}$ ) beschränken, wodurch sich die Differentialgleichung (3.2) zur Nebenbedingung  $M_L(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial L_k(\epsilon(t))}{\partial \epsilon} \cdot i_k^2(t)$  reduziert (siehe auch Gl. (4.3)). Im Folgenden nehmen wir  $\epsilon(t)$  als eine in der Zeit lineare, vorgegebene Funktion an und betrachten ausschließlich den elektrischen Teil der Lagrange-Funktion, der nun nur noch von den Ladungen, Strömen, aber nun zusätzlich explizit von der Zeit abhängig ist:  $\mathcal{L}(q, i, t) = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=1}^6 L_k(\epsilon(t)) \cdot i_k^2(t) \right)$ .

### 3.2 Diskretisierung

Für den Lösungsansatz des Optimalsteuerungsproblems (Abschnitt 4) werden zeitdiskretisierte Bewegungsgleichungen benötigt, die im Folgenden hergeleitet werden. Im ersten Schritt wird dazu ein diskretes Zeitgitter  $\Delta T = \{t^0, t^1, \dots, t^N\}$  eingeführt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass dieses äquidistant mit Schrittweite  $h$  sei. Dadurch wird eine zuvor kontinuierliche Zustands- oder Steuerungstrajektorie  $q(t)$  bzw.  $u(t)$  durch eine diskrete Trajektorie  $q_d = \{q^0, q^1, \dots, q^N\}$ , bzw.  $u_d$  approximiert, wobei  $q^n = q_d(t^n) \approx q(t^n)$  gilt. Die Ströme als zeitliche Ableitungen der Ladungen werden durch den Differenzenquotienten von zwei benachbarten Knoten der diskreten Trajektorie  $q_d$  angenähert. Darauf basierend definieren wir für jeden Zeitschritt die diskrete Lagrange-Funktion als eine Approximation des Wirkungsintegrals:

$$\mathcal{L}_d(q^n, t^n, q^{n+1}, t^{n+1}) = h \cdot \mathcal{L}\left(\frac{q^{n+1}+q^n}{2}, \frac{q^{n+1}-q^n}{h}, \frac{t^{n+1}+t^n}{2}\right) \approx \int_{n \cdot h}^{(n+1) \cdot h} \mathcal{L}(q, i, t) dt, \quad \text{für } n = 0, \dots, N-1.$$

Die verallgemeinerten Kräfte an jedem Zeitknoten  $n$  werden durch sogenannte links- und rechtsseitige Kräfte,  $f^{n-1,+}$  bzw.  $f^{n,-}$ , approximiert. Für eine detaillierte Beschreibung des diskreten Lagrange-d'Alembert-Prinzips verweisen wir auf [MW01] und [OJM10]. Die diskreten Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich für die Spulen  $k = 1, \dots, 6$  und die Knoten  $n = 1, \dots, N-1$  zu

$$\begin{aligned} D_3 \mathcal{L}_d(q^{n-1}, t^{n-1}, q^n, t^n) + D_1 \mathcal{L}_d(q^n, t^n, q^{n+1}, t^{n+1}) + f^{n-1,+} + f^{n,-} &= 0 \\ \Leftrightarrow L_k \left( \epsilon \left( \frac{t^n + t^{n-1}}{2} \right) \right) \cdot \frac{q_k^n - q_k^{n-1}}{h} - L_k \left( \epsilon \left( \frac{t^{n+1} + t^n}{2} \right) \right) \cdot \frac{q_k^{n+1} - q_k^n}{h} + \frac{1}{2} \cdot (-R \cdot (q_k^{n+1} - q_k^{n-1})) \\ + h \cdot (u_k^{n-1} + u_k^n) &= 0, \quad \text{für } k = 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei  $D_{1,3}$  die Ableitung nach der ersten, bzw. dritten Variablen bezeichnet.

## 4 Optimalsteuerungsproblem

Im Folgenden wird für das Modell des Reluktanzantriebs die Formulierung des Optimalsteuerungsproblems sowie das Lösungsverfahren vorgestellt. Der numerische Lösungsansatz basiert auf einer direkten Diskretisierung des Problems, wodurch eine Umformulierung in ein restringiertes Optimierungsproblem möglich wird.

### 4.1 Problemformulierung

Die gesuchten Stromprofile sollen die Verlustleistung in den Kupferspulen aller sechs Phasen minimieren. Das Zielfunktional des Optimalsteuerungsproblems lautet daher  $J(i(t)) = \int_0^T \sum_{k=1}^6 R \cdot i_k^2(t) dt$  und ist damit unabhängig von den Steuerspannungen. Es bezeichne  $T$  den Endzeitpunkt nach einer zehntel Motorumdrehung von  $36^\circ$ , d.h. einer vollen elektrischen Periode (vgl. Abschnitt 2). Bei der Minimierung des

Zielfunktionalen müssen mehrere Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Zum einen haben die Strom- und Spannungstrajektorien die in Abschnitt 3 aufgestellten Euler-Lagrange-Gleichungen zu erfüllen. Eine weitere Nebenbedingung ist dadurch gegeben, dass der Antrieb zu jedem Zeitpunkt ein vorgegebenes, konstantes Luftspaltdrehmoment  $M_\delta = M_L = \text{const.}$  stellen soll (vgl. Gl. (4.3)). Desweiteren unterliegen die Speisespannungen sogenannten Boxbeschränkungen, gegeben durch eine maximale Spannung  $u_{max}$ . Ebenso sind die Phasenströme durch thermische Randbedingungen begrenzt (siehe Gl. (4.4)) und auf Grund der Periodizität des Systems müssen Anfangs- und Endwert (zum Zeitpunkt  $T$ ) identisch sein (Gl. (4.5)). Insgesamt ergibt sich mit  $\dot{q}(t) = i(t)$  das folgende Optimalsteuerungsproblem:

$$\min_{q(t), i(t), u(t)} \int_0^T \sum_{k=1}^6 R \cdot i_k^2(t) dt \quad (4.1)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_k}(q, i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}(q, i) - f(q_k, i_k, u_k) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, 6 \quad (4.2)$$

$$M_L = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial L_k(\epsilon(t))}{\partial \epsilon} \cdot i_k^2(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.3)$$

$$|u_k(t)| \leq u_{max} \quad \text{und} \quad 0 \leq i_k(t) \leq i_{max} \quad \forall t \in [0, T], \quad k = 1, \dots, 6, \quad (4.4)$$

$$i_k(0) = i_k(T) \quad \text{für } k = 1, \dots, 6. \quad (4.5)$$

## 4.2 Lösungsansatz mittels direkter Diskretisierung

Zur numerischen Lösung von Optimalsteuerungsproblemen wurden in den letzten Jahren zahlreiche Ansätze entwickelt, die sich in indirekte und direkte Verfahren unterteilen lassen (für eine ausführliche Gegenüberstellung sei auf [BBB+01] oder [OJM10] verwiesen). In dieser Arbeit wird ein direkter Ansatz verfolgt, d. h. sowohl die Euler-Lagrange-Differentialgleichungen als auch das Zielfunktional und alle weiteren Nebenbedingungen werden diskretisiert und das infinite Optimalsteuerungsproblem damit in ein restringiertes, endlich dimensionales, nichtlineares Optimierungsproblem überführt.

Ausgehend von dem im Abschnitt 3.2 eingeführten, äquidistanten Zeitgitter  $\Delta T = \{t^0 = 0, t^1, \dots, t^N = T\}$  ergibt sich das diskretisierte Zielfunktional durch eine Summenapproximation des Integrals, wobei die Ströme wiederum durch die Differenzenquotienten der Ladungen angenähert werden:

$J_d(q_d) = h \cdot \sum_{k=1}^6 \sum_{n=0}^{N-1} R \cdot \left( \frac{q_k^{n+1} - q_k^n}{h} \right)^2$ . Die Nebenbedingungen (4.3) bis (4.5) werden ebenfalls diskretisiert. Zusammen mit den diskretisierten Euler-Lagrange-Gleichungen (Gl.(3.3)) ergibt sich dann ein hochdimensionales, nichtlineares Optimierungsproblem.

### 4.3 Implementierung

Zur Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems können Standard-Algorithmen wie NAG<sup>3</sup> oder Ipopt<sup>4</sup> eingesetzt werden. Diese verwenden typischerweise Ableitungen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen. Anstatt diese numerisch zu approximieren, können zur effizienteren Berechnung die Ableitungen mittels ADOL-C, einer Software zur algorithmischen Differentiation [GW08], bestimmt werden. Für die Berechnung der optimalen Stromprofile für den Reluktanzmotor wurde ADOL-C in die Optimierung mit NAG und Ipopt integriert.

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Motors (vgl. Abschnitt 2) und der Periodizität der Induktivitäten und Ströme ( $i_k(0) = i_k(T)$ ) kann das Optimalsteuerungsproblem und damit der Rechenaufwand reduziert werden. Für den Fall, dass keine Boxbeschränkungen an die Ströme und Spannungen vorliegen, folgt aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen (siehe dazu z. B. [BBB+01]) der Zusammenhang  $i_k(t + \Delta) = i_{k+1}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , und  $i_6(t + \Delta) = i_1(t)$ . Das heißt, alle sechs Stromprofile sind identisch bis auf eine Phasenverschiebung von  $\Delta = \frac{T}{6}$ , welche einem Winkel von  $60^\circ$  elektrisch bzw.  $6^\circ$  mechanisch entspricht. Es genügt somit, das Optimalsteuerungsproblem auf dem Zeitintervall  $[0, \frac{T}{6}]$  zu lösen und für die Stromrandwerte  $i_{k+1}(0) = i_k(\Delta)$ ,  $k = 1, \dots, 5$  und  $i_1(0) = i_6(\Delta)$  zu fordern. Es ist anzunehmen, dass sich auch bei Berücksichtigung der Boxbeschränkungen zeigen lässt, dass die optimalen Stromtrajektorien diese Periodizität besitzen müssen, wie numerische Testbeispiele zeigen.

## 5 Validierung der Stromprofile

Die berechneten optimalen Stromprofile (Abschnitt 4) sind für verschiedene Drehzahlen und Soll Drehmomente in einem Simulink-Modell als Datentabelle abgelegt. Die Regelungsstruktur wird dabei durch eine unterlagerte Stromregelung mit sechs unabhängigen PI-Reglern realisiert (siehe Bild 4). Dabei werden die optimalen Stromprofile als Vorsteuerung in das Regelungskonzept integriert. Arbeitspunktabhängig werden die offline berechneten Stromprofile (Bild 5, links) mittels Rapid Prototyping Hardware der Firma dSPACE in den realen Antrieb eingeregelt (Bild 5, rechts).

Die Ergebnisse werden hinsichtlich der Drehmomentvarianz und des Antriebswirkungsgrads mit zwei weiteren realisierten Regelungskonzepten aus [Kri01] verglichen (Bild 6). Der Antriebswirkungsgrad beschreibt das Verhältnis zwischen der mechanischen Motorleistung und der gesamten zugeführten elektrischen Leistung.

<sup>3</sup> Numerical Algorithms Group (NAG): <http://www.nag.co.uk/>

<sup>4</sup> Ipopt ist eine Open Source-Software für nichtlineare Optimierung [WB06] und verwendet HSL, ein Programmpaket für hochdimensionales wissenschaftliches Rechnen (<http://www.hsl.rl.ac.uk>)

Dabei werden neben den Kupferverlusten auch die Umrichterverluste berücksichtigt. Die Varianz des Drehmoments wird als Gütewert betrachtet, inwieweit das gewünschte konstante Drehmoment erreicht wird. Das Drehmoment wird dabei mit einer Drehmomentmesswelle verifiziert, die sich zwischen dem Reluktanzmotor und einer Lastmaschine befindet [KKP+08a].

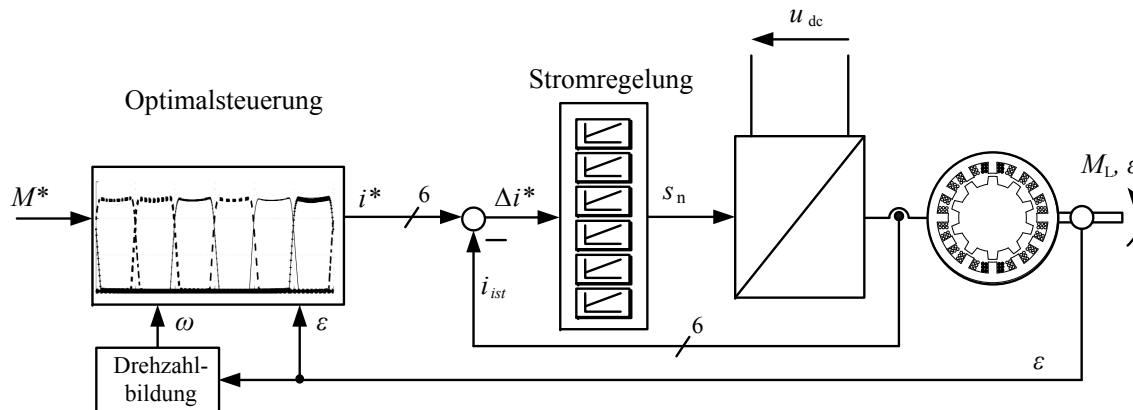


Bild 4: Realisierung des Regelungskonzepts am Prüfstand mit den optimalen Stromprofilen als Vorsteuerung

Besonders bei geringen Drehzahlen konnte der messtechnisch ermittelte Antriebswirkungsgrad der Optimalsteuerung gegenüber einer indirekten Drehmomentregelungsstrategie um bis zu 14 Prozentpunkte gesteigert werden und ist damit vergleichbar mit dem einer Strom-Zweipunktregelung (Bild 6).

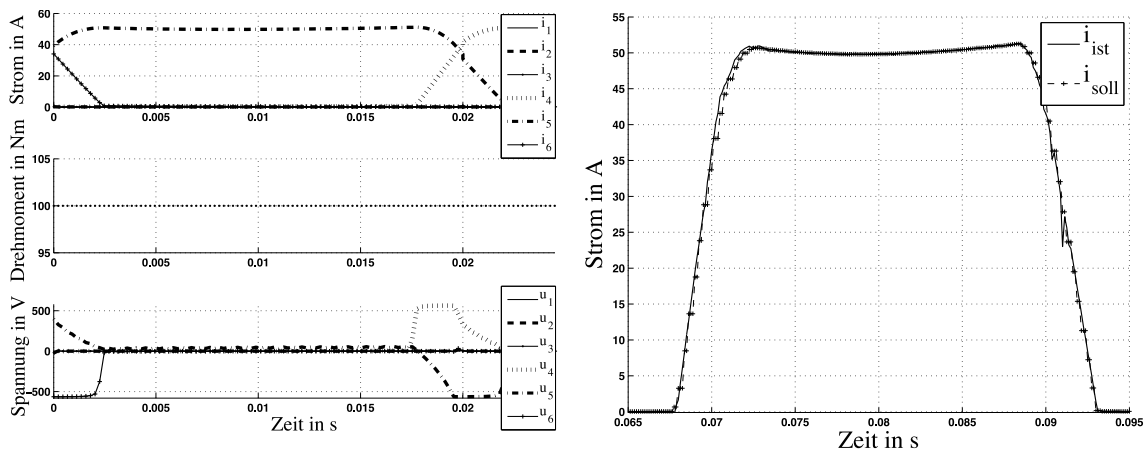


Bild 5: Optimale Strom- und Spannungstrajektorien bei einer Drehzahl von  $50 \text{ min}^{-1}$  und einem Luftspaltdrehmoment von  $100 \text{ Nm}$  (links), sowie Soll-Trajektorie  $i_{\text{soll}}$  und Ist-Strom  $i_{\text{ist}}$  einer Phase (rechts)

Dabei weist der hier exemplarisch dargestellte Arbeitspunkt der Optimalsteuerung mit einer Drehzahl von  $50 \text{ min}^{-1}$  bei einem Drehmoment von  $100 \text{ Nm}$  eine deutlich geringere Drehmomentvarianz als die Strom-Zweipunktregelung auf.

Die höhere Drehmomentvarianz der Optimalsteuerung gegenüber der indirekten Drehmomentregelung ist auf die beschränkte Dynamik der PI-Regler zurückzuführen. Diese befinden sich bei den vergleichsweise großen Stromänderungsraten an den Steuerungsgrößenbeschränkungen und verursachen ein Überschwingen in der Aufkommutierungsphase (Bild 5, rechts). Da der Strom quadratisch in das Drehmoment eingeht (Gl.(4.3)) und bei den Kommutierungsvorgängen zwei Phasenströme involviert sind, implizieren schon geringe Abweichungen vom Stromsollwert signifikante Drehmomentwelligkeiten. Es ist somit anzunehmen, dass exakt eingeregelter Stromprofile eine geringere Drehmomentvarianz verursachen würden. Die prinzipielle Anwendbarkeit dieser Regelungsstruktur konnte auch für weitere quasistationäre Arbeitspunkte im gesamten Arbeitsbereich mit ähnlich motivierenden Ergebnissen verifiziert werden.

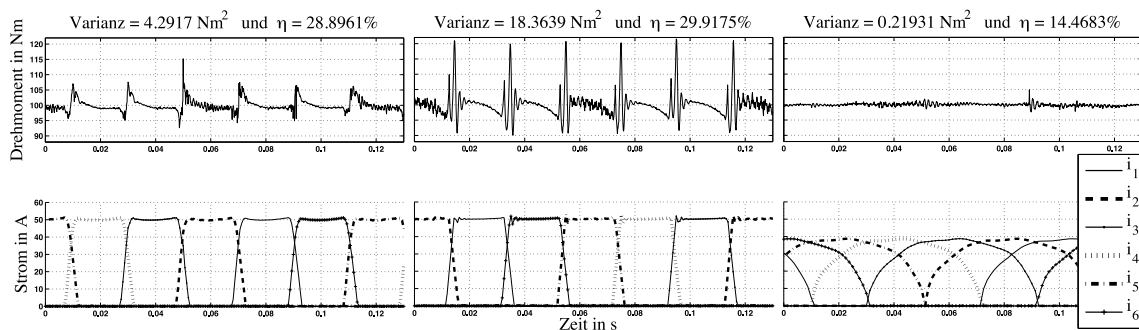


Bild 6: Drehmomentvarianz und Wirkungsgrad verschiedener Regelungskonzepte im Vergleich: Optimalsteuerung, wie in diesem Beitrag vorgestellt (links), Strom-Zweipunktregelung (Mitte), und indirekte Drehmomentregelung (rechts) [Kri01]

## 6 Resümee und Ausblick

Die hier vorgestellten Ergebnisse umfassen die Modellierung und Optimalsteuerung eines geschalteten Reluktanzmotors. Die Modellierung basiert auf der Methode von Lagrange, die eine einheitliche Behandlung sowohl des mechanischen, als auch des elektrischen Teilsystems ermöglicht. Zur Lösung des Optimalsteuerungsproblems wurde eine direkte Diskretisierungsmethode eingesetzt, welche auf der Diskretisierung der Methode nach Lagrange basiert. Das resultierende Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen wurde für verschiedene Arbeitspunkte gelöst und erfolgreich am realen Antrieb verifiziert.

Diese Ergebnisse bilden die Grundlage für den Entwurf einer selbstoptimierenden Arbeitspunktsteuerung für den Reluktanzantrieb im Rahmen der Forschungsarbeiten im SFB 614 „Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus“. Fortführend können konkurrierende Ziele wie z. B. die Reduktion der Drehmomentwelligkeit und die Maximierung des Wirkungsgrads berücksichtigt werden.

## Danksagung

Teile dieses Beitrags sind im Sonderforschungsbereich 614 „Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus“ der Universität Paderborn entstanden und wurden auf seine Veranlassung unter Verwendung der ihm von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellten Mittel veröffentlicht. Wir danken A. Seifried für die programmiertechnische Unterstützung.

## Literatur

- [BBB+01] BINDER, T.; BLANK, L.; BOCK, H. G.; BULIRSCH, R.; DAHMEN, W.; DIEHL, M.; KRONSEDER, T.; MARQUARDT, W.; SCHLÖDER, J. P.; VON STRYK, O.: Introduction to model based optimization of chemical processes on moving horizons. Grötschel, M.; Krumke, S. O.; Rambau, J.: Online Optimization of Large Scale Systems: State of the Art, Springer, Berlin, 2001, S. 295-340
- [DK05] DIEMAR, U.; KALLENBACH, E.: Die Anwendung des Lagrange-Formalismus zum Entwurf mechatronischer Systeme. Mechatronik-Tagung – Innovative Produktentwicklung, Wiesloch, Juni 2005, VDI-Bericht 1892. Teil 1, S. 295-314
- [GW08] GRIEWANK, A.; WALTHER, A.: Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation, Second Edition. SIAM, Philadelphia, 2008
- [IMD02] INDERKA, R. B.; MENNE, M.; DE DONCKER, R. W. A. A.: Control of Switched Reluctance Drives for Electric Vehicle Applications. IEEE Transaction on Industrial Electronics, Vol. 49, No. 1, 2002
- [KKP+08a] KOLOMEITSEV, L.; KRAYNOV, D.; PAKHOMIN, S.; REDNOV, F.; KALLENBACH, E.; KIREEV, V.; SCHNEIDER, T.; BÖCKER, J.: Control of a Linear Switched Reluctance Motor as a Propulsion System for Autonomous Railway Vehicles. 13th International Power Electronics and Motion Control Conference, Poznan, Poland, 2008
- [KKP+08b] KOLOMEITSEV, L.; KRAYNOV, D.; PAKHOMIN, S.; REDNOV, F.; KALLENBACH, E.; KIREEV, V.; SCHNEIDER, T.; BÖCKER, J.: Linear Switched Reluctance Motor as a High Efficiency Propulsion System for Railway Vehicles. International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, Ischia, Italy, 2008
- [Kri01] KRISHNAN, R.: Switched Reluctance Motor Drives: Modeling, Simulation, Analysis, Design and Application. Boca Raton, Fl. CRC Press, 2001
- [MW01] MARSDEN, J. E.; WEST, M.: Discrete mechanics and variational integrators. Acta Numerica, Cambridge University Press, 2001, S. 357-514
- [MW07] MOSON, I.; WILK, A.: Lagrange's energy method based approach for switched reluctance drive systems modeling. European Conference on Power Electronics and Applications, Aalborg, Denmark, 2007
- [OJM10] OBER-BLÖBAUM, S.; JUNGE, O.; MARSDEN, J. E.: Discrete mechanics and optimal control: an analysis. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, DOI: 10.1051/cocv/2010012, 2010
- [WB06] WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T.: On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming, Mathematical Programming 106(1), 2006, S. 25-57

## Autoren

**Dipl.-Math. Kathrin Flaßkamp**, Jahrgang 1984, studierte von 2003 bis 2008 Technomathematik mit Schwerpunktfach Maschinenbau an der Universität Paderborn. Seit 2008 ist sie wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik und arbeitet im Sonderforschungsbereich 614 „Selbstoptimierende Systeme des Maschinenbaus“ zum Thema Optimalsteuerung dynamischer Systeme.

**Dipl.-Ing. Tobias Schneider**, studierte von 2000 bis 2005 Elektrotechnik an der Universität Paderborn. Von 2005 bis 2011 war er wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik und beschäftigte sich im Rahmen des SFB 614 mit selbstoptimierenden elektrischen Antrieben. Seit 2011 ist Herr Schneider bei der Volkswagen AG beschäftigt.

**Dipl.-Math. Maik Ringkamp**, Jahrgang 1978, absolvierte von 1995 bis 1999 eine Ausbildung zum Energieelektroniker Fachrichtung Anlagentechnik bei Beckhoff New Automation Technology wo er anschließend bis 2001 im Bereich Anlagentechnik arbeitete. Nach Abschluss der Fachoberschule mit Schwerpunkt Elektrotechnik studierte er von 2002 bis 2010 Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Paderborn. Seit 2010 arbeitet er als wissenschaftliche Hilfskraft im Bereich „Simulation und Optimalsteuerung dynamischer Systeme“ in Paderborn.

**Dipl.-Ing. Christoph Schulte**, Jahrgang 1985, studierte von 2005 bis 2010 Elektrotechnik an der Universität Paderborn. Im Jahr 2010 wurde er mit dem LEAiD Award für herausragende Studienleistungen im Bereich der elektrischen Antriebstechnik ausgezeichnet. Seit 2010 arbeitet er als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik und beschäftigt sich im Rahmen des SFB 614 mit selbstoptimierenden elektrischen Antrieben.

**Jun.-Prof. Dr. Sina Ober-Blöbaum**, studierte von 1999 bis 2004 Technomathematik mit Schwerpunkt Maschinenbau an der Universität Paderborn. Von 2004 bis 2008 war sie wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik und promovierte im Jahr 2008. Von 2008 bis 2009 war sie Postdoktorandin am California Institute of Technology im Bereich „Control and Dynamical Systems“. Seit 2009 ist sie Juniorprofessorin für Simulation und Optimalsteuerung dynamischer Systeme in der Mathematik an der Universität Paderborn. Seit 2011 ist sie Mitglied im Jungen Kolleg der Nordrhein-Westfälischen Akademie der Wissenschaften und der Künste.

**Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker** studierte Elektrotechnik an der TU Berlin und promovierte danach am dortigen Institut für Mechanik. Von 1988 bis 2001 arbeitete er im Forschungslabor für Elektrische Antriebstechnik und Leistungselektronik der AEG AG, welches später auf die DaimlerChrysler AG überging, als Leiter der Gruppe Regelungstechnik. Von 2001 bis 2003 führte er ein eigenes Ingenieurbüro. Seit 2003 ist Herr Böcker Professor für Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik an der Universität Paderborn.